

MATEMÁTICAS

2º de ESO

VERSIÓN DE MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045270

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:10:12.0

Licencia de distribución: CC-by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es



Reconeixement – NoComercial – CompartirIgual (by-nc-sa).

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.



Reconocimiento (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.



No Comercial (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.



Compartir Igual (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0




Textos Marea Verde

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009031

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:35:24.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Adela Salvador

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

2. PRIMERAS ESTRATEGIAS

- 2.1. ESTIMA EL RESULTADO
- 2.2. EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA
- 2.3. HAZLO MÁS FÁCIL PARA EMPEZAR
- 2.4. HAZ UN DIAGRAMA, UN ESQUEMA...
- 2.5. MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS
- 2.6. ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 3.1. ¡EUREKA!
- 3.2. BLOQUEOS

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

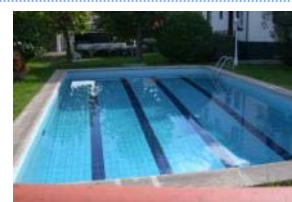
Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

1. La piscina de tu pueblo tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 25 m de largo y 15 m de ancho. El alcalde desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?



Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

Datos: Dimensiones de la piscina: 25 por 15 m. Precio del metro de valla: 12 euros.

Piden: El coste de la valla. Para saberlo debemos calcular su perímetro.

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrás que sumar? ¿Habrás que multiplicar? ¿Habrás que restar? ¿Habrás que dividir?

Para calcular el perímetro debemos sumar $25 + 25 + 15 + 15$. Para conocer el precio debemos multiplicar la longitud del perímetro por el precio de un metro de valla.

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si sumamos $25 + 25 + 15 + 15 = 80$ m tenemos el perímetro del rectángulo. Multiplicamos 12 por 80 y tenemos 960 euros que es lo que costará hacer la valla.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Comprobamos todas las operaciones. ¿Es razonable que el perímetro de la piscina sea de 80 metros? Si fuese de 100 metros nos costaría 1200 euros la valla, luego al ser menor, el precio también parece razonable.

Actividades propuestas

1. ¡Inventa problemas similares!
2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74.791 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?
3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo? Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.



2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan $75.000 - 74.791 = 209$ km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km por lo que debe empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?
5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.
6. Informan que a una manifestación han ido 500.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?
7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)
8. ¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?



2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra que debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

9. Aprende a hacer magia.
 - Piensa un número.
 - Súmale 10.
 - Dobla el resultado.
 - Réstale 6.
 - Calcula la mitad.
 - Quita el número del principio.
 - ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?



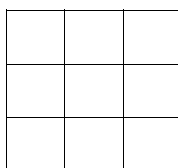
2.3. Hazlo más fácil para empezar

10. ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema. ¿Para obtener un 0 has multiplicado un 2 por un 5?

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con los mil primeros números enteros empieza sólo con 10. A continuación con 20, luego 100... Manipula los objetos. Piensa, que hay más ¿múltiplos de 2 o múltiplos de 5?

11. Cuadrado Mágico



Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de $1 + 2 + \dots + 9 = \dots$? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: ...?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema.

Un cuadrado más difícil: Distribuye los números {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} de forma que los **productos** de sus filas, columnas y diagonales de siempre el mismo valor. Una ayuda: Pon en el centro el 6.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

12. "El depósito": De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1.200 litros de agua ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

13. Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?

14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2:

$$4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2$$

Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.

16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?

17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona les invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?

2.6. Escoge una buena notación

En los problemas de matemáticas es muy importante escoger una buena notación. Decidir, por ejemplo, que llamamos x a lo que no conocemos, en los problemas de ecuaciones.

Actividades propuestas

18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x . Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 11.

Paso 2: Busca una buena estrategia. Escogemos una buena notación

Llamamos x a número que buscamos: $x + (x + 1) = 11$.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Jugamos con los números y observamos que $5 + 6 = 11$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, el siguiente a 5 es 6, y $5 + 6 = 11$.

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka!** pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tu mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continua trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka! Tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de **¡Ajá!**

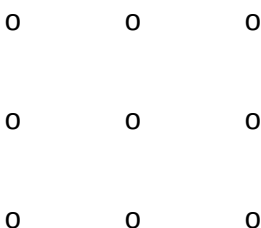
En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamaremos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problema, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.



Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

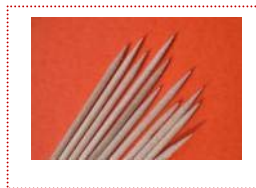
Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

20. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.



4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases:

1. Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado.
2. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora.
3. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena.
4. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.

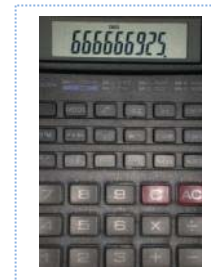


Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

21. Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas...). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?

22. Otro juego: Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.



3	6	5	7	10	7	2	7
+	-	x	/	+	-	+	-
/	=	+	=	x	=	x	=
33		147		123		95	

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

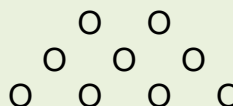
CURIOSIDADES. REVISTA**Un enigma**

Cuatro paredes, sin puertas
 Con seis filos las harás
 Y ten además en cuenta
 Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores
 De cada fila, por turno, se pueden tomar
 una, dos o toda la fila. Pierde quien debe
 tomar la última ficha.

**El oso**

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:

– Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al este, y por último 2 km al norte. Me encontré en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De qué color era el oso?

Amigo 1: – Naturalmente, era blanco.

Amigo 2: – ¡Falso! ¡Ahí no hay osos!

Analiza dónde estaba el cazador.



Solución: El primer amigo opina que el cazador estaba en el Polo Norte. El segundo amigo que estaba en un punto de un meridiano del hemisferio sur, tal que al andar 2 km llegara a otro meridiano de circunferencia 2 km. Pero hay más. Muchas más soluciones posibles. Búscalas

El número de filas y de fichas, (monedas, bolitas de papel, palillos...) puede modificarse. Es importante buscar la estrategia ganadora.

Solución: El tetraedro

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	➤ Estima el resultado. ➤ Experimenta, juega con el problema. ➤ Hazlo más fácil para empezar. ➤ Haz un diagrama, un esquema... ➤ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➤ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **"El hotel de los líos":** Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen?

2. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?



3. **La invitación:** Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Para empezar hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas.

4. **"Los cachorros":** Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad que le queda más medio, y a su primo la mitad que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?



Ayuda: Haz un esquema

5. Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?
6. Un amigo dice a otro:
- El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?
 - No, me falta un dato.
 - Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.

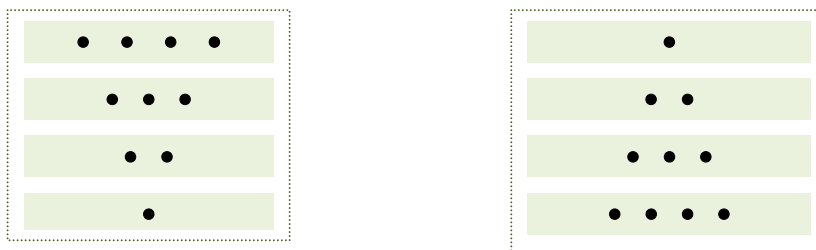
¿Qué edad tienen las hijas?

7. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.
8. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.
9. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.
10. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5,2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m², ¿cuánto costará pintarla?



11. Monedas Ordenadas

Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:



12. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifiquenla" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosas, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?
13. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lil Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de multiplicación:
- $$\begin{array}{r} \text{INES} \\ \times \text{LIL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$
- ¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una multiplicación correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, y también que la solución es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).
14. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m³ de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, “*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*” y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por **George Polya** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, es el “arte de resolver problemas” y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: “*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*”.

Polya considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la

atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba “enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir”. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz**, encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado: En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Decía Giner de los Ríos: El maestro es quien exige del discípulo que piense y reflexione por sí, y en la medida de sus fuerzas, que investigue, cuestione, intente, dude, despliegue las alas de su espíritu. O Cossio: Dad la ocasión al estudiante de pensar por él mismo y ser el creador de su propia instrucción.

Para saber más entra en: <http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91>

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009651

Fecha y hora de registro: 2013-07-27 20:18:25.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. NÚMEROS

- 1.1. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN
- 1.2. NÚMEROS TRIANGULARES, CUADRADOS, PENTAGONALES...
- 1.3. NÚMEROS ENTEROS
- 1.4. FRACCIONES
- 1.5. EXPRESIONES DECIMALES
- 1.6. APROXIMACIONES, TRUNCAMIENTOS Y REDONDEOS

Sistema de numeración egipcio



Ilustración: A. Ortega

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- 2.1 REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA
- 2.2. COMPARACIÓN DE NÚMEROS

Ilustración: A. Ortega



Sistema de numeración maya

3. OPERACIONES

- 3.1. SUMA Y RESTA. PROPIEDADES
- 3.2. PRODUCTO Y COCIENTE. PROPIEDADES
- 3.3. JERARQUÍA DE OPERACIONES



Números árabigos

Resumen

Ya conoces muchos tipos de números, los números naturales, que sirven para contar, los números decimales, que nos sirven, entre otras muchas cosas, para usar los céntimos, las fracciones... También conoces, del curso pasado, los números enteros, los positivos, los negativos y el cero. En la historia de la humanidad aparecen mucho antes las fracciones, en Egipto y en Babilonia, que los números negativos. En los balances contables, por ejemplo, se ponía en rojo las deudas (pero no se usaba el signo menos). En el Renacimiento Tartaglia y Cardano ya obtuvieron soluciones negativas de algunas ecuaciones (de tercer grado) pero hasta el siglo XVII no se generalizó su uso. Observa que ya se usaban expresiones decimales y fracciones positivas y sin embargo se tardó mucho en utilizar los números negativos.

En este capítulo vamos a revisar como se trabaja con números positivos y negativos, fracciones y decimales, a sumarlos, restarlos, multiplicarlos, dividirlos, a calcular si valor absoluto, a representarlos en una recta y a compararlos.

1. NÚMEROS

Recuerda que:

El conjunto de los números naturales se representa por la letra $\mathbb{N}$ y está formado por los números 1, 2, 3, 4,...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Es un conjunto infinito, pues no tiene un último elemento, aunque si tiene un primer elemento, el 1. Es un conjunto bien ordenado pues dados dos números naturales siempre sabemos si uno es menor que el otro.

1.1. El sistema de numeración

El sistema de numeración decimal

En el **sistema de numeración decimal** el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Otros sistemas de numeración decimal usados actualmente son los que se usan en países árabes como:

Europeo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arábigo-Índico	.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Arábigo-Índico Oriental (Persa y Urdu)	.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

Actividades resueltas

En el número 9835067 tenemos:

- La cifra de las unidades: el 7 = $7 \cdot 10^0$
- Luego la cifra de las decenas: el 6, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será: $6 \cdot 10 = 60$
- En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$
- En cuarto lugar las unidades de millar: 5, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar: $5 \cdot 10^3 = 5000$
- Luego, las decenas de millar: 3 cuyo valor será: $3 \cdot 10^4 = 30000$
- En sexto lugar, las centenas de millar: 8, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 10^5 : $8 \cdot 10^5 = 800000$
- Y, por último, las unidades de millón: 9, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 10^6 : $9 \cdot 10^6 = 9000000$

Con esto observamos que el número 9835067 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$9835067 = 9 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
0	零 / 〇

Números
chinos

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:
a) 8216 b) 591274 c) 918273 d) 90003040506
2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?
a) 708544 b) 67339001 c) 5092175 d) 9847
3. Razona por qué, en el número natural 77777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Números romanos



Reloj con números romanos

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras M, D, y L siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Actividades propuestas

4. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:
a) MDCVX b) MMMCCXXXIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo.

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas, el 0 y el 1

0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011	10100	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Cifras del sistema binario

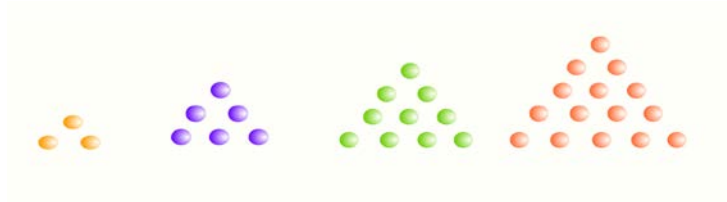
Actividades propuestas

5. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.

1.2. Los números triangulares, cuadrados, pentagonales...

Los griegos, y en particular los pitagóricos solían representar los números mediante piedrecitas, cálculos, sobre la arena y los ordenaban formando dibujos geométricos poligonales.

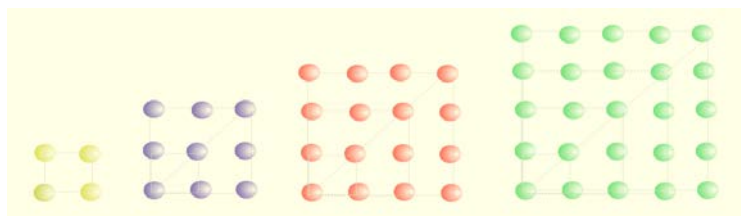
Si los ordenas formando triángulos obtienes los números triangulares:



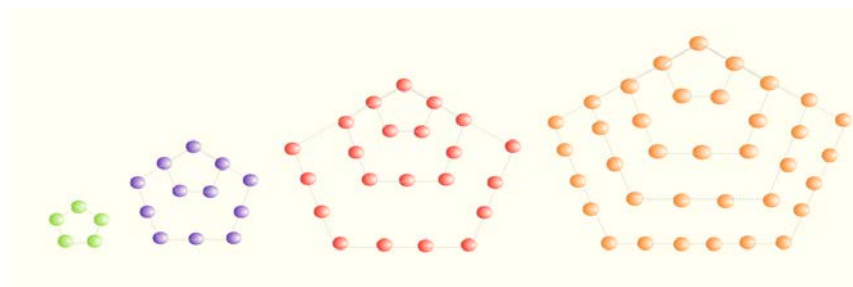
Observa que los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15....

✚ Añade 3 números triangulares más.

Si los ordenamos formando cuadrados obtienes los cuadrados perfectos que ya conoces: 1, 4, 9, 16, 25...



Se pueden ordenar formando pentágonos:



Los números pentagonales son: 1, 5, 12, 22, 35...

Y así con otros polígonos.

Estos números se usaron en la *Escuela Pitagórica* asociando al número una imagen geométrica.

Actividades propuestas

- Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar n . Ya sabes que C_n es igual a n^2 : $C_n = n^2$ Comprueba que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.
- Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: $4 = 3 + 1$, $9 = 6 + 3$... Exprésalo de forma general.
- Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.
- Dibuja tres números hexagonales.

1.3. Números enteros

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultar ser suficientes.

Recuerda que:

Los **números enteros** son una ampliación de los números naturales:

- ✚ Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5...
- ✚ Los enteros negativos van precedidos del signo -: -1, -2, -3....
- ✚ El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \dots\}$$

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: $+2 = 2$; $+6 = 6$.

Ejemplo:

- ✚ Juan está trabajando y el primer mes gana 1000 euros pero gasta 500 euros, por tanto Juan tiene *en total* $1000 - 500 = 500$ €. Sin embargo, si el primer mes gana 1000 pero sus gastos son mayores (alquiler del piso, impuestos...) y ascienden a 2000 euros, se dice que *perdió en total* $2000 - 1000 = 1000$ euros. Unas veces existe una *ganancia* neta, y otras una *pérdida*, dependiendo de si las ganancias fueron mayores que los gastos o viceversa. Estas dos posibilidades se pueden expresar utilizando el signo de los números negativos (o positivos): en el primer caso ganó en total $1000 - 500 = +500$ euros, y en el segundo ganó en total $1000 - 2000 = -1000$ Euros. Así, se entiende que una pérdida es una *ganancia negativa*.

Los números negativos aparecen al considerar:

- ✚ El capital de una empresa que ha quebrado.
- ✚ Temperaturas por debajo de cero grados.
- ✚ Fechas antes de Cristo.
- ✚ Profundidad de un submarino bajo el nivel del mar.
- ✚ Se dice “*las seis menos cinco*” o las “*ocho menos veinte*”.

Valor absoluto de un número

La distancia que separa un número del cero se define como **valor absoluto** del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras | |.

$$|+6| = 6$$

$$|-2| = 2$$

Ejemplo:

- ✚ El valor absoluto de +4, es 4, y se escribe: $|+4| = 4$;
- ✚ El valor absoluto de -9,3 es 9,3 y por tanto $|-9,3| = 9,3$, del mismo modo:
- ✚ $|+23,5| = 23,5$ y $|-5/6| = 5/6$.

Actividades propuestas

10. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
- Un submarino navega a 345 m de profundidad
 - Hoy el termómetro marcaba 15°C
 - El coche estaba en el sótano 5.
 - Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo
11. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:
- Me he quedado sin dinero.
 - Miguel nació en el año dos mil.
 - El garaje está en el tercer sótano.
12. Indica el significado de los números -4 , 0 y $+7$ en cada una de las situaciones siguientes:
- En un garaje
 - En una temperatura
 - En una cuenta
13. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:
- $|+43|$
 - $|-7,2|$
 - $|0|$
 - $|-81,7|$

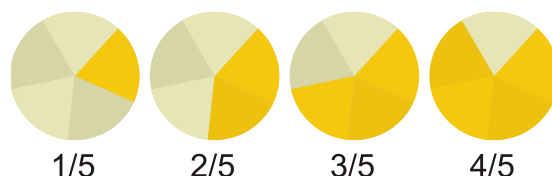
1.4. Fracciones

Los objetos matemáticos llamados **fracciones** permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.

Una fracción es el cociente de dos números enteros.

Comencemos con un ejemplo.

✚ Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos $\frac{1}{5}$ para representar cada trozo, es decir, cada una de las cinco quintas partes del bizcocho. Si colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja habrá tres quintas partes de bizcocho: $\frac{3}{5}$



El bizcocho completo puede representarse de la siguiente forma $\frac{5}{5}=1$ ya que está formado por cinco quintas partes.

En general, una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto m como n son números naturales. Para referirnos a ella diremos " m partido de n "; m recibe el nombre de **numerador** y n es el **denominador**.

Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

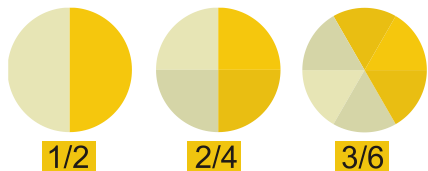
$\frac{1}{2}$, un medio $\frac{2}{3}$, dos tercios $\frac{3}{4}$, tres cuartos $\frac{4}{5}$, cuatro quintos $\frac{3}{10}$, tres décimos

A partir del valor 11 del denominador: $\frac{7}{11}$, siete onceavos $\frac{11}{23}$, once veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias**.

Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles



Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son **equivalentes** si $m \cdot q = n \cdot p$

Las fracciones $1/2$ y $2/4$ son **equivalentes** pues representan la misma proporción. Es lo mismo media tarta que dos cuartos de tarta.

A partir de una fracción m/n , si r es cualquier número natural entonces la fracción $(m \cdot r)/(n \cdot r)$ es **equivalente** a m/n :

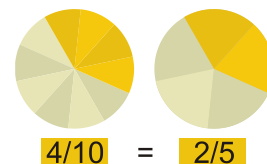
$$\frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo:

✚ Una fracción equivalente a $1/3$ es, por ejemplo, $10/30$, ya que $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$

Anteriormente dijimos que $1/2$ y $2/4$ son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son $3/5$, $6/10$ y $24/40$ puesto que

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}, \quad \frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}, \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}.$$



Una manera alternativa de destacar estas relaciones consiste en decir que las fracciones $3/5$ y $6/10$ son reducciones de la fracción $24/40$, mientras que $3/5$ es una reducción de $6/10$. Podemos intuir que la fracción $3/5$ no puede reducirse más, es una **fracción irreducible**.

Obtendremos la mayor reducción de una fracción p/q al dividir tanto p como q entre su **máximo común divisor**.

Una fracción es **irreducible** cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

Ejemplo:

✚ Una reducción de $24/40$ es $6/10$, pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4. Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción $24/40$ es $3/5$. Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción $3/5$ es irreducible, tal y como era de esperar.

Ejemplo:

✚ En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción $30/6$, ya que el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5.

Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible.

Actividades propuestas

14. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.
15. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

16. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible: a) $\frac{24}{18}$ b) $\frac{21}{49}$

c) $\frac{7}{7}$

17. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{11}$ y $\frac{33}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$

18. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{4}$

19. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$

20. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\frac{-1}{5}$ b) $\frac{9}{-4}$ c) $\frac{-3}{7}$ d) $\frac{2}{-15}$

1.5. Expresiones decimales

Pero hay otras formas de expresar cantidades que no se corresponden con cantidades completas, como por ejemplo, el precio de un producto: 3,25 euros.

Una **expresión decimal** consta de dos partes:

- su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma
- y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

La parte decimal indica porciones que hay que añadir a la parte entera dividiendo la unidad en 10, 100, 1000 ... partes.

Ejemplos: $1'3 = 1 + \frac{3}{10}$ $1'03 = 1 + \frac{3}{100}$

Actividades propuestas

21. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

Conversión de una fracción a expresión decimal

Dada una fracción se obtiene su expresión decimal, dividiendo.

Ejemplos: $\frac{93}{8} = 11'625$ $\frac{46}{11} = 4'1818181818181...$

Recuerda que cualquier fracción tiene un desarrollo decimal **exacto** o **periódico**.

Las expresiones decimales periódicas cuyo desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma se llaman **periódicos puros**. Si el periodo se encuentra más allá de la coma estamos ante un número decimal **periódico mixto** y la parte decimal situada entre la coma y el periodo se llama **anteperiodo**.

Ejemplo: $\frac{178}{70} = 2\overline{5428571}$

Hemos llegado a la expresión decimal de la fracción $178/70$. Es el número decimal de parte entera 2, anteperiodo 5 y periodo 428571.

Actividades propuestas

22. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes: a) $\frac{97}{2}$ b) $\frac{345}{4}$

23. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{25}{12}$

Conversión de una expresión decimal en fracción

Si la expresión decimal es **exacta**, basta dividir por una potencia de 10 de forma que desaparezca la coma.

Ejemplo: $31\overline{528} = \frac{31528}{1000}$

Si es **periódico puro**, veamos la forma de proceder:

$$X = 7\overline{31}$$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 7\overline{31} = 100 \cdot 7\overline{31313131} \dots = 731\overline{313131} \dots = 731\overline{31}$$

$$100 \cdot X - X = 731 - 7 \Rightarrow 99 \cdot X = 724 \Rightarrow X = \frac{724}{99}$$

Un número decimal **periódico puro** se convierte en aquella fracción que tiene por numerador, la diferencia entre el número formado por la parte entera y el periodo menos la parte entera, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo.

Ejemplos: $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ $0,\overline{934} = \frac{934}{999}$ $4,\overline{6} = \frac{46 - 4}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$

Si es **periódico mixto**, veamos la forma de proceder con un ejemplo:

$$X = 7,\overline{631}$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 7,\overline{631} = 76\overline{313131} \dots$$

$$1000 \cdot X = 1000 \cdot 7,\overline{631} = 7631\overline{3131} \dots$$

$$(1000 - 10) \cdot X = 7631 - 76 \Rightarrow X = \frac{7631 - 76}{990} = \frac{6555}{990}$$

Una expresión decimal **periódica mixta** se convierte en aquella fracción que tiene por numerador a la diferencia entre, el número natural formado por la parte entera, el anteperiodo y el periodo, menos el número natural formado por la parte entera y el anteperiodo, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo seguido de una cantidad de ceros coincidente con el número de cifras del anteperiodo.

Ejemplo: $0.\overline{349} = \frac{349 - 3}{990} = \frac{346}{990}$

$$8.\overline{07458} = \frac{807458 - 807}{99900} = \frac{806651}{99900}$$

Observa que:

Si calculamos la suma $0.\overline{3} + 0.\overline{6}$. Parece natural que

$$0.\overline{3} + 0.\overline{6} = 0.\overline{333333}..... + 0.\overline{666666}..... = 0.\overline{999999}..... = 0.\overline{9}$$

Por otro lado $0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y $0.\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Así que sumando $0.\overline{3} + 0.\overline{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ de modo que $1 = 0.\overline{9} = 0.\overline{999999}.....$

1.6. Aproximaciones, truncamientos y redondeos

- Si vamos a pagar con un billete de 50 euros una compra que asciende a 32'69 euros, esperamos una vuelta de 17'31 euros. Si en la caja no hay monedas de un céntimo, nos propondrán que demos por buena una vuelta de 17'30 euros. Es una *aproximación a la baja*.
- Si realizamos una compra por un importe de 12'44 euros y la saldamos con 12'45 euros estamos ante una *aproximación al alza*.

Una manera de realizar una aproximación a la baja de un número decimal es el **truncamiento**. Consiste en decidir cuántas cifras decimales queremos considerar y, simplemente, eliminar las restantes a partir de la última cifra decimal mostrada.

Otra forma de realizar una aproximación es a través de un **redondeo**. Éste consiste en decidir cuántas cifras decimales va a tener la aproximación, realizar el truncamiento oportuno y, en función de cuál sea la primera cifra decimal no considerada, mantener o incrementar en una unidad la parte decimal del truncamiento. El criterio para efectuar, o no, dicho incremento es el siguiente:

- Cuando la primera cifra decimal eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, el **redondeo** coincide con el truncamiento.
- Si la primera cifra decimal no considerada es un 5, 6, 7, 8 o 9, el **redondeo** se obtiene al aumentar en una unidad la parte decimal del truncamiento.

Ejemplo:

- Redondeamos y truncamos la expresión decimal 45,98351.

	Redondeo	Truncamiento
Décimas	46,0	45,9
Centésimas	45,98	45,98
Milésimas	45,984	45,983
Diezmilésimas	45,9835	45,9835

Actividades propuestas

24. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

- a) 11'1234 b) 6'6 c) 9'350 d) 8'71 e) 8'3348 f) 2'6408

25. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

- a) 11'1234 b) 6'6 c) 9'350 d) 8'71 e) 8'3348 f) 2'6408 g) 3'9996

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. Representación en la recta numérica

Recuerda que:

Para representar **números enteros** en la recta numérica:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el **cero**, que se llama **origen**
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

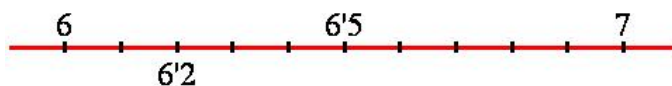


Ejemplo:

- ✚ Representa en una recta numérica: -2, 0, 4, -1, 8, -7, -3 y 1



- ✚ Para representar un número decimal como 6'2 en primer lugar nos fijamos en su parte entera, 6, lo que nos informa de que 6'2 se encuentra entre los números naturales 6 y 7. Como su parte decimal posee una sola cifra, son 2 décimas, deberemos dividir el segmento de extremos 6 y 7 en diez partes iguales para, finalmente, situar 6'2 sobre la segunda de las marcas.



Actividades propuestas

26. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: -8, 5, 1, -5, 8, -3, -7 y 0.
27. Sitúa en la siguiente recta los números 8'43, 8'48, 8'51 y 8'38



2.2. Comparación de números

Al representar los números en la recta numérica quedan **ordenados**.

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

Ejemplo:

✚ -7 está más a la izquierda que $+4$ por tanto -7 es menor que $+4$. Se escribe $-7 < +4$

El signo $<$ se lee “menor que” y el signo $>$ se lee “mayor que”.

Decidir si un número decimal es mayor o menor que otro es bastante sencillo. Si sus partes enteras son distintas, ellas ya determinan cuál es mayor.

Ejemplo:

✚ $13'66$ es mayor que $11'4$, pues el primero tiene parte entera 13 y el segundo 11.

Si tienen igual parte entera pasamos a mirar su primera cifra decimal, la de las decenas. Si son diferentes, ya podemos decidir.

Ejemplo:

✚ $7'25$ es menor que $7'3$, ya que tienen la misma parte entera y la primera cifra decimal de $7'3$ es mayor que la primera cifra decimal de $7'25$.

En general, si coinciden las partes enteras buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal.

Ejemplo:

✚ Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

$$-7,8 < -3,5 < -2,9 < -1,3 < 0 < 2,7 < 4,4 < 8,2.$$

O bien:

$$8,2 > 4,4 > 2,7 > 0 > -1,3 > -2,9 > -3,5 > -7,8.$$

✚ Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0°C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca -10°C . Es decir: $0 > -10$

Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: -8 , 5 , 1 , -5 , 8 , -3 , -7 y 0 .

29. Completa en tu cuaderno con el signo $<$ (menor) o $>$ (mayor) según corresponda:

a) $-13,6$ $-67,1$ b) $-80,2$ $+94,5$ c) $+37$ $+48$ d) $+52$ -64 e) -21 $|-25|$

30. Ordena de menor a mayor

a) $+5,1$, $-4,9$, $-1,5$, $+18,2$, $5,17$ b) $+6,9$, $-7,2$, $-8,5$, $-5,9$, $-7,21$

31. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) $-0,872$ y $-0,8721$ b) $3,58$ y $|-3,57|$ c) $7,0001$ y $7,00001$ d) $-4,78$ y $-8,92$

32. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que $6'147$ y menores que $6'2$.

3. OPERACIONES

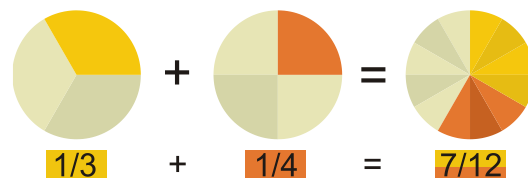
3.1. Suma y resta. Propiedades

Suma de números enteros

Recuerda que:

Para **sumar** dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

Para **sumar** dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto



Ejemplo:

- Tienes 75 € y te dan 50 € entonces tienes 125 €: **$+75 + 50 = +125$** .
- Debes 75 € y gastas 50 € entonces acumulas una deuda de 125 €: **$-75 - 50 = -125$** .
- Tienes 75 € pero debes 50 € entonces tienes 25 €: **$-50 + 75 = +25$** .
- Debes 75 € y tienes 50 € entonces debes 25 €: **$-75 + 50 = -25$** .

Suma de fracciones

Recuerda que:

Para realizar la suma de dos fracciones debemos conseguir que tengan el mismo denominador buscando fracciones equivalentes. Así, para sumar $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ deberemos buscar y encontrar dos números

naturales r y s que nos transformen cada una de las anteriores fracciones en otras **equivalentes**, $(m \cdot r)/(n \cdot r)$ y $(p \cdot s)/(q \cdot s)$, de forma que las nuevas fracciones tengan el **mismo denominador**, es decir, que

$n \cdot r = q \cdot s$, en cuyo caso: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} + \frac{p \cdot s}{n \cdot r} = \frac{m \cdot r + p \cdot s}{n \cdot r}$

Como hay muchas parejas de números naturales r y s que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños.

Puesto que $n \cdot r$ es múltiplo de n y $q \cdot s$ es múltiplo de q , alcanzaremos r y s a partir del **mínimo común múltiplo** de n y q .

$$n \cdot r = q \cdot s = m.c.m.(n, q)$$

El valor de r resulta de dividir ese mínimo común múltiplo entre n y el de s se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre q .

Ejemplo: $\frac{7}{4} + \frac{5}{6}$

Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 4 nos da 3 y al hacerlo entre 6 obtenemos 2.

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{21}{12} \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

Finalmente

$$\frac{7}{4} + \frac{5}{6} = \frac{21}{12} + \frac{10}{12} = \frac{31}{12}$$

Suma de expresiones decimales

Suma de expresiones decimales. Ahora basta con que las partes decimales tengan el mismo número de cifras. Si no lo tienen desde un principio, añadimos los ceros que sean necesarios para ello.

Ejemplos: $67'7 + 71'15 = 67'70 + 71'15 = 138'85$ $44'39 + 23 = 44'39 + 23'00 = 67'39$

✚ Si una persona tiene 8 euros y 42 céntimos de euro y otra tiene 7 euros y 94 céntimos ¿cuánto dinero tienen entre las dos?

Tenemos que sumar. En total tienen $8 + 7 = 15$ euros y $42 + 94 = 136$ céntimos. Pero, como 100 céntimos de euro es lo mismo que 1 euro, 136 céntimos de euro es igual a 1 euro más 36 céntimos. De esta forma, esas dos personas tienen $15 + 1 = 16$ euros y 36 céntimos.

Propiedades de la suma

Conmutativa. No importa en qué orden sumemos dos números:

$$a + b = b + a$$

Ejemplo: $714'66 + 2'47 = 717'13$ $2'47 + 714'66 = 717'13$

Asociativa. Nos permite sumar más de dos números agrupándolos como queramos, de dos en dos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo: $95'7 + 30'02 + 17'4 = (95'7 + 30'02) + 17'4 = 125'72 + 17'4 = 143'12$

$$95'7 + 30'02 + 17'4 = 95'7 + (30'02 + 17'4) = 95'7 + 47'42 = 143'12$$

Elemento neutro. El número 0 sumado a cualquier otro número no lo altera.

Ejemplo: $0 + 78'324 = 78'324 = 78'324 + 0$

Opuesto de un número: El **opuesto** de un número es otro número de igual valor absoluto y distinto signo que verifica que $a + \text{Op}(+a) = 0$.

Se escribe: $\text{Op}(+a) = -a$, $\text{Op}(-a) = +a$ o bien: $-(+a) = -a$, $-(-a) = +a$

Ejemplo:

$$\text{Op}(+5) = -5 \quad \text{Op}(-7,3) = +7,3 \quad -(+5) = -5 \quad -(-7,3) = +7,3.$$

Resta

Para **restar** dos números se suma al primero el opuesto del segundo.

El signo **menos delante de un paréntesis** cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Actividades propuestas

33. Halla el resultado de las siguientes sumas:

$$\text{a) } (+12,8) + (+57) + (-4,6) \quad \text{b) } (-83,2) - (-24,1) + (-10,5) \quad \text{c) } (-35) + (-48) + (+92)$$

34. Efectúa estas operaciones

$$\text{a) } (+3,8) + (+4,2) - (-52) \quad \text{b) } (-614) + (-77) + (-811) \quad \text{c) } (-97) - (-12) + (+26) \quad \text{d) } (-45) + (+52)$$

35. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?



36. Un avión vuela a 3672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?

37. Arquímedes nació en el año 287 a.C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?

38. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.

39. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.



Arquímedes

40. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{1}{5} + \frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6} + \frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8} + \frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100} + \frac{13}{24}$

41. Calcula: a) $\frac{5}{14} - \frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6} - \frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100} - \frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21} - \frac{7}{3}$

3.2. Producto y cociente. Propiedades

Producto de números enteros

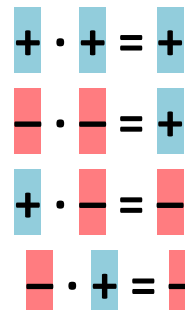
Recuerda que:

Para **multiplicar** dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la **regla de los signos** siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo + si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo – si tienen distinto signo.



Ejemplos:

$(+7) \cdot (+3) = +21$

$(-1) \cdot (-1) = +1$

$(+8) \cdot (-4) = -32$

$(-2) \cdot (+9) = -18$

- ✚ Luis gana 1000 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 7 meses?

$(+1000) \cdot (+7) = +7000 \text{ €}$ ahorrará al cabo de 7 meses.

- ✚ El recibo mensual es de 65 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 4 meses?

$(-65) \cdot (+4) = -260 \text{ €}$ gastará al cabo de 4 meses.

- ✚ Álvaro gasta 12 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 5 meses. ¿Cuánto ha ahorrado? $(-12) \cdot (-5) = +60 \text{ €}$ ahorrará al cabo de 5 meses.

Producto de fracciones

Para **multiplicar** dos fracciones multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los

denominadores: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$

Ejemplo: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{20}{56}$

Podemos simplificar, reducir, el resultado: $\frac{20}{56} = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 14} = \frac{5}{14}$

Producto de expresiones decimales

Para realizar el producto de dos expresiones decimales se debe:

- ✚ Multiplicar, en primer lugar, los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- ✚ Al resultado de ese producto le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplos: $5'7 \cdot 3'3 = 18'81$

✚ $5,7 \cdot 3,3 = 18,81$ $93,05 \cdot 72,4 = 6736,820 = 6736,82$ $44,16 \cdot 8 = 353,28$

Propiedades de la multiplicación.

Conmutativa. No importa en qué orden multipliquemos dos números.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ejemplos: $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$ $3 \cdot (-5) = (-5) \cdot 3 = -15$ $1,552 \cdot 5,9 = 5,9 \cdot 1,552 = 9,1568$

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5} = \frac{11}{5} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{45}$$

Asociativa. Nos permite multiplicar más de dos números agrupándolos como queramos de dos en dos.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplos: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$ $(2 \cdot 3) \cdot (-5) = 2 \cdot (3 \cdot (-5)) = -30$

$5,7 \cdot 3,2 \cdot 7,14 = (5,7 \cdot 3,2) \cdot 7,14 = 5,7 \cdot (3,2 \cdot 7,14) = 130,2336$ $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \cdot \left(\frac{11}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{77}{90}$

Elemento neutro. El número 1 multiplicado por cualquier otro número, no lo altera.

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

Ejemplo: $2 \cdot 1 = 2$ $1 \cdot (-5) = (-5)$ $7,3512 \cdot 1 = 7,3512$ $1 \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$

Observa que:

En ocasiones existe un número que multiplicado por otro nos da la unidad. Cuando ese número existe, se llama inverso. Dentro del conjunto de los números naturales y de los números enteros, no existe el elemento inverso. Pero con las fracciones, sí.

Ejemplo: $\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{5} = \frac{55}{55} = 1$ $\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{1} = \frac{11}{11} = 1$ $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Cuando en una multiplicación uno de los factores es la suma de dos números, como, por ejemplo,

$$8,3 \cdot (6,5 + 1,04)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$6,5 + 1,04 = 7,54 \quad 8,3 \cdot 7,54 = 62,582$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$8,3 \cdot (6,5 + 1,04) = (8,3 \cdot 6,5) + (8,3 \cdot 1,04) = 53,95 + 8,632 = 62,582.$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma con fracciones nos dice:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} \right)$$

Conviene comentar que esta propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos **sacar factor común**:

$$\frac{12}{5} + \frac{22}{15} = \frac{2 \cdot 6}{5} + \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 3} = \left(\frac{2}{5} \cdot 6 \right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{3} \right) = \frac{2}{5} \cdot \left(6 + \frac{11}{3} \right)$$

Ejemplos:

a) $6350 \cdot 4 - 6350 \cdot 3 = 6350 \cdot (4 - 3) = 6350 \cdot 1 = 6350$

b) $635 \cdot 2 + 3 \cdot 35 = (2 + 3) \cdot 635 = 5 \cdot 635 = 3175$

c) $928 \cdot 6 - 928 \cdot 5 = 928 \cdot (6 - 5) = 928 \cdot 1 = 928$

d) $928 \cdot 7 + 928 \cdot 3 = 928 \cdot (7 + 3) = 928 \cdot 10 = 9280$

e) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5} \right) + \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{58}{15}$

Actividades propuestas

42. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) $(+35) \cdot (+2)$

b) $(+4) \cdot (-72)$

c) $(-8) \cdot (-45)$

d) $(-5) \cdot (+67)$

e) $(+28) : (+2)$

f) $(+27) : (-3)$

g) $(-36) : (-2)$

h) $(-54) : (+9)$

43. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) $(+721) \cdot (+3)$

b) $(+562) \cdot (-3)$

c) $(-915) \cdot (-2)$

d) $(-6) \cdot (+72)$

e) $(+303) : (+3)$

f) $(+505) : (-5)$

g) $(-160) : (-4)$

h) $(-704) : (+2)$

44. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) $(+2) \cdot (+40)$

b) $(+30) \cdot (-2)$

c) $(-60) \cdot (-3)$

d) $(-50) \cdot (+8)$

e) $(+80) : (+4)$

f) $(+18) : (-3)$

g) $(-15) : (-5)$

h) $(-70) : (+7)$

45. Calcula: a) $\frac{8}{22} \cdot \frac{3}{75}$ b) $6 \cdot \frac{7}{11}$ c) $23 \cdot \frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{3}$

46. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15} \cdot \frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25} \cdot \frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15} \cdot \frac{10}{12}$

47. Calcula: a) $7,3 \cdot 2,54$ b) $2,89 \cdot 7,21$ c) $3,54 \cdot 5,2 \cdot 6,8$ d) $6,9 \cdot 7,5 \cdot 6,1$

48. Sacar factor común y calcular mentalmente:

a) $756 \cdot 4 - 756 \cdot 3$ b) $350 \cdot 8 + 350 \cdot 2$ c) $927 \cdot 13 - 927 \cdot 3$ d) $700 \cdot 33 - 700 \cdot 3$

49. Efectúa:

a) $9 \cdot (4,01 + 3,4)$ b) $7,3 \cdot (12 + 5,14)$ c) $2,9 \cdot (25,8 - 21,97)$

50. Realiza los productos indicados:

a) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}$

51. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{9}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{8}\right)$

División de números naturales

Ejemplo:

✚ En el comedor del instituto las mesas son de 4 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 35 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 8 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r} 35 \overline{) 4} \\ 3 \underline{} \\ 8 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

35 → Dividendo

4 → Divisor

8 → Cociente

3 → Resto

Además, como ya sabes, se verifica que: $35 = (4 \cdot 8) + 3$

Esta propiedad se verifica siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ r \underline{} \\ C \end{array}$$

Se verifica que:

$$D = (d \cdot c) + r$$

Dividendo es igual a divisor por cociente más el resto

Ejemplo:

✚ El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3658 = 65 \cdot 56 + 18$$

Ejemplos:

✚ $27/3$, $27:3$ y $\frac{27}{3}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 27 entre 3.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

✚ Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo. Si hacemos:

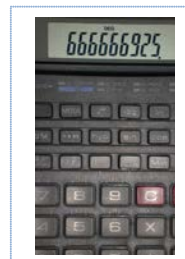
$$325 \div 5 = 65 \text{ la división es exacta.}$$

Pero si hacemos:

$$325 \div 15 = 21.6666666667$$

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: $325 - (15 \cdot 21) = 10$.

**Cociente de números enteros**

Para **dividir** dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:

Ejemplo:

$$(+36) : (+6) = +6$$

$$(-32) : (-4) = +8$$

$$(+27) : (-3) = -9$$

$$(-49) : (+7) = -7$$

+	:	+	=	+
-	:	-	=	+
+	:	-	=	-
-	:	+	=	-

Actividades propuestas

52. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

$$8214 : 26$$

$$\text{b) } 271093 : 452$$

$$\text{c) } 1112220000 : 385$$

$$\text{d) } 274 : 25$$

3.3. Jerarquía de operaciones

En la expresión: $5 \cdot 4 + 3$, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una **prioridad** en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería: $5 \cdot 4 + 3 = 20 + 3 = 23$

¿Y en $9 : 3 \cdot 2$? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: $9 : 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Prioridad de operaciones:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones y divisiones** y luego, las **sumas y restas**.

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

✚ Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(17 + 8) \cdot 6 = 25 \cdot 6 = 150$$

$$17 + 8 \cdot 6 = 17 + 48 = 65$$

Notas

✚ Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: $(21 \cdot 2) + 30$ resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.

✚ Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Ejemplo:

Jerarquía de operaciones	$[(+7 - 5) \cdot (+4 - 8 - 3)] + (-27) : (-3) + 20$
1) Se resuelven los paréntesis	$[(+2) \cdot (-7)] + (-27) : (-3) + 20$
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	$[-14] + (+9) + 20$
3) Se efectúan sumas y restas	Resultado = 15

Actividades propuestas

53. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+4 - (+5) \cdot (-3)$

b) $+6 + (-9) : (+2 - 5)$

c) $-3 + [-4 - (-26) : (+2)]$

54. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$

b) $-6 + (-7) : (+7)$

c) $+28 - (-36) : (-9 - 9)$

d) $+11 + (+7) \cdot (+6 - 8)$

e) $-7 - [+4 - (-6) : (+6)]$

f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

CURIOSIDADES. REVISTA

Sistemas de numeración

1	5	10	50	100
500	1.000	5.000	10.000	

Números griegos clásicos

Como sabes, en Babilonia, hace más de cinco mil años, se usaba un sistema de numeración en base **doce** y uno en **base 60**. ¡Imaginas cuántos dígitos hacían falta! Hoy todavía perviven cuando decimos que el año tiene 12 meses, o que una hora tiene 60 minutos y un minuto, 60 segundos.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Sistema en base 16 que se usa en los ordenadores

Los ordenadores utilizan un sistema de numeración

binario, con sólo dos dígitos, el **0** y el **1**.

Aunque también se usa un sistema en base **16**, que se llama **sistema hexadecimal**.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	χ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Números griegos

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Números romanos

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Números árabes

一	二	三	四	五	六	七
1	2	3	4	5	6	7
八	九	十	百	千	萬	
8	9	10	100	1.000	10.000	

Números chinos

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Números mayas

Fracciones en Egipto

En el Antiguo Egipto y en Babilonia, hace más de 5000 años, ya se usaban fracciones. En Egipto usaban fracciones unitarias, es decir, con numerador 1: $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$... El Ojo de Horus es un jeroglífico que representa las fracciones unitarias de denominador una potencia de 2:

$$\begin{aligned} \triangleleft &= 1/2, & \bigcirc &= 1/4, & \sim &= 1/8, \\ \triangleright &= 1/16, & \text{curly} &= 1/32, & \text{vertical bar} &= 1/64 \end{aligned}$$

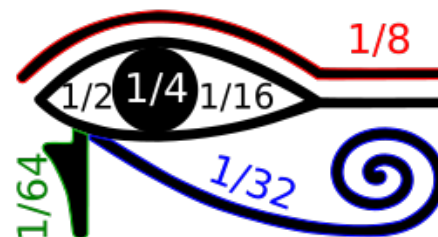


Imagen de Wikipedia. Si quieres saber más busca Ojo de Horus en Wikipedia.

Historia de los números enteros

Los chinos utilizaban los números negativos hace más de dos mil cuatrocientos años, ya que eran capaces de representar con varillas negras los números negativos y con rojas los positivos.

Los matemáticos hindúes usaban “los bienes”, “las deudas” y “la nada”.

Sin embargo en Europa la historia de la aceptación como números de los negativos fue un proceso que duró más de mil años, lleno de avances y retrocesos. Se tardó mucho en considerar a los negativos como números. En el siglo XVII aparecen, en el Diccionario Matemático, como **raíces falsas**.

He aquí algunas frases de personas famosas:

- ♦ Girard (1590-1639): *¿Por qué esas soluciones imposibles?*
- ♦ Descartes (1596-1650): *No pueden existir números menores que nada.*
- ♦ Stendhal (1783- 1842): *Cual no sería mi desconcierto cuando nadie podía explicarme que menos por menos es más.*
- ♦ Newton (1642- 1727): *Las cantidades son afirmativas, o sea, mayores que nada, o negativas, es decir, menores que nada. Así, en las cosas humanas las posesiones pueden llamarse bienes positivos pero las deudas bienes negativos...*
- ♦ D'Alembert (1717- 1783) escribió en la Enciclopedia: *Decir que la cantidad negativa es menos que nada es expresar una cosa que no se concibe.*

Producto

Aunque en primaria se usaba el símbolo “x”, para denotar el producto lo simbolizaremos con un punto: ·

Leibniz escribió a *Bernoulli* diciendo que no le gustaba usar para el producto la letra x pues se confunde con la letra x y empezó a utilizar el punto.

Los ingleses, que no siguen a *Leibniz* porque le hace sombra a *Newton*, usan el punto en lugar de la coma para expresar los números decimales: $3,5 = 3'5 = 3.5$, y los ordenadores también

Comenta con tus compañeros y compañeras las frases de arriba.

Cociente

La palabra “**cociente**” significa el resultado de hacer una “**división**” Los símbolos utilizados para representarlas son:

/, :, y la fracción: —

La barra horizontal de fracción, —, es de origen árabe, incómoda si se escribe en una única línea, por lo que, de nuevo *Leibniz*, la empezó a sustituir por la línea oblicua y los dos puntos.

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1792 que en 5431.
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas. -En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.	La operación $2 + 3 \cdot 7$ tiene como resultado 23, no 35, que es lo que resultaría efectuando antes la suma que el producto.
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$	
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	$82,6 > 36,1 > 0 > -3 > -36,7$ $-2,59 < -1,3$
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: $++ = +; -- = +; +- = -; -+ = -$	$(+5) \cdot (+6) = +30$ $(-1) \cdot (-87) = +87$ $(-5) \cdot (+6) = -30$ $(+9) \cdot (-4) = -32$
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10} + \frac{7}{15} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} =$ $= \frac{27}{30} + \frac{14}{30} = \frac{27+14}{30} = \frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{10}{9}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11} < \frac{7}{4} < \frac{15}{8}$
Expresiones decimales	Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	21'375 Parte entera: 21 Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta y periódica	Exacta: Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras. Periódico: Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	5,7767 Puro: $3,\overline{07} = 3,0707070\dots$ Mixto: $4,\overline{813} = 4,813131\dots$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $(34 + 52) \cdot 5$ b) $89 \cdot 2 + 12$ c) $55 + 67 \cdot 3 + 13$ d) $280 - 110 \cdot 2 + 90$

2. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) $8 \cdot (22 - 20)$ b) $8 \cdot 22 - 20$ c) $8 \cdot 22 - 8 \cdot 20$ d) $8 \cdot (22 + 20)$ e) $8 \cdot 22 + 20$

3. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) $23 \cdot 6 + (35 - 13) : 11 - 4 \cdot 7$ b) $48 : 4 \cdot 8 : 2 - (3 \cdot 12) : 6$ c) $357 - 23 \cdot 7 + 280 : 14$ d) $20 \cdot 9 - 11 \cdot 7 + 265 : 53$

Números enteros

5. Efectúa en tu cuaderno:

a. $6 - (8 + 10 - 1 - 2)$ b. $7 + (2 - 8 - 1) - (8 - 1 + 6)$

c. $(10 - 2 - 7) - (1 - 9 - 16)$ d. $-(9 - 6 - 8) - (-7 - 10 + 2)$

6. Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:

a. $15 + [2 - 8 - (10 - 3)]$ b. $7 - [(5 - 8) - (6 - 12)]$ c. $(5 - 14) - [2 - (2 - 4 - 3)]$

d. $(1 - 11 + 6) - [(3 - 2) - (4 - 16)]$ e. $[8 - (4 - 16)] - [10 - (5 - 12)]$

7. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. $(+4) \cdot (+8)$ b. $(-11) \cdot (-5)$ c. $(+12) \cdot (-6)$ d. $(-11) \cdot (-10)$ e. $(+16) : (+4)$

f. $(-12) : (+6)$ g. $(+24) : (-3)$ h. $(-81) : (-9)$ i. $(-63) : (+7)$ j. $(-30) : (-10)$

8. Halla en tu cuaderno:

a. $(-2)^1$ b. $(-2)^2$ c. $(-2)^3$ d. $(-2)^4$ e. $(-2)^5$

f. $(-2)^6$ g. $(-2)^7$ h. $(-2)^8$ i. $(-2)^9$ j. $(-2)^{10}$

9. Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:

a. $18 - 7 \cdot 3$ b. $(18 - 7) \cdot 3$ c. $(-12) - 4 \cdot (-8)$

d. $[(-12) - 4] \cdot (-8)$ e. $(-5) \cdot (+7) + (-3)$ f. $(-5) \cdot [(+7) + (-3)]$

10. Calcula mentalmente:

a. $(-1)^1$ b. $(-1)^2$ c. $(-1)^3$ d. $(-1)^4$ e. $(-1)^5$

f. $(-1)^6$ g. $(-1)^7$ h. $(-1)^8$ i. $(-1)^9$ j. $(-1)^{10}$

11. Calcula en tu cuaderno:

a) $(-6)^4$ b. $(+5)^5$ c. $(-3)^3$ d. $(+4)^3$ e. $(-9)^2$ f. $(-10)^6$

12. Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros:

$-5, 7, -3, 0, -6, 1, 2$

13. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía: Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he tomado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?
14. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?
15. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?
16. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?
17. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?
18. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?
19. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?
20. Hace una hora el termómetro marcaba -5°C y ahora marca 5°C . La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?
21. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja 12°C a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?
22. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edificio que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?
23. **Un juego**

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre 3.

-6		+6
	+2	
		0

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre -70.

		+7
	-7	
-7		+2

24. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:

—Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.

El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Fracciones

25. Realiza los siguientes cálculos:

$$a) \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

$$b) \frac{4}{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}} + 1$$

$$c) \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{5}{9} - \frac{2}{3}} - 2$$

$$d) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{9}{8} \right)$$

26. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.

27. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

28. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?

29. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

$$a) \frac{8}{3} \quad b) \frac{2}{5} \quad c) \frac{5}{2} \quad d) \frac{16}{7} \quad e) \frac{21}{4} \quad f) \frac{5}{6}$$

30. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.

31. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\frac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\frac{5}{4}$ de 500?

32. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km³, ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?

33. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los $\frac{3}{7}$ y los robles, $\frac{1}{3}$. ¿Qué espacio ocupan las encinas?

34. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los $\frac{3}{5}$ de su sueldo y José los $\frac{5}{7}$, ¿quién gasta más?

35. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

$$a) \frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6} + \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{6}$$

$$b) \frac{7}{10} - \frac{5}{14} = \frac{\quad}{70} - \frac{\quad}{70} = \frac{\quad}{70}$$

36. $\frac{1}{3}$ de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos,...), en comer gastan $\frac{3}{7}$, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?

37. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los $\frac{3}{20}$ del total. Si se desperdician los $\frac{1}{7}$, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?

38. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan $\frac{1}{4}$ sin corregir, ¿cuánto

tiempo deberá dedicar todavía?

39. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\frac{\quad}{5}$ b) $\frac{34}{\quad}$ c) $\frac{\quad}{2}$

40. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6}$ c) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{16} : \frac{3}{10}$

41. Tres naufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada naufrago?
42. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las reparten de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

Expresiones decimales

43. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $1,8\bar{7}$ dé como resultado un número natural.
44. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:
- a) 9,235 b) 57,0001 c) $8,\bar{7}$ d) $3,52\bar{87}$ e) $5'99\bar{96}$
45. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:
- a) 8,9351 b) $5,199\bar{0}$ c) $83,\bar{74}$ d) 77,992 e) $56,\bar{01}$
46. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.
47. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0'72 euros y cada lapicero 0'57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?
48. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1,53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

- ¿Cuál es el resultado de $20 \cdot (15 + 3)$?
a) 303 b) 360 c) 330 d) 90
- El resultado de la operación: $\{(-5 + 8) \cdot (-3 - 5) + (-7 + 1) : (+9 - 3)\}$ es:
a) $-25/6$ b) +24 c) -25 d) -5
- Un termómetro ha subido 4°C , luego ha bajado 6°C , después ha bajado 8°C y, por último, marca menos 9°C . La temperatura inicial era:
a) -1°C b) -19°C c) $+1^{\circ}\text{C}$ d) -14°C
- Al viajar desde una latitud de 9° Norte hasta otra de 20° Sur, la variación de latitud es:
a) 11 Sur b) 29° Norte c) 11° Norte d) 29° Sur
- Si estás situada en el punto -15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?
a) $+13 - 3 + 4$ b) $-1 + 14$ c) $+18 - 5$ d) $+14 + 12 - 1$
- Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$:
a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$
- El resultado de la operación $(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}) \cdot 2 + \frac{51}{10}$ es:
a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3
- Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{3}$
a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$
- Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$:
a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$
- Ordena de menor a mayor los números:
5,67; 5,68; 5,6666; 5,63; 5,5; 5,8; 5,6070.

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009032

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:39:44.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Ana Lorente

Revisora: Irene García Saavedra

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS

- 1.1. CONCEPTO DE POTENCIA: BASE Y EXPONENTE
- 1.2. CUADRADOS Y CUBOS
- 1.3. LECTURA DE POTENCIAS
- 1.4. POTENCIAS DE UNO Y DE CERO
- 1.5. POTENCIAS DE 10. NOTACIÓN CIENTÍFICA

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

- 2.1. PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE
- 2.2. COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE
- 2.3. ELEVAR UNA POTENCIA A OTRA POTENCIA
- 2.4. POTENCIA DE UN PRODUCTO
- 2.5. POTENCIA DE UN COCIENTE
- 2.6. POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS

3. RAÍCES

- 3.1. CUADRADOS PERFECTOS
- 3.2. RAÍZ CUADRADA. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA
- 3.3. RAÍZ n -ÉSIMA DE UN NÚMERO
- 3.4. INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL
- 3.5. EXTRAER FACTORES DEL RADICAL
- 3.6. SUMA Y RESTA DE RADICALES

Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. En este capítulo repasaremos como operar con ellas.

Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo revisaremos lo que ya conoces para poder usarlas con algo de soltura.

Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3 . Estima que, por ejemplo, caben 100 granos. ¡Ya sabes calcular cuántos hay! Pero en este capítulo aprenderás a escribir ese número tan grande.



1. POTENCIAS

Recuerda que:

Ya conoces las potencias. En este apartado vamos a revisar la forma de trabajar con ellas.



1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo:

- ✚ Juan guarda 7 canicas en una bolsa, cada 7 bolsas en una caja y cada 7 cajas en un cajón. Tiene 7 cajones con canicas, ¿cuántas canicas tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar $7 \times 7 \times 7 \times 7$ que lo puedes escribir en forma de potencia: 7^4 , que se lee 7 elevado a 4.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2401 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$$

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots n \text{ factores} \dots a \quad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia**.

exponente



$$7^4 = 2401$$

base



potencia



Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

- a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3

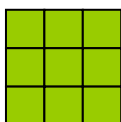
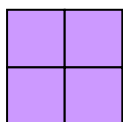
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

- a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4 .

1.2. Cuadrados y cubos

Ya sabes que:

- ✚ Si un cuadrado tiene 2 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. El área de este cuadrado es de 4 unidades. Y si tiene 3 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. El área de este cuadrado es de 9 unidades.



$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es

$$2 \cdot 5 = 10.$$

$$4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

es un cuadrado perfecto y su raíz es

$$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70.$$

Son cuadrados perfectos.

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$81 = 3^2 \cdot 3^2$$

¿Lo son también 121,

3600 y 900?



¿De cuántos cubitos está compuesto el cubo grande si hay 3 a lo largo, 3 a lo ancho y 3 a lo alto? El número de cubitos es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volumen de este cubo es 27 unidades.

Recuerda que:

Por esta relación con el área y el volumen de las figuras geométricas, las potencias de exponente 2 y de exponente 3 reciben nombres especiales:

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

Actividades propuestas

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.

4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

- a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potencias

Recuerda que:

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo:

a) Así 3^2 se puede leer 3 elevado a 2 y también se lee 3 al cuadrado.

b) 11^3 se puede leer 11 elevado a 3 y también se lee 11 al cubo.

c) 6^4 se puede leer 6 elevado a 4 y también se lee 6 a la cuarta.

d) 27^5 se puede leer 27 elevado a 5 y también se lee 27 a la quinta.

1.4. Potencias de uno y de cero

Recuerda que:

Una potencia de cualquier base distinta de cero elevada a cero es igual a 1.

Ejemplo:

$$9^0 = 1 \qquad 8725^0 = 1 \qquad 1^0 = 1.$$

$$5^0 = 1$$

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Ejemplo:

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \qquad 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \qquad 1^{35} = 1 \qquad 1^0 = 1.$$

$$1^{37} = 1$$

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

Ejemplo:

$$0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \qquad 0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \qquad 0^{35} = 0.$$

$$0^{54} = 0$$

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

Actividades propuestas

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6 .

6. Calcula mentalmente:

a) 1^{6562} ; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782} ; e) 1^{1000} ; f) 9761^0 .

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo:

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$$

$$10^8 = 100\,000\,000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Recuerda que:

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$8735 = 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$$

Un número en **notación científica** se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.

$$a \cdot 10^n$$

Ejemplo:



- b) La masa de la Tierra es:

c) La superficie del globo terrestre es de 500 millones de kilómetros cuadrados, luego es igual a: $500.000.000 \text{ km}^2 = 5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$.

- d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Recuerda que:

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplo:

$$7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7$$

$$\text{✚} \quad 6^2 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{2+3} = 6^5$$

2.2. Cociente de potencias de igual base

Recuerda que:

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplo:

$$8^7 : 8^4 = 8^{7-4} = 8^3$$

$$\text{✚} \quad 3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Recuerda que:

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

$$(9^3)^4 = 9^{3 \cdot 4} = 9^{12}$$

$$\text{✚} \quad (5^5)^3 = (5^5) \cdot (5^5) \cdot (5^5) = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{15}$$

Actividades propuestas

12. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $8^{10} \cdot 8^2$

b) $5^{23} \cdot 5^3$

c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$

d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$

e) $(6^3)^2$

f) $(4^2)^4$

g) $(3^0)^6$

h) $(7^3)^2$

i) $9^{10} : 9^2$

j) $3^{23} : 3^3$

k) $11^8 : 11^3$

l) $5^{30} : 5^9$

m) $14^4 : 14^4$

n) $1^{35} : 1^{35}$

o) $7^3 : 7^0$

p) $8^4 \cdot 8^0$

13. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que **todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.**

2.4. Potencia de un producto

Recuerda que:

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

$$\color{blue}{+} (6 \cdot 7)^3 = 6^3 \cdot 7^3.$$

2.5. Potencia de un cociente

Recuerda que:

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Ejemplo:

$$\color{blue}{+} (7 : 9)^3 = 7^3 : 9^3$$

2.6. Potencias de números enteros

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo:

$$\color{blue}{+} (+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$$

$$\color{blue}{+} (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base positiva** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

Ejemplo:

$$\color{blue}{+} (-4)^2 = +16$$

$$\color{blue}{+} (-4)^3 = -64$$

$$\begin{array}{l} (+2)^4 = +16 \quad (- \\ 2)^4 = +16 \\ (-2)^5 = -32 \end{array}$$

Actividades propuestas

14. Calcula:

a) $(5 \cdot 2)^7$

b) $(64 : 4)^3$.

15. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^3$

b) $3^2 \cdot 3^2$

c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$

e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$

f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escribe en forma de una única potencia

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$

b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$

c) $5^{20} \cdot 5^{17}$

d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

17. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$

b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$

c) $10^{15} \cdot 10^5$

d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

18. Calcula **mentalmente**

a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$

b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$

c) $1^{46} \cdot 1^{200}$

d) $5^5 \cdot 2^5$.

19. Escribe en forma de una única potencia y calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$

b) $10^3 \cdot 3^3$

c) $2^6 \cdot 5^6$

d) $10^5 \cdot 5^5$.

20. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\frac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$

b) $\frac{1,6^6 \cdot 1,6^{20} \cdot 1,6^1}{1,6^{15} \cdot 1,6^9}$

c) $\frac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$

21. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\frac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$

b) $\frac{(-1,6)^6 \cdot (-1,6)^{20} \cdot (-1,6)^1}{(-1,6)^{15} \cdot (-1,6)^9}$

c) $\frac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$

22. Calcula utilizando la calculadora

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$

b) $53^3 \cdot 53^2$

c) $5'2^2 \cdot 5'2$

d) $27^3 \cdot 27$.

23. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$

b) $23^4 \cdot 23^2$

c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$

d) $301^2 \cdot 301$.

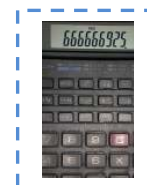
24. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $7,4^2 \cdot 7,4^3 \cdot 7,4$

b) $0,82^4 \cdot 0,82^2$

c) $7,35^3 \cdot 7,35^5$

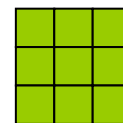
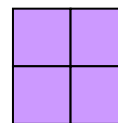
d) $0,002^2 \cdot 0,002$.



3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos

- ✚ Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?



Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.

- ✚ Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo:

- ✚ ¿Cuál es el área de un cuadrado de 7 metros de lado?

Su área vale $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

Recuerda que:

La raíz cuadrada **exacta** de un número a es otro número b cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo:

- ✚ Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto decimos que 2 es la **raíz cuadrada** de 4, es decir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

- ✚ Por tanto como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
- ✚ Al escribir $\sqrt{64} = 8$ se dice que la **raíz cuadrada** de 64 es 8.

Al signo $\sqrt{}$ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 64 y se dice que el **valor de la raíz** es 8.

Ejemplo:

- ✚ Sabemos que el área de un cuadrado es 81, ¿cuánto vale su lado?

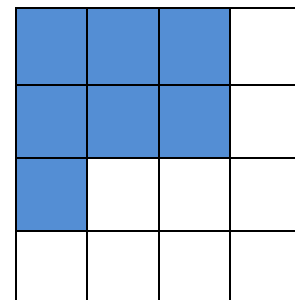
Su lado valdrá la raíz cuadrada de 81. Como $9^2 = 81$, entonces la raíz cuadrada de 81 es 9. El lado del cuadrado es 9.

Ejemplo:

- ✚ ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?

Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.

El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta



porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto y $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrados perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Con más dificultad se puede aproximar esos valores, así $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$, o podemos obtener más cifras decimales: $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$, o bien $2,64575131 < \sqrt{7} < 2,64575132$. Podemos encontrar un valor aproximado de la raíz.

Para calcular raíces cuadradas puedes utilizar la calculadora, con la tecla 

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

Observa que:

El cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo. Luego no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Actividades propuestas

25. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

26. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

27. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

28. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

3.3. Raíz n -ésima de un número

Recuerda que:

- Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ que se lee: *la raíz cúbica* de 8 es 2. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 8$$

La **raíz enésima** de un número a , es otro número b , cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Ejemplo:

- Por ser $27 = 3^3$, se dice que 3 es la *raíz cúbica* de 27, es decir $\sqrt[3]{27} = 3$.
- Por ser $16 = 2^4$, se dice que 2 es la *raíz cuarta* de 16, es decir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que:

Si n es un número par, la potencia n -ésima de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo, luego no existe la raíz n -ésima de un número negativo.

Pero si n es un número impar, la potencia n -ésima de un número, si puede ser negativa.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no existe ya que ningún número, elevado a 4, da -16 .

3.4. Introducir factores en el radical

Recuerda que:

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo:

$$10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$$

3.5. Extraer factores del radical

Recuerda que:

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo:

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2 \sqrt{5}$$

3.6. Suma y resta de radicales

Recuerda que:

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Actividades propuestas

29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

30. Introducir los siguientes factores en el radical:

a) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $10 \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ e) $3 \cdot \sqrt[3]{7}$.

31. Extraer los factores que se pueda del radical:

a) $\sqrt[3]{10000x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.

32. Calcula:

a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

Historia del ajedrez

Cuenta la leyenda que un súbdito enseñó a jugar al ajedrez al príncipe persa Sisso, hijo de Dahir, y le gustó tanto el juego que prometió regalarle lo que pidiera. El súbdito dijo, quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, el doble por la tercera, así hasta llegar a la casilla 64.



A Sisso no le pareció una demanda excesiva, y sin embargo ¡no había trigo suficiente en el reino para pagar eso!

- ¿Cómo se debe representar el cálculo?
- ¿Cuántos granos de trigo le dan por la casilla primera? ¿Y por la casilla segunda? ¿Y por la tercera? ¿Y por la suma de las tres primeras casillas?
- ¿Cuántos granos de trigo corresponden a la casilla 10?
- ¿Y a la 64? Utiliza la calculadora para intentar calcular ese número, ¿qué ocurre?

El secreto

Al hotel de una pequeña ciudad de unos 1000 habitantes llega un famoso cantante intentando pasar desapercibido.

Cuando va a entrar en su habitación, un empleado cree reconocerle y se apresura a comentarlo con tres compañeros.

Las tres personas al llegar a sus casas (en lo que tardan 10 minutos) hablan con sus vecinos y vecinas, llaman por teléfono a amigos y amigas y cada una cuenta la noticia a otras tres personas.

Éstas a su vez, en los siguientes 10 minutos, cada una de ellas cuenta la noticia a 3 personas.

El rumor pasa de unos a otros, y de esta forma, una hora después la noticia es sabida por ¿cuántas personas?

¿Tiene posibilidades el cantante de pasar desapercibido en alguna parte de la ciudad?



Adivina

- ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro unos?
- ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro doses?
- ¿Y cinco doses?

Otros números enormes



Un mosquito hembra pone al día 200 huevos de los que salen hembras, que al cabo de 3 días ya son nuevos mosquitos hembras capaces de poner huevos. Utiliza tu calculadora para ir obteniendo la población de mosquitos hembras: a) Al cabo de 3 días, 200 nuevas hembras, ¿y al cabo de 6 días? ¿Y a los 9 días? ¿Y en un mes (de 30 días)?

Observa en qué poco tiempo tu calculadora empieza a escribir cosas raras. ¡Ya no le cabe ese número tan grande! Tiene un **crecimiento**

exponencial. Si los mosquitos no tuvieran enemigos y no tuvieran competencia por los alimentos, pronto ocuparían todo el espacio.

RESUMEN

		<i>Ejemplos</i>
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	7^2 es 7 al cuadrado y 7^3 es 7 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^6 = 1.000.000$ $10000000 = 10^7$
Notación científica.	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$9^2 \cdot 9^3 =$ $(9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) =$ $9^{2+3} = 9^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a .	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Raíz n-ésima	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introducir y extraer factores en radicales	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Potencias**

1. Escribe en forma de potencias de 10:

a) Un millón

b) Un billón

c) Una centena de millar

2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 25^0

b) 10^6

c) $5 \cdot 10^4$

d) 2^4

e) 4^2

f) 10^2

g) 10^5

h) 10^{12}

i) 10^6

j) 6^3

3. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10.

a) 600000000

b) 250000000

c) 914000000000

4. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:

a. La distancia de la Tierra al Sol $\rightarrow$ 150 000 000 km

b. El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno.
37643750 000 000 000 000 000 átomos



5. Halla en tu cuaderno:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$

b) $(7^4)^2$

c) $6^5 : 3^5$

d) $(9 : 3)^5$

e) $(15 : 5)^3$

f) $(21 : 7)^3$

g) $(75 : 5)^4$

h) $(4 : 2)^5$

i) $8^2 : 2^5$

6. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$ ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?

7. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:

a) $36 \cdot 6^2$

b) $3^3 \cdot 81$

c) $36 : 6^2$

8. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:

a.) $12^7 : 6^7$

b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$

c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$

d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

9. Calcula:

a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales?

b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6 + 8)^2$ ¿Son iguales?

10. Calcula en tu cuaderno:

a) $2^3 + 2^4$

b) $3^5 - 3^4$

c) $5^3 \cdot 5^2$

d) $10^4 \cdot 10^3$

e) $7^4 : 7^2$

f) $10^5 : 10^3$

11. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?



12. Calcula en tu cuaderno:

a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$

b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

13. Calcula 5^3 y 3^5 ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$ ¿Son iguales?

14. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.

15. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$

b) $(16^2 : 4^3)^3$

c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$

e) $3,7^5 \cdot 3,7^2$

f) $(2,5^5 \cdot 2,5^2) : 2,5$

16. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$

b) $9^4 \cdot 27^2$

c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$

e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$

f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

17. Un campo cuadrado mide 3600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?

18. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4 ? ¿Y para obtener 8^8 ?

19. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{121}$

b) $\sqrt{49}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$

f) $\sqrt{196}$

g) $\sqrt{36}$

h) $\sqrt{144}$

21. La superficie de un cuadrado es de 1000000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

22. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt[3]{1000}$

c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$

e) $\sqrt[3]{27}$

f) $\sqrt{1000000}$

23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{60}$

b) $\sqrt{250}$

c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$

d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$

f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$

g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$

h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

24. Introduce los siguientes factores en el radical:

a) $3x\sqrt{x}$

b) $5\sqrt{100}$

c) $6\sqrt{32}$

d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$

f) $7a\sqrt[3]{3}$

g) $5\sqrt[5]{2^4}$

h) $a\sqrt[3]{5}$

25. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.

26. Escribe el signo = o $\neq$ en el hueco:

a) $\sqrt{64+36} \quad ? \quad \sqrt{64} + \sqrt{36}$

b) $\sqrt{9+16} \quad ? \quad \sqrt{9} + \sqrt{16}$

27. Halla en tu cuaderno:

a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}$

b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$

d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$

28. Calcula en tu cuaderno:

a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$

b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2$

d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Problemas

29. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de $7\,225\text{ m}^2$ de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?
30. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?
31. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de $300\,000\text{ km/s}$ y que la luz del Sol tarda 8,25 minutos en llegar a la Tierra.
32. Halla el volumen de un cubo de 1,5 m de arista.
33. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es $8\,100\text{ m}^2$. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.
34. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?
35. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.
36. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.
37. **Arquímedes**, en su tratado *El arenario* contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.
- Calcula el volumen de la Tierra en km^3 , y escribe ese volumen en notación exponencial.
 - Pasa el volumen a mm^3 , en notación exponencial.
 - Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3 . Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.
 - Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm^3 por 100.
 - ¿Has obtenido $1,15 \cdot 10^{32}$ granos de arena?

AUTOEVALUACIÓN

- ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4$, $(-4)^3$ y $(-5)^2$
 a) $-16, -12, 25$ b) $16, -64, 25$ c) $32, -64, 10$ d) $-64, -32, -26$
- ¿Cuál es el resultado de la operación $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2$?
 a) 900 b) $9 \cdot 10^4$ c) $20 \cdot 10^2$ d) 500
- Escribe = (igual) o $\neq$ (distinto) según corresponda:
 a) $3^3 \dots\dots 27$ b) $1^{35} \dots\dots 35$ c) $732^0 \dots\dots 732$ d) $10^5 \dots\dots 50$
- ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?
 a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) -19683
- ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $0'7^6 : 0'7^4$?
 a) $0'7^2$ b) $0'7^3$ c) $0'7^{10}$ d) $6/4$
- ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$?
 a) -1000 b) -30 c) 100 d) 60
- Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0'2)^2)^4$
 a) $(0'2)^8$ b) $(-0'2)^6$ c) $0'032$ d) $-0'0016$
- ¿La raíz cuadrada de 81 vale?
 a) 18 b) 8,7 c) 9 d) 3
- Señala el número que no es cuadrado perfecto:
 a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e) 700
- El lado de una superficie cuadrada de 196 centímetros cuadrados mide:
 a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009651

Fecha y hora de registro: 2013-07-27 20:18:25.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. DIVISIBILIDAD

- 1.1. MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO
- 1.2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD
- 1.3. OBTENCIÓN DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

2. NÚMEROS PRIMOS

- 2.1. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS
- 2.2. LA CRIBA DE ERATÓSTENES
- 2.3. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS
- 2.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS
- 2.5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS
- 2.6. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: “El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos...



Fotografía: Clarisa Rodríguez

1. DIVISIBILIDAD

1.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

✚ Escribe en tu cuaderno la del 3 y la del 6.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 3 y de 6.

Se definen los **múltiplos** de un número entero n como los números que resultan de multiplicar ese número n por todos los números enteros.

Ejemplo:

✚ La tabla del 3 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,....

Todos ellos son múltiplos de 3.

La notación matemática de este concepto es: $\overset{\bullet}{3}$

Es decir: $\overset{\bullet}{3} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\}$.

Ejemplo:

✚ Cuenta los múltiplos de 3 que hubieras podido escribir antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

1. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.
2. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?
15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.
3. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

- a) 3 es **divisor** de 9 porque al dividir 9 entre 3, el resto es 0.
- b) 10 es **divisor** de 100 porque al dividir 100 entre 10, el resto es 0.
- c) 7 es **divisor** de 49 porque al dividir 49 entre 7, el resto es 0.
- d) 1 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 1, el resto es 0.
- e) 47 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 47, el resto es 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

- a) 9 es **divisible** por 3 porque 3 es divisor de 9, es decir, al dividir 9 entre 3, el resto es 0.
- b) 100 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 100, es decir al dividir 100 entre 10, el resto es 0.
- c) 49 es **divisible** por 7 porque 7 es divisor de 49, es decir, al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

Notas

- a) Como habrás deducido, las relaciones ser **múltiplo** y ser **divisor** son relaciones inversas.
- b) **No confundas** las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

+ De la igualdad: $3 \cdot 7 = 21$, podemos deducir lo siguiente:

- 3 y 7 son divisores de 21.
- 21 es múltiplo de 3 y de 7.
- 21 es divisible por 3 y por 7.

Actividades propuestas

- 4. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.
- 5. Escribe frases usando las expresiones: “*ser múltiplo de*”, “*ser divisor de*” y “*ser divisible por*” y los números 27, 3 y 9.

1.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 492, 70, 376, 900, 564, 298 son divisibles por 2, ya que terminan en 2, 0, 6, 0, 4, y 8.

¿Sabrías explicar por qué?

Recuerda que un número cualquiera lo podemos escribir con las potencias de 10:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en todos los sumandos, excepto el último, aparece el 10, y $10 = 2 \cdot 5$, luego todos los sumandos son múltiplos de 2. Si el último lo es, el número es múltiplo de 2, si, como en el ejemplo, termina en 1, aunque el resto de los sumandos sea divisible entre 2, el último no lo es, luego el número no es divisible entre 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 531 es divisible por 3 ya que $5 + 3 + 1 = 9$ que es múltiplo de 3.
- El número 4002 es divisible por 3 ya que $4 + 0 + 0 + 2 = 6$ que es múltiplo de 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 99 es divisible por 3 ya que $9 + 9 = 18$, y 18 es divisible por 3, pues $1 + 8 = 9$ que es múltiplo de 3. Por tanto, 9, 18 y 99 son múltiplos de 3.
- El número 48593778396 es divisible por 3 ya que $4 + 8 + 5 + 9 + 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 = 69$, y 69 es divisible por 3 pues $6 + 9 = 15$, y 15 lo es pues $1 + 5 = 6$, que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 5728 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4, pues $7 \cdot 4 = 28$.
- El número 5718 **no** es divisible por 4 ya que termina en 18, que no es múltiplo de 4, pues $4 \cdot 4 = 16$ y $5 \cdot 4 = 20$.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- ✚ Los números 3925 y 78216570 son divisibles por 5, pues terminan en 5 y en 0.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- ✚ El número 5532 es divisible por 6 ya que:
- Lo es por 2 porque termina en 2.
 - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.
- ✚ El número 2456 **no** es divisible por 6 ya que:
- Lo es por 2 porque termina en 6.
 - No lo es por 3, ya que sus cifras suman $2 + 4 + 5 + 6 = 17$, y $1 + 7 = 8$ que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9

Ejemplo:

- ✚ El número 5022 es divisible por 9 ya que: $5 + 0 + 2 + 2 = 9$.
- ✚ El número 3313 **no** es divisible por 9 ya que: $3 + 3 + 1 + 3 = 10$ que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0

Ejemplo:

- ✚ El número 825160 es divisible por 10 porque termina en 0.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa, si un número es divisible por 2 y por 5, lo es por 10.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- ✚ El número 71335 es divisible por 11 ya que: $(7 + 3 + 5) - (1 + 3) = 15 - 4 = 11$.
- ✚ El número 71345 **no** es divisible por 11 ya que: $(7 + 3 + 5) - (1 + 4) = 15 - 5 = 10$, que no es múltiplo de 11.

Actividades propuestas

6. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?

7. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.

8. Sustituye A por un valor apropiado para que:

- a) 15A72 sea múltiplo de 3.
- b) 2205A sea múltiplo de 6.
- c) 6A438 sea múltiplo de 11.

9. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

10. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

11. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	
984486725	Divisible por 5	
984486720	Divisible por 3	
783376500	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

12. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.

13. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.

14. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que $10 = 9 + 1$. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.

15. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que $10 = 11 - 1$. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.

1.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero N , lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., N . De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- ✚ Si queremos hallar los divisores de 54 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,..., 54 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.

Si la división es exacta, $N : d = c$, entonces el divisor (d) y el cociente (c) son divisores de N , lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- ✚ Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 48.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 48.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) $\rightarrow 48 : 2 = 24 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 2 y 24.

Es divisible por 3. ($4 + 8 = 12$, múltiplo de 3) $\rightarrow 48 : 3 = 16 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 3 y 16.

Es divisible por 4. $\rightarrow 48 : 4 = 12 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 4 y 12.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) $\rightarrow 48 : 6 = 8 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 6 y 8.

Como $48 : 8 = 6$, y el cociente 6 es menor que el divisor 8, ya hemos terminado. 8 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.

Actividades propuestas

16. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- 50 es múltiplo de 10.
- 2 es divisor de 30.
- 4 es múltiplo de 16.
- 66 es divisible por 11.
- 80 es divisor de 8.
- 3 es divisible por 12.

18. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: $372x54y$.

19. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

20. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

- 75
- 88
- 30
- 25
- 160
- 300

2. NÚMEROS PRIMOS

2.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores del 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- ✚ Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- ✚ Números como: 33, 48, 54, 70, 785 o 43215678940 son compuestos.

Actividades propuestas

21. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.
22. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

2.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

- a) Construimos una lista con los números del 1 al 100, en este caso, ordenados de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
- c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
- d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una lista así:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5, algunos de los cuales ya estaban tachados, todos los que terminan en 0.

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- ¿Hasta qué número debemos seguir tachando? ¡Piensa! ¡Piensa! Observa que 100 es igual a $10 \cdot 10$, por tanto al dividir un número menor que 100 por uno mayor que 11 el cociente es menor que 11.

Hemos llegado a una lista de la forma:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
24	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
54	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
84	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números que no quedan tachados en ningún paso no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de “filtro” (criba) por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los “*primos*”.

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97.

Actividades propuestas

23. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

24. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?

Observa que $13 \cdot 13 = 169$ y $17 \cdot 17 = 289$.

25. Busca los distintos significados de las palabras “criba” y “algoritmo”, ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

2.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número. Por ejemplo, si quiero expresar 11 como producto de dos números, sería:

$$11 = 1 \cdot 11 \text{ o también } 11 = 11 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

- ✚ Para descomponer el número 18 podríamos hacer: $18 = 9 \cdot 2$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 9 no es un número primo.

Su descomposición es $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, que se expresa como $18 = 3^2 \cdot 2$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, un número primo no se puede descomponer, no podemos decir $11 = 11 \cdot 1$, pues 1 no es primo) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.
- Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.
- Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.
- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

- Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.
- Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.
- Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

- ✚ Por ejemplo: $80 = 40 \cdot 2$. Como $40 = 4 \cdot 10$ y $10 = 2 \cdot 5$, tenemos que: $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ y por tanto, su descomposición es: $80 = 2^4 \cdot 5$.

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 231: Como 231 no es múltiplo de 2, pero sí de 3, lo dividimos: $231 : 3 = 77$. Como 77 es múltiplo de 7, que es el menor primo posible por el que se pueda dividir: $77 : 7 = 11$. Por tanto: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Esto se suele realizar de la siguiente forma: $\begin{array}{r l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$	2. Vamos a realizar otra factorización para el número 5148: $\begin{array}{r l} 5148 & 2 \\ 2574 & 2 \\ 1287 & 3 \\ 429 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ Por tanto: $5148 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.
--	---

Actividades propuestas

26. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

27. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

28. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342

29. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

30. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

2.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

✚ Vamos a calcular los divisores de los números 60 y 84:

Divisores de 60 → 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisores de 84 → 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

¿Cuáles son los divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

El mayor de los divisores comunes es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 60 y de 84.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

✚ En el ejemplo anterior, escribimos: $M.C.D(60, 84) = 12$

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Actividades resueltas

✚ Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 60, 72 y 84.

1. Factorizamos cada número:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números (2 y 3) elevados el menor exponente: 2^2 y 3.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D.}(60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

31. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80

32. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

2.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy “rudimentaria” y que se complica mucho para números grandes.

✚ Vamos a calcular m.c.m.(20, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 20 → 20, 40, 60, 80, 100, 120, ...

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, ...

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 60, 120, ... pero el menor de ellos es el 60. Por tanto:

$$\text{m.c.m.}(20, 15) = 60.$$

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 60, 72 y 84 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. En nuestro caso: 2^3 , 3^2 , 5 y 7.
3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m.}(60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Actividades propuestas

33. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

34. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

- a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- ✚ Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de cinta roja de 15 m y uno azul de 10 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y quiere cortar la cinta en trozos de la misma longitud para tenerlo preparado para empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima en que puede cortar cada rollo?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 10 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

$$\text{M.C.D.}(15, 10) = 5.$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de cinta en que cortará ambos rollos será de 5 m.

- ✚ Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: *“El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”*. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?



Fotografía: Clarisa Rodríguez

Estamos buscando un número de días que será múltiplo de 2, 4 y 7 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$\text{m.c.m.}(2, 4, 7) = 28$$

Por tanto, dentro de 28 días volverán a coincidir y la abuela les hará el pastel.

Actividades propuestas

- 35.** Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.
- ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
 - ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?
- 36.** La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?
- 37.** Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?
- 38.** Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.
- ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?
 - ¿A qué hora ocurrirá?
- 39.** ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

CURIOSIDADES. REVISTA



¿Quién era Eratóstenes el de la famosa criba que estudiamos antes?

Eratóstenes nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de Africa. Vivió entre los años 275 a C y 195 antes de Cristo.

Por varias décadas, fue el director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue amigo de Arquímedes.

Aún así, Eratóstenes se hizo famoso por tres descubrimientos:

- Por la **medición increíblemente precisa que hizo del diámetro de la Tierra**
- Por haber fabricado una **criba**, o un filtro, para descubrir todos los números primos.
- La invención de la esfera armilar.



¿QUÉ RELACIÓN TIENEN EL ESPIONAJE CON LA EVOLUCIÓN DE ALGUNOS INSECTOS?

La relación entre ambos son los **números primos**.

La teoría de los números primos tiene aplicación en la **criptografía**, ciencia que estudia formas de cifrar mensajes secretos que solo puedan ser descifrados por el receptor, pero por nadie más. El proceso de cifraje requiere el uso de una clave secreta y para descifrar el mensaje, normalmente, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés.

Pero lo ideal sería tener una clave para un cifraje fácil y descifrado difícil. Esto se logra utilizando números primos muy grandes, de 80 cifras o más.

Hoy en día la criptografía tiene gran importancia para las comunicaciones entre los gobiernos, compras por Internet o llamadas por teléfono móvil.



RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
- Divisor - Divisible - Múltiplo	$-a$ es divisor de b cuando al dividir b entre a el resto es 0. $-a$ es múltiplo de b o a es divisible por b cuando al dividir a entre b el resto es 0.	• 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	2: Acaba en 0 o cifra par. 3: La suma de sus cifras es múltiplo de 3. 5: Acaba en 0 o 5. 11: La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	• 7892 es divisible por 2. • 4510 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3. • 2057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Divisibilidad

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.
2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?
3. Sustituye A por un valor apropiado para que:
 - a) 24A75 sea múltiplo de 5.
 - b) 1107A sea múltiplo de 3.
 - c) 5A439 sea múltiplo de 6.
4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:
1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150
5. Busca todos los divisores de 210.
6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Números primos

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de m y n sin averiguar el valor numérico de cada uno:
 - a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
 - b) $m = 3 \cdot 5$ $n = 2 \cdot 7$
 - c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $n = 22 \cdot 32$
 - d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $n = 2 \cdot 52 \cdot 7$
8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:
 - a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es
 - b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es

9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

- | | | | | |
|-----------|-----------|------------|----------|---------------|
| a) 4 y 8 | d) 7 y 10 | g) 10 y 15 | j) 2 y 2 | m) 2, 3 y 4 |
| b) 2 y 3 | e) 6 y 12 | h) 2 y 5 | k) 4 y 1 | n) 3, 6, y 12 |
| c) 3 y 12 | f) 6 y 9 | i) 4 y 6 | l) 3 y 7 | o) 3, 4 y 6 |

10. Calcula:

- | | |
|--------------------|-----------------|
| a) m.c.m.(8, 40) | M.C.D.(8, 40) |
| b) m.c.m.(15, 35) | M.C.D.(15, 35) |
| c) m.c.m.(84, 360) | M.C.D.(84, 360) |

11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes

12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:



- A qué hora volverán a salir juntos de la estación.
- El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?



17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas máquinas durante ese periodo?

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.
 - b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.
 - c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
 - d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
2. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?
 - a) $D(63) = \{1, 3, 7, 21, 63\}$
 - b) $D(63) = \{1, 2, 9, 21, 63\}$
 - c) $D(63) = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$
 - d) $D(63) = \{0, 1, 3, 7, 9, 21, 63\}$
3. La descomposición de 81000 en factores primos es:
 - a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$
 - b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$
 - c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$
 - d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$
4. De los números: 183, 143 y 1973,
 - a) Todos son primos
 - b) Ninguno es primo
 - c) 143 es primo
 - d) 1973 es primo
5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?
 - a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.
 - b) 11 es múltiplo de 121.
 - c) 33 es divisor de 11.
 - d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.
6. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ es:
 - a) La propiedad conmutativa.
 - b) La propiedad distributiva.
 - c) La propiedad asociativa.
 - d) Esa igualdad no es cierta.
7. El M.C.D.(650, 700) es:
 - a) 10
 - b) 30
 - c) 20
 - d) 50
8. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?
 - a) El 17 de septiembre
 - b) El 1 de septiembre
 - c) El 17 de agosto
 - d) Ese año no vuelven a coincidir
9. Queremos alicatar una pared de 615x225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?
 - a) 615
 - b) 15
 - c) 225
 - d) No es posible

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Nieves Zuasti

Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. RAZÓN

1.2. PROPORCIÓN

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

2.1. REGLA DE TRES DIRECTA

2.2. PORCENTAJES

2.3. DESCUENTO PORCENTUAL

2.4. INCREMENTO PORCENTUAL

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

4.1. PROPORCIÓN INVERSA

4.2. REGLA DE TRES INVERSA

5. REGLA DE TRES COMPUESTA

Resumen

En este capítulo revisaremos los conocimientos que tienes del curso anterior sobre razones, porcentajes, proporcionalidad directa, regla de tres simple... y aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.



Interpretación de mapas

Estudiaremos las diferencias entre proporcionalidad directa e inversa, aplicando métodos de resolución de problemas. Utilizaremos también la regla de tres compuesta.

Aprenderemos a aplicar e interpretar todo lo relacionado con la proporcionalidad y su aplicación en la vida cotidiana.

Aplicaremos los conocimientos sobre proporcionalidad en la interpretación de escalas y mapas, utilizando la idea de semejanza, figuras semejantes, ampliación y reducción de figuras, razón de semejanza y escalas. Estudiaremos la razón entre las superficies de figuras semejantes

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. Razón

Ya sabes que:

Razón, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee “**A es a B**”

Ejemplo:

- Comparamos 5 kg de naranjas por 4 €. Podemos establecer la relación entre el precio (4 €) y la cantidad (5 kg)

$$4 : 5 = 0,8 \text{ € el kilo}$$

$\frac{4}{5}$ es la **razón** entre euros y peso de naranjas.

De esta manera si compramos otras cantidades de naranjas podremos calcular el precio a pagar.

Ejemplo:

- La razón que relaciona el gasto de 10 personas y los 500 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{10 \text{ personas}}{500 \text{ litros}} \quad \text{o bien} \quad \frac{500 \text{ litros}}{10 \text{ personas}}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

$$500 : 10 = 50 \text{ litros por persona}$$

Si fueran 5 personas de una misma familia la cantidad de agua gastada será de 250 litros. Si son 400 personas de una urbanización la cantidad de agua será 20000 litros, es decir:

$$\frac{10}{500} = \frac{400}{20000} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50} \quad \text{o bien} \quad \frac{500}{10} = \frac{20000}{400} = \frac{250}{5} = \frac{50}{1}$$

Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de **fracción** pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la **relación** entre dos magnitudes.

Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

Actividades propuestas

- Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente.
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?
- Medio kilo de cerezas costó 1,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.
- La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes

Observa:

Una **fracción** expresa una parte de un todo de **una única magnitud**, mediante sus términos, numerador (las partes que se toman) y denominador (el total de las partes en las que se ha dividido ese todo)

Sin embargo, los términos de **una razón** se refieren a cantidades de **dos magnitudes**, el primero se llama “**antecedente**” y el segundo “**consecuente**”

1.2. Proporción

Ya sabes que:

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios**.

$$\frac{\text{extremo}}{\text{medio}} = \frac{\text{medio}}{\text{extremo}}$$

Se llama "**razón de proporcionalidad**" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

Ejemplo:

✚ En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da $\frac{200}{5} = 40$ kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad**.



Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	200	400	80	40	400	120	3000	800
nº de árboles	5	10	2	1	10	3	75	20

Propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

$$\frac{3000}{75} = \frac{800}{20} \Rightarrow 3000 \cdot 20 = 75 \cdot 800$$

Ideas claras

Observa que la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar

Actividades propuestas

4. Completa las siguientes proporciones:

a) $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$

b) $\frac{0,3}{x} = \frac{7}{14}$

c) $\frac{x}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$

d) $\frac{0,05}{100} = \frac{x}{400}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10

b) 24, 40, 50, 30

c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2,5:

0,5	9	6		20			2,5
			50		8	25	

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Ya sabes que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

El número de vacas y la cantidad de pienso que se necesita. Por ejemplo si el número de vacas fuese el triple habrá que tener triple cantidad de pienso.



Sin embargo, hay relaciones entre magnitudes que no son de proporcionalidad porque cuando una se multiplica o se divide por un número, la otra no queda multiplicada o dividida de la misma forma.

Ejemplo:

El peso y el tamaño del pie de una persona no son magnitudes proporcionales: El doble de la edad no significa el doble de número de zapato.

Ideas claras

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el doble, triple... de la primera supone el doble, triple... de la segunda

Hay magnitudes que no se relacionan proporcionalmente.

Actividades propuestas

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

- La cantidad de filetes que debo comprar y el número de personas que vienen a comer.
- El peso de una persona y su altura.
- El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
- El precio de una tela y lo que necesito para hacer un vestido.
- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
- El peso de una persona y su sueldo.



8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{25}{50} = \frac{30}{x}$

b) $\frac{300}{100} = \frac{7}{x}$

c) $\frac{7,5}{56,9} = \frac{x}{2}$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1

b) 5, 12, 6,10

c) 0,18 4 0,4 18

¿Hay más de una solución?

2.1. Regla de tres directa

Ya sabes que

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad**.

Ejemplo:

- ✚ Cinco viajes a Méjico costaron 6500 €. ¿Cuánto pagaremos por 14 viajes de un grupo de amigos idénticos?

Primero calculamos el precio de un viaje, $6500 : 5 = 1300$ €.

Después calculamos el coste de los 14 billetes: $1300 \cdot 14 = 18200$ €



La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

Ejemplo:

- ✚ Con tres kilos de maíz mis gallinas comen durante 7 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 30 días?

Formamos la proporción ordenando los datos:

$$\frac{3 \text{ kg}}{x \text{ kg}} = \frac{7 \text{ días}}{30 \text{ días}} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12,86 \text{ kg}$$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

$$\begin{array}{l} 3 \text{ kg} \quad \text{—————} \quad 7 \text{ días} \\ x \text{ kg} \quad \text{—————} \quad 30 \text{ días} \end{array} \quad x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12,86 \text{ kg}$$

Ideas claras

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

En la **regla de tres directa** ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Actividades propuestas

10. El coche de Juan gasta 5,5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?
11. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?
12. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?
13. Cuatro camisetas nos costaron 25,5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?



2.2. Porcentajes

Ya sabes que

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Un porcentaje es una razón con denominador 100.

Su símbolo es %.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

“Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100”

Ejemplo:

✚ Calcula el 41 % de 900 El 41 % de 900 = $\frac{41 \cdot 900}{100} = 369$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- ✚ El 50 % equivale a la mitad de la cantidad
- ✚ El 25 % es la cuarta parte de la cantidad
- ✚ El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad
- ✚ El 10 % es la décima parte de la cantidad
- ✚ El 200 % es el doble de la cantidad

¡¡GRANDES REBAJAS!!
40 % DE DESCUENTO
EN TODOS LOS
ARTÍCULOS

Ejemplo:

- ✚ El 25 % de 800 es la cuarta parte de 800, por tanto es $800 : 4 = 200$

Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 40 % son cuarenta partes de esas cien.
El total de una cantidad se expresa como el 100 %

Actividades propuestas

14. Calcula mentalmente:

- a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

2.3. Descuento porcentual

En muchos comercios aparecen los precios antes de la rebaja y los precios rebajados. Con esos dos datos podemos calcular el % de descuento.

Ejemplo:

- ✚ Una camisa costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a 24 €, ¿qué % de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

Calculamos el importe de la rebaja $34 - 24 = 10$ €.

Establecemos la proporción: $\frac{34}{10} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{10 \cdot 100}{34} = 29,41$ %



Ejemplo:

- ✚ Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

El precio inicial equivale al 100 %. Al aplicar el descuento, sólo pagaremos $100 - 12 = 88$ %.

Por tanto, debemos calcular el 100 %: $\frac{528 \cdot 100}{88} = 600$ €



Ideas claras

El **descuento** es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final. Con estos datos podremos calcular el % de descuento aplicado.

Al descontarnos un x % de una cantidad, sólo pagaremos el $(100 - x)$ %.

Actividades propuestas

17. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?
18. ¿Cuál de estas dos oferta ofrece un mayor % de descuento:

Antes 44,99 €
Ahora 31,99 €

Antes 11,99
Ahora 9,99

19. Completa:

- De una factura de 540 € he pagado 459 €. Me han aplicado un % de descuento
- Me han descontado el 16 % de una factura de € y he pagado 546 €.
- Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

2.4. Incremento porcentual

En los **incrementos porcentuales**, la cantidad inicial es menor que la final ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Ejemplo:

- ✚ Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo.

Puedo calcular el 12 % de 150 y sumarlo a 150: $\frac{12 \cdot 150}{100} = 18 \text{ €}$.

En total pagaré $150 + 18 = 168 \text{ €}$.

Ejemplo:

- ✚ Otra forma de aplicar el incremento porcentual puede ser calcular el % final a pagar:

En el caso anterior: $100 + 12 = 112 \%$

Calculamos el 112 % de 150 €: $\frac{112 \cdot 150}{100} = 168 \text{ €}$.

Ejemplo:

- ✚ En un negocio he obtenido un 36 % de ganancias sobre el capital que invertí. Ahora mi capital asciende a 21760 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

El incremento porcentual del 36 % indica que los 21760 € son el 136 % del capital inicial.

Debemos calcular el 100 %: $\frac{21760 \cdot 100}{136} = 16000 \text{ €}$.



2.5. Impuesto sobre el valor añadido IVA

Los artículos de consumo y las actividades económicas llevan asociadas un impuesto IVA que supone un incremento sobre su precio de coste. En España el IVA general que se aplica es el 21 %.

Es importante que, en la publicidad, observemos si el precio que se indica de un artículo o servicio es con IVA incluido.

Ideas claras

En los **incrementos** porcentuales, la cantidad inicial aumenta porque se le aplica un tanto por ciento mayor que el 100 %.

El **IVA** es un impuesto que supone un incremento sobre el precio inicial

Actividades propuestas

20. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.
21. Una persona invierte 3570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3659,25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.
22. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?
23. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 \$	105 \$	90,4 \$	100,20 \$	12 \$
Precio final					

24. El precio de un televisor es 650€ + 21% IVA. Lo pagaremos en seis mese sin recargo. Calcula la cuota mensual.

CURIOSIDADES. REVISTA

La divina proporción

La proporción armónica

La proporción áurea

¡Imaginas que existe una proporción con esos nombres! Además, ¡Está en **TODAS** partes!

¿Qué es?

Como su nombre indica es una proporción. Una longitud se divide en dos, $a + b$, de forma que se verifique:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Ese cociente da un número, un valor, al que se llama **número de oro** y es aproximadamente igual a 1,618...

Teano fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos **la proporción áurea**. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas.

Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la Escuela Pitagórica, y su relación con la divina proporción.

Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva

La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro:

$$\frac{\text{Segmento verde}}{\text{Segmento rojo}} = \frac{\text{Diagonal}}{\text{Lado}} = 1,618....$$

Se llama "La Divina Proporción" porque los objetos con esta proporción son armoniosos a la vista.

Muchas flores son pentagonales



Si quieres saber si tú eres armónica debes medir tu altura y también la distancia desde tu ombligo al suelo. Si esa razón es próxima al número de oro, ¡lo eres!



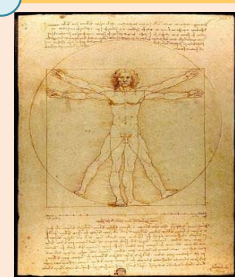
La relación entre la distancia entre las espiras del interior de algunos caracoles es la proporción áurea



La relación entre las falanges de los dedos es la divina proporción

En el Hombre de Vitruvio, Leonardo da Vinci estudió la Divina Proporción.

Busca en Internet para saber más



RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplo
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$

PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. Escribe la cantidad
2. Multiplica por el tanto
3. Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.

Ejemplo:

650	*	16	SHIF	%	=	104
-----	---	----	------	---	---	-----

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- Sigue los pasos 1, 2 y 3 anteriores
- Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual
- Pulsa la tecla – para una disminución porcentual

Ejemplo:

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4
------	---	----	-------	---	-------	---	--------

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6
------	---	----	-------	---	-------	---	--------

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos.
- ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental:
 - 6, 24, 12, 3
 - 35, 0,5, 1,25, 7
- Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?
- Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11,36		56,8		25,56

- En España muchos productos llevan en el precio un impuesto llamado IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), del 21 %. En los tickets de los establecimientos suelen marcar el precio final, sumando el 21 % de IVA. Calcula el precio final de una batidora que vale 110 € + IVA
- Con 48 € puedo comprar 20 piezas de madera. Si las piezas costaran 1,50 € cada una, ¿cuántas podría comprar con el mismo dinero?
- ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

MASA DE ROSQUILLAS 2kg de harina 6 huevos 1kg y medio de azúcar	MASA DE ROSQUILLAS Medio kilo de harina 4 huevos 400 g de azúcar	
---	--	---

- Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso, ¿cuántos días podremos dar de comer a las restantes?
- Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4,5		10		3

- Cada gominola cuesta 5 centimos y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?



- Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿Cuánto tiempo tardarán el llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?

12. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado

Antes	Después
23,95	15,95

13. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21,6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12,20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?
14. Un empleado público que gana 1154€ netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5% a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?
15. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.
16. El precio de un ordenador portátil es 899 € IVA (21%) incluido. Calcula su precio sin IVA.
17. El juego cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324 € + IVA (21%). Calcula el precio de cada rueda.

AUTOEVALUACIÓN

- Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:
a) 22,4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €
- Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699,20€. El importe total de la factura sin descuento era:
a) 920€ b) 1220€ c) 880€
- Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:
a) 3227 € b) 2998 € c) 3028 €
- El Real Murcia tiene esta temporada 14031 abonados, lo que supone el 45% del aforo del estadio Nueva Condomina. ¿Cuál es el aforo total del estadio?
- Hemos comprado tres pantalones que cuestan 14 euros cada uno y dos camisas cuyo valor es de 12 euros cada una. Los pantalones están rebajados un 12% y las camisas un 7% ¿Cuánto tendremos que pagar en total?
- Los valores que completan las operaciones siguientes son:
El 25 % de 0,28 es El de 630 es 63 El 150 % de es 120
a) 0,07, 10, 80 b) 0,7, 10, 90 c) 0,7, 3, 80
- Al efectuar un incremento porcentual del 18% sobre estas tres cantidades, 350, 99 y 6 obtenemos:
a) 413; 116,82; 7,08 b) 630; 116,82; 7,08 c) 403; 112; 7,08
- Pedro ha comprado un abrigo que costaba 60 euros. Le han hecho un 25% de descuento. ¿Cuánto ha pagado en total?
a) 15 euros. b) 25 euros. c) 45 euros.
- Un litro de leche de una determinada marca cuesta 0'70 euros, pero si se compra una caja de 12 litros, hacen un 5% de descuento. Si compramos la caja de 12, ¿cuánto tendremos que pagar?
a) 3'5 euros b) 8'48 euros c) 7'98 euros
- Un comerciante de moda decide subir un 10% el precio de venta de todos los pantalones que vende, pero dos días después piensa que hay una marca cuyo precio con la subida estaban en 33 y que no quiere subir. El precio antes de la subida era
a) 29'7 euros b) 30 euros c) 30'5 euros

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Pedro Luis Suberviola Serrano

Revisor: Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF más Wikipedia y producción propia

Índice

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

- 1.1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES
- 1.2. EL METRO.
- 1.3. EL LITRO.
- 1.4. UNIDADES DE MASA

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

3. MEDIDA DEL TIEMPO

4. UNIDADES MONETARIAS

Resumen

Un accidente interestelar, la búsqueda infructuosa de un tesoro sumergido... todo debido a la confusión entre las unidades de medida. Por eso es importante saber si estamos usando nuestro Sistema Internacional de Unidades (SI), o si se emplean unidades anglosajonas.

En este capítulo vamos a revisar tus conocimientos del curso anterior sobre las unidades de medida del Sistema Internacional de Unidades (SI), (antiguamente Sistema Métrico Decimal), a hacer cambios entre unas unidades y otras. También revisaremos las llamadas unidades agrarias: área, hectárea...

Ampliaremos este conocimiento con la medida de ángulos y las unidades de tiempo, tan útiles, que usan un sistema distinto al decimal, el sistema hexagesimal.

Añadiremos las unidades monetarias que nos van a servir entre otras cosas para el cambio de divisas

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Recuerda que:

En este apartado vamos a revisar tus conocimientos del curso anterior sobre el Sistema Internacional de Medidas.

Magnitud

Una **magnitud** es una característica que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número.

Una magnitud se mide comparándola con un patrón que tenga bien definida esa magnitud y observando el número de veces que lo contiene. A ese patrón le llamamos **unidad de medida**.

Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

Ejemplo:

- La longitud es una magnitud y se puede expresar en kilómetros, metros, centímetros, millas, pulgadas,... Puedo decir que alguien mide 1,52 metros, 152 centímetros, 4,98 pies, 59,76 pulgadas,... la altura es la misma, pero está expresada en distintas unidades.



Observa que no se puede decir que *alguien mide 1 longitud, 2 longitudes*,... pues la longitud es la magnitud, no la unidad, que podría ser el centímetro. Igual no se dice que *alguien pesa 1 masa, 2 masas*,... ya que masa es la magnitud, que se mide en kilogramos.

1.1. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Para poder **comparar** el valor de varias magnitudes debemos utilizar una misma unidad de medida.

Ejemplo:

- Si quiero comparar las medidas de una mesa que uso en clase con una mesa de mi casa, debo utilizar la misma unidad. Si una la mido en centímetros y la otra en pulgadas, no puedo compararlas.

Para facilitar el intercambio científico, cultural y comercial, en casi todos los países se ha adoptado el **Sistema Internacional de Unidades (SI)** como sistema de medidas.

Es el heredero del antiguo **Sistema Métrico Decimal** y por ello también se le conoce como **Sistema Métrico** o simplemente como **Sistema Internacional (SI)**.

Algunas de las unidades que utiliza para las distintas magnitudes son:

Longitud	Superficie	Volumen	Masa	Tiempo
El metro	El metro cuadrado	El metro cúbico	El kilogramo	El segundo

Observa que:

El segundo, que es una medida fundamental del Sistema Internacional de Unidades, como bien sabes, no es decimal, 100 segundos no son una hora ni un minuto. Sin embargo en el resto de los casos, para pasar de una unidad a otra que sea múltiplo o submúltiplo, hay que multiplicar por una potencia de diez. Por ello, en ocasiones, se habla del Sistema Métrico *Decimal*.

En general, los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal se nombran añadiendo prefijos (kilo, centi,...). Lo estudiaremos con más detenimiento más adelante.

Recuerda: Existen unidades, como por ejemplo los pies, que usan en múltiplos y submúltiplos un sistema decimal, pero no forman parte del Sistema Internacional de Unidades. Mientras que otras, como el segundo, que si forman parte del Sistema Internacional de Unidades no usan un sistema decimal.

Nota curiosa:

Según la Física Clásica las unidades fundamentales de masa, tiempo y longitud son propiedades de los objetos, pero según la Teoría de la Relatividad ya NO son propiedades "reales" de los objetos. Al observar un objeto desde fuera, cuanto más velocidad lleve ese objeto más se achata la longitud, más se acelera el tiempo y más aumenta la masa del objeto. El tiempo es relativo, así como la longitud o la masa.

Las unidades fundamentales que usaremos son tres: masa (kg), tiempo (s) y longitud (m). Otras son unidades derivadas, como de superficie (metro cuadrado), de volumen (metro cúbico) o por ejemplo, la velocidad que se puede medir en kilómetros por hora (km/h).

Actividades propuestas

- Clasifica como magnitudes o unidades de medida. Indica cuáles de las unidades de medida pertenecen al SI:
 - Centímetro cúbico
 - Tiempo
 - Hora
 - Memoria de un ordenador
 - Gramo
 - Masa
 - Longitud
 - Kilómetros por hora
- Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:
 - Área
 - Herzio
 - Yuan
 - Grado Fahrenheit
 - Año luz
- Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:
 - La edad de la Tierra
 - El tamaño de un jardín
 - La capacidad de un bidón
 - La distancia entre Madrid y Valencia
 - La masa de un armario
 - Lo que tardas en hacer un problema
- Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

12 °C	2 km	33 m ²	5 l	0,55 g
masa	longitud	capacidad	superficie	temperatura

1.2. El metro

Recuerda que:

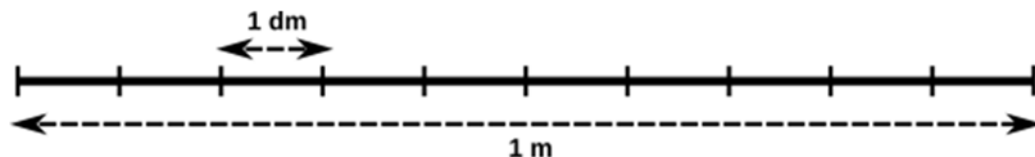
Unidades de longitud

El **metro** es una unidad de medida de longitud y se representa por **m**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1.000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m



Un metro está dividido en 10 decímetros

Existen otros submúltiplos:

Micrómetro (μm). $1 \mu\text{m} = 0,001 \text{ mm} = 0,000.001 \text{ m}$

Nanómetro o micra (nm). $1 \text{ nm} = 0,001 \mu\text{m} = 0,000.000.001 \text{ m}$

Ångström (Å). $1 \text{ Å} = 0,1 \text{ nm} = 0,000.000.000.1 \text{ m}$

Otras unidades de longitud, que no son múltiplos o submúltiplos del metro son:

Unidad astronómica (UA): Es la distancia media entre la Tierra y el Sol, y es igual a 150 millones de km.

Año luz: Es la distancia recorrida por un rayo de luz en un año y es igual a:

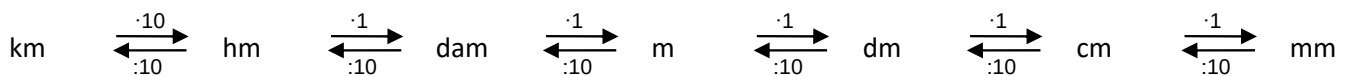
$$1 \text{ año luz} = 63.240 \text{ UA} = 9.460.000.000.000 \text{ km}$$

Ejemplos:

- El átomo más pequeño, el de hidrógeno, tiene aproximadamente 1 Å de diámetro.
- Los chips electrónicos están compuestos de transistores de 22 nm de tamaño.
- La Vía Láctea tiene de radio 50.000 años luz.
- El diámetro de un cabello es de aproximadamente $0,1 \text{ mm}$
- Un espermatozoide mide $53 \mu\text{m}$, un hematíe $7 \mu\text{m}$.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de longitud debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.



Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Actividades resueltas

- Expresa en metros:

a) $8,25 \text{ km} = 82,5 \text{ hm} = 825 \text{ dam} = 8250 \text{ m}$

$8,25 \text{ km} = [3 \text{ posiciones}] = 8.250 \text{ m}$

b) $712 \text{ mm} = 71,2 \text{ cm} = 7,12 \text{ dm} = 0,712 \text{ m}$

$712 \text{ mm} = [3 \text{ posiciones}] = 0,712 \text{ m}$

c) $6,32 \text{ hm} = 632 \text{ m}$

d) $34 \text{ cm} = 0,34 \text{ m}$

e) $0,063 \text{ km} = 63 \text{ m}$

f) $25 \text{ km } 3 \text{ hm } 7 \text{ m} = 25307 \text{ m}$

g) $9 \text{ dam } 6 \text{ m } 8 \text{ dm } 5 \text{ mm} = 96,805 \text{ m}$

Actividades propuestas

5. Si Ramón mide 1,65 metros y Jesús mide 164 centímetros: ¿Quién es más alto?

6. Contesta con una regla graduada:

a) Mide la longitud de tu cuaderno. ¿Cuánto mide?

b) Mide un lápiz. ¿Cuánto mide?

7. Averigua cuánto mide de largo tu habitación.

8. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:

a) 54 dm

b) $21,08 \text{ m}$

c) $8,7 \text{ hm}$

d) 327 mm

9. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:

a) $8 \text{ m } 1 \text{ mm}$ en centímetros

b) $3,5 \text{ km } 27 \text{ dam}$ en centímetros

c) $13 \text{ km } 21 \text{ mm}$ en milímetros

d) $7 \text{ hm } 15 \text{ cm}$ en centímetros

e) $2 \text{ dam } 5 \text{ dm}$ en metros

f) $0,6 \text{ m } 340 \text{ mm}$ en decímetros

Unidades de superficie

Recuerda que:

El **metro cuadrado** es la unidad de medida de superficie y se representa por m^2 .

Es una unidad derivada del metro. No es una unidad fundamental.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

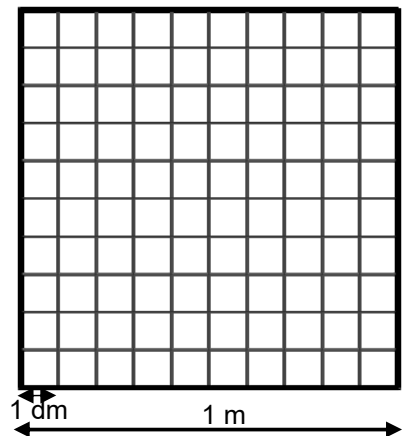
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cuadrado	Hectómetro cuadrado	Decámetro cuadrado	Metro cuadrado	Decímetro cuadrado	Centímetro cuadrado	Milímetro cuadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000.01 m^2	0,000.000.1 m^2

Comprobemos que en $1 m^2$ hay 100 dm^2 :

Un metro cuadrado es la superficie que tiene un cuadrado de 1 m de lado.

Dividimos cada uno de sus lados en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Unimos los extremos de los segmentos formando cuadrados. Obtenemos 100 cuadrados de 1 dm de lado. Es decir, en el metro cuadrado hay 100 de estos cuadrados, es decir, 100 dm^2 .



Ejemplos:

- Un piso suele medir entre 60 m^2 y 110 m^2 .
- Un campo de fútbol para partidos internacionales mide entre 64 dam^2 y 82,5 dam^2 .
- La ciudad de Valladolid tiene una superficie de 197,91 km^2 , la de Madrid 605,8 km^2 .
- La provincia del estado español con mayor superficie es Badajoz, con 21.766 km^2 , la menor Guipúzcoa con 1.980 km^2 .
- La provincia de Madrid tiene 8.027 km^2 de superficie. Imagina un rectángulo de 100 km de ancho y 80 km de largo.
- El estado de la Unión Europea con mayor superficie es Francia, con 547.030 km^2 .

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **superficie** debemos multiplicar o dividir por **cien** tantas veces como sea necesario.

$$km^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} hm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} dam^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} m^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} dm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} cm^2 \xrightleftharpoons[\cdot 100]{\cdot 100} mm^2$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de dos en dos cifras.

Actividades resueltas

- Expresa en metros cuadrados:

a) $0,743 \text{ km}^2 = 743.000 \text{ m}^2$

$0,743 \text{ km}^2 = [6 \text{ posiciones a la derecha}] = 743.000 \text{ m}^2$

b) $95.400 \text{ mm}^2 = 0,0954 \text{ m}^2$

$95.400 \text{ mm}^2 = [6 \text{ posiciones a la izquierda}] = 0,0954 \text{ m}^2$

c) $5,32 \text{ hm}^2 = 53.200 \text{ m}^2$

d) $37 \text{ cm}^2 = 0,0037 \text{ m}^2$

e) $82 \text{ km}^2 = 82.000.000 \text{ m}^2$

f) $4 \text{ km}^2 53 \text{ hm}^2 2 \text{ m}^2 = 4.530.002 \text{ m}^2$

g) $3 \text{ dam}^2 15 \text{ m}^2 23 \text{ dm}^2 = 315,23 \text{ m}^2$

Actividades propuestas

10. Observa la tabla anterior y calcula:

a) $35 \text{ dam}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$

b) $67 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}^2$

c) $5 \text{ km}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$

d) $7 \text{ m}^2 = \underline{\hspace{2cm}} \text{ hm}^2$

11. Pasa $98 \text{ hm}^2 37 \text{ dam}^2$ a centímetros cuadrados.

Unidades agrarias

Son unidades que no pertenecen al Sistema Internacional pero se utilizan para medir superficies rurales, bosques, plantaciones,...

El **área** $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 = 1 \text{ dam}^2$

La **hectárea** $1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 100 \text{ dam}^2 = 1 \text{ hm}^2$

La **centiárea** $1 \text{ ca} = 0,01 \text{ a} = 1 \text{ m}^2$

Es decir, para hacer la conversión entre unidades agrarias y su conversión con el Sistema Internacional podemos utilizar la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccccc} \text{hm}^2 & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{dam}^2 & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{m}^2 \\ \text{ha} & \xleftarrow{:100} & \text{a} & \xleftarrow{:100} & \text{ca} \end{array}$$

Ejemplos:

- Una **hectárea** es un cuadrado de 100 m de lado. Un campo de fútbol mide 62 áreas, aproximadamente media hectárea. Para hacernos una imagen mental, podemos pensar que dos campos de fútbol son más o menos una hectárea.
- La superficie incendiada en España cada año es, en promedio, unas 125.000 ha. La provincia más pequeña es Guipúzcoa, con 1.980 km^2 , es decir, 198.000 ha. Es decir, el área incendiada cada año es aproximadamente el de esa provincia.

Actividades resueltas

- Expresa en hectáreas:

a) $5,7 \text{ km}^2 = 570 \text{ hm}^2 = 570 \text{ ha}$

b) $340.000 \text{ ca} = 34 \text{ ha}$

c) $200.000 \text{ dm}^2 = 0,2 \text{ hm}^2 = 0,2 \text{ ha}$

d) $930 \text{ dam}^2 = 9,3 \text{ hm}^2 = 9,3 \text{ ha}$

Actividades propuestas

12. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 1.678 ha

b) 5 ha

c) $8 \text{ ha } 20 \text{ a}$

d) 28.100 ca

13. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados

b) Decámetros cuadrados

c) Hectáreas

d) Áreas.

Unidades de volumen

El **metro cúbico** es la unidad de medida de **volumen** y se representa por **m³**.

Es una unidad derivada del metro.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

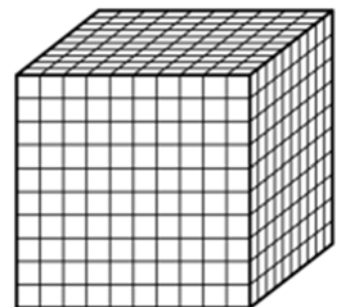
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	Metro cúbico	Decímetro cúbico	Centímetro cúbico	Milímetro cúbico
km ³	hm ³	dam ³	m ³	dm ³	cm ³	mm ³
1.000.000.000 m ³	1000.000 m ³	1000 m ³	1 m ³	0,001 m ³	0,000.000.1 m ³	0,000.000.000.1 m ³

Comprobemos que en 1 m³ hay 1000 dm³:

Un metro cúbico es el volumen que tiene un cubo de 1 m de arista.

Dividimos cada uno de sus aristas en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Cortamos el cubo paralelamente a las caras. Obtenemos 1.000 cubos de 1 dm de arista. Es decir, en el metro cúbico hay 1.000 de estos cubos, es decir, 1.000 dm³.



Ejemplo:

- El consumo de agua y de gas en las facturas se mide en m³. Una persona consume de media 4,5 m³ de agua al mes.
- El tamaño de un embalse pueden ser 50 hm³ de capacidad.
- Uno de los embalses de mayor capacidad en España es el de la Almedra, con 2,6 km³ de capacidad.
- La capacidad total de los embalses de España es de 55 km³.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **volumen** debemos multiplicar o dividir por **mil** tantas veces como sea necesario.

$$\text{km}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{hm}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{dam}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{m}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{dm}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{cm}^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1000} \\ \xleftarrow{: 1000} \end{array} \text{mm}^3$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de tres en tres cifras.

Actividades resueltas

- Expresa en metros cúbicos:

a) $0,743 \text{ km}^3 = 743.000 \text{ m}^3$

$0,743 \text{ km}^3 = [6 \text{ posiciones a la derecha}] = 743.000 \text{ m}^3$

b) $95.400 \text{ mm}^3 = 0,0954 \text{ m}^3$

$95.400 \text{ mm}^3 = [6 \text{ posiciones a la izquierda}] = 0,0954 \text{ m}^3$

c) $5,32 \text{ hm}^3 = 53.200 \text{ m}^3$

d) $457 \text{ cm}^3 = 0,457 \text{ m}^3$

e) $61 \text{ km}^3 = 61.000.000 \text{ m}^3$

f) $3 \text{ km}^3 52 \text{ hm}^3 8 \text{ m}^3 = 3.520.008 \text{ m}^3$

g) $9 \text{ dam}^3 6 \text{ m}^3 34 \text{ dm}^3 = 906,34 \text{ m}^3$

Actividades propuestas

14. Expresa en metros cúbicos $3,2 \text{ dam}^3$ 5600 dm^3 .

15. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) $0,38 \text{ m}^3$

b) 81 dm^3

c) $1,23 \text{ hm}^3$

d) 52 m^3

1.3. El litro

Recuerda que:

La "*capacidad*" es la misma magnitud que el "*volumen*", por tanto se mide la capacidad de un recipiente, (cuánto volumen le cabe) con el metro cúbico y sus derivados. El *litro* se utiliza por razones históricas, y no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Aunque nos conviene conocerlo si lo consideramos como una unidad de volumen "coloquial" utilizada normalmente para medir la capacidad de los recipientes. Un litro corresponde con un dm^3 , y se utilizan múltiplos de litro como si fuera una unidad más del SI, con múltiplos y divisores decimales.

La **capacidad** es el volumen (generalmente de materia líquida o gaseosa) que es capaz de albergar un recipiente.

Su unidad de medida es el **litro** y se representa por **L**.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilolitro	Hectólitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
1000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

Ejemplos:

- Una botella de agua grande tiene una capacidad de 1,5 L.
- Un depósito de gasóleo para una casa puede tener una capacidad de 4 hL.
- Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cL.
- Una dosis típica de jarabe suele ser de 5 mL.
- En una ducha de cinco minutos se utilizan unos 90 L de agua.
- Como hemos visto, cuando medimos capacidades de agua grandes se utilizan unidades de volumen (m^3 , hm^3 , ...).

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de capacidad debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario. Igual que con metros, pues la unidad no está elevada ni al cuadrado ni al cubo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{kL} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{hL} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{daL} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{L} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{dL} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{cL} & \xleftrightarrow[\cdot 10]{:1} & \text{mL}
 \end{array}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplo:

- Expresa en litros:
 - a) 5,7 hL = 570 L
 - b) 200 mL = 0,2 L
 - c) 9,5 kL = 9500 L
 - d) 0,0345 kL = 34,5 L
 - e) 710 cL = 7,1 L
 - f) 9,2 mL = 0,0092 L

Actividades propuestas

16. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?

17. Expresa en hectolitros:

- a) 34 L b) 1.232 cL c) 57 daL d) 107 hL

Relación entre litros y m^3

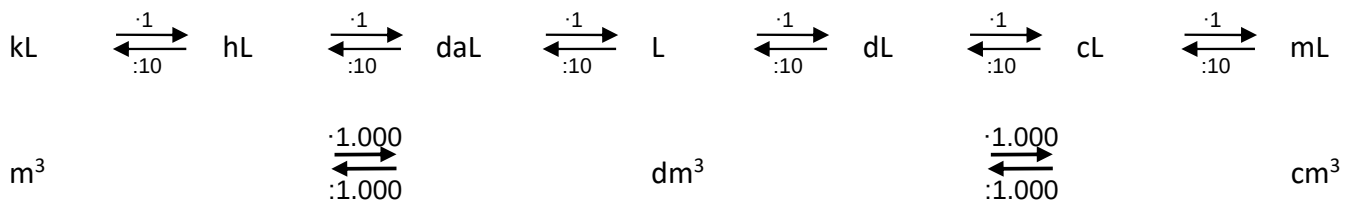
Los litros se relacionan con las unidades de volumen porque 1 L equivale a 1 dm^3 . Por lo tanto:

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ kL} = 1 \text{ m}^3$$

Si lo añadimos al esquema de cambios de unidades de capacidad:



Ejemplos:

- ✚ Un depósito de agua de 1 m³ tiene 1 kL de capacidad, es decir, 1.000 L, mil litros.
- ✚ En los botellines de agua, dependiendo de la marca, se expresan la cantidad de agua en mL o en cm³ es decir, como capacidad o como volumen. Pueden poner 250 mL o 250 cm³.
- ✚ Un litro de leche ocupa un volumen de 1 dm³.

Actividades resueltas

- ✚ Expresa en litros:
 - a) 7,2 dm³ = 7,2 L
 - b) 52 m³ = 52 kL = 52.000 L
 - c) 33 cm³ = 33 cL = 0,033 L
- ✚ Expresa en decímetros cúbicos:
 - a) 0,635 hL = 63,5 dm³ = 63,5 dm³
 - b) 23 cL = 0,23 L = 0,23 dm³
 - c) 73,5 kL = 73.500 L = 73.500 dm³
 - d) 0,5 dL = 0,05 L = 0,05 dm³

Actividades propuestas

18. Ordena de menor a mayor estas medidas:

- a) 7,0001 hm³
- b) 23.000 L
- c) 8 mL
- d) 4 mm³

19. Calcula el volumen (en litros y en cm³) de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

1.4. Unidades de masa

Recuerda que:

El **kilogramo** es la unidad de medida de masa y se representa por **kg**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Unidad	Submúltiplos					
Kilogramo	Hectogramo	Decagramo	Gramo	Decigramo	Centigramo	Miligramo
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1000 g	100 g	10 g	1 g	0,1 g	0,01 g	0,001 g

Múltiplos			Unidad
Tonelada métrica	Quintal métrico	Miriagramo	Kilogramo
tm	qm	mag	kg
1000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

La **tonelada** y el **quintal** no son múltiplos del gramo ni pertenecen al SI. En origen una tonelada eran 960 kg y corresponde a 20 quintales de 46 kg o 100 libras, pero cuando se impuso el SI continuaron usándose, aunque "redondeados" a 1000 kg y 100 kg. Estas nuevas unidades son la **tonelada métrica** (tm) y el **quintal métrico** (qm), que si pertenecen al Sistema Universal de Unidades.

Nota:

¡La masa no es lo mismo que el peso!

Una bola de acero peso mucho en la Tierra, pero no pesa nada en el espacio, y aún así, si te la tiran con fuerza te sigue dando un buen golpe. La fuerza de ese golpe te dice que tiene mucha masa (gramos). La masa se conserva en el espacio porque es una verdadera magnitud, pero el peso es una fuerza debida a la gravedad de la Tierra. Solo en la Tierra la masa y el peso de una persona coinciden como cantidad, por eso es normal decir que alguien "*pesa tantos kg*" aunque no sea del todo correcto, se debería decir que "tiene una masa de 70 kg y, en la Tierra, pesa 70 kgf (kilo gramos fuerza)".

En los ejemplos siguientes usaremos kg como peso por seguir con la forma *coloquial* de hablar, pero deberíamos usar kgf o decir que "tiene una masa de 70 kg".

Cuando pedimos en la tienda *un kilo de patatas*, estrictamente, desde el punto de vista matemático, estamos diciendo *mil patatas*, puesto que el prefijo *kilo* significa *mil*.

No significa que esté mal decirlo, debemos distinguir distintos contextos y situaciones.

En la tienda podemos comprar *un kilo de patatas*, mientras que en clase de matemáticas diremos *un kilogramo de patatas*.

Ejemplos:

- ✚ Una persona adulta puede pesar 70 kg (bueno, deberíamos decir "tiene una masa de 70 kg" como ya comentamos antes).
- ✚ En un bocadillo se suelen poner unos 40 g de embutido.
- ✚ Para plantar trigo, se utilizan entre 60 kg y 250 kg de semilla por hectárea y se cosechan varias toneladas por hectárea.
- ✚ El peso de un coche vacío es de unos 1.200 kg.
- ✚ El peso máximo autorizado de un vehículo con dos ejes es de 18 t.
- ✚ Un elefante africano puede pesar hasta 7,5 t. Una ballena azul, 120 t.

Actividad resuelta

- ✚ ¿Pesa más un kilogramo de hierro que uno de paja?

La masa es igual, pero ambas están en la Tierra rodeadas de aire, e igual que ocurre si están rodeadas de agua, el hierro irá hacia abajo con más fuerza que la paja que "flota más" tanto en el agua como en el aire. Piénsalo así: ¿Que pesa más, un trozo de hierro de 100 kg o un globo aerostático de 100 kg que está flotando? Si el globo vuela, ¿es que no pesa?

Volvemos a la misma idea de antes. No debemos confundir el peso (que es una fuerza) con la masa.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de masa debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{kg} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{hg} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{dag} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{g} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{dg} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{cg} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 1} \\ \xleftarrow{:10} \end{array} \text{mg}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Un **litro** de agua tiene de masa, casi de forma exacta **1 kg**. Esta aproximación se puede realizar, de forma menos precisa, para otros líquidos.

Actividades resueltas

✚ Expresa en gramos:

- a) 0,45 kg = 45 g b) 712 mg = 0,712 g c) 9,32 hg = 932 g
 d) 8,57 cg = 0,0857 g e) 0,031 kg = 31 g f) 56 kg 3 hg 7 g = 56307 g
 g) 7 dag 2 g 3 dg 5 mg = 72,305 g

✚ Expresa en kilogramos:

- h) 8,2 t = 8200 kg i) 340 g = 0,34 kg j) 2,4 q = 240 kg
 k) 92 mag = 920 kg l) 678 hg = 67,8 kg m) 8900 dag = 89 kg

✚ Supongamos que hemos comprado 1 kg de alubias, 2,5 kg de fruta, 2 L de leche y dos botellas de 1,5 L de agua. Si queremos calcular el peso de la compra de forma aproximada, podemos cambiar los litros por kilogramos.

$$1 \text{ kg} + 2,5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 8,5 \text{ kg}$$

Nuestra compra pesa aproximadamente 8,5 kg.

Actividades propuestas

20. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:

- a) 17 g b) 59 dag c) 73,5 kg d) 350 g

21. Expresa en gramos las siguientes masas:

- a) 3,6 dag b) 59 kg c) 740,5 kg 8,5 dag d) 3 dag 15,10 dg

22. Expresa en kilogramos:

- a) 5 t 5 q 2,5 mag b) 9,35 t 750 dag c) 712 q 459 hg d) 22 t 3 mag 8 kg

23. Estima la masa de:

- a) tu cuaderno b) tu bolígrafo c) tu cartera d) tu mesa

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

Para medir ángulos utilizamos el llamado **sistema sexagesimal**. La unidad de medida es el **grado sexagesimal**. Se representa con el símbolo $^{\circ}$ y se define como $1/360$ de un ángulo completo.

$$1^{\circ} = 1 / 360 \text{ parte de un ángulo completo}$$

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = $1' = 1/60$ parte de un grado

Segundo 1 segundo = $1'' = 1/60$ parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en **forma compleja**. En la **forma incompleja** de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

$$1 \text{ ángulo completo} = 360^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo llano} = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo recto} = 90^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 60 \text{ minutos} = 3600 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$$

Ejemplo:

Forma compleja: $A = 12^{\circ} 40' 32''$ $B = 13^{\circ} 54''$ $C = 120^{\circ} 23''$

Forma incompleja: $D = 35000''$ $E = 23^{\circ}$ $F = 34'$

Ejemplo:

$$A = 12^{\circ} 23' 10'' = 12 \cdot 3600'' + 23 \cdot 60'' + 10'' = 44590''$$

Ejemplo:

Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35000''	60	583'	60
500	583'	43'	9°
200			
20''			

$$D = 35000'' = 583' 20'' = 9^{\circ} 43' 20''$$

Actividades propuestas

24. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) $12500''$ b) $83'$ c) $230''$ d) $17600''$

25. Pasa de forma incompleja a forma compleja

a) $12^{\circ} 34' 40''$ b) $13^{\circ} 23' 7''$ c) $49^{\circ} 56' 32''$ d) $1^{\circ} 25' 27''$

26. Completa la tabla:

Expresión en segundos	Expresión en minutos y segundos	Expresión en grados, minutos y segundos
8465''		
	245' 32''	
		31° 3' 55''

Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

24°	43′	29″	77″	60	73′	60
+45°	29′	48″	17″	1′	13′	1°
69° 72′ 77″			Nº minutos = 72′ + 1′ = 73′		Nº de grados= 69° + 1° = 70°	
24° 43′ 29″ + 45° 29′ 48″ = 69° 72′ 77″ = 69° 73′ 17″ = 70° 13′ 17″						

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65° 48' 50''	
-45° 29' 48''	
20° 19' 2''	65° 48' 50'' - 45° 29' 48'' = 20° 19' 2''

Ejemplo: 38° 12' 14'' - 15° 15' 15''

38° 12' 14''	37° 72' 14''	37° 71' 74''
-15° 15' 15''	-15° 15' 15''	-15° 15' 15''
		22° 56' 59''

$$38° 12' 14'' - 15° 15' 15'' = 37° 72' 14'' - 15° 15' 15'' = 37° 71' 74'' - 15° 15' 15'' = 22° 56' 59''$$

Actividades propuestas

27. Calcula:

$$34° 45' 30'' + 12° 27' 15''$$

$$16° 45' + 23° 13' + 30° 20' 30''$$

$$35° 54' 23'' - 15° 1' 35''$$

$$b) 16° 30' 1'' + 12° 13' 12'' + 2° 1'$$

$$d) 65° 48' 56'' - 12° 33' 25''$$

$$e) 43° 32' 1'' - 15° 50' 50''$$

3. MEDIDA DEL TIEMPO

¿Qué es un **día**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.

¿Y un **año**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol.

Para conocer su duración hay que estudiar el movimiento del Sol. El primer pueblo que se ocupó de estudios astronómicos, y fueron muy buenos astrónomos, es el de los babilonios y asirios.

Ellos usaban un sistema de numeración que no era decimal, sino sexagesimal. De ellos aún nos quedan las siguientes medidas del tiempo:

Un **día** tiene 24 horas.

Una **hora** tiene 60 minutos.

Un **minuto** tiene 60 segundos.

La unidad utilizada para medir la magnitud “tiempo” es el **segundo**, que se representa por la letra *s*, en minúscula y sin punto... Es una unidad del Sistema Internacional de Unidades (SI) pero **no es decimal**, es *sexagesimal*.

Pasar segundos a horas y minutos, o viceversa se hace de forma muy similar a como se pasan en las medidas de ángulos de segundos a grados y minutos que, para no repetir aprenderás en el capítulo 8 de “Figuras Planas” en el apartado 1.4.

Otras medidas del tiempo que conoces son:

La semana que tiene 7 días.

El mes, que tiene 30 días, o 31 días o 28 días el mes de febrero, salvo los años bisiestos que tiene 29.

Un año que tiene 12 meses.

Un año tiene 365 días excepto los años bisiestos que tienen 366 días.

La cronología permite datar los acontecimientos representándolos en una línea de tiempo.

Para medir el tiempo, en un principio, se empezó midiendo los movimientos de los astros, el movimiento aparente del Sol y de la Luna. Luego se utilizaron relojes como el reloj de sol, de arena o la clepsidra o reloj de agua. Ahora existen relojes y cronómetros muy perfeccionados.

Nuestro año comienza el 1 de enero, pero otros países utilizan otros calendarios, como el chino, el judío, o el musulmán. Al escribir esto estábamos en el año 2013, pero otros pueblos están en otros años muy diferentes. Infórmate sobre ese particular.

Actividades propuestas

28. ¿Cuántos segundos tiene una hora?

29. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos?

30. ¿Cuántas semanas tiene un año no bisiesto?

4. UNIDADES MONETARIAS

Las unidades monetarias diferentes a la que nosotros utilizamos se denominan **divisas**. Entre distintas monedas se establecen tipos de cambio que varían constantemente.

En la Unión Europea la unidad monetaria es el **euro**, se representa por **€**.

Para realizar los cambios, utilizaremos *factores de conversión*, redondeando el resultado si hiciera falta.

Actividades resueltas

✚ Con la siguiente equivalencia de divisas:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

✚ Cambia 600 € a Libras y a Soles

1 € es equivalente a 0,86 £. Multiplicando por $\frac{0,86 \text{ £}}{1 \text{ €}}$ se eliminan los € y queda arriba £

$$600 \text{ €} \cdot \frac{0,86 \text{ £}}{1 \text{ €}} = \frac{600 \cdot 0,86}{1} \cdot \frac{\text{£} \cdot \text{€}}{\text{€}} = 516 \text{ £}$$

$$600 \text{ €} \cdot \frac{3,6 \text{ S/}}{1 \text{ €}} = \frac{600 \cdot 3,6}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{S/}}{\text{€}} = 2.160 \text{ S/}$$

Equivalentemente para soles:

✚ b) Cambia 715 \$ y 16.000 ¥ (yuanes) a euros.

En este caso debo dividir entre \$ y ¥ respectivamente y el € debe quedar en el numerador

$$715 \$ \cdot \frac{1 \text{ €}}{1,3 \$} = \frac{715 \cdot 1}{1,3} \cdot \frac{\$ \cdot \text{€}}{\$} \approx 53,85 \text{ €}$$

$$16.000 ¥ \cdot \frac{1 \text{ €}}{8 ¥} = \frac{16.000 \cdot 1}{8} \cdot \frac{¥ \cdot \text{€}}{¥} = 2.000 \text{ €}$$

Actividades propuestas

31. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1.200 € a libras, bolivianos, yenes y Dirhams:

32. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 \$

b) 4051,5 درهم

c) 104.800 ¥ (yenes)

d) 5.103 Bs

33. Jessica se quiere comprar una tablet. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 \$ y 60 \$ de transporte, en China 2.700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la tablet?

34. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

CURIOSIDADES. REVISTA**Curiosidad respecto del metro:**

¿Sabes que existe una longitud mínima en la naturaleza y que nada puede medir menos que ella?

Se llama la **longitud de Planck** y es muy pequeña, del orden de $1,6 \cdot 10^{-35}$ m, es decir, ¡0 coma y luego 35 ceros y después un 16 metros!

La primera *definición* de **kilogramo** se decidió durante la Revolución Francesa y especificaba que era la masa de un dm^3 (un litro) de agua destilada al nivel del mar y 3,98 grados centígrados.

Hoy se define como la masa que tiene el prototipo internacional, compuesto de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Otra cosa respecto del tiempo y los segundos:

Por razones históricas, para tiempos de 1 s o más, se usan minutos y horas, pero para menos de 1 s, como históricamente nunca se han podido medir, no existían unidades y se usó el sistema decimal, por eso se habla de decimas o milésimas de segundo, pero nunca de un "kilosegundo".

Tirando millas

La **milla náutica** (1.852 metros) es distinta de la **milla terrestre** (1 609 metros), porque la *velocidad* en los barcos se mide en "**nudos**". Para medir la velocidad se tiraba una cuerda especial con muchos nudos por detrás del barco, y se miraba cuantos se quedaban flotando: el número de nudos que flotan indica la velocidad. Una milla náutica se definió como la distancia que navega un barco a una velocidad de un nudo durante una hora, por eso no coincide con la milla terrestre.



RESUMEN

Magnitud	Una magnitud se puede medir en distintas unidades de medida .												
La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros,... (distintas unidades de medida)													
Longitud: metro	km	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	hm	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	dam	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	m	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	dm	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	cm	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	mm
0,32 km = 32 m = 3.200 cm 3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam													
Superficie: metro cuadrado	km ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	hm ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	dam ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	m ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	dm ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	cm ²	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 100 \end{matrix}$	mm ²
0,0014 km ² = 0,14 hm ² = 14 dam ² 23.000 mm ² = 230 cm ² = 2,3 dm ² = 230 dm ²													
U. agrarias	1 ha = 1 hm ² 1 a = 1 dam ² 1 ca = 1 m ²												
5 km ² = 500 hm ² = 500 ha 13.000 m ² = 13.000 ca= 1,3 ha													
Volumen: metro cúbico	km ³	$\begin{matrix} \cdot 1000 \\ \leftarrow \\ \cdot 1000 \end{matrix}$	hm ³	$\begin{matrix} \cdot 1000 \\ \leftarrow \\ \cdot 1000 \end{matrix}$	dam ³	$\begin{matrix} \cdot 1000 \\ \leftarrow \\ \cdot 1000 \end{matrix}$	m ³	$\begin{matrix} \cdot 100 \\ \leftarrow \\ \cdot 1000 \end{matrix}$	dm ³	$\begin{matrix} \cdot 1000 \\ \leftarrow \\ \cdot 1000 \end{matrix}$	cm ³	mm ³	
3,2 hm ³ = 320 dam ³ = 32.00 m ³ 2.800 mm ³ = 28 cm ³ = 0,28 dm ³													
El litro	kL	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	hL	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	daL	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	L	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	dL	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	cL	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	mL
3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L 85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L													
Litros y m ³ .	1 kL = 1 m ³ 1 L = 1 dm ³ 1 mL = 1 cm ³												
4,5 cL = 45 mL = 45 cm ³ 3 hL = 0,3 kL = 0,3 m ³ 3 hL = 300 L = 300 dm ³													
Masa: kilogramo	kg	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	hg	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	dag	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	g	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	dg	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	cg	$\begin{matrix} \cdot 10 \\ \leftarrow \\ \cdot 10 \end{matrix}$	mg
2300 kg = 2,3 t 0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg													
Medida de ángulos	Un grado = 1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo. Minuto: 1 minuto = 1´ = 1/60 parte de un grado. Segundo: 1 segundo = 1´´ = 1/60 parte de un minuto												
Unidades de tiempo	Un día es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje. Un año es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. Un día tiene 24 horas . Una hora tiene 60 minutos . Un minuto tiene 60 segundos												
Unidades monetarias	1 € = 0,86 £ = 9 Bs = ... (varía constantemente)												
200 € = 200 € · $\frac{0,86 \text{ £}}{1 \text{ €}} = \frac{200 \cdot 0,86}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{£}}{\text{€}} = 172 \text{ £}$ 1.800 Bs = 1.800 Bs · $\frac{1 \text{ Bs}}{9 \text{ Bs}} = \frac{1.800 \cdot 1}{9} \cdot \frac{\text{Bs} \cdot \text{€}}{\text{Bs}} = 1.800 \text{ €}$													

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Unidades de longitud**

1. Descompón en sus distintas unidades:

a) 3945,67 cm b) 415,95 mm c) 5148 m d) 67,914 km e) 0,82 dam

2. Completa con el número o unidad correspondiente:

a) 50 m = _____ hm = 5000 _____

b) 300 hm = 30 _____ = _____ m

c) _____ dm = _____ m = 2300 mm

d) 40 km = 4000 _____ = _____ dm

3. Ordena de menor a mayor: 2,7 m; 30 cm; 0,005 km; 2600 mm; 0,024 hm; 26 dm.

4. Calcula la longitud que falta o sobra para tener a 1 m:

a) 27 cm b) 300 mm + 25 cm c) 0,00034 km + 0,22 dam d) 0,3 m + 27 cm + 120 mm

5. Unos amigos están planeando hacer el Camino de Santiago andando desde Frómista (Palencia). La distancia a recorrer es de unos 400 km. Ellos calculan que a un paso cómodo pueden andar 5 km en cada hora. Si piensan andar 6 horas al día, ¿cuántos días tardarán en hacer el camino?

6. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?

7. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 5 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?

8. Expresa en U.A.

a) 38.000 km b) 8.000 m c) un millón de micras d) dos millones de metros

Unidades de superficie

9. Completa las siguientes igualdades

a) $3,5 \text{ dam}^2 = \text{_____ m}^2 = \text{_____ dm}^2$

b) $0,08 \text{ km}^2 = \text{_____ m}^2 = \text{_____ cm}^2$

c) $32 \text{ cm}^2 = \text{_____ dm}^2 = \text{_____ dam}^2$

d) $6075 \text{ m}^2 = \text{_____ dm}^2 = \text{_____ hm}^2$

10. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:

a) $3 \text{ m}^2 \ 2 \text{ cm}^2 \ 5 \text{ mm}^2$ en decímetros cuadrados

b) $6 \text{ dam}^2 \ 2 \text{ dm}$ en metros cuadrados

c) $9,3 \text{ hm}^2 \ 5 \text{ m}^2 \ 6 \text{ cm}^2$ en decámetros cuadrados

d) $7 \text{ dm}^2 \ 5 \text{ dam}^2$ en milímetros cuadrados

11. Dibuja en tu cuaderno el contorno de tu mano.

a) Recorta después un cuadrado de 1 cm de lado y estima, en centímetros cuadrados, la superficie de tu mano.

b) Si utilizas un papel normal de 60 g/m^2 , y dibujas tu mano como en el ejercicio anterior y lo recortas, al pesar el papel con un peso muy preciso, obtienes de nuevo la superficie de la mano. (¡Antes de los ordenadores se calculaban así, con papel y tijeras, algunas superficies!). ¿Cuánto mide en cm^2 ?

12. La superficie de China es de 9560000 km^2 . ¿Cuántas ha tiene?

13. Expresa en hectáreas:

- a) 3,2 km² b) 1.000 ca c) 600.000 dam² d) 824 m² e) 67 a f) 200 mm².

14. Expresa las siguientes superficies en áreas:

- a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca d) 37 m².

15. El padre de Juan quiere comprar un terreno de 7,3 ha a 3,2 € cada m². ¿Cuánto le va a costar?

Unidades de volumen y de capacidad

16. Piensa en un cubo de lado una unidad. Piensa ahora en un cubo del doble de lado. ¿Cuántos cubitos de los primeros son necesarios para obtener ese cubo?

17. Expresa en metros cúbicos: 28,7 hm³ 5 m³ 2.800 dam³ 45 dm³.

18. Expresa en litros:

- a) 8,1 hL b) 451 mL c) 2,3 kL d) 0,528 kL e) 6,25 cL f) 7,2 mL

19. Completa las siguientes igualdades:

- a) 2 m³ = _____ L b) 33 cL = _____ dm³ c) 500 mm³ = _____ mL
 d) 230 mL = _____ dm³ e) 0,02 hm³ = _____ L f) 0,016 hL = _____ m³
 g) 0,35 dm³ = _____ mL h) 230 cL = _____ cm³ i) 0,25 hm³ = _____ kL

20. En una urbanización se recoge cada semana 27 m³ de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?

Unidades de masa

21. ¿Qué tiene más masa, un kg de papel o un kg de plomo?

22. Expresa en gramos las siguientes masas:

- a) 2,7 dag b) 51,3 kg c) 35,7 kg 8,6 dag d) 3 dag 5 g 26,29 dg

23. Copia en tu cuaderno y completa:

- a) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg = ... dag b) 1 kg = ... hg = ... dag = ... g = ... cg = ... mg
 c) 1 tm = ... kg = ... g = ... hg = ... dag d) 1 qm = ... kg = ... g = ... tm = ... hg = ... cg

24. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,943 hg							
75282,9 dg							
64,92 kg							
4375 dag							
369266 cg							

25. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro tiene una densidad de 19,3 y la plata de 10,5. Dos pulseras de igual masa, una de palta y otra de oro, ¿Cuál tendrá mayor volumen?

Medida de ángulos

26. Un ángulo mide la quinta parte de un recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.

27. Calcula :

- a) $36^{\circ} 57' 37'' + 45^{\circ} 18' 54''$ b) $46^{\circ} 37' 35'' + 82^{\circ} 32' 41'' + 43^{\circ} 5''$
 c) $26^{\circ} 34' + 84^{\circ} 21'' + 81^{\circ} 39' 49''$ d) $56^{\circ} 54' 56'' - 23^{\circ} 59' 96''$
 e) $78^{\circ} 5' 34'' - 26^{\circ} 5' 47''$ f) $44^{\circ} 43' 2'' - 26^{\circ} 47' 31''$

28. La suma de dos ángulos es $236^{\circ} 57' 46''$. Si uno de ellos mide $68^{\circ} 57' 58''$, ¿cuánto mide el otro?

Unidades de tiempo

29. Joaquín va cada día a la escuela y tarda 15 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 50 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas.

30. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en una semana? ¿Y en un año? Esas horas, ¿cuántos días son?

31. Enrique va cada día a la escuela y tarda 20 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 30 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuántos segundos gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas en horas.

32. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántos minutos has dormido en una semana?, ¿y cuántos segundos? ¿Cuántos minutos en un año? ¿Y segundos?

33. Siete guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos

Unidades monetarias

34. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia dos mil euros a dólares, libras, yuanes y soles.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírham (MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

35. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón? B) ¿Y al de Marruecos? C) ¿Y al del Reino Unido? Realiza los cálculos.

36. Con las equivalencias del cuadro adjunto, cambia a euros las siguientes cantidades:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares (\$)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírham (درهم)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

- a) 4025 Dólares b) 5162 Libras c) 215,925 ¥ (yenes) d) 6.214 Bs

37. Pedro se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 \$ y 50 \$ por el transporte, en China 3900 ¥ y 150 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil?

AUTOEVALUACIÓN

1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?
a) 9 cm^3 b) $0,27 \text{ dm}^3$ c) $0,003 \text{ m}^3$ d) 27 cm^3 .
2. De las siguientes medidas, ¿cuál es la mayor?
a) 5,78 daL b) 578 L c) 5,78 kL d) 0,578 hL.
3. El resultado de sumar $0,07 \text{ kg} + 0,62 \text{ dag} + 9,3 \text{ hg}$ es:
a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1006,2 g.
4. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es:
a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2000 mL
5. Gladys ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 \$ en metálico. Los cambia a euros y éstos los cambiará a soles en un nuevo viaje a Perú. ¿Cuántos soles tendrá?
a) 3042 S/ b) 1800 S/ c) 235 S/ d) 140 S/
6. Una jarra de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las $\frac{3}{4}$ partes de la jarra, ¿cuánto pesa?
a) 1500 g b) 1,7 kg c) 16 hg d) 10,7 kg
7. El número de segundos de una semana es:
a) 25200 s b) 604800 s c) 602520 s d) 10080 s
8. El número de segundos de un día es:
a) 1440 s b) 85931 s c) 86400 s d) 10080 s
9. Transforma a segundos: 2 grados, 45 minutos y 3 segundos.
a) 9903 s b) 2070 s c) 99030 s d) 10303 s
10. Juan ha cambiado mil euros a dólares, estando el cambio a 1,31 dólar el euro, ¿cuántos dólares le han dado?
a) 131 \$ b) 1310 \$ c) 763 \$ d) 1257 \$

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Milagros Latasa Asso

Revisoras: Fernanda Ramos y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Adela Salvador y Milagros Latasa

Índice

1. ELEMENTOS DEL PLANO

- 1.1. PUNTOS, RECTAS, SEMIRRECTAS, SEGMENTOS.
- 1.2. RECTAS PARALELAS Y SECANTES.
- 1.3. ÁNGULOS. TIPOS DE ÁNGULOS.
- 1.4. MEDIDA DE ÁNGULOS.
- 1.5. SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL.
- 1.6. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS.
- 1.7. ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA
- 1.8. RECTAS PERPENDICULARES. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.
- 1.9. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.
- 1.10 PRIMEROS PASOS CON GEOGEBRA

2. POLÍGONOS

- 2.1. LINEAS POLIGONALES Y POLÍGONOS.
- 2.2. ELEMENTOS DE UN POLÍGONO: LADOS, ÁNGULOS. DIAGONALES, VÉRTICES
- 2.3. CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

- 3.1. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO
- 3.2. ELEMENTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA..
- 3.3. SECTOR CIRCULAR, SEGMENTO CIRCULAR, CORONA CIRCULAR.
- 3.4. POSICIONES ENTRE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.
- 3.5. PROPIEDADES IMPORTANTES

4. TRIÁNGULOS

- 4.1. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS
- 4.2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE UN TRIÁNGULO.
- 4.3. IGUALDAD DE TRIÁNGULOS
- 4.4. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO.

5. CUADRILÁTEROS

- 5.1. CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS
- 5.2. PROPIEDADES DE LOS CUADRILÁTEROS.

Resumen

En los mosaicos de la Alhambra como el de la fotografía puedes observar distintas figuras geométricas como rectas paralelas y rectas secantes, estrellas de 5 y de 10 puntas, polígonos...

En este capítulo vas a revisar tus conocimientos de geometría y a aprender muchas cosas nuevas sobre las figuras geométricas planas lo que te va a permitir ver con unos ojos nuevos el mundo que te rodea observando rectas paralelas en los edificios, ángulos interiores o exteriores, o como en el mosaico anterior, los motivos geométricos que lo forman. Estas formas geométricas pueden permitirte diseñar interesantes decoraciones.



1. ELEMENTOS DEL PLANO

1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos.

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas A, B, C,...



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos.

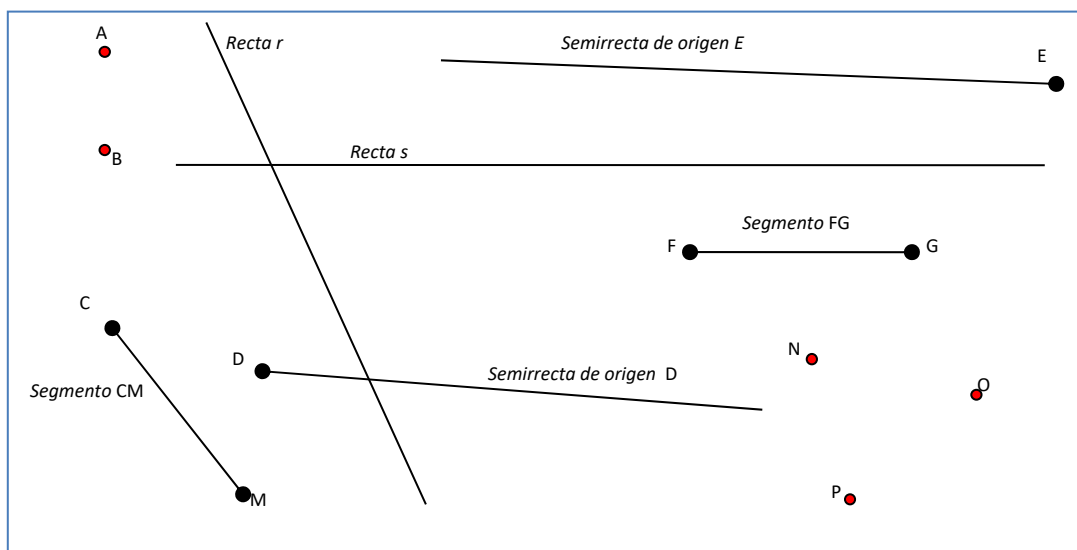
Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.

Al igual que el punto, la **recta** es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas r , s , t ,...

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta p , ...

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.

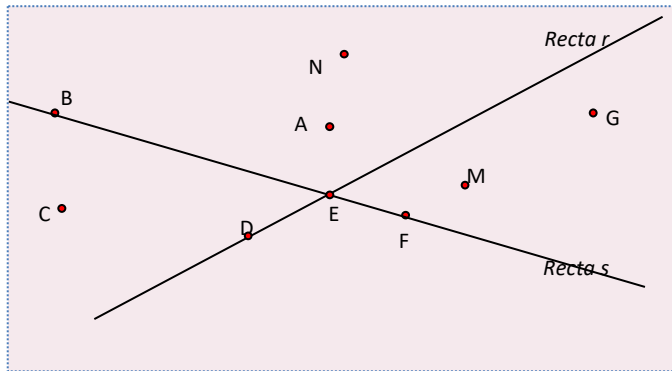
Ejemplo:



Actividades propuestas

Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.

1. Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas r y s .
2. ¿El punto B pertenece a la recta s ? ¿Y a la recta r ?
3. Dibuja un segmento que tenga como extremos A y un punto que esté en las rectas r y s .
4. Dibuja una semirrecta de origen C y que pase por B .
5. ¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por M , F y G ? ¿Y por N , A y E ?



1.2. Rectas paralelas y secantes

Pensemos ahora en las diferentes posiciones que pueden ocupar dos rectas en un plano:

Rectas paralelas: No tienen ningún punto común

Rectas secantes: Tienen un único punto común

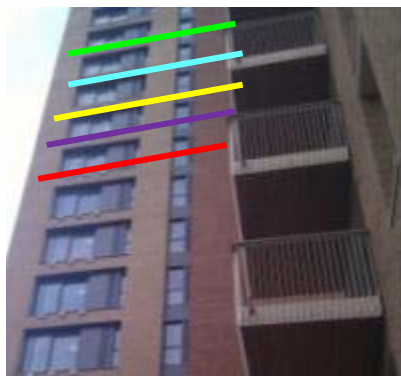
Rectas coincidentes: Todos sus puntos son comunes



Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

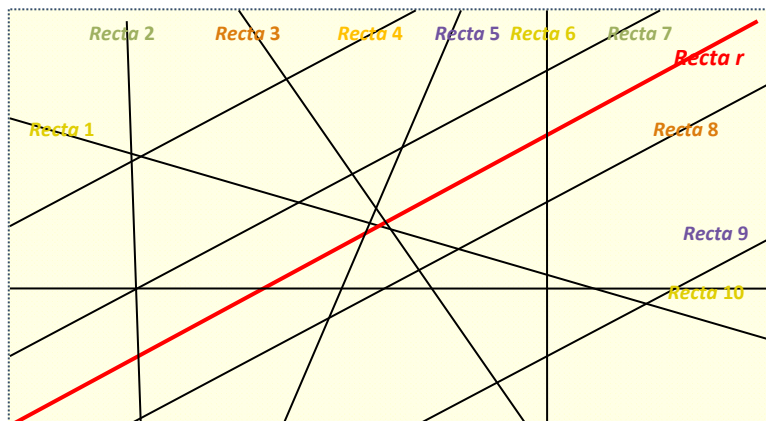
Ejemplo:

- ✚ A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes



Actividades propuestas

- Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.
- Observa el siguiente dibujo e indica qué rectas son paralelas a r y qué rectas son secantes a r .

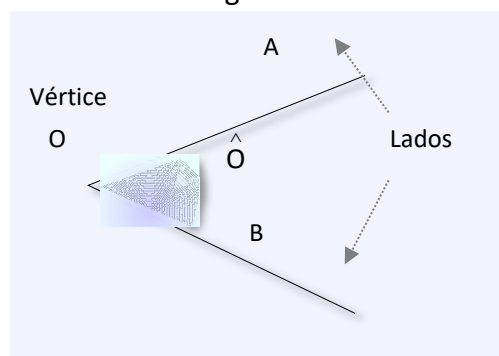


1.3. Ángulos. Tipos de ángulos

Se llama **ángulo** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice**.

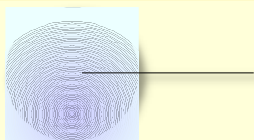
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo $\wedge$.

En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = \hat{AOB}$

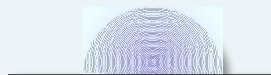


Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas. Nos referimos a ángulos **completos**, **llanos** y **rectos**.

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.

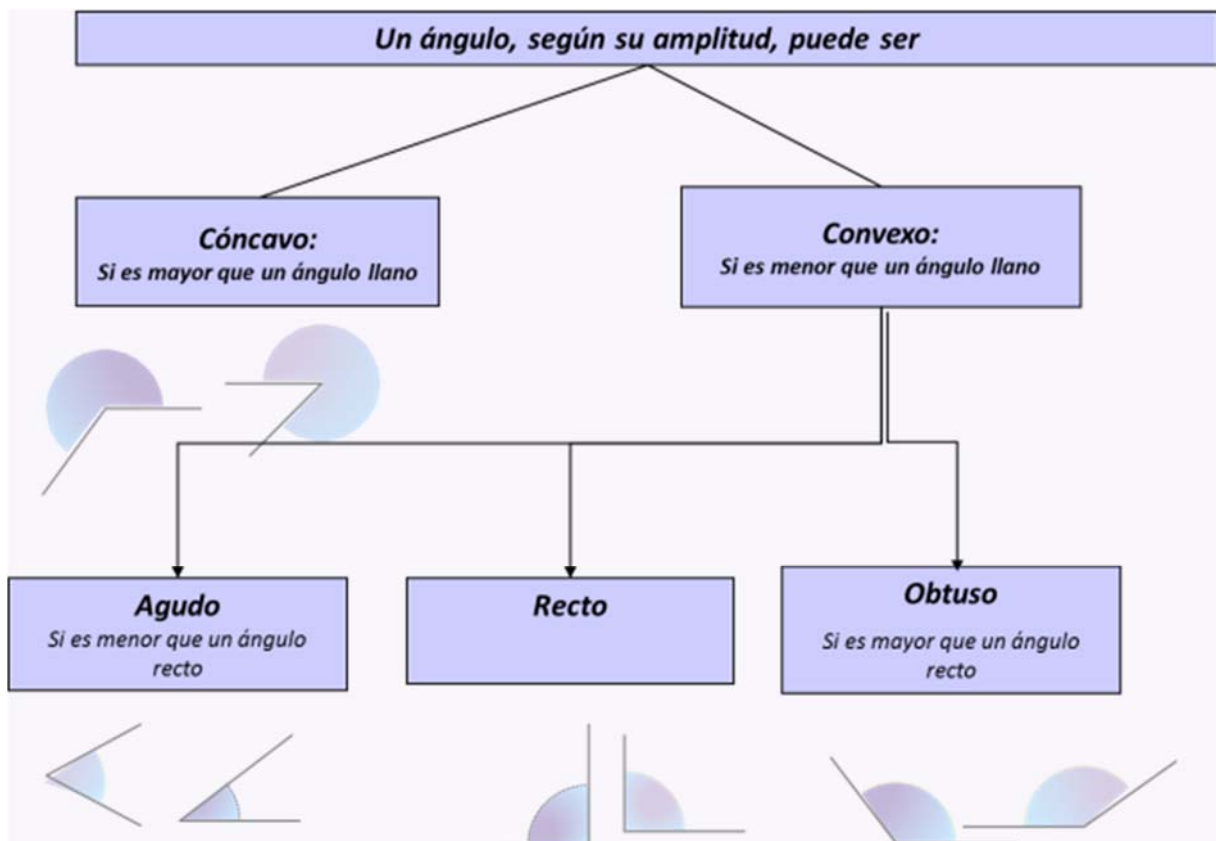


Ángulo llano: Es la mitad de un ángulo completo.



Ángulo recto: Es la mitad de un ángulo llano.

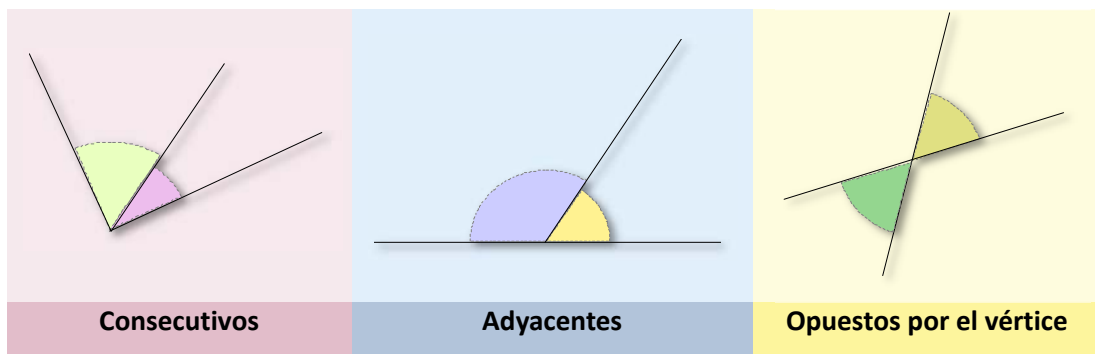




Se llaman ángulos **consecutivos** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ángulos **adyacentes** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

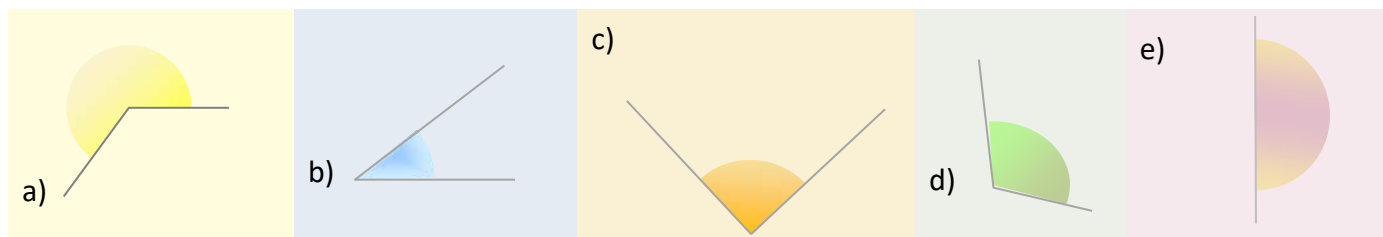
Se llaman ángulos **opuestos por el vértice** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Ejemplo:

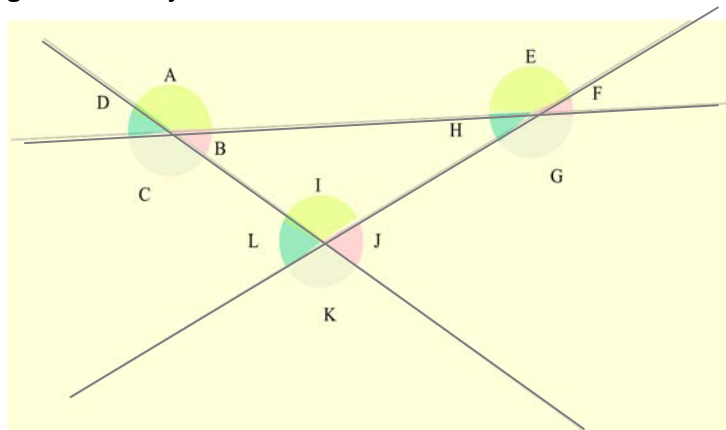


Actividades propuestas

8. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



9. Indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado **sistema sexagesimal**. La unidad de medida es el **grado sexagesimal**. Se representa con el símbolo $^{\circ}$ y se define como $1/360$ de un ángulo completo.

$$1^{\circ} = 1 / 360 \text{ parte de un ángulo completo}$$

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = $1' = 1 / 60$ parte de un grado

Segundo 1 segundo = $1'' = 1 / 60$ parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

$$1 \text{ ángulo completo} = 360^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo llano} = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ ángulo recto} = 90^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 60 \text{ minutos} = 3600 \text{ segundos}$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$$

Ejemplo:

Forma compleja: $A = 12^\circ 40' 32''$ $B = 13' 54''$ $C = 120^\circ 23''$

Forma incompleja: $D = 35000''$ $E = 23^\circ$ $F = 34'$

Ejemplo:

Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35000''	60	583'	60
500	583'	43'	9°
200			
20''			

$$D = 35000'' = 583' 20'' = 9^\circ 43' 20''$$

Ejemplo:

$$A = 12^\circ 23' 10'' = 12 \cdot 3600'' + 23 \cdot 60'' + 10'' = 44590''$$

Actividades propuestas

10. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

- a) $12500''$ b) $83'$ c) $230''$ d) $17600''$

11. Pasa de forma compleja a forma incompleja

- a) $12^\circ 34' 40''$ b) $13^\circ 23' 7''$ c) $49^\circ 56' 32''$ d) $1^\circ 25' 27''$

12. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465''		
	245' 32''	
		31° 3' 55''

1.5. Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo 7:

24° 43' 29''	77''	60	73'	60
45° 29' 48''	17''	1'	13'	1°
69° 72' 77''	Nº minutos = $72' + 1' = 73'$		Nº de grados = $69^\circ + 1^\circ = 70^\circ$	
$24^\circ 43' 29'' + 45^\circ 29' 48'' = 69^\circ 72' 77'' = 69^\circ 73' 17'' = 70^\circ 13' 17''$				

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65° 48' 50''	
45° 29' 48''	
20° 19' 2''	

$$65^{\circ} 48' 50'' - 45^{\circ} 29' 48'' = 20^{\circ} 19' 2''$$

Ejemplo:

37° 60'	71' 60''	
38° 12' 14''	37° 72' 14''	37° 71' 74''
15° 15' 15''	15° 15' 15''	15° 15' 15''
		22° 56' 59''

$$38^{\circ} 12' 14'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 37^{\circ} 72' 14'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 37^{\circ} 71' 74'' - 15^{\circ} 15' 15'' = 22^{\circ} 56' 59''$$

Actividades propuestas

13. Calcula:

- | | |
|---|--|
| a) $34^{\circ} 45' 30'' + 12^{\circ} 27' 15''$ | b) $16^{\circ} 30' 1'' + 12^{\circ} 13' 12'' + 2^{\circ} 1'$ |
| c) $16^{\circ} 45' + 23^{\circ} 13'' + 30^{\circ} 20' 30''$ | d) $65^{\circ} 48' 56'' - 12^{\circ} 33' 25''$ |
| e) $35^{\circ} 54' 23'' - 15^{\circ} 1' 35''$ | f) $43^{\circ} 32' 1'' - 15^{\circ} 50' 50''$ |

1.6. Ángulos complementarios y suplementarios

Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90°)

Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180°)

Ejemplo:

✚ En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.

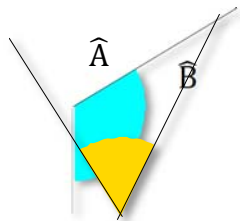
Ejemplo:

✚ El ángulo $\hat{A} = 12^{\circ}$ es el complementario de $\hat{B} = 78^{\circ}$ y el suplementario de $\hat{C} = 168^{\circ}$



Actividades propuestas

14. . Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo $\hat{A}$ y el suplementario del ángulo $\hat{B}$.



15. Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

- a) $35^\circ 54' 23''$ b) $65^\circ 48' 56''$
 c) $43^\circ 32' 1''$ d) $30^\circ 20' 30''$

16. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:

- a) $15^\circ 34' 20''$ y $164^\circ 25' 40''$ b) $65^\circ 48' 56''$ y $24^\circ 12' 4''$ c) $43^\circ 32' 1''$ y $30^\circ 26' 59''$

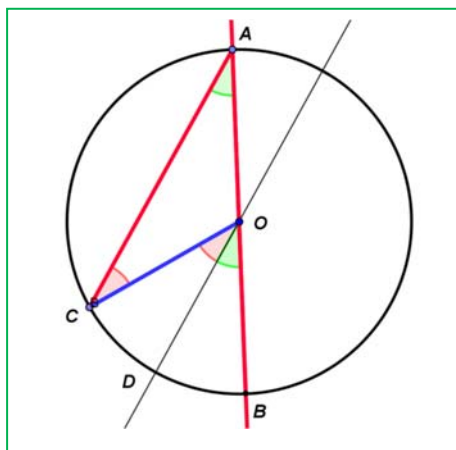
1.7. Ángulos en la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

Ángulo central	Ángulo inscrito	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

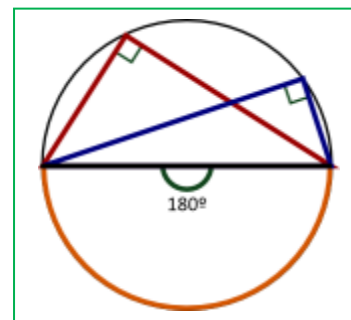
Demostración:



Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia CAB que tenga un lado que pase por el centro O de la circunferencia. Trazamos su central COB . El triángulo OAC es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por O una recta paralela a AC . El ángulo CAO es igual al ángulo DOB pues tienen sus lados paralelos. El ángulo ACO es igual al ángulo COD por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo CAO por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

Actividades propuestas

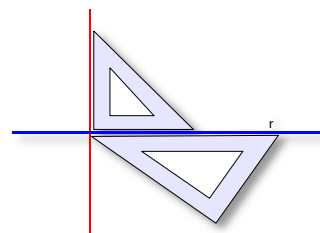
17. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.
18. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?



1.8. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento

Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. . Es un caso especial de rectas secantes.

Para construir una recta perpendicular a una recta dada r , se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.



La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio

Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

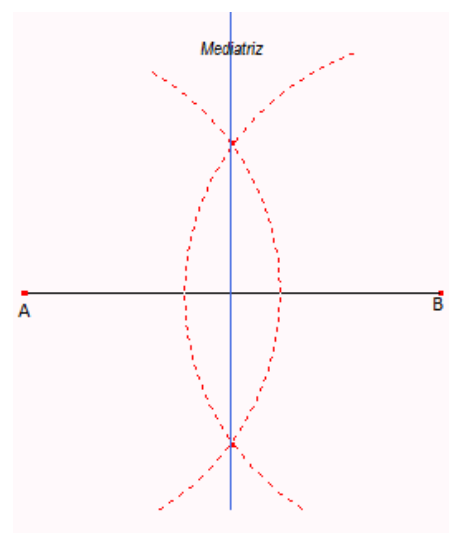
Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado. Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento AB.

Con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento AB.

Con el mismo radio se traza un arco de centro B.

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.



Actividades propuestas

19. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares? c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?
20. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.
21. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?

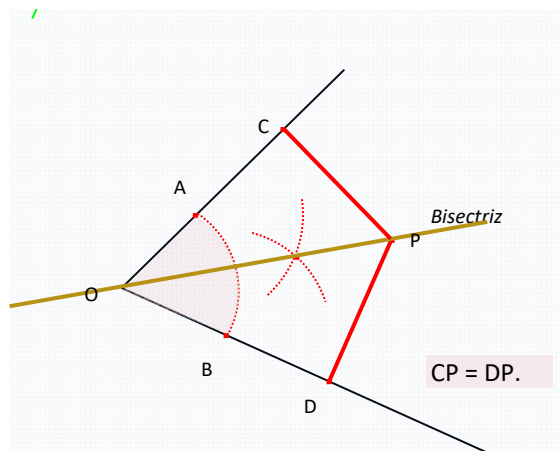
1.9. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz** de un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que $CP = DP$.

Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O , se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B . A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB , trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.

Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.



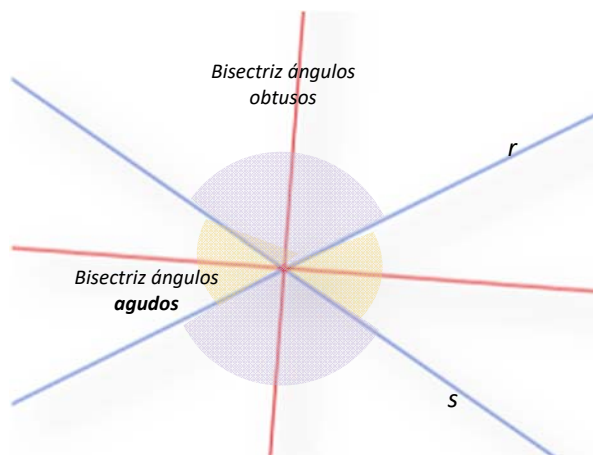
Ejemplo:

✚ En la figura inferior observamos que las bisectrices de los ángulos que forman r y s son perpendiculares.

Actividades propuestas

22. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

- a) 45° b) 130° c) 70° d) 45°



1.10. Primeros pasos con Geogebra

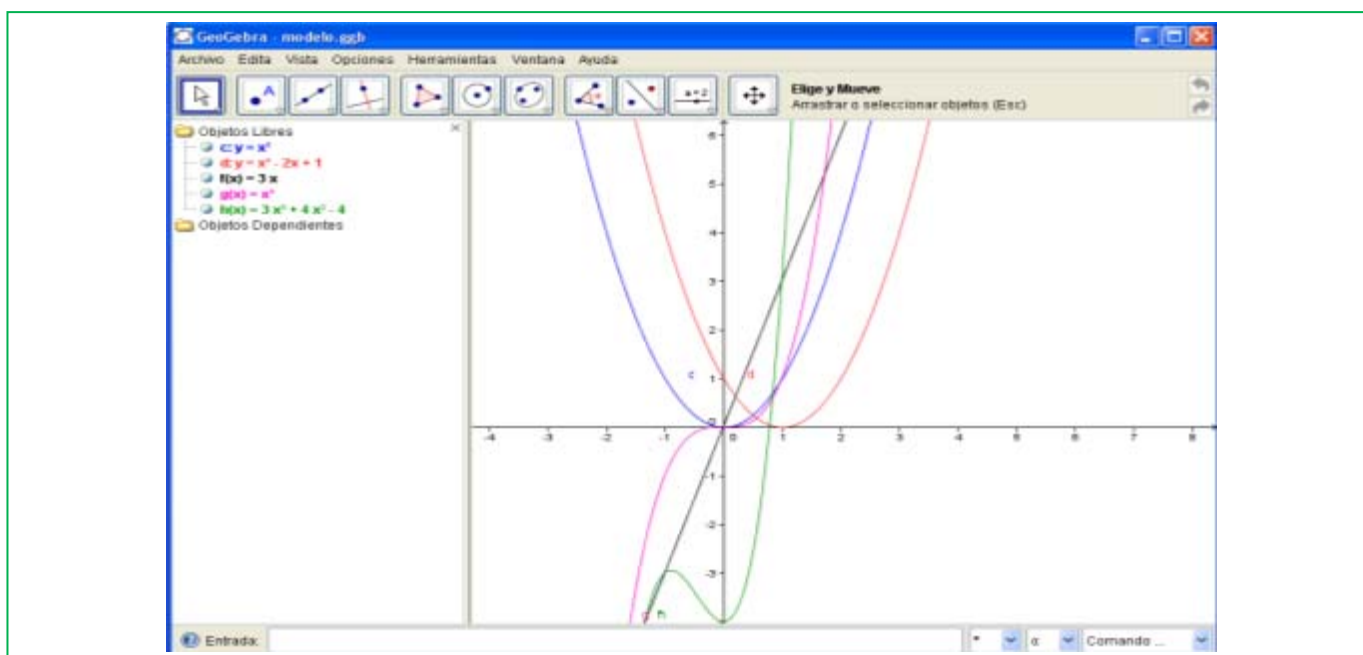
La ventana de Geogebra

Al ejecutar el programa *Geogebra* la ventana que aparece tiene muchos componentes comunes con cualquier ventana de Windows.

El elemento más característico de este programa es la **barra de herramientas** en la que aparecen iconos. Cada uno de ellos se activa al hacer clic con el ratón sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro. Estos primeros iconos que aparecen se corresponden con la primera opción que encontramos en el menú desplegable que se obtiene al mantener pulsado el ratón sobre cada uno de ellos.

Otra particularidad es que el área de trabajo está dividida en dos partes la **ventana geométrica**, donde se realizan las construcciones geométricas, y la **ventana algebraica** en la que aparecen características de los elementos que se construyen en la ventana geométrica como son las coordenadas de los puntos, las longitudes de los segmentos, el área de los polígonos, las ecuaciones de rectas, circunferencias,

También se pueden realizar operaciones introduciendo los números o el nombre de los elementos en el **Campo de Entrada** que se encuentra en la parte inferior de la ventana, los resultados aparecen en la ventana algebraica. Con las opciones de **Visualiza** de la barra de menús se puede ocultar o mostrar, la



ventana algebraica, el campo de entrada así como los ejes y la cuadrícula de la ventana geométrica.

Los iconos **Deshace** y **Rehace** que se encuentran en la parte superior derecha de la ventana geométrica y como opciones del menú **Edita** permiten eliminar o volver a mostrar una acción realizada.

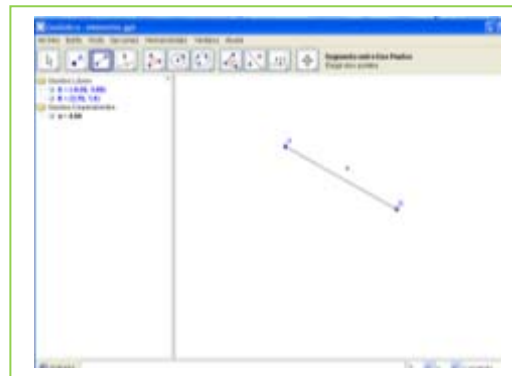
El **menú contextual**, el que se obtiene al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de la ventana geométrica o de la algebraica, tiene múltiples posibilidades, permite entre otras funciones borrar, ocultar, cambiar el nombre y modificar la apariencia de los objetos construidos.

Elementos geométricos

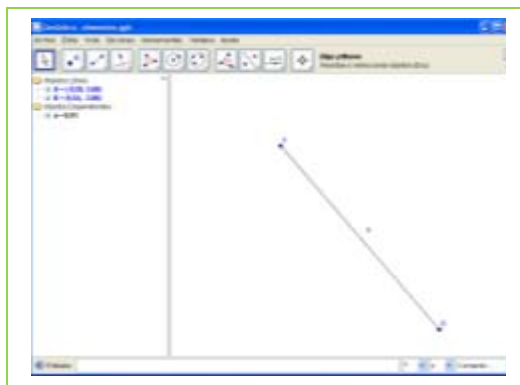
Actividades resueltas

Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la ventana algebraica y desactiva ejes y cuadrícula.

- Con la herramienta **Nuevo punto** dibuja un punto en la ventana geométrica, el sistema lo denomina A y sus coordenadas aparecen en la ventana algebraica, en la carpeta de los objetos libres.

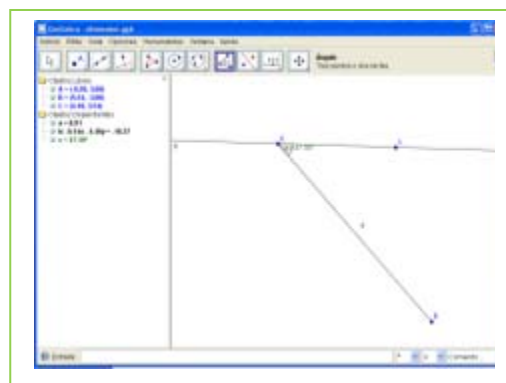


- Dibuja otro punto B y con la herramienta **Segmento entre dos puntos** traza el segmento, a , que pasa por los puntos A y B . En la ventana algebraica aparece la longitud del segmento en la carpeta de objetos dependientes.



- Con la herramienta **Desplaza**, la primera de la barra de herramientas, agarra el punto B y cambia su posición, observa de qué forma cambian sus coordenadas y la longitud del segmento.

- Dibuja otro punto C , que no pertenezca al segmento, y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** traza la recta, b , que pasa por A y C .



puntos traza la recta, b , que pasa por A y C .

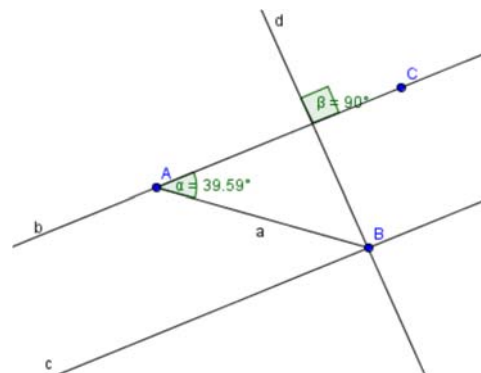
- Activa la herramienta **Ángulo** y señala con el ratón los puntos B , A y C , obtienes la medida del ángulo que has señalado. El orden para señalar los puntos B y C debe ser el contrario al de las agujas del reloj.

Rectas paralelas y perpendiculares

Actividades resueltas

Con la herramienta **Recta paralela** traza una recta, c , que pasa por el punto B y es paralela a la recta b que pasa por los puntos A y C .

- Utiliza la herramienta **Recta perpendicular** para trazar una recta, d , que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta b .
- Calcula la medida del **ángulo** que forman las rectas b y d .
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos A , B y C y observa que cambian de posición pero se mantienen las propiedades geométricas de la construcción, por ejemplo, las rectas b y c permanecen paralelas entre sí y perpendiculares a la recta d .

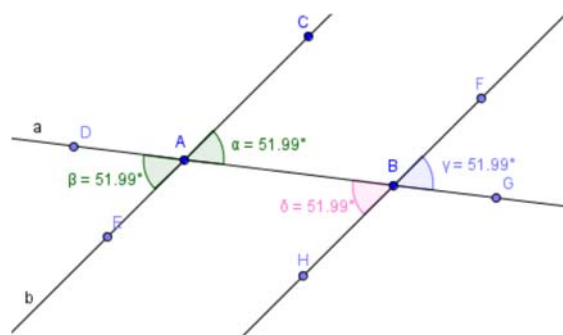
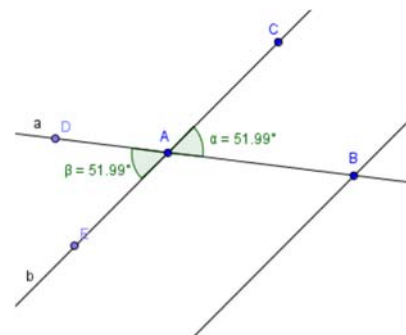


Ángulos

Actividades resueltas

Abre una nueva ventana de *Geogebra*, en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes y Cuadrícula**

- Determina tres puntos A , B y C , no alineados, la recta, a , que pasa por A y B y la recta, b , que pasa por los puntos A y C .
- Traza la recta paralela, c , que pasa por B y es paralela a la recta a .
- Calcula la medida del ángulo, α , que determinan los puntos B , A y C , señalando los puntos B y C en orden contrario al sentido de las agujas del reloj.
- Elige un punto D de la recta a y otro E de la recta b para determinar y medir un ángulo, β , opuesto por el vértice al ángulo α .
- Determina y mide un ángulo γ tal que los ángulos α y γ sean *correspondientes entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Determina y mide un ángulo δ tal que los ángulos α y δ sean *alternos internos entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos A , B y C y observa que cambian de posición pero los ángulos α , β , γ y δ miden lo mismo.
- Indica dos ángulos de los que has dibujados que sean *alternos externos entre paralelas*.



Actividades propuestas

- Repite la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento a , aprieta el botón derecho, entra en **Propiedades** y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta b , pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto B para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.
- Dibuja con *Geogebra* cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.
- Dibuja con *Geogebra* dos rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.
- Dibuja con *Geogebra* dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.
- Dibuja con *Geogebra* un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco. Comprueba que el ángulo inscrito mide la mitad del central. Mueve uno de los puntos sobre la circunferencia y comprueba que esa relación permanece.

2. POLÍGONOS

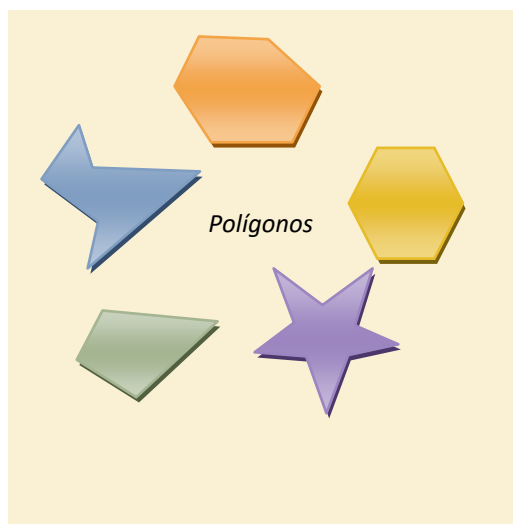
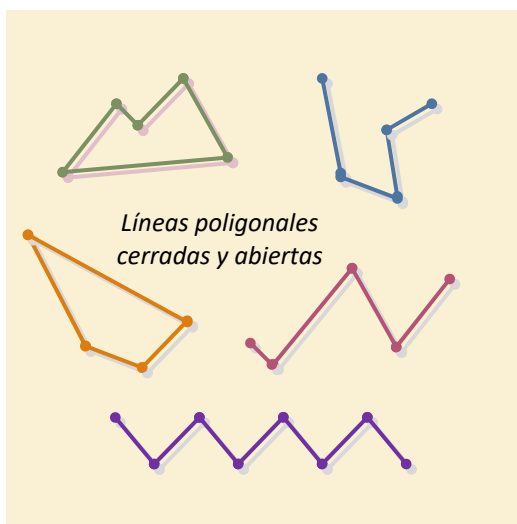
2.1. Líneas poligonales y polígonos.

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplo:



2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

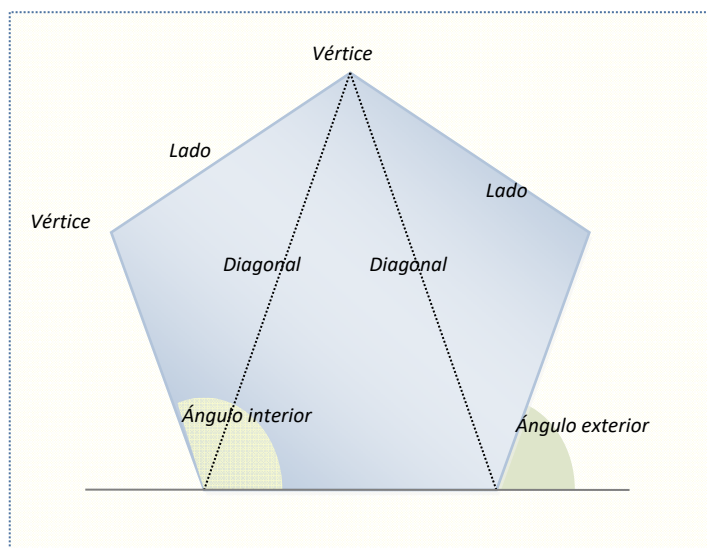
Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono.

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices**.

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal**.

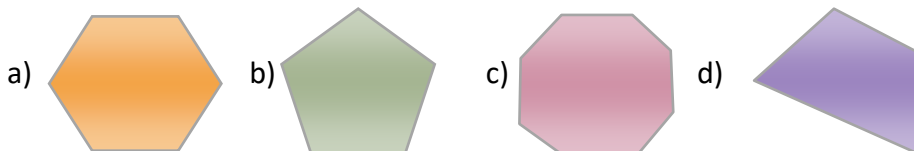


Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas criterios de igualdad) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

Actividades propuestas

30. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:



2.3. Clasificación de los polígonos

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:

Convexos	Cóncavos
<i>Si todos sus ángulos son convexos.</i>	<i>Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo</i>

Por el *número de lados*, los polígonos se clasifican en

Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
<i>Tres lados</i>	<i>Cuatro lados</i>	<i>Cinco lados</i>	<i>Seis lados</i>	<i>Siete lados</i>	<i>Ocho lados</i>

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares**. Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular**.

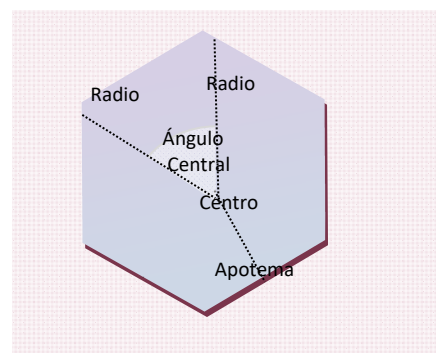
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



Actividades propuestas

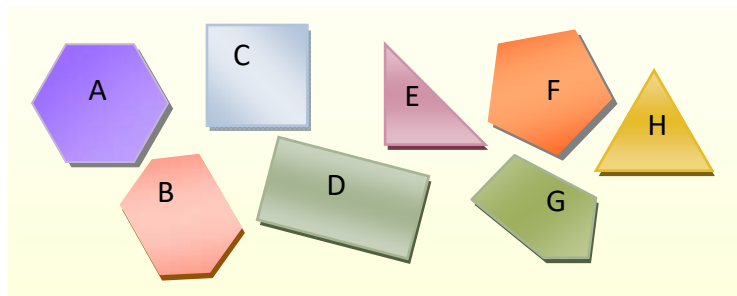
31. Dibuja los polígonos siguientes y traza todas sus diagonales:

- a) Hexágono b) Pentágono c) Octógono d) Trapezoide

32. Dibuja, si es posible, un ejemplo de polígono que sea:

- a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo
c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

33. Observa la figura adjunta e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

34. Dibuja en tu cuaderno el apotema de:

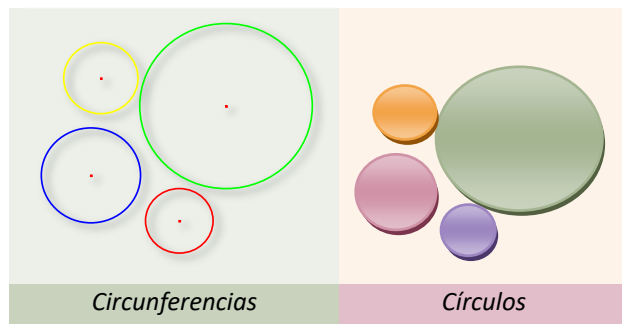
- a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1. Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo**.



3.2. Elementos de una circunferencia.

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El **radio** de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra r o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.



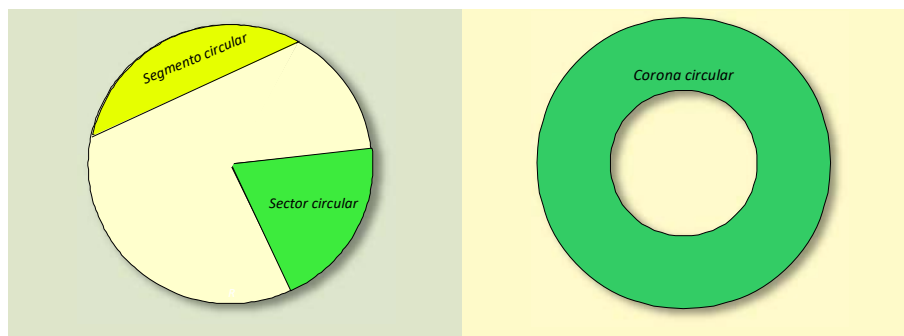
Un arco de circunferencia se denota con el símbolo $\frown$ sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo el arco de extremos A, B se escribe $\widehat{AB}$. Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

3.3. Sector circular y segmento circular. Corona circular.

Un **sector circular** es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un **segmento circular** es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una **corona circular** es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.



El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama **ángulo central**. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

Actividades propuestas

35. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30° de amplitud.
36. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

3.4. Posiciones entre una recta y una circunferencia.

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.

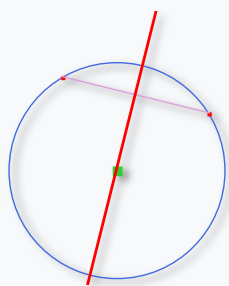


El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama **punto de tangencia**.

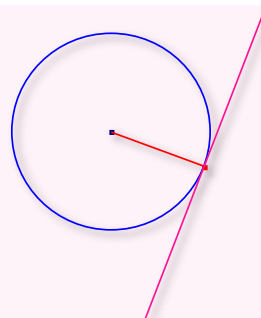
La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores.

3.5. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos



Las mediatrices de todas las cuerdas de una circunferencia pasan por el centro.



La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Actividades propuestas

- 37.** Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

4. TRIÁNGULOS

Como hemos visto antes, un triángulo es un polígono de tres lados. Estudiaremos en este párrafo dos clasificaciones de los triángulos, dos propiedades importantes comunes a todos los triángulos y descubriremos los llamados rectas y puntos notables de un triángulo.

4.1. Clasificación de los triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en



Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en



En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

4.2. Propiedades fundamentales de un triángulo.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

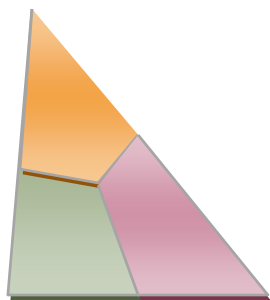
Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Cada ángulo de un triángulo equilátero vale 60° .

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Actividades propuestas



38. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes. Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180°

39. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

- a) 30° y 80° b) 20° y 50° c) 15° y 75° d) $40^\circ 30'$ y $63^\circ 45'$.

40. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

41. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

42. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

- a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

4.3. Rectas y puntos notables de un triángulo

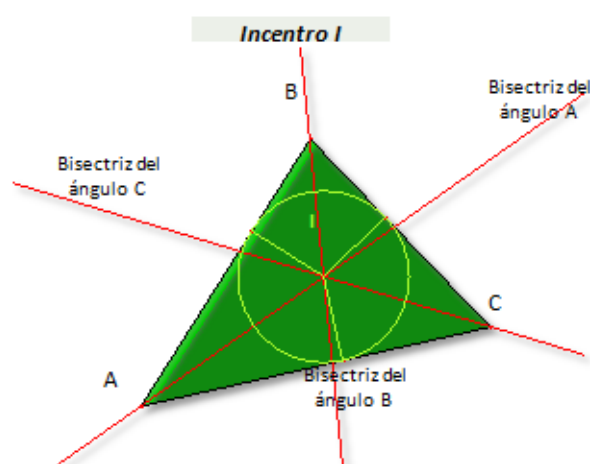
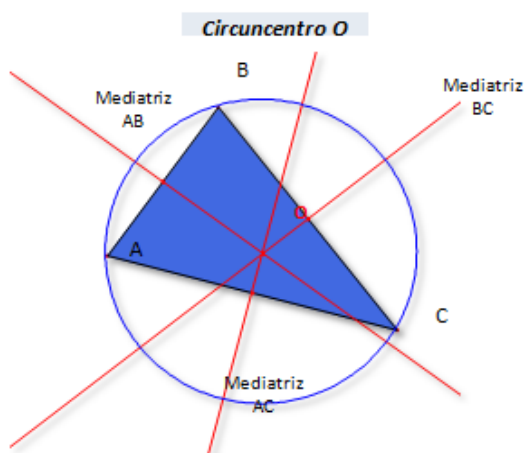
En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda del ejemplo 14). Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

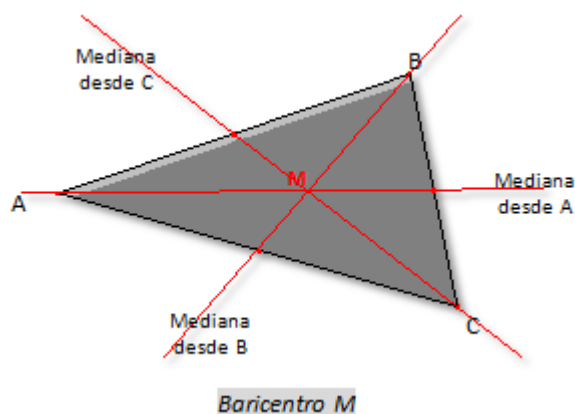
Ejemplo:



Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro**.

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:



Actividades propuestas

43. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.
44. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?
45. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

4.4. Igualdad de triángulos.

Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

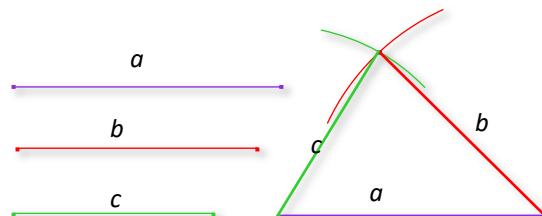
Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: a , b , c

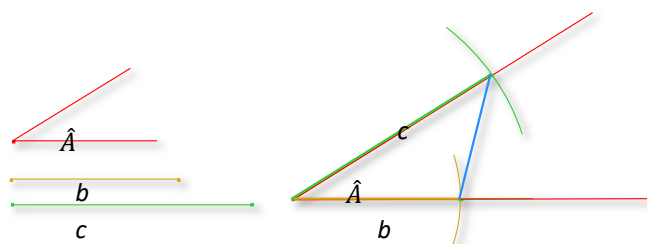
Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (a por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.

A continuación desde un extremo se traza un arco con radio b y desde el otro se traza un arco con radio c . El punto común de los dos arcos es el vértice que falta:

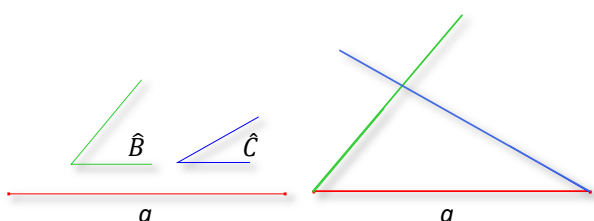


2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo $\hat{A}$. Se dibuja en primer lugar el ángulo $\hat{A}$. Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c , estos arcos son los dos vértices restantes.



3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.



el segmento a sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de $\hat{B}$ y $\hat{C}$ hasta que se corten.

Suponemos conocido el lado a y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$. Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento a . Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ de modo que

Actividades propuestas

46. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

- Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm
- Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30° y 65° .
- Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50° .

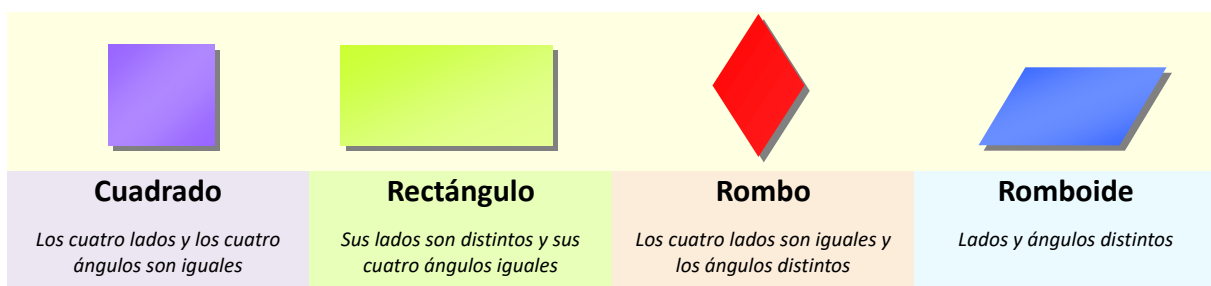
6 . CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

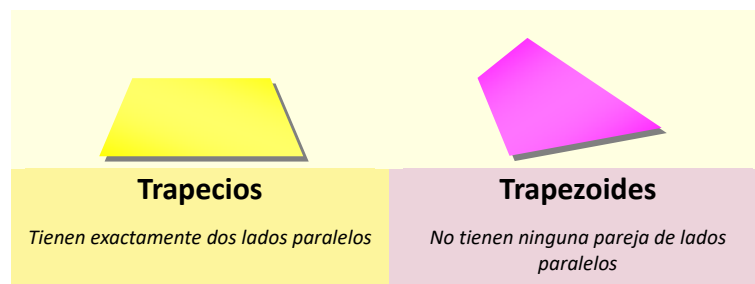
6.1. Clasificación de los cuadriláteros convexos.

Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos**.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



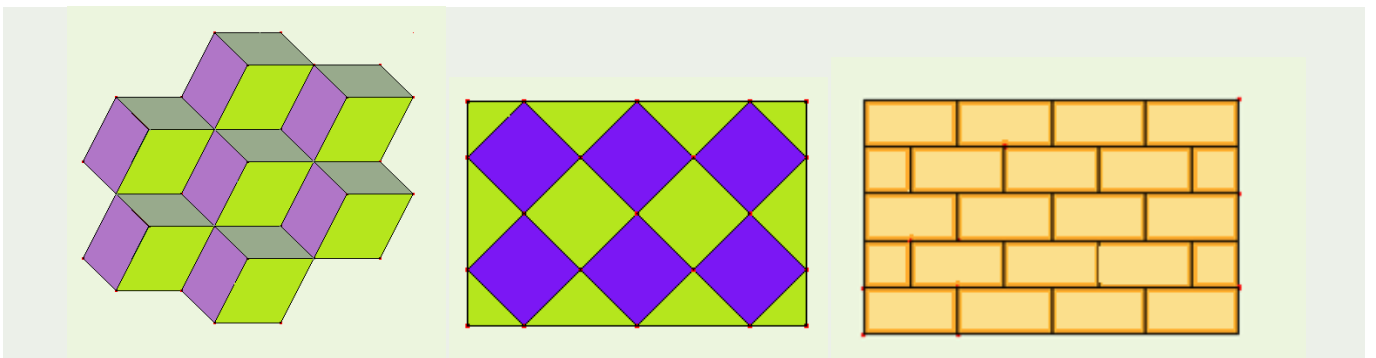
Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:



Además, si un trapezio tiene dos lados iguales, se llama trapezio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapezio rectángulo.

Ejemplo:

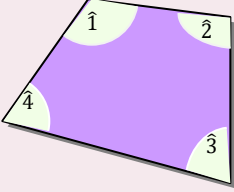
Los paralelogramos tienen muchas y variadas aplicaciones en diseño y construcción



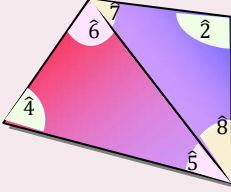
6.2. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360° .

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



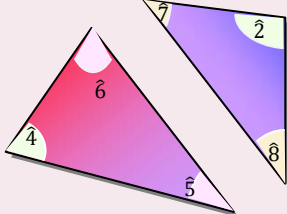
Nombramos los ángulos del cuadrilátero



Dibujamos una diagonal y nombramos también los nuevos ángulos que aparecen :

$\hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ y $\hat{8}$

$\hat{6} + \hat{7} = \hat{1} \quad \hat{5} + \hat{8} = \hat{3}$



$$\begin{aligned}
 \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} &= 180^\circ \\
 \hat{2} + \hat{7} + \hat{8} &= 180^\circ \\
 \hline
 \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{2} + \hat{7} + \hat{8} &= \\
 &= \hat{4} + \hat{3} + \hat{2} + \hat{1} = \\
 &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ
 \end{aligned}$$

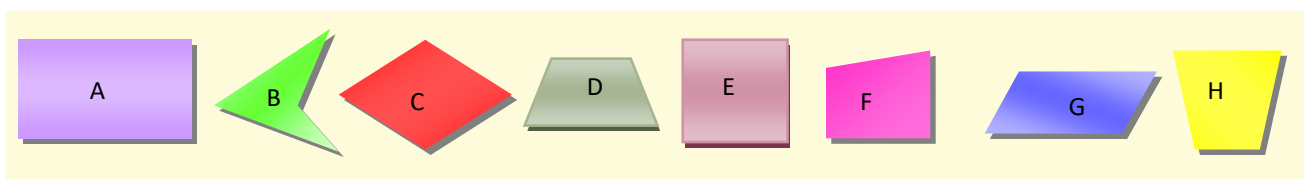
Otras propiedades de los cuadriláteros son

2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.
3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.
5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Actividades propuestas

47. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

- a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares



48. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

- a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapezoide.

49. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32° . ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

CURIOSIDADES. REVISTA

EUCLIDES, UN GRAN GEÓMETRA

En el siglo III a. C. Euclides enseñaba Matemáticas en la escuela de Alejandría. Su obra principal fueron Los Elementos, que han sido durante siglos la base de la geometría.

Las aportaciones más interesantes de Euclides fueron definiciones y postulados como éstos:

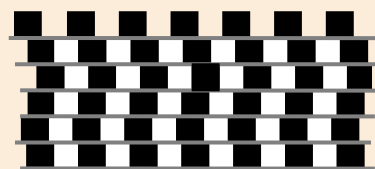
“Un punto es aquello que no tiene partes”

“Una línea es una longitud sin anchura”

“Las extremidades de una línea son puntos”

ILUSIONES ÓPTICAS

¿Son rectas paralelas o curvas las líneas grises?



LA ROSA DE LOS VIENTOS

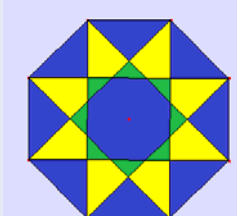
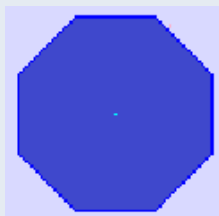


La *rosa de los vientos* ha aparecido en gráficas y mapas desde el año 1300. La base de su dibujo es un polígono estrellado. Las rectas que unen vértices opuestos son los rumbos de navegación

POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Un polígono regular estrellado puede construirse a partir del regular convexo uniendo vértices no consecutivos de forma continua.

Si N es el número de vértices del polígono regular convexo y M el salto entre vértices, la fracción N/M ha de ser irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado.

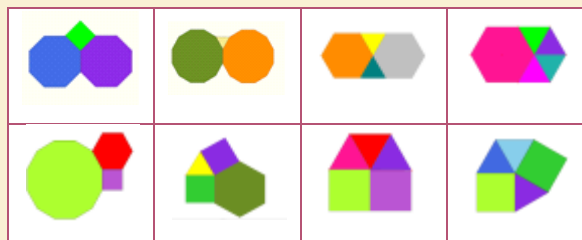


MOSAICOS

¿Sabes qué es un mosaico? Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir.

Los más sencillos son los **mosaicos regulares** formados por polígonos regulares todos iguales. Solo hay tres posibilidades para construir mosaicos regulares. Búscalas.

Un **mosaico semiregular** es el formado por polígonos regulares de forma que en cada vértice tengan la misma distribución. Solo hay ocho



GRACE CHISHOLM YOUNG

(1868 - 1944)

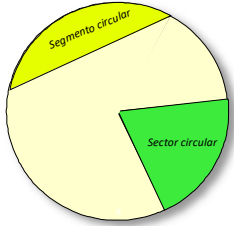
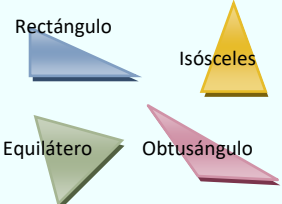
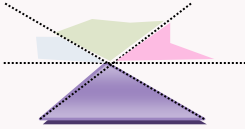
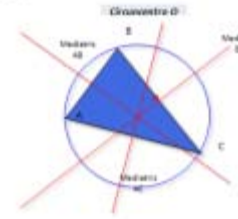
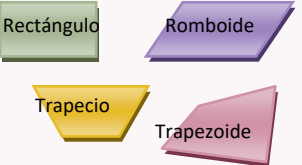


Grace Chisholm Young incluyó en su obra “Primer libro de Geometría” múltiples diagramas de figuras tridimensionales para ser recortadas y construidas.

Su innovadora forma de plantear la enseñanza de la Geometría, ha trascendido hasta el momento actual.

RESUMEN

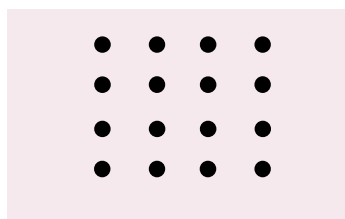
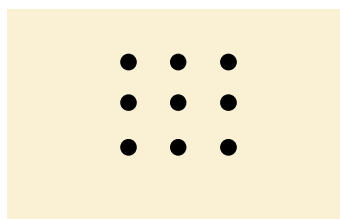
		<i>Ejemplos</i>
Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos: acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapezios o trapezoides.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60° con ella.
2. Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
3. Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
4. Si dos rectas r y s son perpendiculares y trazas una tercera recta p paralela a una de ellas, por ejemplo a r , ¿cómo son las rectas s y p ? Haz un dibujo.
5. Un ángulo mide $\frac{3}{4}$ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
6. Calcula :

a) $54^\circ 25' 10'' + 32^\circ 17' 14''$	b) $14^\circ 30' 15'' + 62^\circ 1' 16'' + 42^\circ 1''$
c) $15^\circ 23' + 73^\circ 10' + 70^\circ 28' 38''$	d) $45^\circ 45' 45'' - 12^\circ 48' 85''$
e) $67^\circ 4' 23'' - 15^\circ 4' 37''$	f) $33^\circ 32' 1'' - 15^\circ 35' 20''$
7. La suma de dos ángulos es $125^\circ 46' 35''$. Si uno de ellos mide $57^\circ 55' 47''$, ¿cuánto mide el otro?
8. Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
9. En un tablero de 3×3 , ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4×4 ?

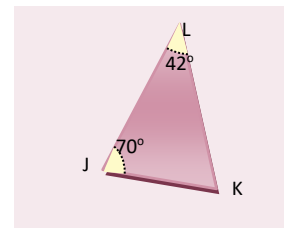
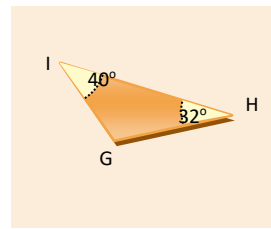
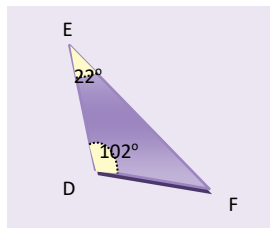
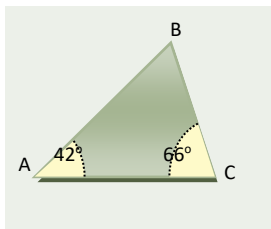


10. La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.

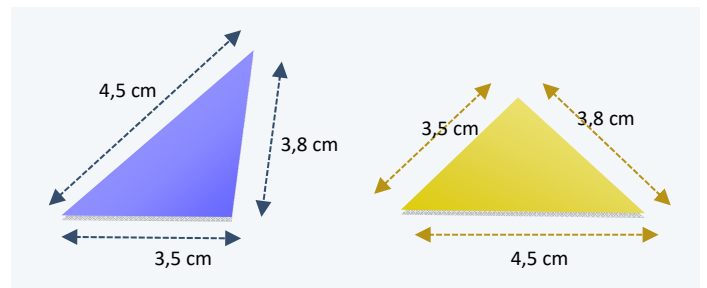
- a. Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
- b. Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
- c. El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígono regulares todos iguales.
- d. Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores...



11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:
- a) Rombo b) trapecio c) trapezoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.
12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.
13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.
14. Completa:
- a. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo
- b. Un triángulo..... tiene un ángulo obtuso.
- c. Un triángulo..... tiene los tres ángulos agudos.
15. Construye un triángulo sabiendo que $a = 9\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$ y el ángulo $C = 50^\circ$.
16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105° , 45° y 35° . Razona tu respuesta.
17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?
18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan



19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo? ¿Por qué? Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?
20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?
21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50° , indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.
22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30° y 70° , ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?



23. Construye un triángulo sabiendo que $a = 10 \text{ cm}$, los ángulos $B = 45^\circ$ $C = 50^\circ$

24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo no alineadas, estén a la misma distancia del mismo? Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.



26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.

- Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
- Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
- En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?

- ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?
- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

“Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo”

“Los trapezios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales”

“Los rectángulos son polígonos equiángulos”.

“Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio”

Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

- Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio, d) un segmento circular, e) un sector circular.

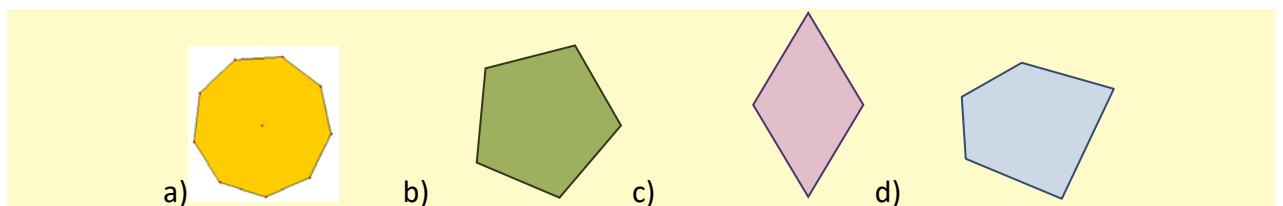
30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

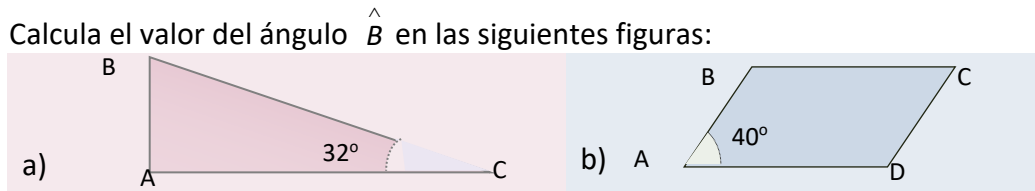
AUTOEVALUACIÓN

- Dibuja tres puntos A, B, C que no estén alineados y :
 - Las rectas r que pasa por A y B y s que pasa por B y C.
 - La recta perpendicular a r y que pasa por el punto C.
 - La recta perpendicular a s que pasa por B.
 - La recta paralela a s que pasa por A.
- Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:
 - 54°
 - $73^\circ 40' 56''$
- ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?
- Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.
- Clasifica los siguiente polígonos, completando la tabla:



POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

- Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.
- a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82° . b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.
- Dibuja un triángulo en el que $a = 6$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$ y $\hat{C} = 45^\circ$. Calcula después su circuncentro.
- Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.
- Calcula el valor del ángulo $\hat{B}$ en las siguientes figuras:



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

Revisores: Javier Rodrigo y Raquel Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. TEOREMA DE PITÁGORAS**2. SEMEJANZA**

- 2.1. FIGURAS SEMEJANTES
- 2.2. TRIÁNGULOS SEMEJANTES. CRITERIOS DE SEMEJANZA.
- 2.3. TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES
- 2.4. TEOREMA DE TALES
- 2.5. PROPORCIONALIDAD EN LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES
- 2.6. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

**3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS**

- 3.1. ÁREA DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO
- 3.2. ÁREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIÁNGULO
- 3.3. ÁREA DEL TRAPECIO, ROMBO Y ROMBOIDE
- 3.4. ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES
- 3.5. ÁREA DE POLÍGONOS IRREGULARES

**4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES**

- 4.1. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA
- 4.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA
- 4.3. ÁREA DEL CÍRCULO
- 4.4. USO DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL ÁREA DEL CÍRCULO
- 4.5. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR
- 4.6. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR
- 4.7. OTRAS ÁREAS

**Resumen**

En este capítulo estudiaremos el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, que nos ayudará en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.

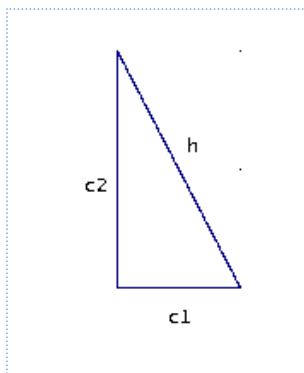
Estudiaremos el teorema de Tales y la semejanza, con los criterios para reconocer cuando dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza (escala) en mapas y en áreas y volúmenes.

Repasaremos las longitudes y áreas en polígonos y en figuras circulares, que utilizaremos en el próximo capítulo para obtener longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio.

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa vale 5 cm, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Actividades resueltas

- ✚ Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:

Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13 - 12) \times (13 + 12)} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$

Actividades propuestas

- ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 cm y su hipotenusa 26 cm? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 cm. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Interpretación del teorema de Pitágoras

Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa h de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2 , c_2^2 . Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

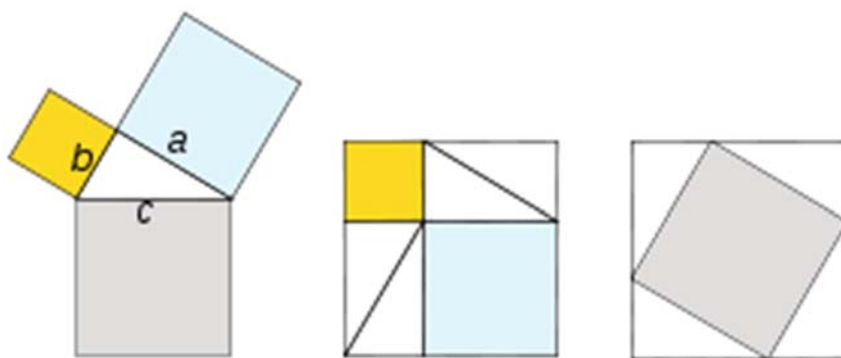
Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos a y

b (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado a y b , en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Actividades propuestas

- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
 - 8 cm y 6 cm
 - 12 m y 9 m
 - 6 dm y 14 dm
 - 22,9 km y 36,1 km.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
 - 27 cm y 12 cm
 - 32 m y 21 m
 - 28 dm y 12 dm
 - 79,2 km y 35,6 km
- Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 m. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
- Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 cm. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
- Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 m.
- Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 cm y altura 5 cm.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*.

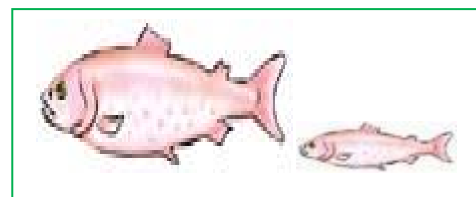
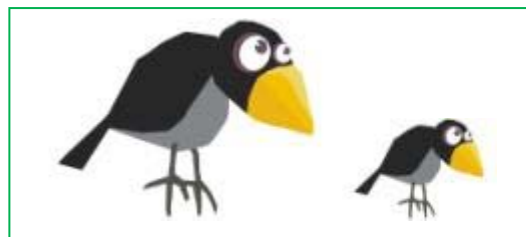
Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible.

La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

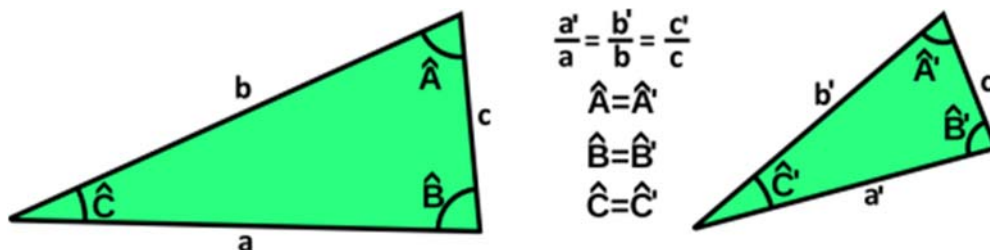
Ejemplo:

✚ Las figuras del margen **no** son semejantes



2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza**.

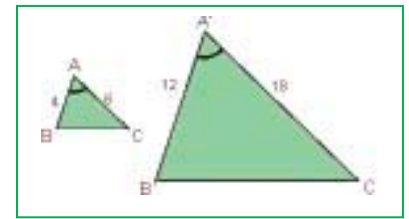
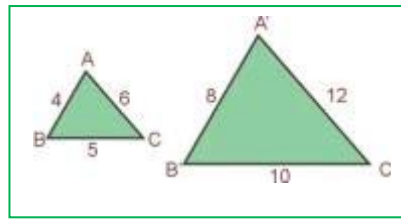
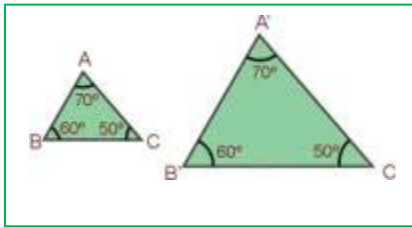
Dos triángulos son semejantes si:

- **Primero:** Tienen dos ángulos iguales.
- **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales.
- **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta, por ejemplo, que tengan un lado y dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual, y necesariamente los lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, entonces los tres ángulos son iguales. Con más cuidado es preciso mirar el tercer criterio, y en otro curso se demostrará con más rigor.

Ejemplo



Actividades propuestas

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

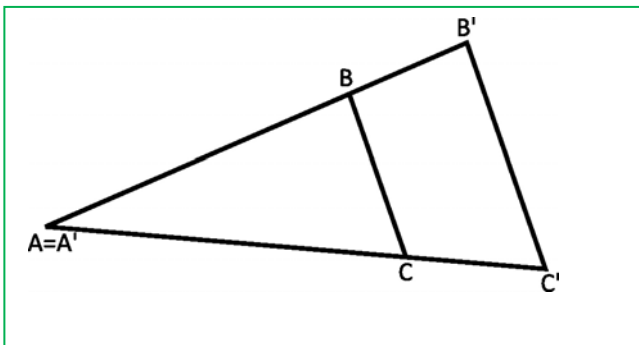
- a) Un ángulo de 80° y otro de 40° . Un ángulo de 80° y otro de 60° .
- b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70° . Triángulo isósceles con ángulo igual de 50° .
- c) $A = 30^\circ$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 14$ cm, $c' = 18$ cm
- d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 20$ cm, $b' = 25$ cm, $c' = 35$ cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

- a) $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 24$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, $c' = ?$
- b) $A = 45^\circ$, $b = 16$ cm, $c = 8$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = ?$

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

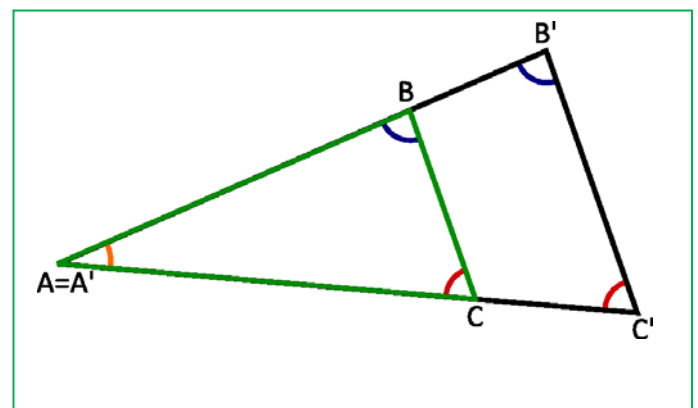
2.3. Triángulos en posición de Tales



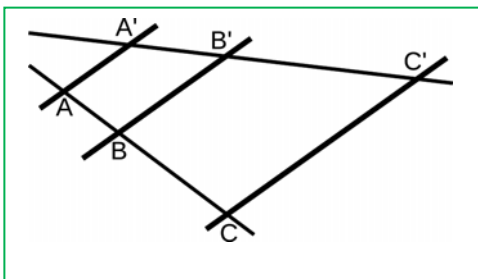
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros, por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



2.4. Teorema de Tales



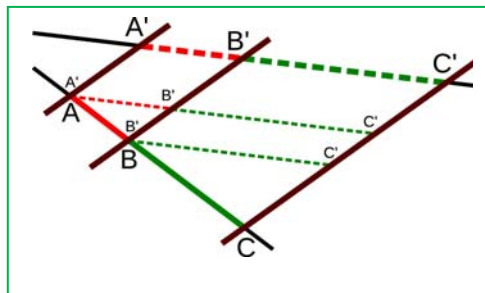
El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

Dadas dos rectas, y varias rectas paralelas entre sí, que las cortan respectivamente en los puntos A, B, C y A', B', C' . Entonces el **Teorema de Tales** afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes en posición Tales, y que por lo tanto se puede deducir que sus lados son proporcionales:

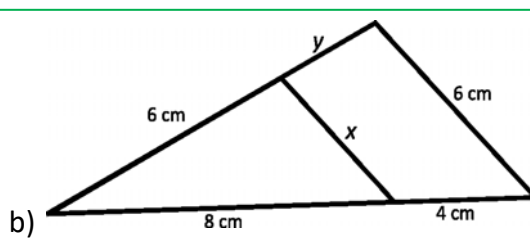
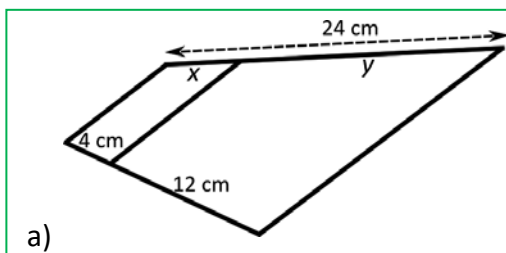
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



Observación: En este caso no relacionamos los segmentos AA' , BB' y CC' que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

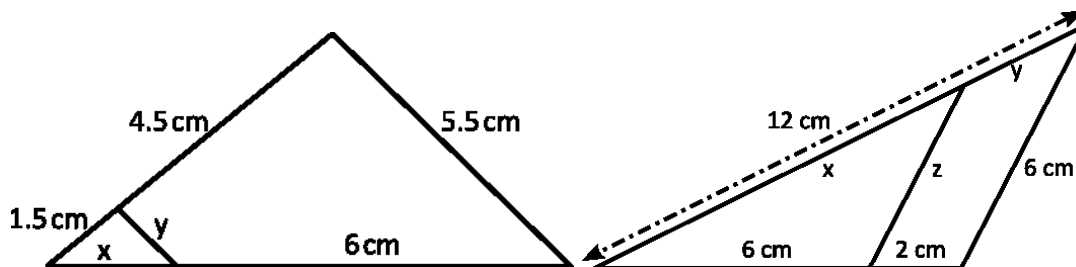
13. Calcula los valores de x e y en las siguientes figuras.



14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



2.5. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos... a la razón de semejanza se le llama **escala**.

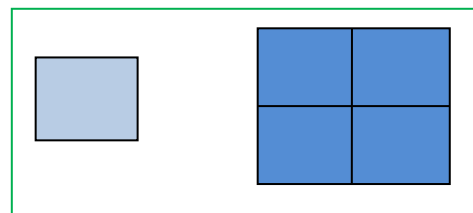
Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k , entonces la razón entre sus áreas es k^2 .

Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen.

Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.



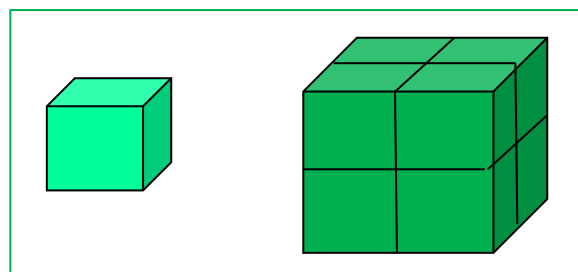
Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k , entonces la razón entre sus volúmenes es k^3 .

Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen.

Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.



Actividades resueltas

✚ La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

El peso está relacionado con el volumen. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material, que pese 1 kilo. Por tanto $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 m, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1,5$ m. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

- El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
- En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm, 25 cm y 40 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
- Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?
- La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?



2.6. Escalas: planos y mapas

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos “**escala**”

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:



✚ En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50000 m, es decir a 50 km.

Ejemplo:

✚ Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la

foto nos da una escala:

$$1 : 600.$$

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:

$$3,5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$



CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes**.

Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de polígonos que ya conoces del curso anterior. Si las recuerdas, puedes saltarlo.

3.1. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2$$

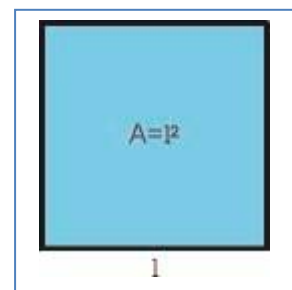
El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un cuadrado de 15 dm de lado, el área de dicho cuadrado es 225 dm² ya que:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 15^2 = 225 \text{ dm}^2.$$



Actividades resueltas

- ✚ Calcula el área y el perímetro de la baldosa de la figura de 9 cm de lado

Solución: La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = 4(\text{lado}) = 4(9) = 36 \text{ cm}.$$

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2.$$



Baldosa cuadrada

- ✚ Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de 8 cm de base y 3 cm de altura

Solución: Por tratarse de un rectángulo:

$$\text{Perímetro} = 2(\text{base}) + 2(\text{altura}) = 2(8) + 2(3) = 22 \text{ cm}.$$

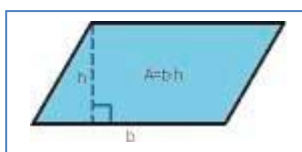
$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2.$$

3.2. Área de paralelogramo y del triángulo

Ya sabes que:

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{Paralelogramo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

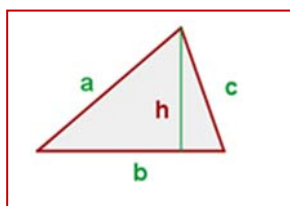


Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El área de un triángulo es la mitad del área de un paralelogramo:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



Ejemplo:

El área de un triángulo de base $b = 7 \text{ cm}$ y altura $h = 5 \text{ cm}$ es $17,5 \text{ cm}^2$ ya que:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ cm}^2.$$

Actividades resueltas

- La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 5 metros y su altura mide 4 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?



Solución: Como la vela tiene forma triangular:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ m}^2.$$

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

- a) Un cuadrado de 5 metros de lado:

Perímetro: La suma de sus cuatro lados: $5 + 5 + 5 + 5 = 20 \text{ m}$.

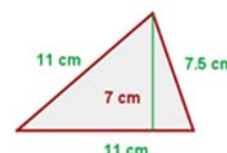
Área: lado $\cdot$ lado = $5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2$.

- b) Un rectángulo de 7 metros de ancho y 6 m de largo

Perímetro: Suma de sus lados: $7 + 7 + 6 + 6 = 26 \text{ m}$.

Área: Largo por ancho = $7 \cdot 6 = 42 \text{ m}^2$.

- c) Triángulo de base 11 cm y altura 7 cm, y cuyos otros dos lados miden 11 cm y 7,5 cm:



Área:

$$A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$$

Perímetro:

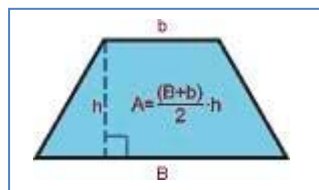
$$P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5 \text{ cm}$$

Actividades propuestas

25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

3.3. Área del trapecio, rombo y romboide

Imagina un trapecio. Gíralo 180º. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

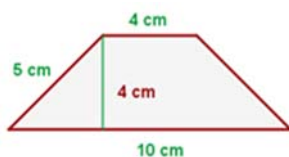


El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

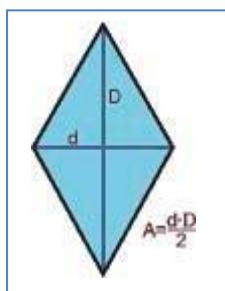
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Ejemplo:

✚ Tenemos el siguiente trapecio cuya base $B = 10 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, su área es:



$$A = \frac{(10 + 4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

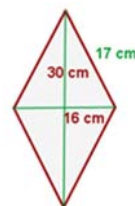
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo:

✚ Si tenemos un rombo cuyas diagonales son $D = 30 \text{ cm}$ y $d = 16 \text{ cm}$ respectivamente y un lado 17 cm , el área será

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$



Y el perímetro $17 \cdot 4 \text{ cm}$ al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados: 15 cm , (la mitad de la diagonal D), 8 cm (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 cm , el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

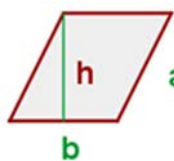
$$A = (8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240 \text{ cm}^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.



El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$



Ejemplo:

Si tenemos un romboide de 5 cm de base y 4 cm de altura su área es $5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$.

Si el lado vale 4, el perímetro es $5 + 5 + 4 + 4 = 18 \text{ cm}$.

Actividades resueltas

+ Calcula el área de las siguientes figuras planas:

a) Un trapecio de bases 12 y 8 cm y de altura 5 cm

b) Un rombo de diagonales 27 y 8 cm

$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(12+8) \cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{27 \cdot 8}{2} = 108 \text{ cm}^2.$$

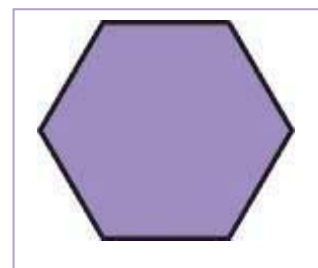
3.4. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área: $(\text{base} \cdot \text{altura})/2$. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, la apotema del polígono.

Ejemplo

+ El hexágono regular de lado 4 cm y apotema 3,5 cm lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 cm y altura 3,5 cm, por lo que el área de cada uno es:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{4 \cdot 3,5}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$



El área del hexágono es por tanto:

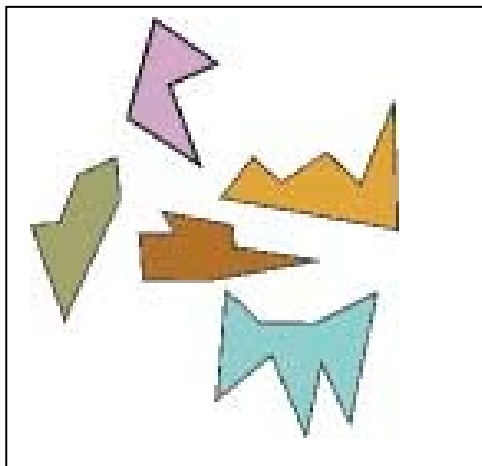
$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3,5 = 42 \text{ cm}^2.$$

Al ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$ el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

El **área de un polígono regular** es igual al semiperímetro por la apotema.

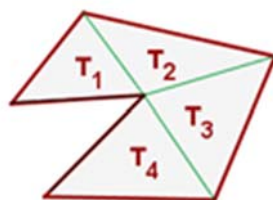
$$\text{Área} = \text{semiperímetro} \cdot \text{apotema}$$

3.5. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.



$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Ejemplo:

✚ El área de esta figura irregular es 84 cm^2 . ¿Qué hemos hecho para calcularla?

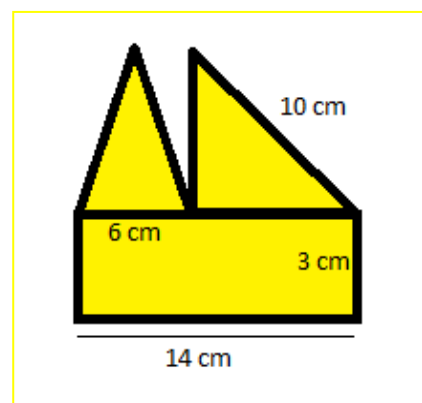
Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide 6 cm .

$$\text{Área}_{\text{triángulo 1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{triángulo 2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2. \quad \text{Área}_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42 \text{ cm}^2.$$

Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas: A

$$\text{total} = 18 + 24 + 42 = 84 \text{ cm}^2.$$



Actividades resueltas

✚ Para calcular el área del polígono de la derecha, lo dividimos primero en cuadriláteros conocidos.

Tenemos un rombo cuyas diagonales miden 14 dm y 10 dm , un trapecio de altura 7 dm y bases 16 y 11 dm y un triángulo de altura 5 dm y base, la base menor del trapecio.

Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

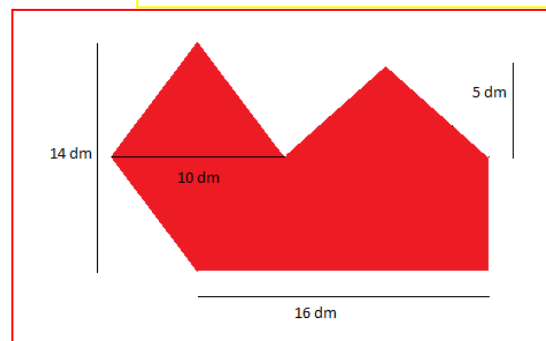
$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70 \text{ dm}^2.$$

El trapecio tiene de base mayor 16 dm , de base menor $16 - 5 = 11 \text{ dm}$, y de altura 7 dm , luego:

$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(16 + 11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} \text{ dm}^2.$$

La base del triángulo mide 11 dm y su altura 5 dm , luego su área mide: $\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} \text{ dm}^2.$

Sumando todas las áreas obtenidas: $\text{Área}_{\text{TOTAL}} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192 \text{ dm}^2.$



Actividades propuestas

26. Las baldosas de la figura miden 24 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

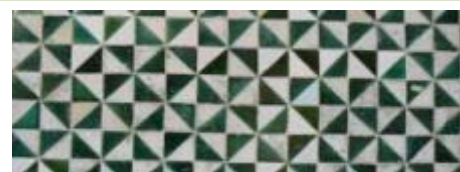
27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?



Baldosas rectangulares



28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?



29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 mm y una altura de 12 mm . ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 cm . Si su hipotenusa mide 14 cm , ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 cm . ¿Cuánto mide el área de la cometa?

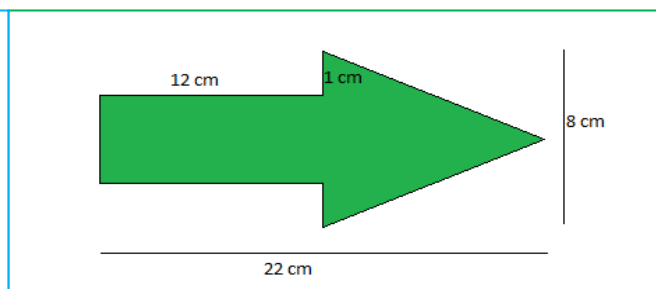
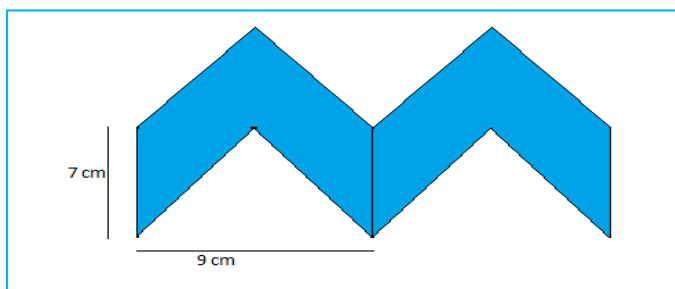
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases $2,3$ y $1,7\text{ m}$ y altura $1,4\text{ m}$. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

33. Calcula el área de un romboide de 24 cm de base y 21 cm de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

34. Dado un hexágono regular de lado 4 cm , calcula la longitud del apotema y determina su área.

35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 cm , calcula la longitud del apotema y determina su área.

36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:



37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de las figuras circulares que ya conoces del curso anterior. Si lo recuerdas bien, puedes saltarlo.

4.1. Longitud de una circunferencia

El número π (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = \text{Longitud de la circunferencia} / \text{Diámetro}$$

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r , entonces su diámetro mide $2r$, y su longitud, por la definición de π , mide $2 \cdot \pi \cdot r$.

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Actividades resueltas

✚ La circunferencia de radio 7 cm tiene una longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 7 = 14 \cdot \pi \approx 43,98$.

4.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°. Por tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360.$$

Actividades resueltas

✚ Las ruedas de un carro miden 50 cm de diámetro, y tienen 16 radios. El ángulo α mide 360/16. Por tanto la longitud del arco entre cada radio es

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360 = 50 \cdot \pi \cdot (360/16) / 360 = 50 \cdot \pi / 16 \approx 9,8 \text{ cm}.$$



4.3. Área del círculo

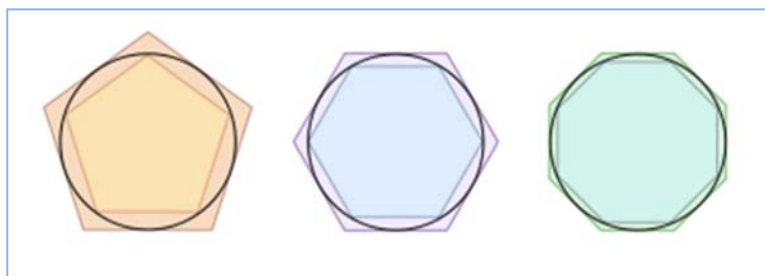
El área del círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$

Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio r , con cada vez más lados. Entonces:

i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a



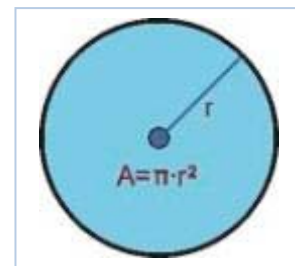
la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, se aproxima a:

$$(2 \cdot \pi \cdot r / 2) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Actividades resueltas

- ✚ El área de un círculo de radio 5 cm es $A = 25 \pi \approx 78,54 \text{ cm}^2$. Y el de un círculo de 1 m de radio es $A = \pi \approx 3,14 \text{ m}^2$.
- ✚ El área de un círculo de diámetro 8 m es $A = 4^2 \pi = 16 \pi \approx 50,3 \text{ m}^2$. Y el de un círculo de 2 cm de diámetro es $A = 1^2 \pi = \pi \approx 3,14 \text{ cm}^2$.



4.4. Uso de Geogebra para comprender la longitud de la circunferencia y el área del círculo

Vamos a utilizar *Geogebra* para mejorar la comprensión sobre el número π comprobando cómo el cociente entre la longitud de la circunferencia y su radio es constante, aunque se modifique el radio, siendo igual a 2π . Del mismo modo vamos a trabajar con *Geogebra* con el área de un círculo y comprobar que el cociente entre el área y el cuadrado del radio permanece constante.

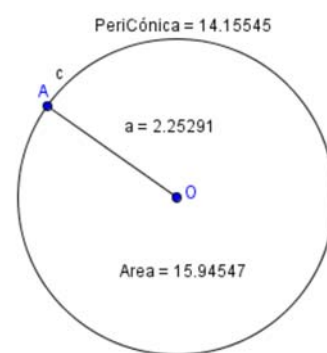
Si nunca has utilizado *Geogebra* busca en la web el archivo sobre *Geogebra* de Marea Verde y comienza por los primeros pasos.

Actividades resueltas

- ✚ Comprueba, utilizando *Geogebra*, la relación entre la longitud de la circunferencia y su radio.

Abre una ventana de *Geogebra*, en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula**.

- Define un **Nuevo punto** A y otro que, con el menú contextual, llamarás O y dibuja la **circunferencia**, c, con centro en O que pasa por A y el **segmento** OA.
- Utiliza la herramienta **Distancia** para medir la longitud de la circunferencia, *PeriCónica*; y el segmento OA, que es su radio y se denomina a.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente $\text{PeriCónica}[c]/a$, que aparece en la ventana algebraica como $b = 6,28$.
- Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**. El cociente b aparece como $b = 6,28319$, una aproximación del número 2π .
- **Desplaza** el punto A y observa que aunque cambian las medidas de la longitud de la circunferencia y del radio el cociente b permanece constante.



- ✚ Comprueba, utilizando *Geogebra*, la relación entre el área del círculo y su radio.

- Activa la herramienta **Área** para calcular la medida de la superficie del círculo.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente $\text{Area}[c]/a^2$, que aparece en la ventana algebraica como $d = 3,14159$, una aproximación del número π .
- **Desplaza** el punto A y observa que aunque cambian las medidas del área del círculo y del radio el cociente d permanece constante.

4.5. Área de la corona circular

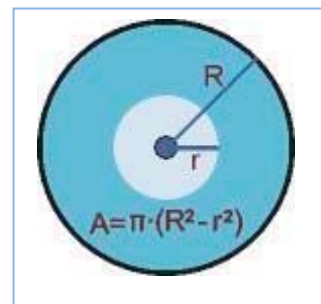
El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Actividades resueltas

- ✚ El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 cm y 5 cm es igual a:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (9^2 - 5^2) = \pi \cdot (81 - 25) = \pi \cdot 56 \approx 175,9 \text{ cm}^2.$$



4.6. Área del sector circular

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.

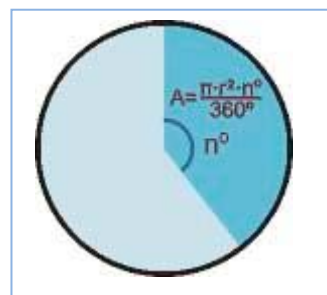
Actividades resueltas

- ✚ Para hallar el área del *sector* circular de radio 4 m que abarca un ángulo de 90° , calculamos el área del círculo completo: $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 16\pi \cdot 90 / 360 = 4\pi \approx 12,57 \text{ m}^2.$$

- ✚ Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 4 m y altura 4 m, $A_T = 4 \cdot 4 / 2 = 8 \text{ m}^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 12,57 - 8 = 4,57 \text{ m}^2.$$



4.7. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.

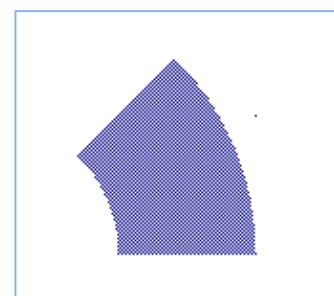
El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios r y R que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.$$

Actividades resueltas

- ✚ Para hallar el área del *sector* de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de 90° , calculamos el área de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_C = 15\pi \cdot 90 / 360 = 3,75\pi \approx 11,78 \text{ m}^2.$$



También se puede hallar con la fórmula anterior:

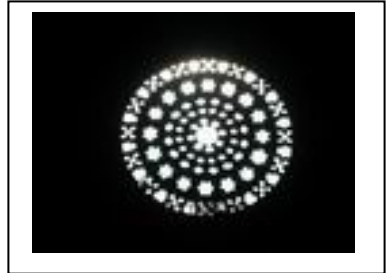
$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11,78 \text{ m}^2.$$

Actividades propuestas

- 38.** Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella... y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.
- 39.** La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 km . ¿Cuánto mide el Ecuador?
- 40.** Antiguamente se definía un metro como: *“la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París”*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



- 41.** Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de $5,3 \text{ m}$. ¿Cuál es la longitud del arco?
- 42.** Un faro gira describiendo un arco de 160° . A una distancia de 5 km , ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?
- 43.** El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 m , y la de la siguiente figura es de 3 m .



- a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.
- b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas
- c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 m .
- d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.
- 44.** Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 cm .
- 45.** Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 cm y que forma un ángulo de 60° . Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.
- 46.** Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 cm y 12 cm y que forma un ángulo de 60° .

CURIOSIDADES. REVISTA**Biografía de Pitágoras**

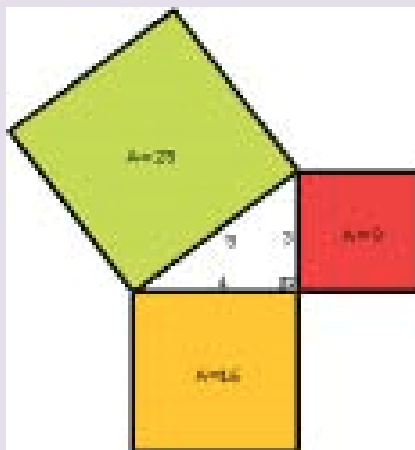
Pitágoras de Samos nació aproximadamente en el año 580 a. C. y falleció aproximadamente en el 495 a. C. Destacó por sus contribuciones en Matemáticas, Filosofía y Música. Entre sus hallazgos matemáticos destaca el teorema de Pitágoras. Pitágoras fundó la Escuela Pitagórica, en la que todos los descubrimientos eran de la comunidad, y que mantenía entre otras normas muy estrictas, la de ser vegetariano. El lema de los Pitagóricos era: *"Todo es número"*. Cuando Pitágoras murió quedó su mujer, Teano, dirigiendo la Escuela. Curiosidad: Los Pitagóricos mostraban odio a las judías. No se conoce el origen de esa aversión. ¿Preferirían contar con lentejas?

**Teorema de Pitágoras**

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes tesoros de la Geometría. Se habla de las 370 demostraciones del Teorema de Pitágoras: chinos, hindúes, árabes... tienen la suya.

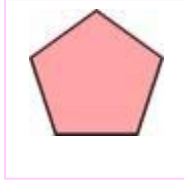
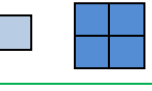
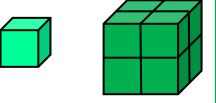
Teorema de Pitágoras y los egipcios

Dos mil años antes de Cristo, en las orillas del Nilo, los egipcios utilizaban una cuerda con trece nudos para trazar ángulos rectos. Sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 era un triángulo rectángulo.



Incluso hoy algunos albañiles verifican la perpendicularidad de los marcos de las puertas y de las ventanas mediante la regla que llaman: 6, 8 y 10.

RESUMEN

		Ejemplos
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$	$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	$A = \text{lado}^2 = l^2$ 	Si $l = 4 \text{ cm} \Rightarrow A = 16 \text{ cm}^2$
Área del rectángulo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$ 	Si $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \Rightarrow A = 15 \text{ cm}^2$.
Área del paralelogramo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$ 	$a = 7 \text{ m}, b = 9 \text{ m} \Rightarrow A = 63 \text{ m}^2$
Área del triángulo	$A = (\text{base por altura})/2 = a \cdot b/2$ 	$a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m} \Rightarrow A = 15 \text{ m}^2$
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura 	$B = 7; b = 3; h = 5 \Rightarrow A = 25$
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2 	$D = 4, d = 9 \Rightarrow A = 36/2 = 18$
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados 	Lado = 6 cm , apotema = 5 cm , número de lados = $5 \Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$; Área = $15 \cdot 5 = 75 \text{ cm}^2$.
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema	
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r la longitud es igual a $2\pi r$. Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$ 	Radio = $3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud = $6\pi \approx 18,84 \text{ cm}$. Área = $9\pi \approx 28,26 \text{ cm}^2$.
Área del círculo	Si el radio es r , el área es igual a $\pi \cdot r^2$. 	Si $\alpha = 30^\circ$ y $r = 3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud del arco = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0,5\pi \approx 1,57 \text{ cm}$
Área de la corona circular. Área del sector circular	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor. Si abarca un arco α grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$. 	$R = 7, r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125,6 \text{ u}^2$ $R = 4 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ \Rightarrow A = \pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8,373 \text{ cm}^2$
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales 	Si el lado del cuadrado mide 5 m , otro semejante de lado 15 m , $k = 3$, tiene un área multiplicada por 9 , y el volumen del cubo multiplicado por 27 .
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k , la razón entre las áreas es k^2 , y entre los volúmenes k^3 . 	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Teorema de Pitágoras**

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 cm y 6 cm de medida de sus catetos y 15 cm de hipotenusa? Razona tu respuesta
2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.
3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.
4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 cm y 6,9 cm?
5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 16 cm y 12 cm	b) 40 m y 30 m
c) 5 dm y 9,4 dm	d) 2,9 km y 6,3 km.
6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 25 cm y 15 cm	b) 35 m y 21 m
c) 42 dm y 25 dm	d) 6,1 km y 4,2 km
7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 m.
8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm
9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

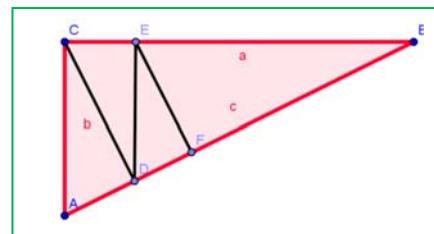
10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 30º y otro de 20º. Un ángulo de 120º y otro de 20º.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.
c) $A = 40^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 40^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = 6$ cm
d) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. $a' = 12$ cm, $b' = 16$ cm, $c' = 24$ cm
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?
b) $A = 50^\circ$, $b = 3$ cm, $c = 7$ cm. $A' = 50^\circ$, $b' = 18$ cm, ¿ a' ?
12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado

del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC , de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD , CDE , DEF y EFB , y el escriba calcula la longitud del lado AD como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo ABC y del triángulo ACD . Determina la longitud de los segmentos CD , DE y EF .



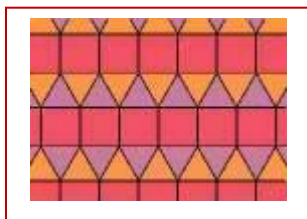
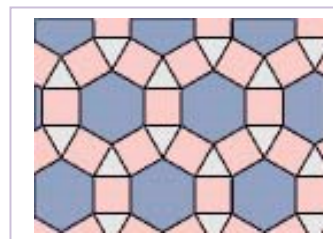
Áreas y perímetros

21. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
22. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.
23. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
24. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
25. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.
26. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
27. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?
28. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?
29. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.
30. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.
31. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 cm y su altura 5 cm?

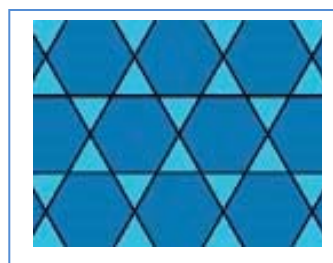
32. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 cm respectivamente.

Problemas

33. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.



34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.



35. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?

36. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 m, y se separa de la pared una distancia de 2 m, ¿cuál es su longitud?

37. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 m de largo y 60 m de ancho. Calcula:

- La diagonal del terreno cuadrado.
- La diagonal del rectángulo
- El área de cada terreno.
- ¿Cuál tiene mayor superficie?

38. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.

39. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?

40. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

41. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.

42. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

- a) Longitud de una arista.
- b) Altura del triángulo de la base.
- c) Perímetro de la base
- d) Altura de una cara
- e) Perímetro de una cara

43. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?

44. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de un cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris.... Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?



45. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro: a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor. b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza. c) calcula la superficie de cada abanico.

46. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1,2 m. a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas. b) La superficie de dicha estrella. c) La superficie de la cruz,



AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
 - a) 6,32 *cm*
 - b) 7 *cm*
 - c) 0,05 *m*
 - d) 627 *mm*
2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
 - a) 714 *cm*
 - b) 7,4 *m*
 - c) 8 *m*
 - d) 8925,1 *mm*
3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
 - a) 4,3 *dam*²
 - b) 21 *m*²
 - c) 40 *m*²
 - d) 1273057 *cm*²
4. El área de un rectángulo de 10 *cm* de diagonal y 8 *cm* de base es:
 - a) 53 *cm*²
 - b) 80 *cm*²
 - c) 48 *cm*²
 - d) 62 *cm*²
5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
 - a) 45 *dm*
 - b) 181 *dm*
 - c) 126 *dm*
 - d) 200 *m*
6. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:
 - a) 49 *cm*²
 - b) 48 *cm*²
 - c) 50 *cm*²
 - d) 48,37 *cm*²
7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 *m* mide aproximadamente:
 - a) 3,14 *m*
 - b) 1,4 *m*
 - c) 1,26 *m*
 - d) 1,7 *m*
8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* mide:
 - a) 6,32 *cm*
 - b) 5 *cm*
 - c) 0,052 *m*
 - d) 62 *mm*
9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 6 *m*, el otro cateto mide:
 - a) 87 *cm*
 - b) 4 *m*
 - c) 8 *m*
 - d) 5,1 *mm*
10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 *cm* y 16 *cm* es:
 - a) 34 *cm*
 - b) 70 *cm*
 - c) 40 *cm*
 - d) 62 *cm*

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Fernando Blasco

Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos.

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF. Wikipedia Commons

Índice

1. EL ESPACIO

- 1.1. EL ENTORNO EN EL QUE NOS MOVEMOS
- 1.2. DIMENSIONES
- 1.3. POLIEDROS, CUERPOS REDONDOS Y OTRAS FIGURAS
- 1.4. ELEMENTOS DEL ESPACIO
- 1.5. REPRESENTACIÓN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

2. POLIEDROS

- 2.1. POLIEDROS REGULARES
- 2.2. PRISMAS
- 2.3. PIRÁMIDES
- 2.4. ÁREAS DE POLIEDROS
- 2.5. VOLÚMENES DE PRISMAS Y PIRÁMIDES



3. CUERPOS REDONDOS

- 3.1. CILINDRO
- 3.2. CONO
- 3.3. ESFERA
- 3.4. SUPERFICIES DE CUERPOS REDONDOS
- 3.5. VOLUMEN DEL CILINDRO Y DEL CONO
- 3.6. VOLUMEN DE LA ESFERA



Resumen

En nuestro día a día, en la vida real, casi nunca encontramos figuras planas, sino que utilizamos objetos tridimensionales.

Una caja de zapatos, una goma de borrar o un paquete de tizas son ejemplos de prismas. El dado del parchís (cubo) o el dado de un juego de rol (icosaedro) son poliedros regulares. De las pirámides no hablamos: las que hay en Egipto son de todos conocidas. Las latas de conservas vegetales y las tizas de colores suelen ser cilíndricas, hay muchos helados con forma de cono y tanto las pelotas como las pompas de jabón tienen forma de esfera.

Nos interesará calcular el volumen de estos cuerpos (para saber cuánto cabe en su interior) y su área (lo que nos permitirá, por ejemplo, estimar la cantidad de pintura necesaria para recubrirlos).

1. EL ESPACIO

1.1. El entorno en que nos movemos

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos “planos”, como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

A pesar de que en nuestro día a día nos encontramos objetos tridimensionales, es más difícil estudiarlos porque no caben en un libro, a no ser que sea un libro especial con páginas desplegables (acabamos de decir que las páginas son bidimensionales). Por eso se recurre a fabricar modelos (en plastilina, cartulina, arcilla u otro material) o a utilizar representaciones planas de estos objetos.

Una técnica muy utilizada en matemáticas consiste en aprovechar lo que ya sabemos para aprender los nuevos conceptos. Por ello en este tema nos centraremos fundamentalmente en cuerpos geométricos que se obtienen a partir de figuras planas. Vamos a familiarizarnos con esos objetos.

Actividades resueltas

- ✚ *Observa un dado. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen sus caras? Mira ahora un paquete de tizas blancas. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen? ¿En qué se parecen el dado y la caja? ¿En qué se diferencian?*

El dado tiene 6 caras. Cada cara tiene la forma de un cuadrado.

El paquete de tizas también tiene 6 caras. Pero las caras tienen forma rectangular.

El dado y la caja se parecen en la forma (si la caja fuera de goma y pudiésemos comprimirla tanto como quisiéramos, podríamos obtener un dado a partir de ella). Se parecen en que tienen ambos 6 caras. Se diferencian en que en un caso las caras son cuadradas y en el otro rectangulares.

Actividades propuestas

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un Orollo de papel higiénico.

- ¿Qué forma tienen las bases de la lata?
- ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?
- Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?
- Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?



1.2. Dimensiones

El espacio involucra tres **dimensiones: ancho, alto y largo**, mientras que el plano involucra solo a dos.

Ejemplo:

- ✚ Una hoja de tamaño A4 mide 21 cm x 29,7 cm. Damos 2 números para hablar de su tamaño.

La caja donde vienen los paquetes de 2500 hojas A4 mide 21 cm x 29,7 cm x ??? cm. Necesitamos tres números para referirnos a su tamaño. El número que hemos añadido es la altura de la caja.

Ejemplo:

- ✚ Si has visto dibujos hechos por los egipcios te habrá llamado la atención que están dibujados con unas poses muy extrañas. Se debe a que representar en un plano un cuerpo del espacio es muy complejo. Las figuras pierden su volumen.



Leonardo Da Vinci, un genio en todos los campos y que colaboró en muchas actividades matemáticas con Luca Paccioli (que era su profesor) fue uno de los pioneros en conseguir representar lo tridimensional en un cuadro. Esas representaciones utilizan matemáticas.

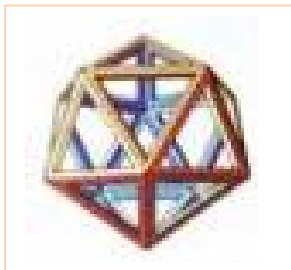
Actividades propuestas

2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.
3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).
4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

1.3. Poliedros, cuerpos redondos y otras figuras

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.

Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.



Un tipo particular de poliedros son los poliedros regulares, que estudiaremos en otra sección de este capítulo. Los prismas y pirámides también son poliedros.

Los principales cuerpos redondos que estudiaremos son las esferas, conos y cilindros. Un tipo particular de cuerpos redondos es el de los cuerpos de revolución, que se obtienen al girar una figura plana en torno a un eje.



Actividades resueltas



✚ Si cogemos una tarjeta de visita (rectangular), la atravesamos por un hilo siguiendo su eje de simetría y la hacemos girar, ¿qué figura obtenemos?

La figura que se obtiene es un cilindro. Puedes comprobarlo.

✚ ¿Qué forma tiene una rosquilla?

La rosquilla no es ni una esfera ni un cilindro ni un cono. Su forma, igual que la de un neumático es otra figura matemática, muy utilizada, denominada toro (no te asustes, es un toro inofensivo, sin cuernos).



Actividades propuestas

- Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?
- Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
 - esfera
 - cilindro
 - poliedro regular
 - prisma
 - pirámide
 - cono
- Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

1.4. Elementos del espacio

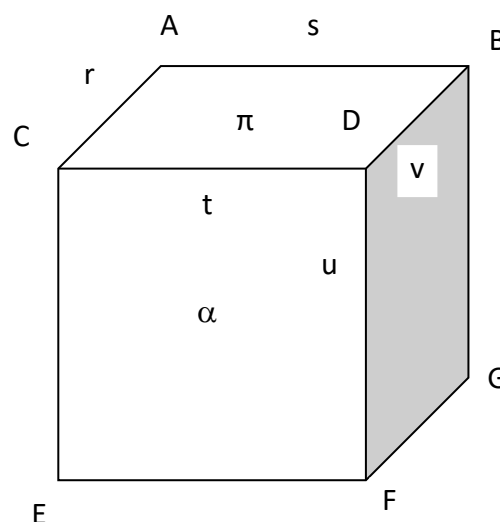
Puntos, rectas y planos

Mira a tu alrededor. Estás en una habitación. Las paredes, el suelo y el techo son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. Y la intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto.

Actividades resueltas

- En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: $A, B, C, D, E, F, G, \dots$; a las rectas con letras minúsculas: $r, s, t, u, \dots$; y a los planos con letras griegas: $\pi, \alpha, \dots$

También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos A y B , o plano que contiene a los puntos A, B y C .



Actividades propuestas

- Indica la recta que pasa por los puntos D y F .
- Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E .
- Indica el plano que contiene a la recta t y al punto B .
- Indica el plano que contiene a las rectas s y t .

Posiciones relativas de dos planos

En tu habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son **paralelos** si no tienen ningún punto en común, y son **secantes** si tienen una recta en común.

Actividades resueltas

- Observamos las seis caras del cubo y comprobamos que o son paralelas o son secantes. Las que son secantes también son en este caso perpendiculares.
- El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta t .
- El plano π y el del suelo son paralelos.

Actividades propuestas

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.
13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Sigue mirando tu aula. Fíjate en una recta del techo. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son **paralelas** o se **cortan** o se **cruzan**.

Actividades resueltas

-  Nos fijamos en el cubo anterior en la recta r . La recta s la corta (es secante) en el punto A .
-  La recta t la corta en el punto C . Las tres rectas r , s y t están en el plano π .
-  Las rectas r y v son paralelas y también están en el plano π .
-  Pero las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas r y u se cruzan.

Actividades propuestas

14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
- Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
 - Tres pares de rectas que se crucen.
 - Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar **contenida** en un plano o ser **paralela** al plano o ser **secante**.

Actividades resueltas

-  Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r , s , t y v . La recta u corta al plano π en el punto D . La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π .

Actividades propuestas

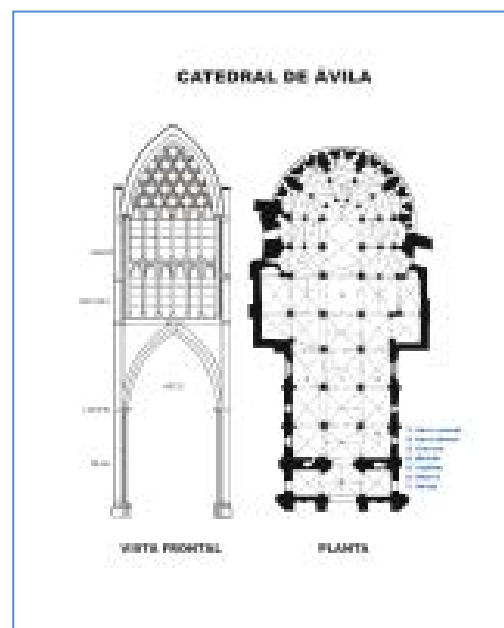
15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α . Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.

1.5. Representación de cuerpos geométricos

Del espacio al plano

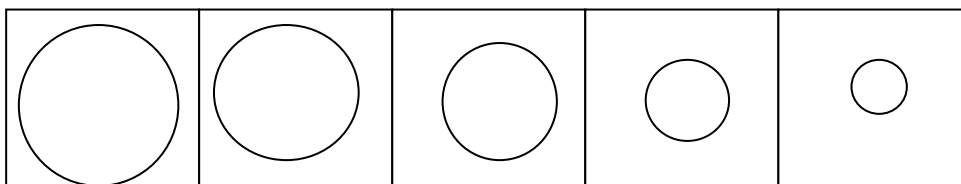
Los arquitectos, ingenieros y en otras muchas profesiones, necesitan dibujar en papel los edificios y las piezas que diseñan. Una forma de hacerlo es representarlos desde tres puntos de vista: **planta, perfil y alzado**.

Otros profesionales, como los médicos, utilizan otras técnicas, como la **tomografía**, en la que se representan los cortes mediante varios planos paralelos.



Actividades resueltas

✚ La siguiente tomografía corresponde a un cono con cortes paralelos a su base:



Actividades propuestas

16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:

- a) un cubo b) un cilindro d) un cono e) una esfera f) una pirámide

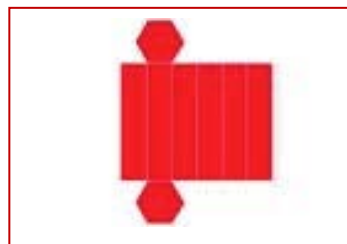
17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:

- a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
 b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
 c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
 d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
 e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.

Del plano al espacio

Muchos cuerpos geométricos podemos construirlos haciendo su desarrollo en un plano. Por ejemplo podemos construir un prisma hexagonal con el desarrollo del margen:

Si quieres construirlo, piensa ¿Dónde pondrías las pestañas para poder pegarlo?



Actividades propuestas

18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.
20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.

Formas de representación

Hemos visto formas de representar los cuerpos geométricos: tomografías, desarrollo, perfil, planta y alzado... pero existen otras como describirlo con palabras, como por ejemplo: Posee 8 vértices, 12 aristas, 6 caras todas iguales a cuadrados. ¿Sabes ya qué estamos describiendo?

Antes vimos la diferencia entre la forma de dibujar en el Egipto antiguo y la de Leonardo da Vinci. Leonardo ya conocía la perspectiva. Los artistas de Renacimiento consiguieron un gran dominio de la perspectiva.

Una forma de perspectiva es la perspectiva caballera, que consiste en suponer que el ojo que mira la figura está infinitamente lejos. Se tiene entonces, entre otras, las siguientes reglas:

- a) Las rectas paralelas en la realidad se mantienen paralelas en el dibujo.
- b) Los segmentos iguales sobre rectas paralelos mantienen igual longitud.



Cubo en perspectiva caballera

Actividades propuestas

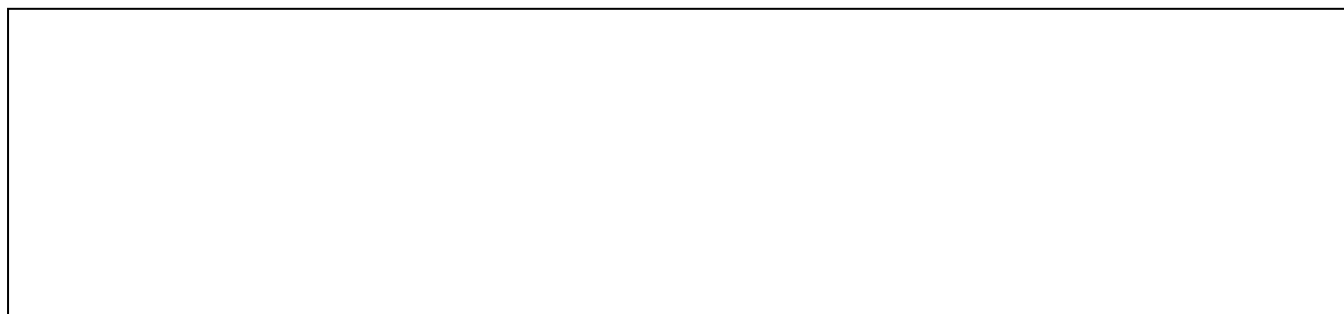
21. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.
22. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.
23. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.
24. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.
25. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.

2. POLIEDROS

2.1. Poliedros regulares

Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:



Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste.
Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

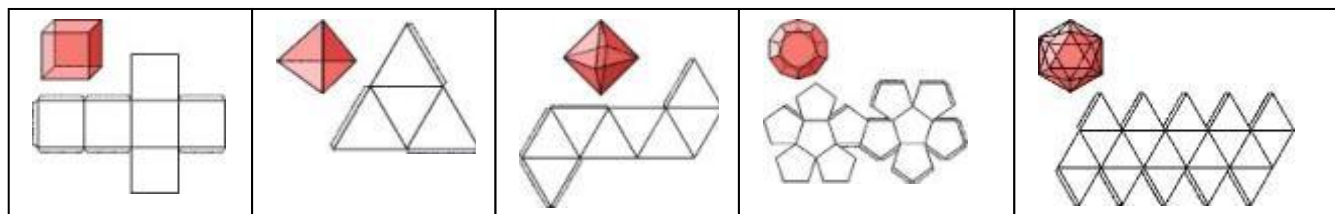
Actividades resueltas

✚ Cuenta el número de caras, de aristas y de vértices de cada uno de los 5 poliedros regulares.

	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Actividades propuestas

26. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.

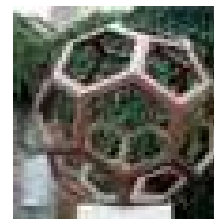


Para cada uno de los cinco poliedros regulares calcula el valor de:

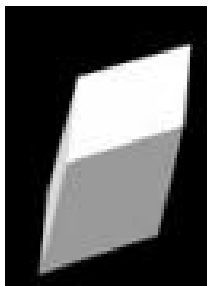
Número de caras + número de vértices – número de aristas.

¿Observas alguna pauta?

27. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?



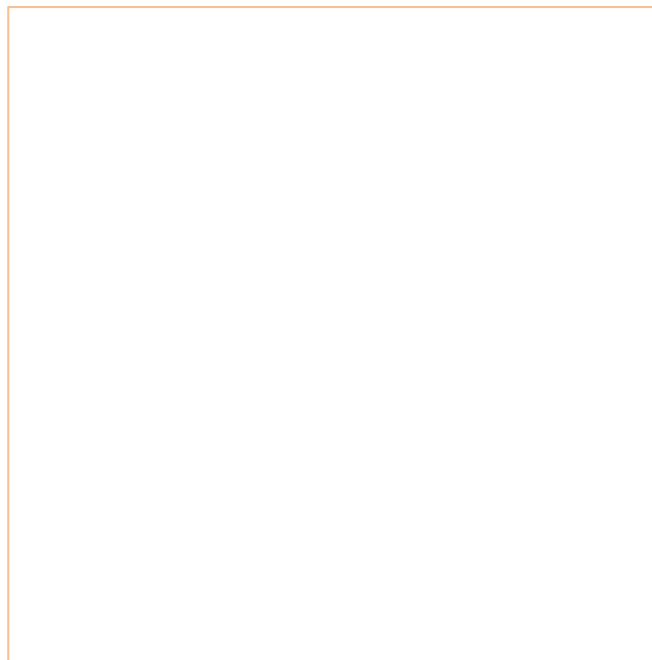
28. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:



29. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

2.2. Prismas.

Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (**bases**) y tantos paralelogramos (**caras laterales**) como lados tienen las bases.



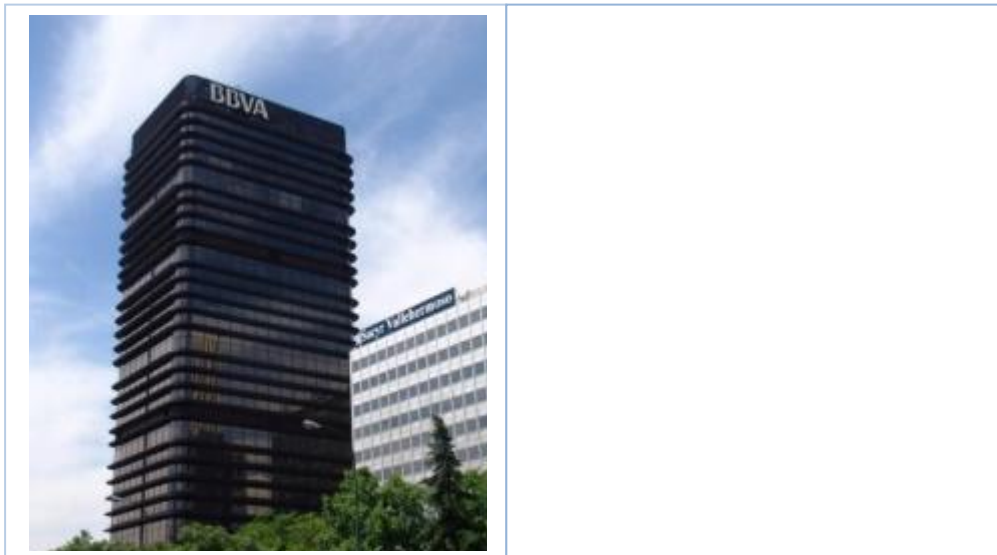
La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto**.

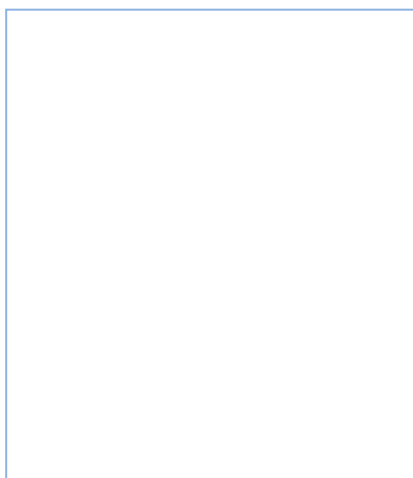
Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.

Ejemplo:

✚ Casi todos los rascacielos tienen una forma que recuerda a un prisma recto.



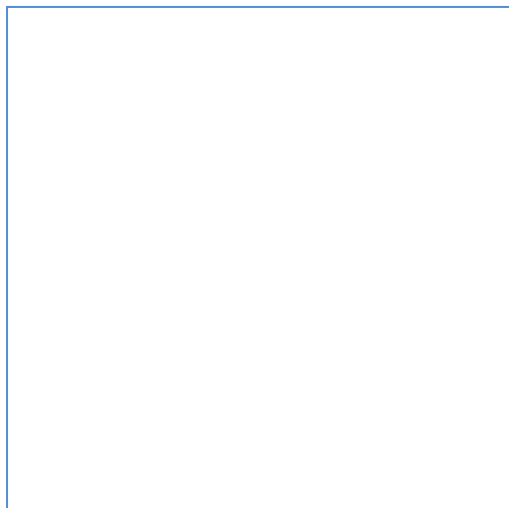
Aunque algunos arquitectos tienen ideas más originales y se atreven con prismas oblicuos.



Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases dos polígonos regulares.

PRISMA TRIANGULAR	PRISMA RÓMBICO	PRISMA HEXAGONAL
-------------------	----------------	------------------

Aun cuando no sea regular, al prisma se le nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un **prisma triangular**, si es un cuadrilátero el prisma se llamará **cuadrangular**, si es un rombo, **prisma rómbico** y cuando la base sea un hexágono, el prisma será **hexagonal**.



La Calzada de los Gigantes, en Irlanda del Norte, presenta rocas de Basalto que han cristalizado en forma de prismas hexagonales. Las figuras geométricas aparecen también en la naturaleza.

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como paralelepípedo, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; ortoedro si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular. Además de los que ya conoces como cubo, prisma rómbico...

Actividades propuestas

30. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.
31. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.



32. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!
33. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?
34. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).

2.3. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.



Llamaremos **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.

Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**...

Ejemplo:

- Hay unas pirámides muy famosas: las pirámides de Giza, cerca de El Cairo, en Egipto. Son pirámides regulares con base cuadrada.

Ejemplo:

- Un tetraedro regular puede pensarse como una pirámide triangular regular.

Ejemplo:

- Un octaedro regular se puede cortar con un corte plano, formando dos pirámides cuadrangulares regulares. Por ese motivo se le denomina "bipirámide".

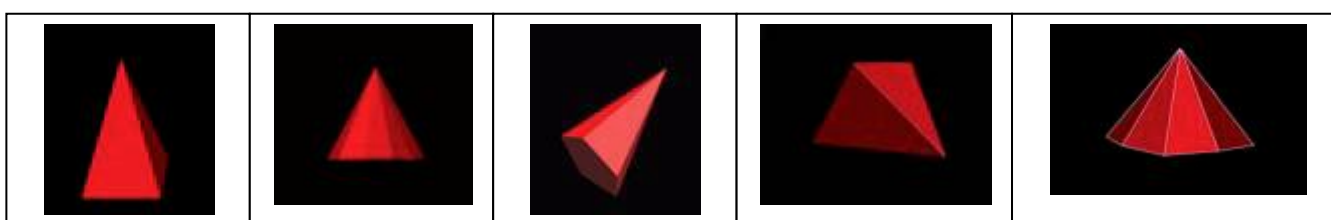
Llamamos **tronco de pirámide** al poliedro que se obtiene al cortar una pirámide por un plano paralelo a su base.

Observación: Al cortar la pirámide por el plano paralelo a su base en realidad quedan dos cuerpos: una pirámide más pequeña, proporcional a la que teníamos originalmente y el tronco de pirámide.

El tronco de pirámide conserva la base de la pirámide original y, en el plano del corte, aparece un nuevo polígono, que es semejante a la base (y que actúa a modo de "tapa" del poliedro). Esta es la llamada **base superior**.

Actividades propuestas

35. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.
36. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.
37. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas u oblicuas y del número de lados de su base.



38. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

2.4. Superficie de poliedros

La **superficie de un poliedro** es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

Ejemplos:

✚ Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2 , el del cubo será $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$.

✚ Superficie de un icosaedro regular de 3 cm de arista:



El icosaedro regular consta de 20 triángulos iguales. Como el área del triángulo es la mitad del producto de la base (3) por la altura ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$), el área de cada uno de los triángulos es $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Así, el área del icosaedro es $45\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

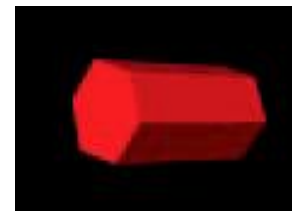
- ✚ Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 cm y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 cm.

Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 cm, el perímetro mide 24 cm. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$.

Así el área de una base es $24 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura: $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}^2$.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: $6 \cdot 40 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 240 + 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

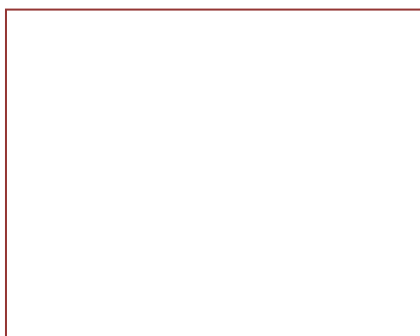


Actividades propuestas

39. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.
40. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.
41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?
42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2 , ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?

2.5. Volumen de prismas y pirámides

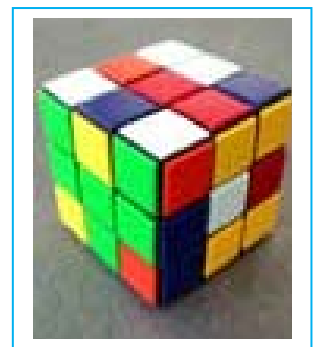
El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las “paredes” del cuerpo se suponen sin grosor.



Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortopedro**) es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto.

Si pensamos un poco en qué significa largo x ancho, veremos que esto es precisamente el

área de la base, con lo que el volumen del ortopedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:



El volumen de un prisma es igual al producto del área de su base por su altura.

Actividades resueltas

- ✚ Calcula el volumen de un prisma recto cuya base es un pentágono regular de 10 cm^2 de área y su altura es de 15 cm .

Como nos dan el área de la base no necesitamos calcularla.

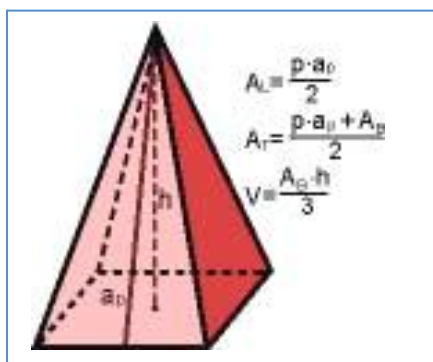
$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ cm}^3$$

- ✚ Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2$.

Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm , igual a la diagonal mayor.

$$\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = 24 \cdot 8 = 192 \text{ cm}^3$$



El **volumen de una pirámide** es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base que la pirámide y la misma altura que ella.

Probar esa propiedad relativa al volumen de una pirámide es complicado: requiere intuición geométrica, aunque te puedes hacer una idea de por qué ese resultado es cierto utilizando papiroflexia para construir un prisma a partir de tres pirámides del mismo volumen (consulta la revista al final del tema).

Actividades propuestas

43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm .
44. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación:* puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

3. CUERPOS REDONDOS

3.1. Cilindros

Del mismo modo que un prisma recto se levanta a partir de una base poligonal, un **cilindro** se construye a partir de una base circular.

Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las **bases** del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cilindro.



Ejemplo:

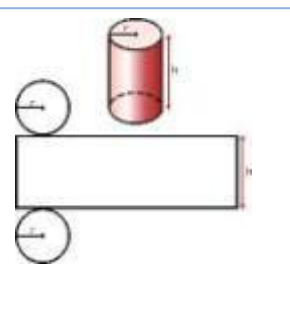
Antes nos hemos referido a rascacielos con forma de prisma, pero también los hay con forma de cilindro. Incluso hay cilindros en torres de iglesias.

Ejemplo:

Las latas de conservas son cilindros. Los rollos de papel higiénico tienen forma cilíndrica (de hecho, el nombre cilindro proviene de una palabra griega que se refiere a su forma enrollada). Hay envases de patatas fritas con forma cilíndrica. Las latas de refresco también tienen forma de cilindro. Muchos objetos cotidianos tienen forma de cilindro.



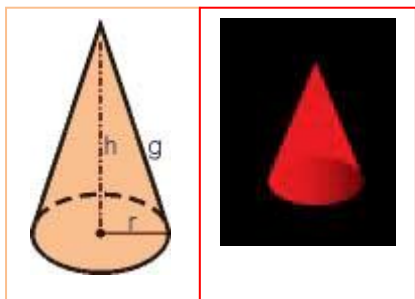
El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.



Actividades propuestas

45. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.

3.2. Conos



Si para hablar del cilindro poníamos como ejemplo a los prismas, para hablar del cono ponemos como ejemplo a las pirámides.

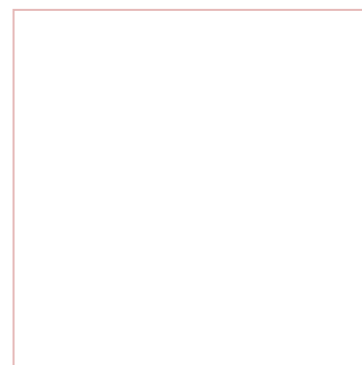
Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la **base** del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la **generatriz** del cono.

Ejemplo:

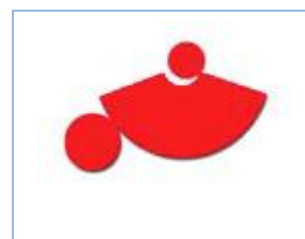


No conocemos rascacielos con forma cónica, pero las tiendas de los indios que estamos acostumbrados a ver en las películas del oeste tienen esa forma.

El **desarrollo** de un cono consta de un sector circular y un círculo. Nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.



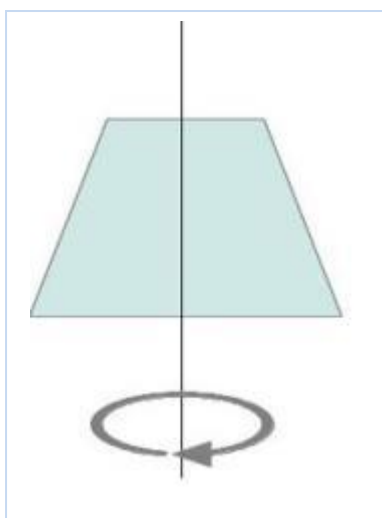
Al igual que hacíamos con las pirámides, podemos cortar un cono por un plano paralelo a su base, resultando un cono más pequeño (la parte superior del corte) y otro cuerpo. Ese otro cuerpo, que tiene **dos bases** circulares se denomina **tronco de cono**. Su **altura** es la distancia entre sus dos bases y llamaremos **generatriz** del tronco de cono al segmento que ha de la generatriz del cono original que ha quedado tras cortar la parte superior.



Un tronco de cono se puede obtener haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor de su altura.

Ejemplo:

En los circos, los domadores suelen subir a las fieras en “taburetes” con forma de tronco de cono. Una flanera tiene forma de tronco de cono. Los envases de queso fresco también tienen forma de cono. ¿Has pensado por qué?



3.3. Esferas



Madrid: Al otro lado del muro

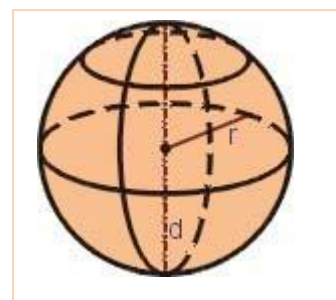
Es más complicado definir una esfera que poner ejemplos de objetos con forma esférica: una sandía, una pelota, una canica... La esfera es la generalización natural del círculo (plano) al espacio.



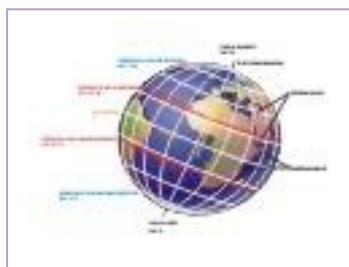
Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro.

El radio del semicírculo es el **radio** de la esfera.

Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.



Ejemplo:



✚ En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

Actividades resueltas

✚ Una esfera de 10 cm de radio se corta por un plano de modo que el círculo resultante tiene 6 cm de radio. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera a ese plano?

Debemos tener en cuenta que el radio de la esfera (R) es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por uno de sus catetos al radio del círculo resultante del corte con el plano (r) y por el otro cateto a un trozo del radio de la esfera perpendicular al plano, cuya longitud es la distancia pedida (d).

Así, como conocemos dos de los datos, solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el tercero (la distancia pedida d).

Así $r^2 + d^2 = R^2$ y, despejando obtenemos

$$d^2 = R^2 - r^2 = 100 - 36 = 64. \text{ Por lo que } d = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$$

3.4. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El procedimiento para hallar la superficie de un cilindro o un cono nos recuerda el modo con el que calculábamos la superficie de un prisma o de una pirámide: no tenemos más que ver qué figuras intervienen en su desarrollo, calcular el área de cada una de ellas y sumarlas.

En algunos textos se utiliza el concepto de **área lateral** tanto para prismas como para cilindros. Con él se refieren al área “de las paredes” de la figura, sin tener en cuenta el de la o las bases. **Este concepto no es necesario si en cada momento sabes qué estás haciendo.** Las fórmulas se deben comprender, pero las matemáticas no son una ristra de fórmulas que se deben aprender de memoria. Entender lo que se debe hacer en cada momento te facilitará el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo del cilindro consta de 2 círculos y un rectángulo. La altura del rectángulo (h) es la altura del cilindro y como el rectángulo se tiene que enrollar alrededor de la base del cilindro, su base tiene que medir lo mismo que la correspondiente circunferencia y ese valor es, siendo r el radio de la base del cilindro. Así, el área del rectángulo es $2\pi rh$.

Por otra parte cada una de las bases tiene área πr^2 . Así:

$$\text{Superficie del cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2$$

Actividades propuestas

46. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.
47. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

Superficie del cono

Siguiendo la misma idea anterior, para calcular la superficie de un cono, sumaremos las áreas de las dos piezas que componen su desarrollo: un círculo y un sector circular. (Mira la figura del desarrollo del cono que está en la sección 3.2).

Si la base del cono es un círculo de radio r , la longitud de la correspondiente circunferencia es $2\pi r$ y la parte curva del sector circular en el desarrollo del cono debe enrollarse sobre esa circunferencia, luego la medida de esa línea curva es $2\pi r$.

Para calcular el área del sector circular haremos una regla de tres, teniendo en cuenta que el radio de ese sector circular es la generatriz del cono: si a una longitud de $2\pi g$ (circunferencia completa) le corresponde un área de πg^2 , a una longitud de $2\pi r$ le corresponderá $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi \cdot r \cdot g$.

La base del cono es un círculo de radio r , cuyo área es de sobra conocido. Así tenemos que

$$\text{Superficie del cono} = \text{Área del sector circular} + \text{Área del círculo} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

Para calcular la superficie del tronco de cono debemos calcular las áreas de sus bases, que son círculos (y, por tanto, fáciles de calcular) y la de su pared lateral. El área de esta pared lateral se puede calcular

restando el área de la pared del cono original menos el de la pared del cono pequeño que hemos cortado.

Superficie lateral del tronco de cono = Superficie lateral del cono original – Superficie lateral del cono que cortamos

Para calcular la superficie total hay que sumar al área lateral el de las dos bases.

También se puede calcular esto mediante una fórmula, cuya prueba utiliza dos teoremas importantes de la geometría plana: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.

Supondremos que el radio de la base mayor del tronco de cono es r , el de la base menor r' y la generatriz g . Entonces

$$\text{Superficie del tronco de cono} = \pi \cdot (r+r') \cdot g + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2$$

Actividades resueltas

- ✚ Queremos construir un taburete para elefantes con forma de tronco de cono, con 75 cm de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros. Posteriormente forraremos con tela todo el taburete. Si el metro cuadrado de la tela elegida cuesta 3 euros (y se supone no se desperdicia nada en la elaboración) ¿cuánto cuesta forrar el taburete?

Lo primero que debemos hacer es expresar todos los datos con las mismas unidades. Lo expresaremos en metros.

Como nos dan la altura y los radios, calcularemos la generatriz usando el teorema de Pitágoras:

Así $h^2 + (r-r')^2 = g^2$ y, retomando los datos tenemos:

$$r' = 1,5 \text{ m}; r = 2,5 \text{ m}; g = \sqrt{0,75^2 + 1^2} = 1,25 \text{ m}.$$

Con ello calculamos el área: $\pi \cdot (2,5 + 1,5) \cdot 1,25 + \pi \cdot 2,5^2 + \pi \cdot 1,5^2 = 42,39 \text{ m}^2$

y, por tanto, forrar el taburete nos cuesta $42,39 \cdot 3 = 127,17$ euros.

Superficie de la esfera

No podemos calcular la superficie de la esfera mediante su desarrollo, ya que solo se podría obtener de forma aproximada. Sin embargo, hay diferentes métodos (más avanzados) que permiten calcularlo. Aunque no somos partidarios de dar fórmulas, esta vez tenemos que avanzar que

Superficie de la esfera de radio r es igual a $4\pi r^2$

Ese valor coincide con el del área lateral del cilindro de radio r y altura $2r$ (que es el que se ajusta por completo a la esfera). Como sabemos deducir el área lateral del cilindro, recordar esto nos evitará tener que recordar la fórmula anterior.

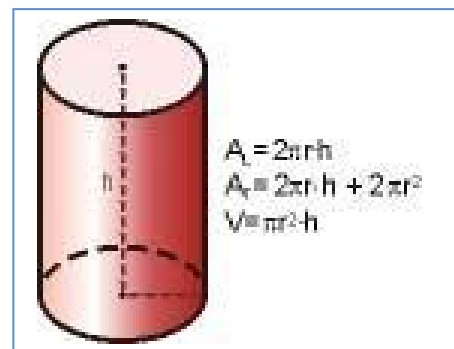
3.5. Volumen de cilindros, conos y esferas

Con el cálculo de volúmenes ocurre algo parecido a lo que ocurre con las áreas: el cálculo del volumen de un cilindro es similar al del volumen de un prisma, mientras que el cálculo del volumen del cono nos recuerda al del volumen de la pirámide. La esfera merece un capítulo aparte.

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es r y la altura es h nos queda

$$\text{Volumen cilindro} = \pi r^2 h$$



Ejemplo:

- Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 cm y una altura de 12 cm. Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 cm, la mitad del diámetro.

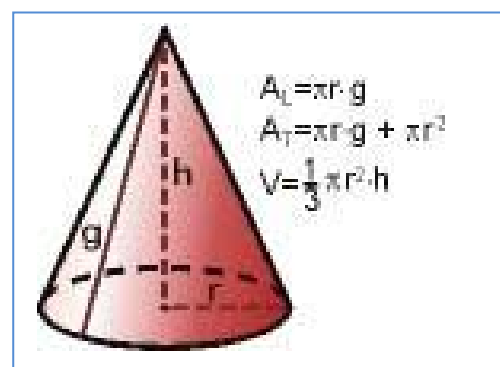
Así el volumen viene dado por

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339,12 \text{ cm}^3$$

Volumen del cono

El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura (¿te recuerda eso a algo?). Así, para un cono cuyo radio de la base es r y su altura es h se tiene que

$$\text{Volumen cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



Para calcular el volumen de un **tronco de cono** calcularemos el volumen del cono original y le restaremos la parte superior que hemos cortado.

Ejemplo:

- ✚ Vamos a calcular el volumen del taburete para elefantes que hemos forrado de tela en una actividad anterior: tiene forma de tronco de cono, con 75 cm de altura y bases de 1,50 y 2,50 metros.

Lo primero que haremos es determinar el volumen del cono completo. Para ello necesitamos calcular su altura.

Utilizando semejanza de triángulos y llamando a la altura del cono total h_T tenemos que

$$h_T/h = r / (r - r')$$

de ahí que la altura del cono total sea $h_T = h \cdot r / (r - r') = 0,75 \cdot 2,5 / 1 = 1,875 \text{ m}$.

y por ello el volumen del cono total será de $V = h_T \pi r^2 = 36,8 \text{ m}^3$.

Ahora debemos calcular el volumen del “cono pequeño” (el que hemos eliminado para conseguir el tronco de cono). Su altura es la diferencia entre la altura del cono grande y la del tronco de cono. Su radio es el de la base superior del tronco de cono.

Por ello su volumen viene dado por $(h_T - h) \pi r'^2 = 7,95 \text{ m}^3$.

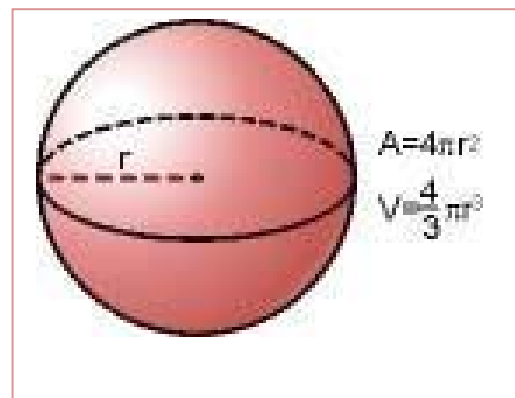
Consecuentemente, el volumen del tronco de cono es

$$36,8 - 7,95 = 28,85 \text{ m}^3.$$

Volumen de la esfera

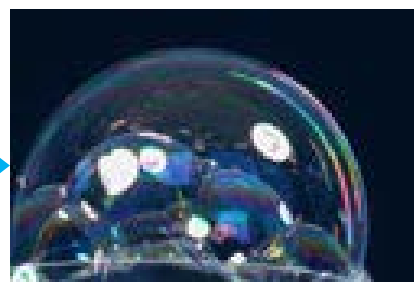
Al no tener un desarrollo plano, trabajar con la esfera es más difícil y requiere técnicas matemáticas que estudiarás en otros cursos. Simplemente por completar lo expuesto en este tema, damos la fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio r .

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

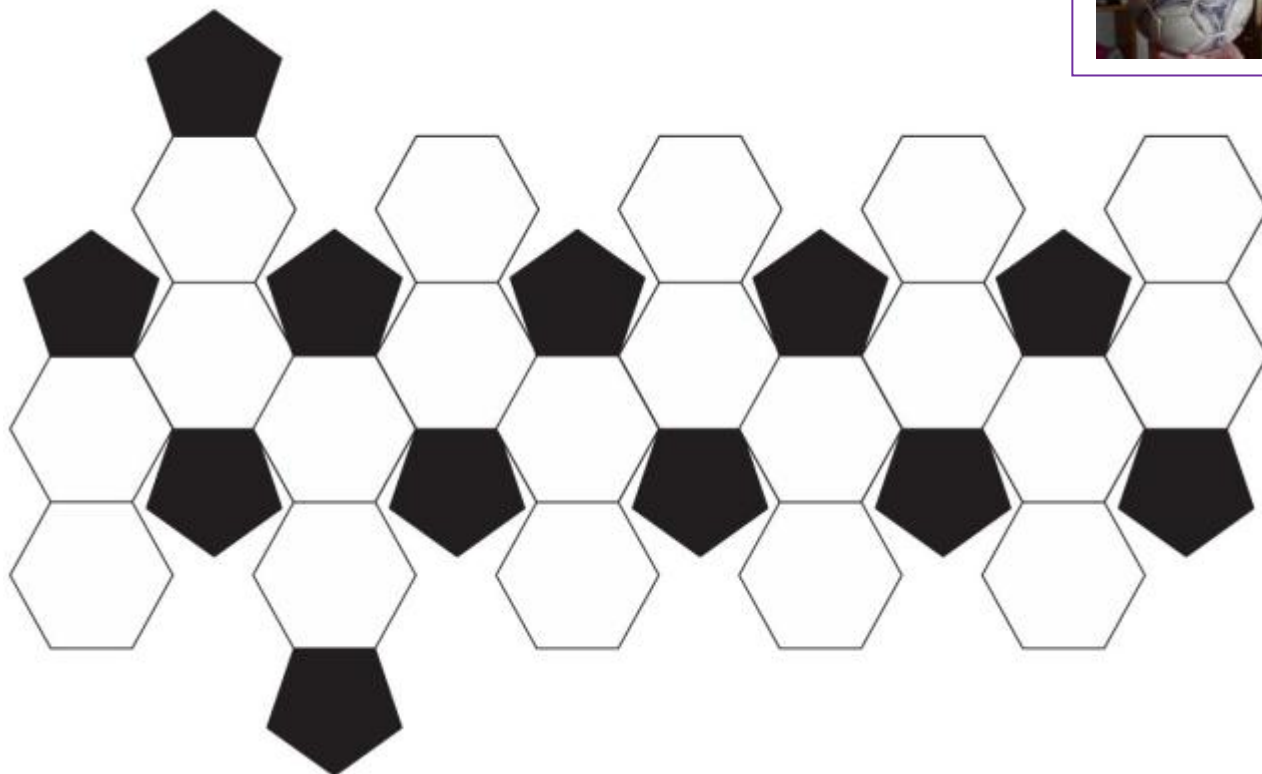


CURIOSIDADES. REVISTA**Esferas**

De todos los cuerpos geométricos que tienen la misma superficie total, el que encierra un mayor volumen es la esfera. Por eso las **pompas de jabón** son esféricas: contienen la mayor cantidad de aire que se puede encerrar con esa lámina de jabón. En dos dimensiones es el círculo el que encierra la mayor superficie; por eso si echas aceite encima del agua se forman círculos.

**Balones de fútbol**

Hay poliedros más complicados que los que hemos descrito en este capítulo. Por ejemplo, si a un icosaedro le cortamos las esquinas obtenemos un "**icosaedro truncado**". Esa es la forma real de los **balones de fútbol** (los clásicos que tienen pentágonos negros y hexágonos blancos). Lo que ocurre es que al inflar la cámara que hay en su interior se comban los polígonos, dando sensación de esfericidad. ¿Quieres comprobarlo? Simplemente recorta en cartulina este modelo y pega las uniones con cinta adhesiva.





Latas de conservas

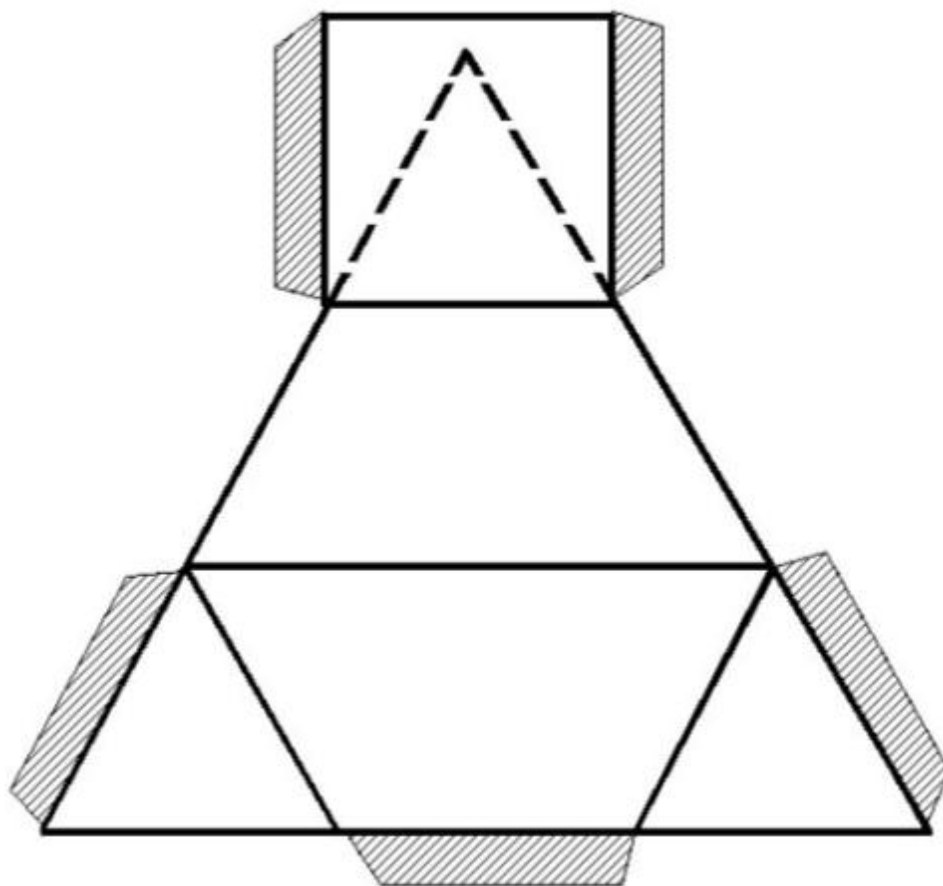
Muchas latas y botes de conservas tienen forma cilíndrica porque sería muy costoso fabricarlas de forma esférica. Aun así, debido a que sus bases son circulares, la relación área total / volumen es bastante satisfactoria.

Puzzles de dos piezas

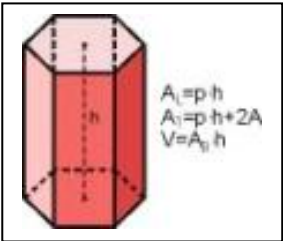
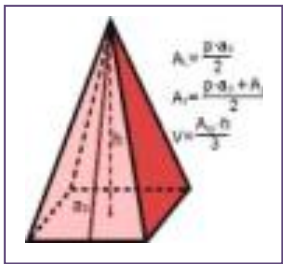
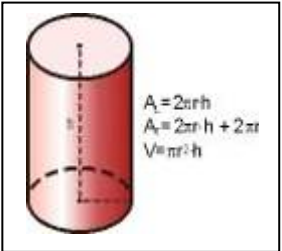
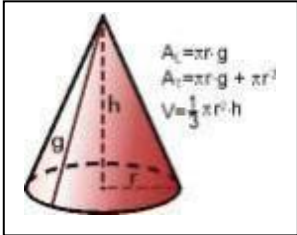
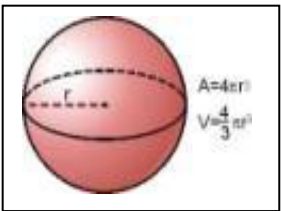
¿Te parece que un puzle de dos piezas es sencillo?

Te proponemos un reto: recorta en cartulina dos copias de esta figura, para armar con cada una de ellas un poliedro (cuyas caras son dos triángulos, dos trapecios y un cuadrado).

- Ahora, juntando esos dos poliedros forma un tetraedro.

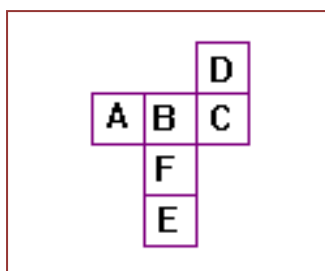


RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos	
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. Perspectiva caballera.	
Posiciones relativas	Dos planos: o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio: o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano: o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.	
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos	
Poliedros regulares	Poliedro con todas las caras polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro.
Prisma. Volumen	 	
Pirámide. Volumen		
Cilindro. Volumen	 	Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de $45\pi \text{ m}^3$, y una superficie lateral de $30\pi \text{ m}^2$.
Cono. Volumen		Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de $15\pi \text{ m}^3$.
Esfera. Superficie. Volumen		Una esfera de radio 3 tiene un volumen de $36\pi \text{ m}^3$, y una superficie de $36\pi \text{ m}^2$.

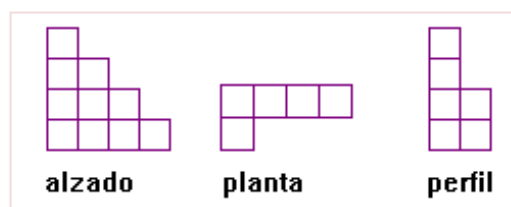
EJERCICIOS Y PROBLEMAS**El espacio**

1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.
2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
 - a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
 - b) Un cono con cortes paralelos a su base
 - c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
 - d) Una prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara
3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.
4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.



5. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería....

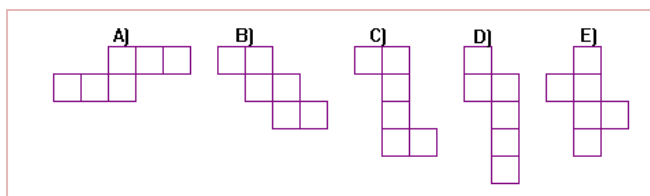
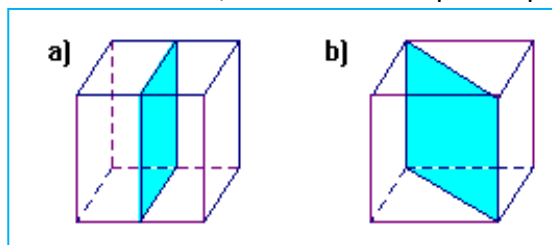
6. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?
7. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:



- a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.
 - b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
 - c) ¿Existen rectas paralelas?
8. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.

Poliedros

9. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120° , ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?
10. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60° y 120° . Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.
11. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.
12. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a Aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.
13. Un balón de fútbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.
14. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina... ¡Seguro que se te ocurren otras formas!
15. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?
16. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



17. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.

18. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.

19. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina).

20. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.
21. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.
22. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm.
23. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?
24. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.
25. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?
26. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?
27. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.
28. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.
29. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?
30. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?
31. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.
32. Construye un pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.
33. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?
34. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?
35. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.
36. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm.
37. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.
38. Calcula la superficie total de un tronco de cono de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.
39. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de $67\pi \text{ cm}^2$. ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?

Cuerpos redondos

40. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:
 - a) un lado, un rectángulo
 - b) un cateto, un triángulo rectángulo
 - c) la hipotenusa, un triángulo rectángulo
 - d) su diámetro, una círculo.
41. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.
42. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.
43. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.
44. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.
45. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.
46. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.
47. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.
48. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.
49. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.
50. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un tetraedro de lado 10 cm.
51. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.
52. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (Ayuda: La apotema del pentágono mide 5,4 cm).
53. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?
54. Calcula la superficie y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima mide 10π m.
55. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.
56. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si $R = 6$ cm.
57. Un cono tiene de altura $h = 7$ cm, y radio de la base $r = 2$ cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.
58. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.
59. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.
60. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Cálculalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.
61. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

AUTOEVALUACIÓN

- ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?
a) el cilindro b) la esfera c) el icosaedro d) el dodecaedro
- La definición correcta de poliedro regular es:
a) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares
b) Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales
c) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales
d) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.
- Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta
a) Un prisma oblicuo puede ser regular
b) El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura
c) Las caras de un dodecaedro son hexágonos
d) El volumen de una pirámide es área de la base por la altura
- Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:
a) $2\pi rh$ b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) $2\pi r(h + r)$ d) $2/3\pi rh$
- El número de vértices de un icosaedro es:
a) 20 b) 12 c) 30 d) 10
- El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:
a) $83,1 \text{ cm}^3$; 96 cm^2 b) $35,7 \text{ cm}^3$; 48 cm^2 c) 0,1 L; 0,9 ha d) 106 m^3 ; 95 m^2
- El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente:
a) 62 cm^3 ; 24 cm^2 b) 7000 L; 0,48 ha c) 7 cm^3 ; 8 cm^2 d) $27,6 \text{ m}^3$; 48 m^2
- El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:
a) $0,12\pi \text{ L}$ b) $36\pi \text{ cm}^3$ c) $12\pi \text{ cm}^3$; d) $36\pi \text{ cm}^3$
- El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:
a) $100\pi \text{ m}^3$; $40\pi \text{ m}^2$ b) $100\pi \text{ cm}^3$; $40\pi \text{ cm}^2$ c) $31,4 \text{ cm}^3$; $12,56 \text{ cm}^2$ d) $33\pi \text{ cm}^3$; $7\pi \text{ cm}^2$
- El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:
a) $288\pi \text{ cm}^3$; $144\pi \text{ cm}^2$ b) $144\pi \text{ cm}^3$; $288\pi \text{ cm}^2$ c) 452 m^3 ; 904 m^2 d) $96\pi \text{ cm}^3$; $48\pi \text{ cm}^2$

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009035

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:51:35.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

- 1.1. LETRAS Y NÚMEROS
- 1.2. COEFICIENTE Y PARTE LITERAL
- 1.3. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA
- 1.4. EQUIVALENCIA Y SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS
- 1.5. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

- 2.1. EL LENGUAJE DE LAS ECUACIONES
- 2.2. ECUACIONES EQUIVALENTES. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

- 3.1. PROCEDIMIENTO
- 3.2. PROBLEMAS NUMÉRICOS
- 3.3. PROBLEMAS DE GEOMETRÍA
- 3.4. OTROS PROBLEMAS

4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

- 4.1. CONCEPTO DE ECUACIÓN DE 2º GRADO
- 4.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO INCOMPLETAS
- 4.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO COMPLETAS

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- 5.1. CONCEPTO DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES
- 5.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN
- 5.3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN
- 5.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Resumen

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: “ALGEBRISTA Y SANGRADOR” ¿Y eso, por qué?

La palabra “*Álgebra*” es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: “*algoritmo*”.

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w'almuqabalah*. La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.



1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

Ya sabes que:

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- ✚ Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un rectángulo de base b y altura h : $A = b \cdot h$; la longitud de una circunferencia de radio r : $L = 2\pi r$, por ejemplo.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la x .

Ejemplo:

- ✚ La mitad de la edad de una persona $x/2$
- ✚ El doble de un número menos 7 $2x - 7$.

El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra "*cosa*", (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como "*šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas**.

Actividades resueltas

- ✚ Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
La producto de dos números consecutivos	$x \cdot (x + 1)$
La edad de Pedro hace 3 años	$x - 3$
La diferencia de dos números	$a - b$

Actividades propuestas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
 - El triple de un número más su mitad.
 - La edad de una persona dentro de 10 años.
 - La sexta parte de un número menos su cuadrado.
 - La diferencia entre dos números consecutivos.
- Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.
- ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.



1.2. Coeficiente y parte literal

Ya sabes que:

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**. En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- ✚ En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x . En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parte literal xy^2 .

Para poder sumar o restar dos monomios deben ser **semejantes**, es decir, tener igual parte literal.

Ejemplo:

- ✚ Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En cambio no se puede sumar $5x + 3y$ pues no son semejantes

Actividades resueltas

- ✚ Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: $6a$, $-3b$, c y 8 . Los coeficientes son $+6$, -3 , $+1$ y $+8$ respectivamente. Las partes literales son a , b y c . El último término no tiene parte literal.

- ✚ Señala en el polinomio y calcula su suma $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y -2 ; su suma es $11x$.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- ✚ Calcula el valor numérico de la expresión $7x + 3$ cuando x vale 2.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 2.

Por tanto: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 2.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $5x + 4x$ es equivalente a la expresión $9x$, que es su expresión más simplificada.

Actividades propuestas

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $3 - 14xy$

b) $2a + 6b - 9c$

c) $6xy + 8$

d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $6x + 4y$

para $x = 3$, $y = 2$.

b) $2 - 3a$

para $a = -5$.

c) $5a + 9b - 7c$

para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

1.5. Polinomios. Suma y producto

Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x , y coeficiente 3.
- El áreas del círculo, πr^2 , es un monomio con indeterminada, r y coeficiente π . Su parte literal es r^2 .

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x .
- πr^2 es un monomio de grado 2 en la indeterminada r .
- $7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b .

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x .
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y .
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x , y y z .

Tanto en esta sección nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0 , recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

✚ $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x , cuyo término independiente es 2.

Actividades propuestas

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$

b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$

c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos " p de menos tres" o " p en menos tres". Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x , podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

✚ Si evaluamos el polinomio $p = -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

Actividades propuestas

7. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p : $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

✚ La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\begin{aligned} \left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) &= (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) = \\ &= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4 \end{aligned}$$

✚ $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 4x^5 + 2x^4 + x^3 - 5x^2 + x + 4 \\
 + \quad -7x^5 \quad \quad + 4x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\
 \hline
 -3x^5 + 2x^4 + 5x^3 \quad - 2x - 2
 \end{array}$$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

$$\text{+} \quad (-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$$

$$\text{+} \quad 5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

$$\begin{array}{r}
 -2x^3 + x + 4 \\
 \times \quad x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 -2x^3 \quad \quad + x + 4 \\
 6x^4 \quad -3x^2 - 12x \\
 -2x^5 \quad \quad + x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 -2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 4
 \end{array}$$

Ejemplo:

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$

b) $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$

d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- ✚ Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- ✚ $6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
 ✚ $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y .

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- ✚ $2x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propuestas

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

- a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

- a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

✚ Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "**números algebraicos**"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, $1/3$, $7/5$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π .

Ejemplo:

✚ $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

✚ Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "**resolver la ecuación**". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

- 2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x : $3x - x = -5 - 9$.
- 3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.
- 4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.
- 5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

 Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

- 1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x :

$$6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3,$$

- 2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$
- 3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

- 4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

- 5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$; $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2 . Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, -1, -3		$a^2 - 6 = -2$	-2, -6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, -2, -3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

- a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

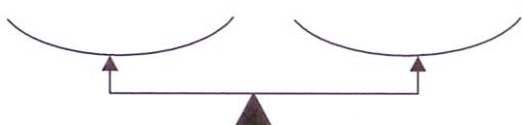
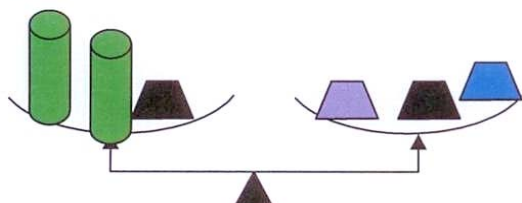
- a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Material didáctico fotocopiable: Balanzas

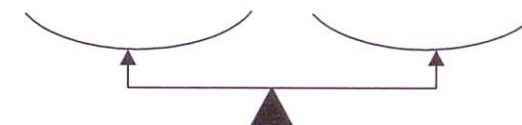
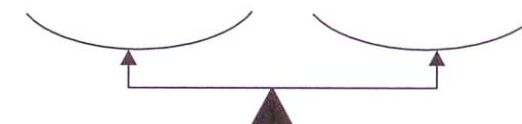
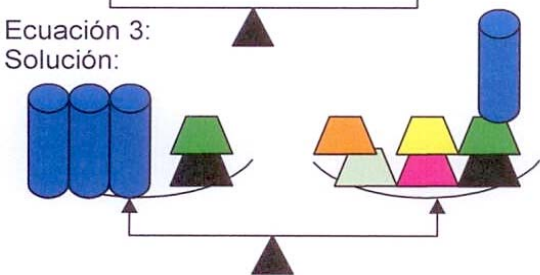
- a) Todas las pesas son iguales a 1. Las balanzas están equilibradas. Mantén siempre equilibradas las balanzas siguientes, hasta conseguir conocer cuanto pesa el objeto cilíndrico.
b) Escribe algebraicamente la situación actual de cada balanza, y todas las situaciones intermedias, hasta llegar a la solución.



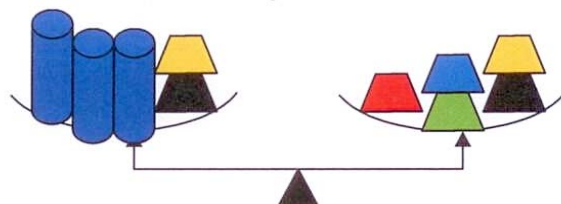
Ecuación 1:
Solución:



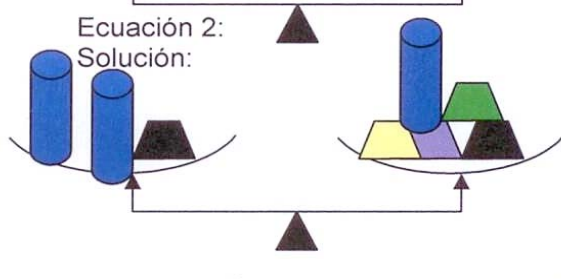
Ecuación 3:
Solución:



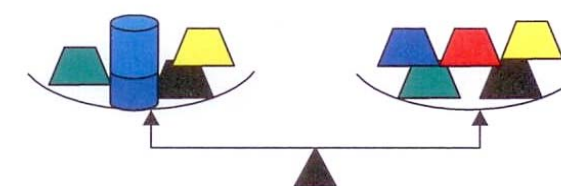
Ecuación 5:
Solución:



Ecuación 2:
Solución:



Ecuación 4:
Solución:



Ecuación 6:
Solución:

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

 Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x . Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x , y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1 = 9 - 1$, luego $x + x = 9 - 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x , se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

3.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- ✚ En un pequeño hotel hay 50 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 87 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 - x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 - x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 - 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x , resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 - 2x - 68 = 54 - 68.$$

Opera:

$$-x = -14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por -1 :

$$x = -14 / -1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay $34 - 14 = 20$ habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2 \cdot 20 = 54.$$

- ✚ En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 - x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 - x)$ patas.



Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por -2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$



Actividades propuestas

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).
20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.
21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).
22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?



3.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- ✚ Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x - 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x - 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, $10 + 20 + 25 = 55$, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- ✚ Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitas 2 cm y a la altura le añades 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 - 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 - 2 = x + 5$

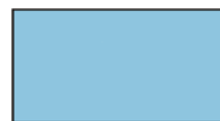
Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación: $2x + 3 - 2 = x + 5$; $2x - x - 3 + 2 = 5$; $x - 1 = 5$; $x = 6$

Solución: $x = 6$ cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 6 + 3 = 15$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, $6 + 5 = 11$, y a la base le restamos 2, $15 - 2 = 13$, se obtiene un cuadrado.



Actividades propuestas

23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6° .



3.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- ✚ Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, $21 - x$, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10 (21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con x , y en el segundo los que no tienen x : $5x - 10x + 210 - 210 = -210 + 170$

Haz operaciones: $-5x = -40$

Despeja la incógnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y $21 - 8 = 13$ es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, $40 + 130 = 170$ €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.



Actividades propuestas

- 26.** Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.



- 27.** Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?



- 28.** Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

- 29.** Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

- 30.** Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

- 31.** Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

- 32.** De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. El curso próximo estudiarás como resolverlas todas. Pero en este curso vamos a aprender a resolver algunas. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- ✚ Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?

Planteamos la ecuación:

$$(x + 9)^2 = 16x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 9 = 4x \rightarrow 9 = 3x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x + 9 = -4x \rightarrow 9 = 5x \rightarrow x = -9/5$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

4.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- ✚ Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \quad -6x^2 + 2x + 9 = 0; \quad x^2 - 25x - 1,1 = 0.$$

Ejemplo 2:

- ✚ Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2,7x^2 + 3,5x - 0,2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propuestas

33. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$

c) $3x^2 - 5 = 0$

e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$

d) $6 - 8,3x = 0$

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

34. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a , b y c .

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$

b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

4.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo:

✚ La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b .

✚ La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c , es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente $b = 0$: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente $c = 0$: Sacamos x factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Ejemplos:

✚ En la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta la b . Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2 :

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 5 y -5. En efecto, $2 \cdot 5^2 - 50 = 2 \cdot 25 - 50 = 0$, y $2 \cdot (-5)^2 - 50 = 2 \cdot 25 - 50 = 0$

✚ En la ecuación $3x^2 - 21x = 0$ falta la c . Para resolverla, sacamos x factor común:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x(x - 7) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 7$.

Actividades resueltas

✚ Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 72 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b . Por lo tanto, despejamos la

incógnita: $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 72/2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Las raíces son 6 y -6.

✚ Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la c . Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$ y obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Actividades propuestas

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 9x = 0$

b) $2x^2 - 8 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$

d) $2x^2 + 5x = 0$

4.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para a , b y c .

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

✚ Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución: Primero debemos saber quiénes son a , b y c : $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$

d) $x^2 - x - 12 = 0$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde a , b , a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

✚ Son sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

✚ **No** es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en xy .

✚ Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2 .

Actividades propuestas

37. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} xy + 7y = 9 \\ 8x - 5y = 10 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 8x - 9 = 5y \\ 4x + 7y = 2/3 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases} \end{array}$$

5.2. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

 Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos x de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.3. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

 Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \frac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y - 1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot (1) = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.4. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de x o y sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

 Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la x sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de y , calculamos la x :

$$2x - 3 \cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

38. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 4y = -5 \\ 3x - 6y = 7 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 11 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 8x + 7y = 10 \end{cases} \end{array}$$

39. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ -2x + 3y = -4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \end{array}$$

40. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases} \end{array}$$

CURIOSIDADES. REVISTA

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12

A) Cuadrados mágicos

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

40. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)

Emmy Noether fue una famosa algebrista. Nació en Alemania, hija de padres judíos. Su padre era catedrático de matemáticas en la Universidad y Emmy heredó de él la pasión por las matemáticas. Sin embargo, por aquella época la Universidad no admitía que las mujeres desarrollasen estudios científicos, así que tuvo que conseguir un permiso especial para que la dejaran asistir a las clases, aunque no tenía derecho a examinarse. Años más tarde, las leyes cambiaron y pudo doctorarse. Trabajó con los matemáticos alemanes más brillantes y desarrolló un teorema esencial para la Teoría de la Relatividad en la que estaba trabajando Albert Einstein. Ante la situación política de Alemania, con la subida al poder de Hitler, tuvo que exiliarse a Estados Unidos.



Emmy Noether

Allí coincidió con **Einstein** quien le dedicó estas palabras: *“A juicio de los matemáticos más competentes que todavía viven, desde que las mujeres empezaron a recibir enseñanza superior, Emmy Noether ha tenido el genio creativo más destacado que haya surgido hasta la fecha de hoy en el campo de la matemática”*.

C) DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió: ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.

A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.

Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.

Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

41. a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto
b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

RESUMEN

		<i>Ejemplos</i>
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	Área de un rectángulo = base por altura: $A = b \cdot a$
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x .
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$3x - 1 = 2x + 5$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$; $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x .	$(3x - 1) = 7/2$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a , b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. Reducción: sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.**Lenguaje algebraico**

- Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:
 - Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.
 - Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.
 - Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.
 - Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.
- En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.
- Escribe en lenguaje algebraico
 - La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años
 - La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.
- Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:
 - Raquel tiene x cromos
 - Pepe tiene 10 cromos más que Raquel
 - Teresa tiene el triple de cromos que Pepe
 - Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos
 - Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.
- Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restamos 7 a la mitad de un número	2) $3x + 9$
c) El triple de un número más el doble del siguiente	3) $8x$
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra	4) $x/2 - 7$
e) El perímetro de un octógono regular.	5) $x - 3$
f) La edad de hace 3 años	6) $20 - x$
- Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x :

a) $y = 0,5 + 3x$ para $x = 3$	b) $y = 1,6x$ para $x = 0,75$	c) $y = 4 + 1,5x$ para $x = 2,1$
--------------------------------	-------------------------------	----------------------------------
- Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3a^2b - 2a^2b + 7a^2b$	b) $5xy + 7xy - 2xy$	c) $6x + 9x - 3x$
d) $2x + 7x - 2y$	e) $3ab + 8ab - 6ab$	
- Realiza las operaciones siguientes

a) $3x + 5x - 2y + 9y - 4x - 3y$	b) $(2x - 5x^2) - (3x^2 + 5x)$
c) $3(7x - 3) - 2(2x + 5)$	d) $2a - 5a + 7a - 8a + b$

Ecuaciones de primer grado

9. Encuentra el número que falta:

a) $0 + 2 = 5$

b) $0 + 3 = 1$

c) $0 - 4 = 6$

d) $0 - 4 = -1$

10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	Edad en años
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

11. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$

b) $x - 2 = 3$

c) $x/5 = 1$

d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.

a) $x + 10 = 17,5$

c) $8 - x = 3x - 5x$

e) $4x = 30$

g) $2x = 9 + 6$

i) $10 - 2,5 = x$

b) $6x + 2x = 60$

d) $5x - 6 = 3x + 9$

f) $-6 - 9 = x - 3x$

h) $3x = 15$

j) $x = 7,5$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$

d) $x + 9 = 3x - 3$

g) $4x + 2 = 14$

i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$

e) $5x - x + 7 = 2x + 15$

h) $3x - 4 = x + 18$

k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$

f) $2x - 27 = x$

i) $4x - 6 = x + 9$

l) $3 - 10 = x + 1$

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$

b) $x - 8 = 2$

c) $x - 3 = 4$

d) $x - 9 = 6$

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$

b) $4x - 3x = 16$

c) $5(x - 2) = 70$

d) $-5x - 2x = -49$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$

b. $4x - 5 = x + 4$

c. $x/3 = -2$

d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$

b) $2(x + 7) = x$

c) $x/3 + 2 = x$

d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$

b) $2x - (2x - 3) + x = 4$

c) $7 = 1 + x/2$

d) $4 - x = 2 + x/2$

21. Resuelve:

a) $x/3 = 7$;

b) $3x = 9$;

c) $x + 4 = 12$;

d) $x - 7 = 1$

22. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

$$\begin{array}{lllll} 1) x + 4 = 6 & 2) x + 6 = 3 & 3) 15 = 11 + x & 4) 7 = x + 3 & 5) x + 8 = 4 \\ 6) x + 6 = 8 & 7) x + 7 = 3 & 8) 8 + x = 16 & 9) 3 = 7 + x & 10) 2 = x + 4 \end{array}$$

2ª serie

$$\begin{array}{lllll} 11) x - 3 = 6 & 12) x - 4 = 2 & 13) 4 = x - 1 & 14) 7 - x = 2 & 15) 6 - x = 4 \\ 16) 3 = 9 - x & 17) x - 4 = 7 & 18) x - 2 = 0 & 19) 8 - x = 3 & 20) 9 - x = 5 \end{array}$$

3ª serie

$$\begin{array}{lllll} 21) 3x = 6 & 22) 4x = 16 & 23) 6x = 18 & 24) 8 = 2x & 25) -12 = 3x \\ 26) 2x = -6 & 27) 4x = 11 & 28) 3x = 6 & 29) 9 = 3x & 30) 18 = 6x \end{array}$$

4ª serie

$$\begin{array}{lllll} 31) x/5 = 1 & 32) x/3 = 7 & 33) x/-2 = 3 & 34) x/5 = 2/3 & 35) x/10 = 3/2 \\ 36) x/7 = 2 & 37) x/12 = 3/4 & 38) x/3 = -2/9 & 39) x/5 = -2 & 40) x/7 = 3/14 \end{array}$$

5ª serie

$$\begin{array}{llll} 41) x + 3x = 16 & 42) 4x + 2x = 6 & 43) 6x = 8 + 10 & 44) 3x + 7 = 4 \\ 45) 2x + 7 = 11 + 4x & 46) x + 1 = 2x - 5 + 2x & 47) 3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1 \\ 48) 4x - 3 + x = 3x + 7 & 49) x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5 & 50) 6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7 \end{array}$$

6ª serie

$$\begin{array}{llll} 51) x/3 - 2 = 4 & 52) 3x/5 + 4 = 3 & 53) x/3 + 2x/3 = 7 & 54) x/5 + 3x/5 = 9 \\ 55) x/2 + x/2 + 3 = 5 & 56) 3x/7 + 2x/7 + 3 = 6 & 57) x + x/5 = 7 & 58) x/2 + 5x/2 + 3 = 5 \\ 59) 5 + x/7 = 21 & 60) 3 + x/3 = 9 \end{array}$$

7ª serie

$$\begin{array}{ll} 61) 3 + 4(2 - x) = 9 - 2x & 62) 5 - 2(x + 2) = x - 5 \\ 63) 13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1 & 64) 7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7) \\ 65) 5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6) & 66) 2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x \\ 67) 2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6) & 68) 5 - 2(7 - 2x) = x - 6 \\ 69) 3x - 4(x - 1) = 8 - 5x & 70) 5x - (2x + 3) = 2x - 5 \end{array}$$

8ª serie

$$\begin{array}{llll} 71) x/3 + x/6 = 12 & 72) x/6 + x/3 + x/2 = 5 & 73) (x - 3)/5 = 1 & 74) x/2 - 3 = 4 \\ 75) (2x + 9)/3 = 7 & 76) (2x + 9)/3 = x & 77) (x - 3)/5 = x & 78) 5 + x/4 = 6 \\ 79) 4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2 & 80) 2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6 \end{array}$$

Problemas

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los $\frac{2}{5}$ de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?
24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:
- ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?
 - ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?
 - ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?
 - Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?
25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?
26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.
27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?
28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)
29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?
30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?
31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?
32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?
33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 centímetros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?
34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?
35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?
36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.
37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 m y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.
38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.
39. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?
40. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

41. Cuadrados mágicos: En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado

43. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $7x^2 + 12x = 0$

c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$

e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$

f) $x^2 - 9 = 0$

Sistemas lineales

44. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \end{array}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica $8,3x - 2,5 + y$, son:
 a) 8,3, 2,5 y 1 b) +8,3, -2,5 y +1 c) + 8,3 y - 2,5 d) 8,3, 1, 2,5
2. El valor numérico de la expresión algebraica $4a + 3b$, cuando $a = 5$ y $b = -2$, es:
 a) 14 b) -14 c) 26 d) -26
3. La solución de la ecuación $3,4 + 5,2x - 8,1x = 9,4 + 7,3x$ es:
 a) -10/17 b) +6/-10,2 c) -10/1,7 d) 0,58
4. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:
 a) 2 b) -2 c) 2 y -2 d) 0 y 2
5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?
 a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$
6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:
 a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20
7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?
 a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$
8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:
 a) 9 y 12 b) 10 y 10 c) 12 y 6 d) 8 y 12
9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:
 a) 900 €, 400 € y 650 € b) 450 €, 650 € y 950 € c) 600 €, 400 €, 1000 € d) 650 €, 400 €, 950 €
10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?
 a) 340 km y 200 km b) 300 km y 240 km c) 420 km y 120 km d) 320 km y 220 km.

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-011058

Fecha y hora de registro: 2013-08-27 10:17:15.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuela

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

- 1.1. SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO.
- 1.2. COORDENADAS. REPRESENTACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE PUNTOS.

2. TABLAS Y GRÁFICAS

- 2.1. RELACIÓN ENTRE DOS MAGNITUDES. TABLAS DE VALORES.
- 2.2. REPRESENTANDO PUNTOS. LAS GRÁFICAS.
- 2.3. GRÁFICAS A PARTIR DE SITUACIONES RELACIONADAS CON FENÓMENOS NATURALES Y DE LA VIDA COTIDIANA.
- 2.4. INTERPRETACIÓN Y LECTURA DE GRÁFICAS

3. LAS FUNCIONES

- 3.1. LA FUNCIÓN COMO RELACIÓN ENTRE DOS VARIABLES. VARIABLE DEPENDIENTE Y VARIABLE INDEPENDIENTE.
- 3.2. LA FUNCIÓN: TABLA DE VALORES, GRÁFICA, EXPRESIÓN VERBAL Y EXPRESIÓN ALGEBRAICA
- 3.3. UNA FUNCIÓN IMPORTANTE. LA FUNCIÓN LINEAL O DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA
- 3.4. UTILIZACIÓN DE GEOGEBRA PARA LA INTERPRETACIÓN DE LA PENDIENTE DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Resumen

El estudio de las relaciones entre dos magnitudes y su representación mediante **tablas y gráficas** es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos naturales y cotidianos que se relacionan de manera funcional.

En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente y utilizaremos el **sistema de referencia cartesiano**.

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés **René Descartes** que vivió entre los años 1596 y 1650. *Descartes* quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «*punto de partida*» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, *Descartes* también comenzó tomando un "*punto de origen*" para poder representar la geometría plana.



René Descartes

En este tema aprenderemos a utilizar el **lenguaje gráfico** para interpretar y describir situaciones del mundo que nos rodea. También estudiaremos las **funciones** entre dos magnitudes variables, en las que una tiene una relación de dependencia de la otra. *Descartes*, *Newton* y *Leibniz* ya establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Aunque su definición y comprensión fue posterior, a partir de *Fourier*, llegando al siglo XX.

Así, los contenidos que vamos a tratar nos van a permitir trabajar con las distintas formas de representar algunas situaciones funcionales: numérica, gráfica, verbal o a través de una expresión algebraica (como las que acabamos de estudiar en el capítulo anterior) y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1.1. Sistema de referencia cartesiano

Ya sabes que:

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que tenemos que indicar la localización de objetos o lugares respecto de otros conocidos y, en ocasiones, sus posiciones en un plano o mapa. Para entendernos es muy importante que tengamos una referencia común.

Si quieres indicar a unos amigos que no conocen tu barrio, donde se encuentra una tienda determinada o el Instituto donde estudias, bastará con que les indiques su posición con las referencias que utilicéis todos.

Ejemplo 1:



✚ Luis vive en la casa marcada en rojo en el plano adjunto y estudia en un Instituto cercano marcado en verde en el plano.

Para indicar a sus amigos franceses donde está su Instituto les da las siguientes indicaciones:

“Al salir de mi casa vais hacia la derecha y cruzáis dos calles, luego hacia la izquierda cruzáis una calle y ya habéis llegado”

Las referencias izquierda y derecha así como la idea de cruzar una calle son comunes a todos nosotros, además fíjate que en el esquema la línea que indica el camino es muy clara

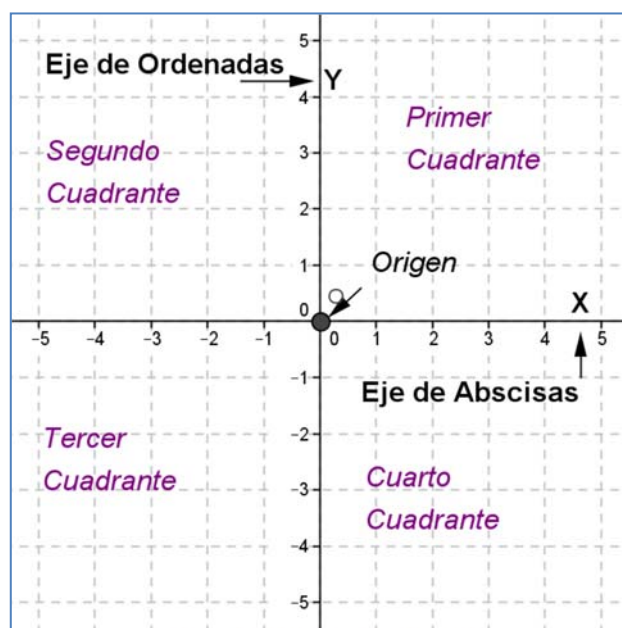
En Matemáticas, en la mayoría de las ocasiones, utilizamos sistemas de referencia cartesianos que también se utilizan en Ciencias Sociales para trabajar los mapas y los planos.

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas**.

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal le denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha



Ejemplo 2:

- ✚ “Si estas situado sobre la X que aparece en el mapa, sigue 3 leguas al Este y luego 2 leguas al Norte. Allí está enterrado el tesoro”

Nota: La legua es una antigua unidad de longitud que expresa la distancia que una persona puede andar durante una hora. La legua castellana se fijó originalmente en 5.000 varas castellanas, es decir, 4,19 km

Las referencias Norte, Sur, Este y Oeste nos definen un sistema de referencia cartesiano donde el Origen es el punto marcado con la X.

**Actividades resueltas**

- ✚ Marca en el plano el punto donde se encuentra el tesoro y como se llegaría a él desde el punto X

Solución:

**Actividades propuestas**

1. Describe y marca en el plano adjunto como llegarías a:

- Cabo Sur
- Bahía Norte
- Playa Fea



Material fotocopiable



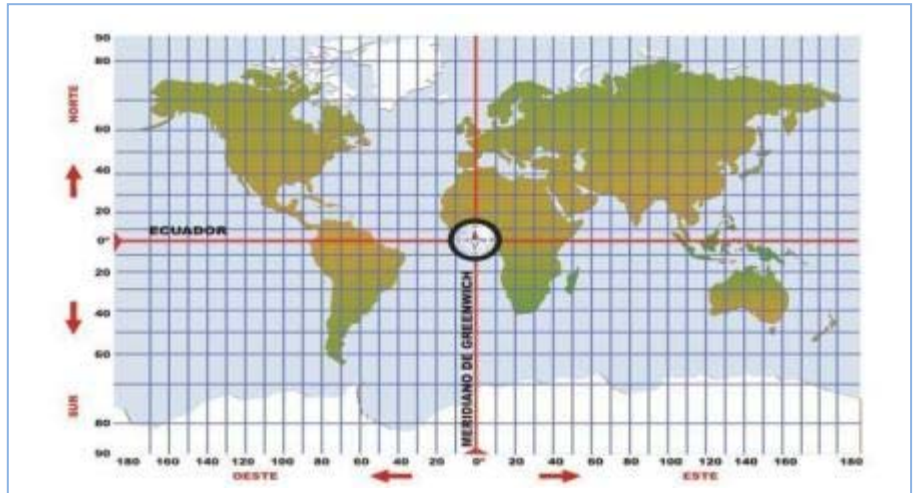
Isla del Tesoro

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.

Colecciones: Robert Louis Stevenson: *La isla del tesoro*. *La isla del tesoro: El mapa del tesoro*, Ilustrador: Loren

2. En el mapa indica en que cuadrante se encuentran los siguientes países:

- a) Australia
- b) España
- c) Argentina
- d) China

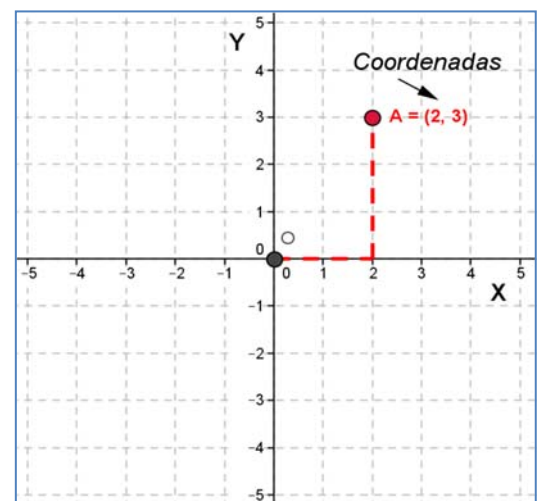


1.2. Coordenadas. Representación e identificación de puntos

En las actividades anteriores hemos descrito como llegaríamos a algunos puntos a partir de un sistema de referencia. Para llegar a un punto, partiendo del Origen del sistema de referencia, hemos recorrido una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto quedará determinado por un par de números a los que llamaremos **coordenadas del punto**.

Las **coordenadas de un punto A** son un par ordenado de números (x, y) , siendo x la primera coordenada que la llamamos **abscisa** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje vertical. La segunda coordenada es la y , llamada **ordenada** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.

Cuando esta cantidad sea hacia la izquierda o hacia abajo la indicaremos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha la indicaremos con un **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.



Ejemplo 3:

✚ En el grafico el punto A tiene coordenadas (2, 3).

Ejemplo 4:

✚ En la Actividad resuelta 1 el TESORO se encuentra en el punto de coordenadas (3, 2).

En la Actividad propuesta 2 el Cabo Sur se encuentra en el punto de coordenadas (1, -3), la Bahía Norte en el punto (2, 5) y Playa fea en el punto (0, -1).

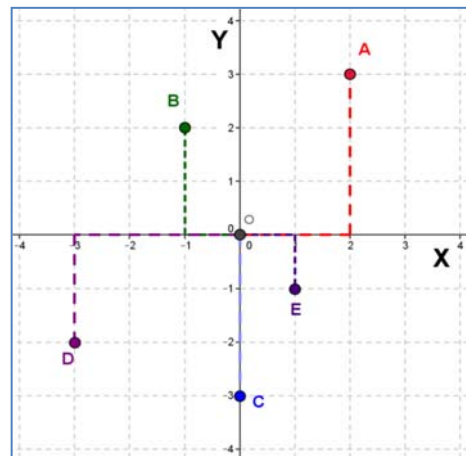
Nota: El cabo Sur se encuentra en el cuarto cuadrante y su ordenada es una cantidad negativa porque desde el origen tiene que ir hacia el Sur, esto es, tiene que bajar. Y la Playa Fea se encuentra en el eje de ordenadas hacia el Sur, por eso su abscisa es 0 y su ordenada negativa.

Actividades resueltas

- ✚ Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:

Solución

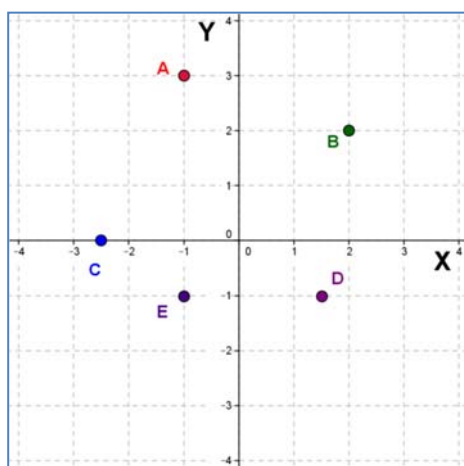
$A = (2, 3)$; $B = (-1, 2)$; $C = (0, -3)$; $D = (-3, -2)$ y $E = (1, -1)$



- ✚ Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

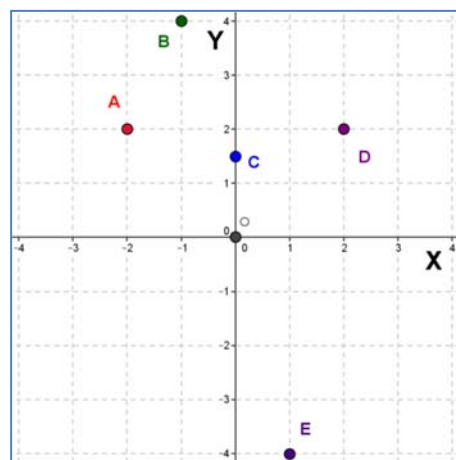
$A = (-1, 3)$; $B = (2, 2)$; $C = (-2, 0)$; $D = (1, -1)$ y $E = (-1, -1)$

Solución



Actividades propuestas

3. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

$A = (-2, 3)$; $B = (-2, -2)$; $C = (-1, 0)$ y $D = (0, -1)$

2. TABLAS Y GRÁFICAS

2.1. Relación entre dos magnitudes. Tablas de valores

Ya sabes que:

En muchas ocasiones tenemos una relación entre dos magnitudes que nos viene dada por la correspondencia entre las cantidades de cada una de ellas. Esta relación puede ser de proporcionalidad, como estudiamos en el capítulo 8, también puede estar dada por una expresión verbal o definida por una fórmula o ecuación de las que acabamos de estudiar en el capítulo 9.

De una relación entre dos magnitudes podemos obtener un conjunto de datos, relacionados dos a dos, que si los ordenamos en una tabla nos facilita su interpretación.

Una **tabla de valores** es una tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.

Ejemplo 5:

- Los 100 metros lisos es una carrera en la que se tiene que recorrer 100 metros, libres de todo obstáculo, con la mayor rapidez posible. Se considera, en general, como la competición de carreras de velocidad más importante.

Los mejores atletas la realizan en un tiempo de alrededor de 10 segundos de duración corriendo cada 10 metros en un promedio de 1 segundo.



Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Tiempo (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La tabla también se puede poner en sentido vertical

longitud (m)	tiempo (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunas ocasiones la relación entre dos magnitudes nos la pueden indicar directamente mediante su tabla de valores

Ejemplo 6:

- “La sopa estaba muy caliente, así que la dejé enfriar durante cinco minutos, la temperatura de la sopa, según se enfriaba, la indica la tabla siguiente”

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Ejemplo 7:

- Las notas de Matemáticas y Tecnología, en la segunda evaluación, de un grupo de 2º de E.S.O. fueron las recogidas en la siguiente tabla:

Matemáticas	3	5	10	3	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnología	4	7	7	5	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

En otras ocasiones desconocemos cuales son las magnitudes con las que estamos trabajando, tan solo conocemos los valores relacionados, y las solemos indicar con las letras X e Y

Ejemplo 8:

- En la tabla adjunta tenemos la relación entre la magnitud X y la magnitud Y

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	-1	-3

Actividades resueltas

- El precio de un kilo de queso especial de cabra, de la sierra de Madrid, es de 18 € y se vende al peso. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que relacione el peso del queso con su precio.

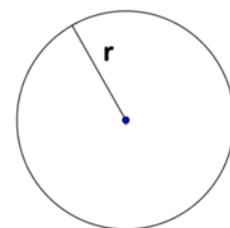
**Solución**

Como nos piden seis cantidades diferentes vamos a escoger algunas que nos parecen cotidianas hasta un kilo, por ejemplo, 100 g, 250 g (cuarto de kilo), 500 g (medio kilo), 625 g, 750 g y 1000 g.

Como el precio y el peso son magnitudes proporcionales sabemos (capítulo 8) completar la tabla.

Peso (g)	100	250	500	625	750	1000
Precio (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Como sabes el área de un círculo se puede calcular mediante la fórmula $A = \pi r^2$, en donde r es el radio del círculo (utilizamos $\pi = 3,14$). Construye una tabla de valores desde un radio de 1 cm a uno de 5 cm, de centímetro en centímetro.

**Solución**

Nos piden que elaboremos una tabla para los valores del radio 1, 2, 3, 4 y 5. Para ello sustituimos r en la fórmula por cada uno de esos valores y obtenemos:

para $r = 1 \rightarrow A = 3,14 \cdot 1^2 = 3,14$; para $r = 2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 2^2 = 12,56$; ...

Radio (cm)	1	2	3	4	5
Área (cm ²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Actividades propuestas

- Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.
- Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.
- Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *“Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado”*

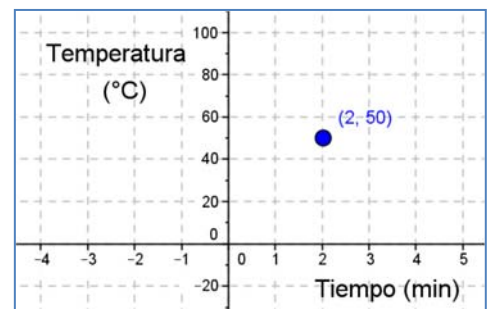
2.2. Representando puntos. Las gráficas

Cada par de datos correspondientes de una relación entre dos magnitudes los podemos **representar** en un sistema cartesiano

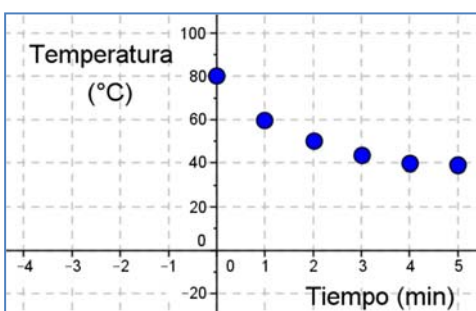
Ejemplo 9:

- En la relación del ejemplo de la temperatura de la sopa veíamos que a los 2 minutos, la sopa tenía una temperatura de 50 °C.

Este par de números son las coordenadas de un punto (2, 50) en un sistema de referencia cartesiano en el que en el eje de abscisas representamos la magnitud *Tiempo* medida en minutos y en el eje de ordenadas representamos la magnitud *Temperatura* medida en grados centígrados.



Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una **gráfica**.

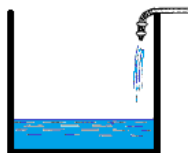


Si representamos todos los pares de datos de la tabla de valores del ejemplo anterior obtenemos la siguiente gráfica:

En ocasiones podríamos haber dado muchos más datos en la tabla de valores y al representarlos nos quedaría casi una línea. En estos casos la **gráfica**, **uniendo los puntos**, estaría constituida por una **línea** que en muchas situaciones sería continua.

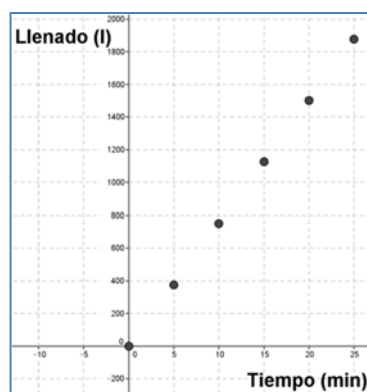
Ejemplo 10:

- Si llenamos un depósito de agua mediante un surtidor que vierte 75 litros de agua por minuto podemos calcular una tabla de valores con la cantidad de agua que va teniendo el depósito (llenado) en relación al tiempo que ha ido pasando.

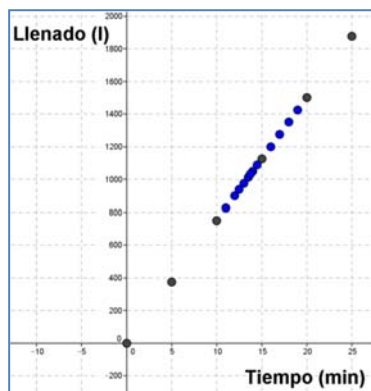


tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
llenado (l)	0	375	750	1125	1500	1875

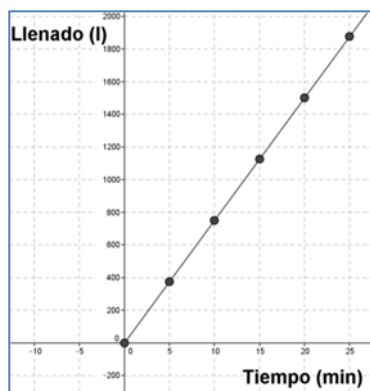
Dibujamos su gráfica a partir de esta tabla de valores



En esta ocasión tendría sentido medir la cantidad de agua que va teniendo el depósito cada menos tiempo. Si lo representamos podría quedar de la siguiente manera:



Si representáramos todos los posibles valores nos quedaría la siguiente gráfica:



Nota: La gráfica comienza, en el tiempo 0, en el instante en que empezamos a llenar el depósito. No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un tiempo negativo.

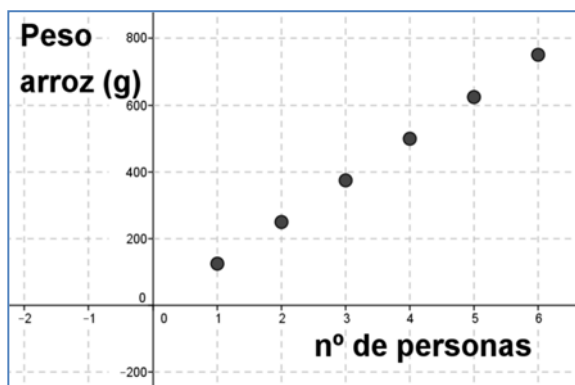
Ejemplo 11:

- ✚ En la siguiente situación: “Una paella para seis personas necesita 750 g de arroz” podemos construir una tabla de valores en la que se relacionan el número de personas y la cantidad de arroz que se necesita:



Número de personas	1	2	3	4	5	6
Peso arroz (g)	125	250	375	500	625	750

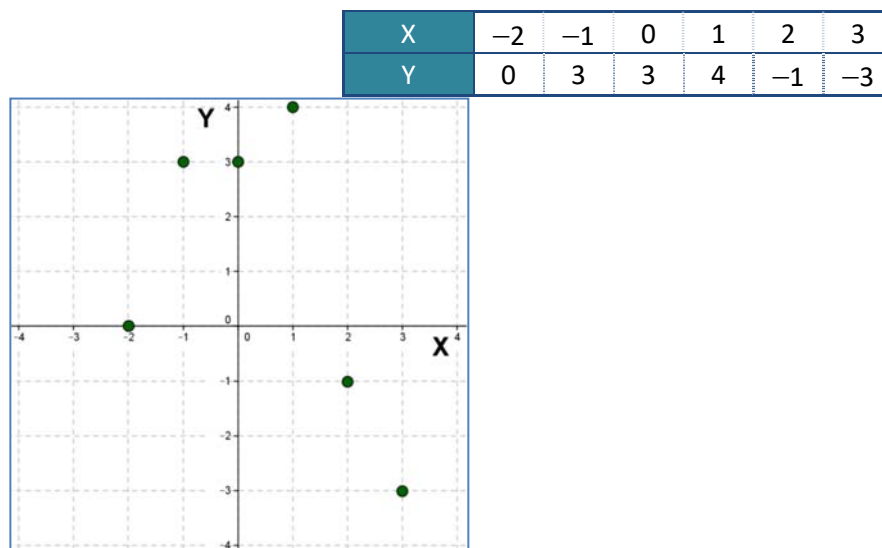
y podemos construir una gráfica de puntos con estos valores:



Sin embargo no podemos calcular valores intermedios (para dos personas y media por ejemplo), pues no podemos dividir a una persona y, por lo tanto, no tiene sentido unir los puntos de la gráfica.

Ejemplo 12:

- ✚ También podemos representar la relación entre las magnitudes **X** e **Y** del ejemplo 8 a partir de su tabla de valores:

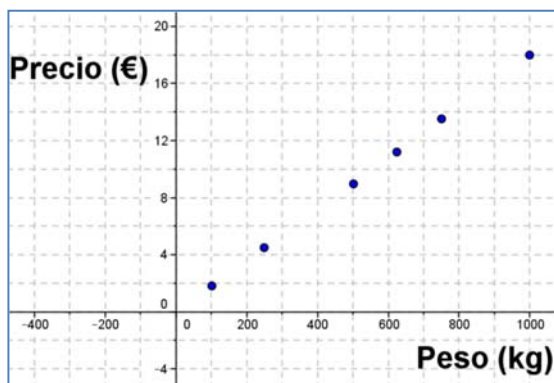


Nota: En este caso no podemos unir los puntos, pues al no conocer cuáles son las magnitudes ni cuál es la relación entre ellas, salvo en los puntos que vienen determinados por la tabla de valores, no podemos saber, por ejemplo, qué valor tendría la magnitud Y si la magnitud X valiese 1,5.

Actividades resueltas

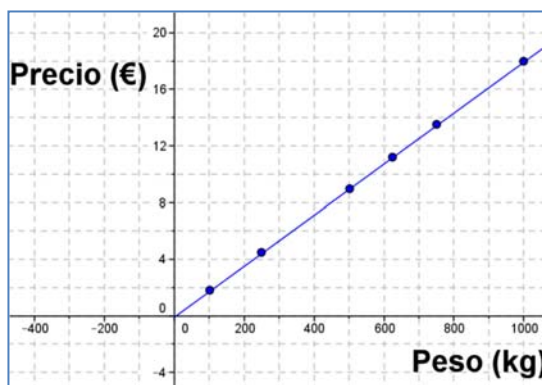
- ✚ Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del precio del queso y, si es posible, une sus puntos:

Solución



Sí, en este caso es posible porque podemos calcular el precio para cualquier peso (es una relación proporcional).

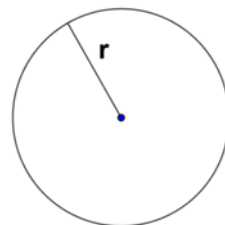
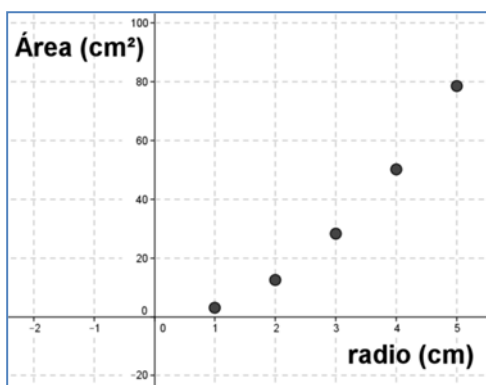
La gráfica quedaría:



Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un peso negativo

- ✚ Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del área del círculo y, si es posible, construye una gráfica uniéndolos puntos.

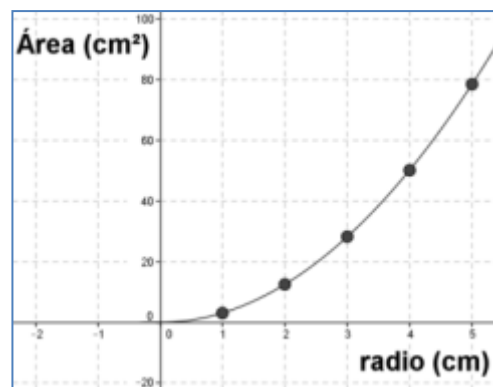
Solución:



Sí, es posible, porque podemos calcular el área para cualquier radio.

La grafica quedaría:

Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un radio negativo



Actividades propuestas

- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniando sus puntos.
- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniando sus puntos.
- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta de la compañía de telefonía. Si es posible, construye una gráfica uniando sus puntos.
- En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

Consumo de gas:0,058 € por kw/h
 Impuesto especial:0,002 € por kw/h
 Término fijo:4,30 € por mes
 Alquiler de contador.... 2,55 €

La factura era de dos meses, había consumido 397 kw/h y el gasto ascendía a 34,97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26,15 € con un consumo de 250 kw/h.

Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

2.3. Gráficas a partir de situaciones

En la mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta ahora, hemos podido calcular los pares de valores relacionados, porque se trataban de relaciones de proporcionalidad o de relaciones dadas por una fórmula que conocíamos.

Esto no siempre ocurre. A veces nos encontramos con que nos describen una situación en la que nos dan una información entre dos magnitudes sin aportarnos apenas cantidades numéricas.

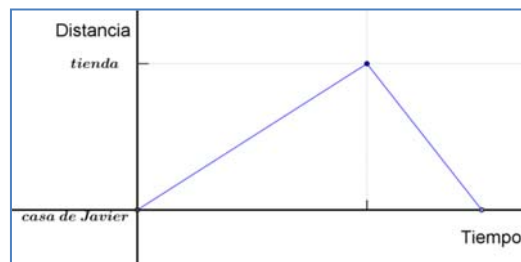
En muchas ocasiones **una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica** de manera directa.

Ejemplo 13:

✚ Javier tiene que ir a comprar a una tienda algo alejada de su casa, como no tiene prisa decide ir dando un paseo. Justo cuando llega a la tienda se da cuenta de que se le ha olvidado la cartera y no tiene dinero para comprar. Corriendo vuelve a su casa a por la cartera.

A partir de este enunciado podemos elaborar una grafica como esta:

Nota: la distancia entre la casa de Javier y la tienda no la conocemos, pero sabemos que en la vuelta ha tardado menos tiempo que en la ida.



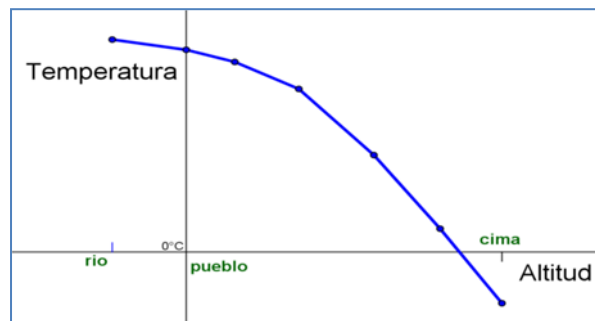
Ejemplo 14:

- ✚ La temperatura en una montaña va descendiendo según ganamos en altitud. En la cima llegamos a temperaturas bajo cero.



Podemos representar una situación en la que medimos la temperatura según subimos desde un pueblo a la cima de una montaña en una gráfica como la siguiente:

En el sistema de referencia cartesiano



que hemos establecido, el origen está en el pueblo y es por ello por lo que el río tiene abscisa negativa, porque está más bajo. En la cima la temperatura es negativa y por ello su ordenada es negativa.

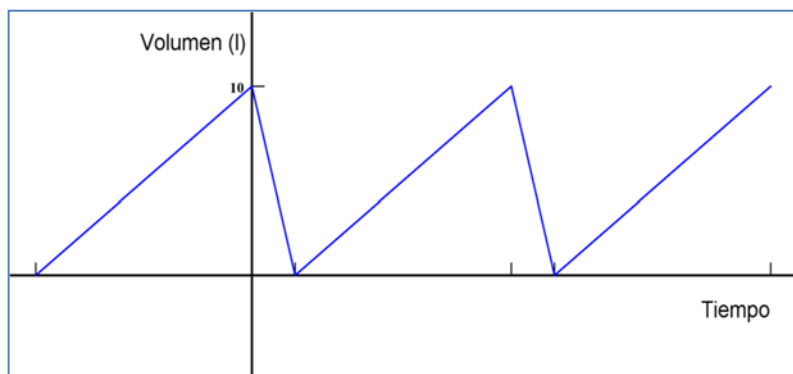
La temperatura desciende. Su gráfica es **decreciente**.

Ejemplo 15:

- ✚ En un establecimiento comercial, el depósito de agua de los servicios públicos va llenándose poco a poco hasta alcanzar los 10 L de agua y, en ese momento, se vacía regularmente. Cuando está vacío se repite el proceso. En llenarse tarda el quintuplo de tiempo que en vaciarse.

Podemos hacer una gráfica que refleje la variación de la cantidad de agua (volumen) del depósito en función del tiempo, a partir de un momento en el que el depósito está lleno.

El origen de nuestro sistema de referencia cartesiano está en un momento con el depósito lleno, el tiempo negativo significa que es anterior a ese momento.



Al vaciarse el depósito se tiene una gráfica **decreciente**. Cuando está vacío, se tiene un **mínimo**. Al llenarse, la gráfica es **creciente**, y cuando está totalmente lleno, se tiene un **máximo**.

Los puntos de corte con los ejes son: Con el eje de ordenadas en el punto (0, 10), con el eje de abscisas cuando el depósito está vacío.

Las **gráficas** nos dan una visión más clara de la situación que estamos estudiando, además de ellas podemos obtener una **tabla de valores** y así hacer una **interpretación** más precisa.

Ejemplo 16:

- ✚ En la situación anterior si consideramos que tarda un minuto en vaciarse el depósito, tardará cinco minutos en llenarse y podemos obtener la siguiente tabla de valores:

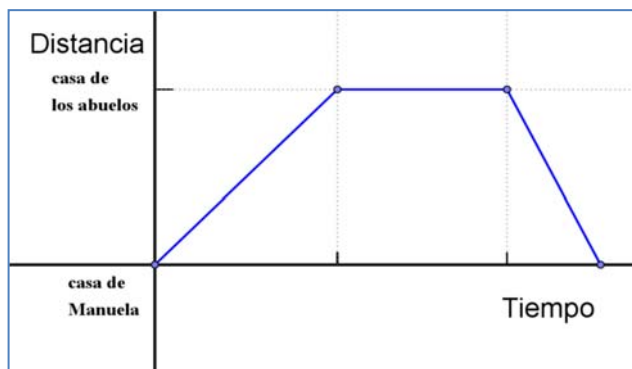
Tiempo (min)	-5	0	1	6	7	12
Volumen (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negativo del tiempo quiere decir que el depósito comenzó a llenarse con anterioridad a la situación inicial (origen) en el que el depósito está lleno.

Actividades resueltas

- ✚ Manuela va algunas tardes a casa de sus abuelos donde pasa un buen rato con ellos. Después vuelve rápidamente a su casa para hacer los deberes antes de cenar. Construye una gráfica de esta situación

Solución:



Observa que en la gráfica se tiene un primer tramo que es creciente, el siguiente es constante y el último es decreciente. La gráfica de la función es continua (en ningún momento es preciso levantar el lápiz para dibujarla).

- ✚ “Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos.”



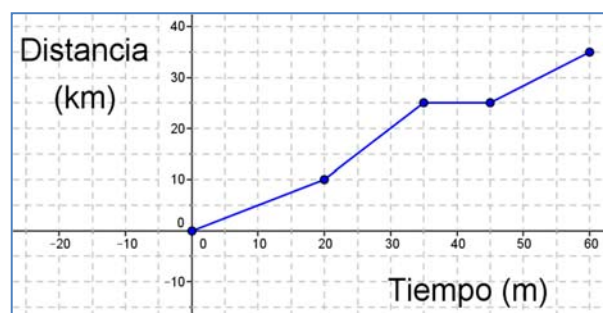
Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

Solución

La gráfica sería:

Y la tabla de valores:

Tiempo (min)	0	20	35	45	60
Distancia (km)	0	10	25	25	35



La gráfica es continua y siempre creciente.

Actividades propuestas

12. La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa. Construye una gráfica de esta situación.
13. “María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos.” Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

2. 4. Interpretación y lectura de gráficas

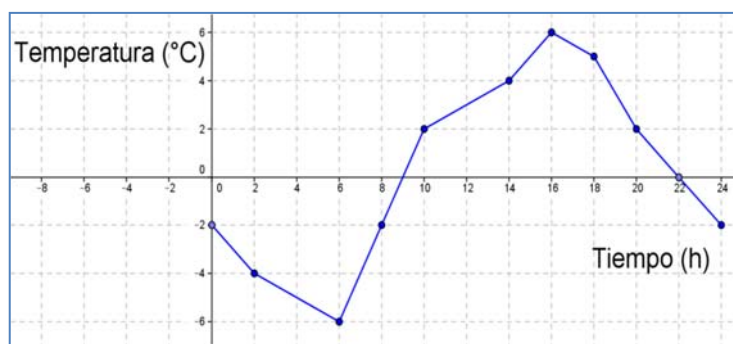
Las gráficas resumen de manera eficaz la información sobre la relación entre dos magnitudes, por ello se suelen emplear mucho, tanto en situaciones de carácter científico o social, como en la información que se emplea en los medios de comunicación. Su lectura e interpretación es pues de mucha utilidad.

De las coordenadas de los puntos de una gráfica podemos extraer datos muy interesantes para la comprensión de la situación que nos muestra la gráfica (la ordenada más alta o más baja, como se relacionan las magnitudes,...)

Ejemplo 17:

- El gráfico adjunto muestra las temperaturas a lo largo de un día de invierno en el pico de Peñalara.

A partir de esta gráfica podemos obtener más información sobre la situación planteada. Así, por ejemplo podemos ver que la temperatura mínima que se alcanzó ese día fue de -6°C a las 6 h de la mañana, nos lo indica el punto de coordenadas (6, -6) que tiene la ordenada menor de todos los puntos de la gráfica. Es un **mínimo**.



- Del mismo modo podemos ver que la temperatura más alta fue de 6°C , que se obtuvo a las 16 h. El punto de coordenadas (16, 6) así nos lo indica. Es un **máximo**.

Podemos también afirmar que la temperatura fue subiendo desde las 6 h hasta las 16 h pues las ordenadas de los puntos cuya abscisa está entre esas horas van creciendo. Es **creciente**.

Así mismo el punto (10, 2) nos indica que a las 10 h de la mañana hacía una temperatura de 2°C , temperatura que se alcanzó también a las 20 h, aunque esta vez bajando.

El hecho de que de 10 h a 14 h subiera la temperatura menos que en horas anteriores (gráfica menos inclinada) pudo ser debido a causas climatológicas concretas, como que se pusiera la niebla, y después, de 14 a 16 h, hay una subida rápida (pudo salir el sol). La gráfica nos indica que algo así pudo pasar.

A partir de las 16 horas la temperatura baja, la gráfica es **decreciente**.

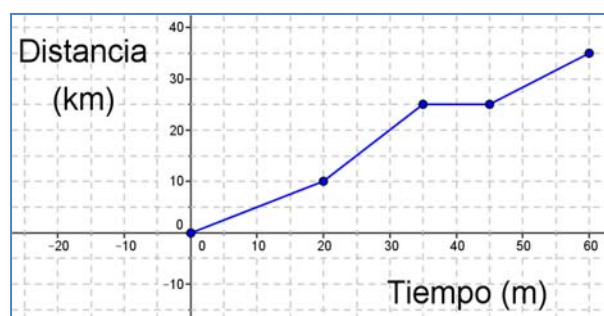
La temperatura es de 0°C hacia las 9 horas y a las 22 horas. (0, 9) y (0, 22). Son los puntos en que la gráfica corta al eje de abscisas. Al eje de ordenadas lo corta en (-2 , 0).

Ejemplo 18:

- La actividad resuelta que nos describe el recorrido de Juan de camino a casa de sus abuelos. La gráfica que dibujamos y resume el viaje era la que figura a la derecha.

De la gráfica, además de lo que ya conocíamos y que nos ayudó a dibujarla, podemos extraer, “de un simple vistazo” más información.

Por ejemplo, si miramos a la gráfica podemos observar



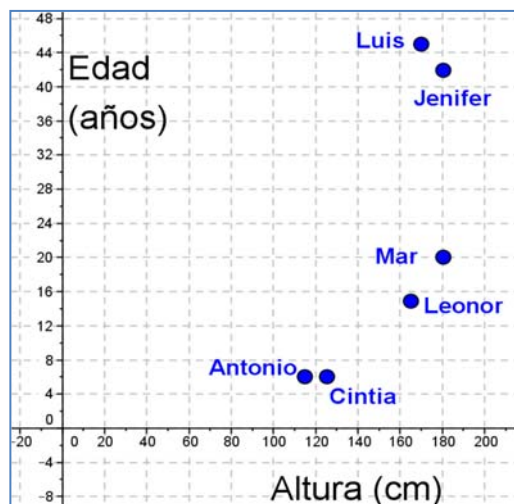
viaje de Juan a casa de sus abuelos

que en el kilómetro 20 llevaba 30 minutos pedaleando, o que a los 10 minutos había recorrido 5 kilómetros, que el tramo más rápido fue de los 20 a los 35 minutos (se ve mayor inclinación), o que en el minuto 40 estaba parado.

Es una gráfica **continua**, pues podemos dibujarla sin levantar el lápiz.

Ejemplo 19:

- La gráfica siguiente nos indica la relación entre la edad y la estatura de los miembros de una familia.



Si observamos los puntos de esta gráfica veremos que Jenifer y Luis son los puntos (180, 43) y (170, 45) y representan a los padres que tienen 43 y 45 años y miden 180 y 170 cm respectivamente.

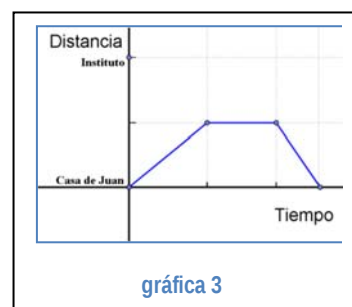
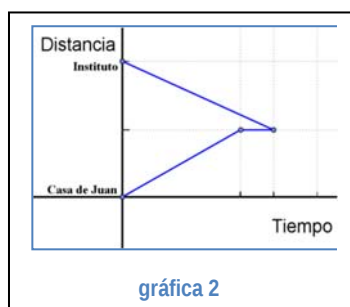
Los pequeños Antonio y Cintia son mellizos de 6 años y miden 115 y 125 centímetros. Mar tiene 20 años y mide 180 cm, representada por el punto (180, 20) y, por último Leonor mide 165 y tiene 15 años.

De la gráfica también podemos deducir que Mar y su madre, Jenifer, son los más altos de la familia, que Luis es el de más edad y que Cintia mide 10 centímetros más que su hermano mellizo.

Actividades resueltas

- Observando las gráficas de debajo, determina cuál es la que mejor se ajusta a la situación siguiente:

“Antonio va al Instituto cada mañana desde su casa, un día se encuentra con un amigo y se queda charlando un ratito. Como se la ha hecho tarde sale corriendo para llegar a tiempo a la primera clase”



Solución

La gráfica 1 **es la que más se ajusta** pues: el segmento horizontal indica que durante un tiempo pequeño no avanzó en distancia, esto es que estaba parado, y la inclinación del tercer segmento es mayor que la del primero, lo que indica que en menos tiempo recorrió más distancia, esto es, que fue más rápido.

La gráfica 2 **no puede ser**, pues Juan no puede estar en dos sitios distintos, a la vez, en el mismo momento. Esta gráfica indica, por ejemplo, que en el instante inicial (tiempo 0) Juan está en su casa y en el instituto al mismo tiempo.

La gráfica 3 **no puede ser**, ya que la gráfica nos indica que Juan regresa a su casa después de charlar con su amigo y no va al instituto.

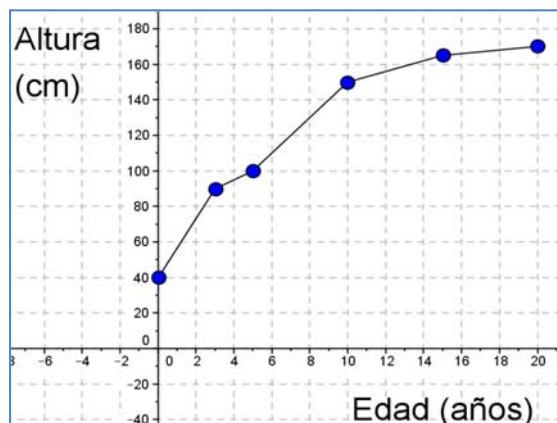
La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.

Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

- ¿A qué edad medía 1 metro?
- ¿Cuánto medía al nacer?
- ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?
- ¿En qué periodo creció menos?

Solución:

- Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.
- El punto que representa el nacimiento es el (0, 40) luego midió 40 centímetros
- Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.
- En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

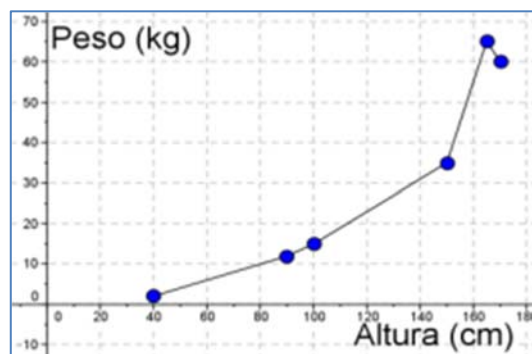


Actividades propuestas

14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.

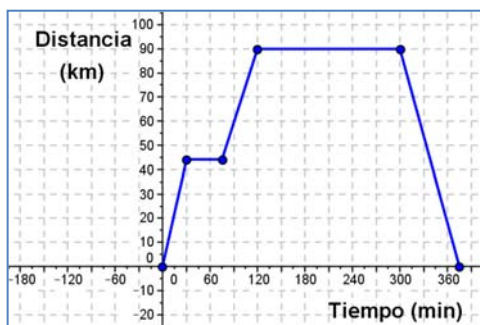
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía 150 cm?
- ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?
- ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?



15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.

Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:



- ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?
- ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?
- Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?
- Haz una descripción verbal del viaje

3. LAS FUNCIONES

3.1. La función como relación entre dos variables. Variable dependiente y variable independiente

No es raro escuchar o leer en la prensa expresiones como: “el precio está **en función de** la demanda”, “el número de escaños obtenidos por un partido político está **en función del** número de votos obtenidos”, “los resultados obtenidos en los estudios están **en función del** tiempo dedicado a estudiar”, o como esta: “el área de un círculo está **en función del** radio”.



Estas expresiones indican que el precio de un objeto, el número de escaños, los resultados académicos o el área del círculo están relacionados, respectivamente, con la demanda, el número de votos recibidos, el tiempo dedicado al estudio o el radio, de tal forma que la primera magnitud citada depende únicamente de la segunda.

Una magnitud **Y** está **en función de** otra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depende de **manera única** del valor que tenga la magnitud **X**.

Nota: la Real Academia Española, en el Diccionario panhispánico de dudas, dice que ‘en función de’ es una locución preposicional que significa ‘según o dependiendo de’

Ejemplo 20:

- La temperatura del agua que está en un cazo al fuego dependerá de la cantidad de calor que reciba, así decimos que: *la temperatura del agua **T** varía **en función del** calor recibido **Q***, o simplemente que **T** está en función de **Q**.

Cuando realizamos un viaje en coche podemos observar varias magnitudes; vamos a estudiar la relación entre dos de ellas, por ejemplo la distancia recorrida y el tiempo transcurrido desde la salida.

Según sea nuestro viaje y lo que hagamos durante su recorrido (ir por autopista o por una carretera secundaria, parar un rato, volver,...) la distancia recorrida según el tiempo transcurrido será de una manera u otra, pero es claro que *la distancia está **en función del** tiempo*. En cada instante de tiempo habremos recorrido una distancia determinada.



Como hemos visto en algunos ejemplos y actividades anteriores, por ejemplo en el caso de Juan que va a ver a sus abuelos, en la actividad 20, hay un periodo de tiempo (10 minutos) en el que se detiene a descansar y no avanza distancia, pero el tiempo no se detiene. Así nos encontramos con que a varios valores de la magnitud tiempo les corresponden el mismo valor de la magnitud distancia (los 25 kilómetros que había recorrido antes de parar).



Sin embargo, a cada valor de la magnitud tiempo solamente le corresponde un único valor de la magnitud distancia, esto es evidente pues Juan no puede estar en dos sitios distintos en el mismo instante de tiempo.

Cuando esto ocurre decimos que la relación entre las dos magnitudes es una **función**.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes numéricas **X** e **Y**, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud **X**, le hace corresponder **un único** valor de la segunda magnitud **Y**.

Además ambas magnitudes tienen valores numéricos y varía una en función de la otra (la distancia varía según la variación del tiempo en el ejemplo de Juan). Para abreviar nos vamos a referir a ellas como variables.

En las **relaciones funcionales**, a las magnitudes relacionadas las llamamos **variables**.

Asimismo, en nuestro viaje, la distancia depende del tiempo transcurrido, así que decimos que la distancia es la variable dependiente y el tiempo es la variable independiente.

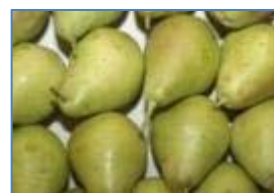
Nota: Cuando tenemos una relación funcional entre dos variables en la que una es el tiempo que transcurre, esta, normalmente, es la variable independiente.

Cuando tenemos dos magnitudes, **X** e **Y**, que están relacionadas de tal forma que **Y** es función de **X**, a la magnitud **Y** se la denomina **variable dependiente**, y a la magnitud **X**, de la que depende, se la denomina **variable independiente**.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, a las magnitudes solemos llamarlas **X** e **Y**, siendo **X** la independiente e **Y** la dependiente.*

Ejemplo 21:

✚ “El precio del kg de peras es de 1,80 €.” Esta situación nos define una relación entre el precio y el peso, de tal manera que el precio que pagamos depende del peso que compramos. La relación es una función, el peso y el precio son las variables, el peso es la variable independiente y el precio la variable dependiente.



Ejemplo 22:

✚ La relación entre dos variables viene dada por la función $y = 2x - 1$.

En este caso **Y** está en función de **X**, pues para cada valor **x** de la variable **X** hay un único valor **y** de la variable **Y**, siendo la variable **X** la variable independiente y la variable **Y** la dependiente.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, solemos llamarlas **X** e **Y**, y a los valores que toman estas variables les denominamos **x** e **y** respectivamente. Así cuando la magnitud **X** toma el valor **x**, la magnitud **Y** vale **y**.*

Actividades resueltas

- ✚ En las siguientes relaciones di si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

- a) El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
- b) El perímetro de un polígono regular y la longitud de su lado.
- c) El número de habitantes de los pueblos y la temperatura media en verano.
- d) La altura y el número de hermanos de los estudiantes de 1º de E.S.O.



Solución

- a) *El consumo de un coche sí está en función de la velocidad a la que circula. En este caso el consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente.*
- b) *También aquí se da una relación funcional, el perímetro es función del lado. El perímetro es la variable dependiente y el lado la independiente.*
- c) *En este caso no hay una relación funcional pues hay pueblos grandes y pequeños no teniendo que ver con la temperatura media en verano que haga en ellos.*
- d) *Tampoco hay relación funcional en este caso, puedes comprobarlo en tu clase.*

Actividades propuestas

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

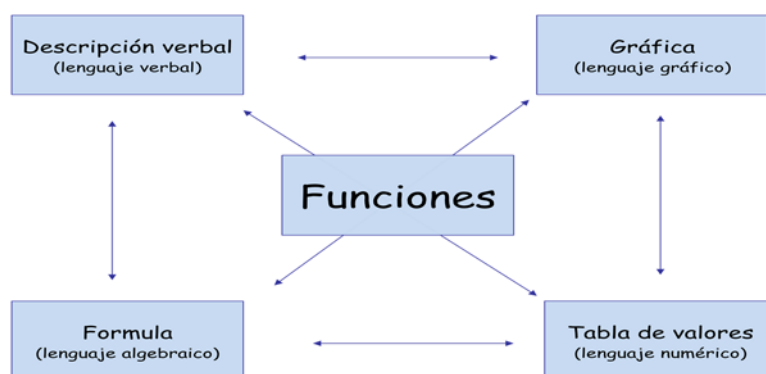
- a) El consumo de un coche y la distancia recorrida.
- b) La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor.
- c) El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí.
- d) La temperatura de un lugar y la hora del día.
- e) El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.

17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

3.2. La función: tabla de valores, gráfica, expresión verbal y expresión algebraica

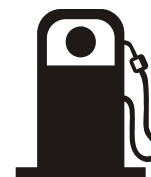
La gran mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta este momento son relaciones funcionales en las que hay dos variables, y una depende de la otra de manera única; esto es, son **funciones**.

Además hemos visto que las **funciones** se pueden representar de varias maneras; como una **descripción verbal** que describe una situación, como una **tabla de valores** que nos indica los valores correspondientes de la relación, como una **gráfica** que nos visualiza la situación y como una **expresión algebraica** (fórmula) que nos relaciona las dos magnitudes.



Ejemplo 23:

- Si observamos el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche podemos estudiar la relación entre el número de litros de gasolina y lo que pagamos.

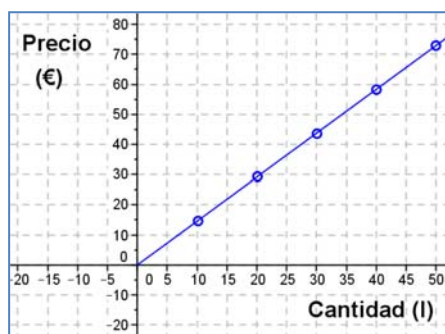


El precio que pagamos es función de la cantidad de gasolina que echamos y puede venir dada de las siguientes maneras:

- Descripción verbal: "El litro de gasolina se situó en la primera semana de agosto en 1,46 €".
- Expresión algebraica (fórmula): $p = 1,46 \cdot l$ (donde p es el precio y l es la cantidad de gasolina)
- Tabla de valores:

Cantidad (l)	10	20	30	40	50
Precio (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gráfica:



Ejemplo 24:

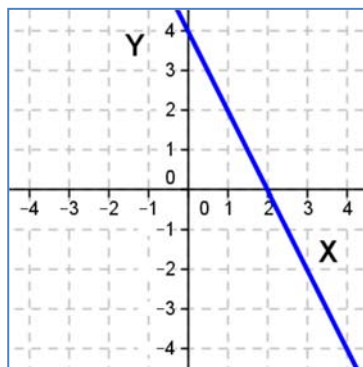
✚ Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo $y = 4 - 2 \cdot x$

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	-2	-4

y, a partir de ella, dibujar una gráfica:



En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor **x** de la variable **X** podemos calcular el valor **y** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: "A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número"

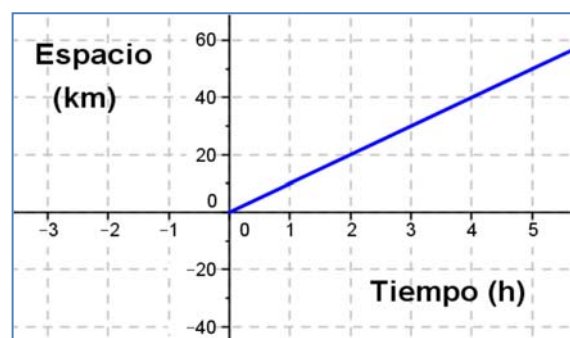
Nota: En muchas ocasiones no es posible, a nuestro nivel, encontrar la fórmula que define una función dada como una tabla de valores, su descripción verbal o su gráfica.

Actividades propuestas

18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

3.3. Una función importante. La función lineal o de proporcionalidad directa

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa** k .

Ejemplo:

✚ Representa gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (x)	-3	-2	0	1	2
Magnitud B (y)	-3'6	-2'4	0	1'2	2'4

Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-3'6}{-3} = \frac{-2'4}{-2} = \frac{1'2}{1} = \frac{2'4}{2} = 1'2$$

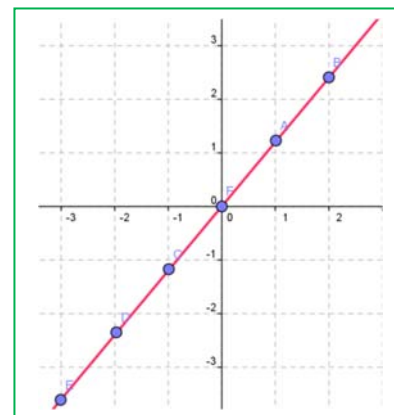
La relación se define así: $y = 1'2x$.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula $y = m \cdot x$.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma $y = m \cdot x$.



Actividades propuestas

21. María quiere comprar una cinta que vale a 0'7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.
22. Representa gráficamente las funciones:
 $a) y = 5x$, $b) y = 1'5x$, $c) y = 0'5x$, $d) y = -2x$, $e) y = -3'2x$, $f) y = -1'2x$
23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.
24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?
25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

3.4. Utilización de *Geogebra* para la interpretación de la pendiente de una función lineal

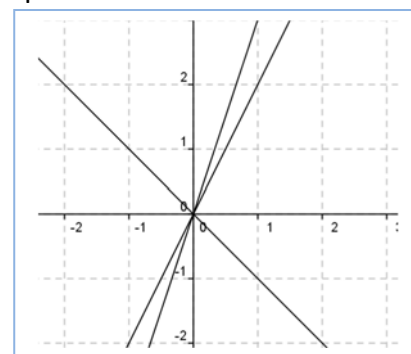
En esta actividad se va a utilizar el programa **Geogebra** para representar funciones lineales cuyas gráficas son rectas.

Se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza.

Actividades resueltas

✚ Utiliza *Geogebra* para estudiar rectas con distintas pendientes.

- Abre el programa *Geogebra* y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil analizar las funciones.
- En la ventana de debajo de la pantalla, en **Entrada**, escribe: $y = 2x$. Inmediatamente aparece dibujada esa función en la ventana gráfica.
- Escribe de nuevo en **Entrada** otras rectas con distintas pendientes: $y = 3x$, $y = -x$...
- Dibuja todas las funciones lineales que quieras y responde a las siguientes preguntas.
 - Cuando la pendiente es positiva, ¿qué ocurre al crecer la pendiente? ¿Y al disminuir?
 - Cuando la pendiente es negativa, ¿qué ocurre al crecer la pendiente en valor absoluto? ¿Y al disminuir?
- Todas las funciones de la forma $y = mx$ son rectas. Son funciones lineales. Todas ellas pasan por el origen $(0, 0)$.
 - Cuando la abscisa vale 1, ¿cuánto vale la ordenada?



Actividades propuestas

26. Utiliza *Geogebra* para nuevamente representar gráficamente las funciones:

$$a) y = 5x, b) y = 1'5x, c) y = 0'5x, d) y = -2x, e) y = -3'2x, f) y = -1'2x$$

27. Indica en las funciones anteriores sus características: a) cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. b) ¿Son continuas? c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados. d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.

CURIOSIDADES. REVISTA

Descartes y el sistema de referencia cartesiano

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés **René Descartes** que vivió entre los años 1596 y 1650. Descartes quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «punto de partida» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, Descartes también comenzó tomando un "punto de origen" para poder representar la geometría plana.



Principio del palomar o Principio de Dirichlet

"Si una bandada de 21 palomas se mete por 20 agujeros de un palomar, es seguro que al menos dos palomas se han metido en el mismo agujero"

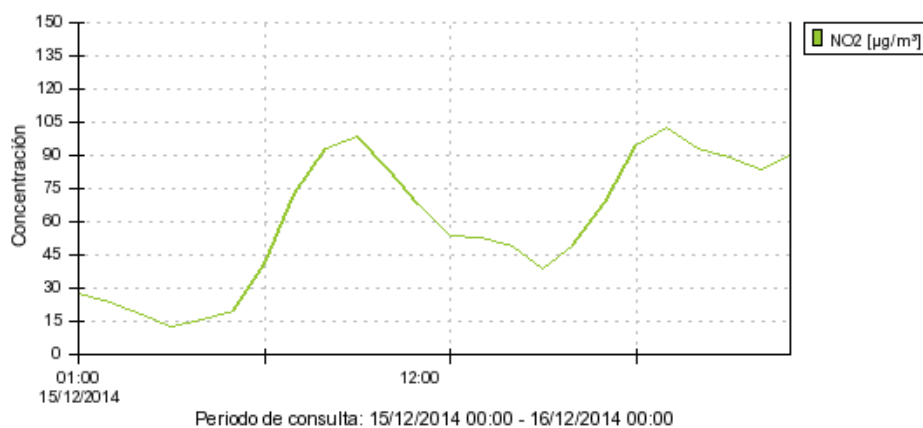
¿Estás de acuerdo?



Este principio tan sencillo permite resolver otros problemas, como por ejemplo:

¿Se puede asegurar que ahora mismo hay en Madrid al menos 20 personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

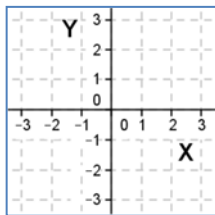
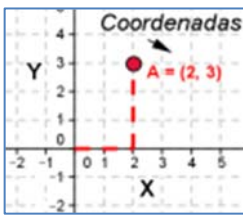
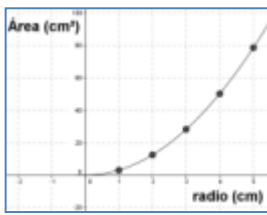
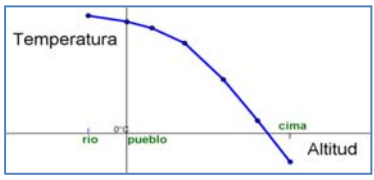
Para razonar la respuesta considera que nadie tiene más de 200 mil pelos en la cabeza y que en Madrid hay unos 4 millones de personas.



La gráfica indica la evolución de la concentración de NO₂ en la estación de Cuatro Vientos de Madrid durante un día de diciembre de 2014. Se observa cómo sube hacia las 9 de la mañana a la entrada del día y vuelve a subir a la tarde hacia las 6 de la tarde.

En la página de la Comunidad de Madrid puedes conocer los datos de la calidad del aire en cada momento, y saber cuáles son los valores umbrales que no se deberían rebasar.

RESUMEN

		Ejemplos										
Sistema de referencia cartesiano	Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas Ejes , que se cortan en un punto llamado Origen . El eje horizontal se denomina eje de abscisas , y al eje vertical, eje de ordenadas .											
Coordenadas	Es un par ordenado de números (x, y), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.											
Tabla de valores	Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.	<table><tr><td>Tiempo (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table>	Tiempo (min)	0	30	80	100	Distancia (km)	0	10	20	30
Tiempo (min)	0	30	80	100								
Distancia (km)	0	10	20	30								
Gráfica	Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.											
Gráficas a partir de situaciones	Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica											
Función	Una magnitud Y está en función de otra magnitud X , si el valor de Y depende de manera única del valor que tenga X .	La temperatura del agua T varía en función del calor recibido Q										
Variables	En las relaciones funcionales, a las magnitudes variables relacionadas las llamamos solamente variables	"El precio del kg de peras es 1,80 €." el peso y el precio son las variables										
Variable dependiente e independiente	Cuando tenemos dos magnitudes variables que están relacionadas de tal forma que Y es función de X , a la magnitud Y se la denomina variable dependiente, y a la magnitud X se la denomina variable independiente.	El consumo de un coche y la velocidad a la que circula. El consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente										
Variables y valores	Cuando tenemos una función entre dos variables X e Y , a los valores que toman estas variables les denominamos x e y respectivamente.	Cuando la magnitud X toma el valor x , la magnitud Y vale y .										

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano cartesiano. Coordenadas

1. Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

$$I = \left(\frac{3}{2}, -3\right) \quad J = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad K = (6, 3'5) \quad L = \left(-\frac{3}{4}, -0'5\right)$$

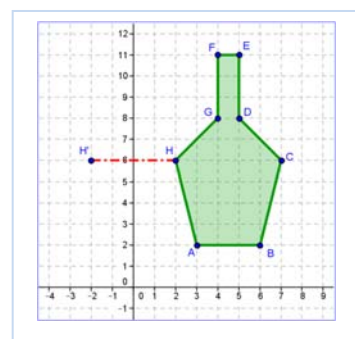
2. Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

$$M = \left(4, -\frac{5}{2}\right) \quad N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad P = \left(-6, -\frac{9}{5}\right) \quad Q = \left(-\frac{7}{2}, 5\right)$$

$$R = (2, 0) \quad S = (-7, 0) \quad T = \left(0, -\frac{7}{2}\right) \quad U = (0, 7) \quad O = (0, 0)$$

3. Observa la siguiente vasija:

- Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.
- Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H' es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.
- Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?
- ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?



En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

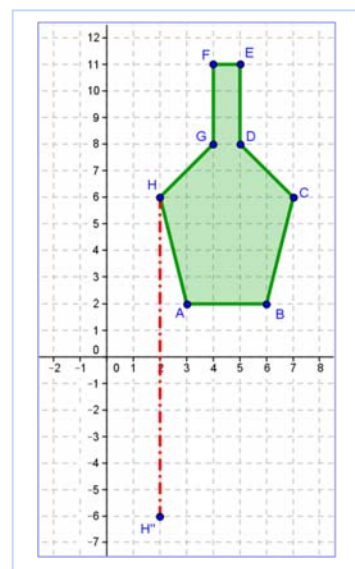
- Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
- Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

4. Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.

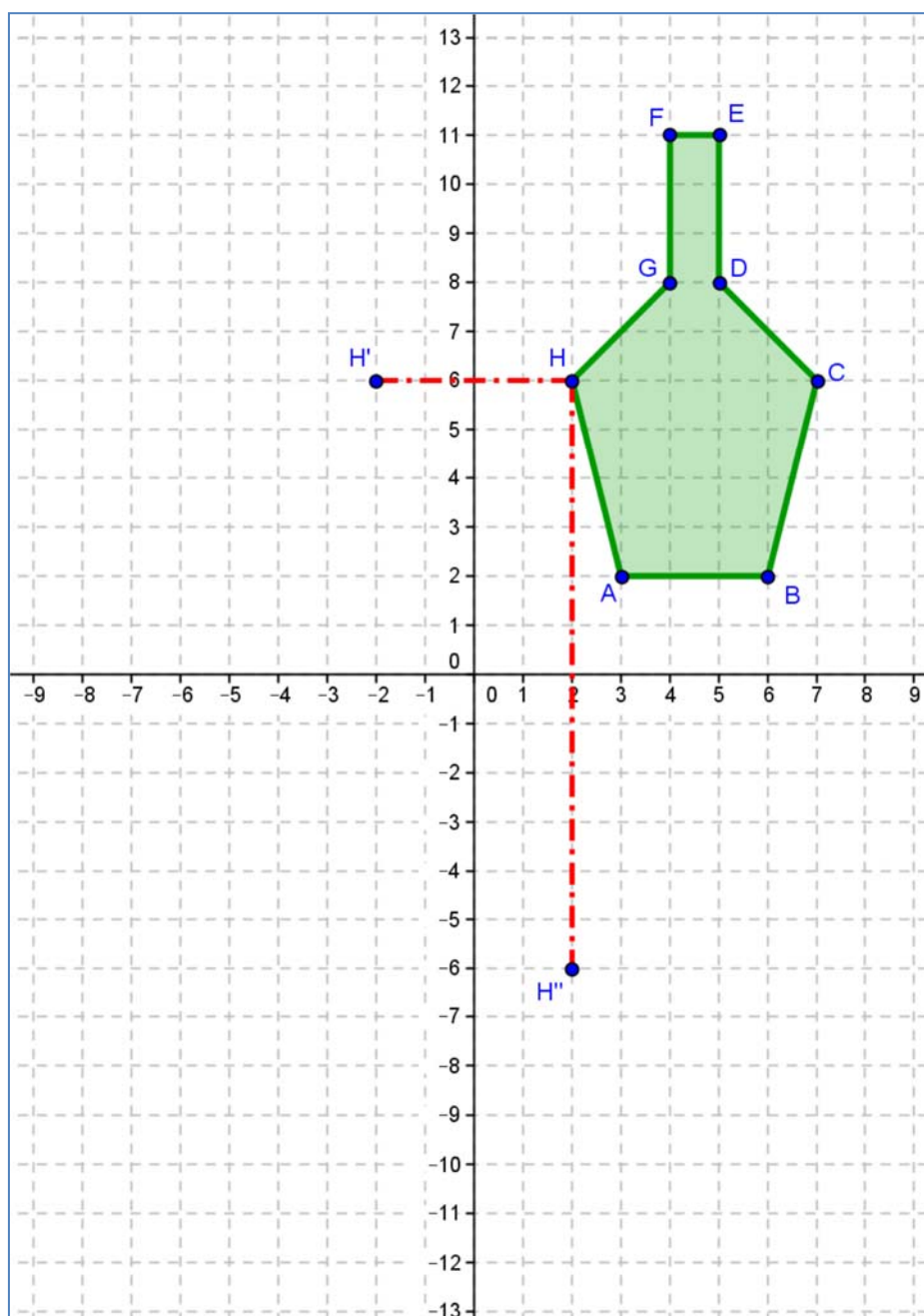
- Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H'' es el reflejado de H por este nuevo espejo.
- Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.
- ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

- Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
- Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.

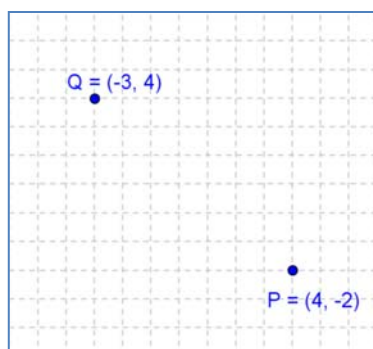


Material fotocopiable



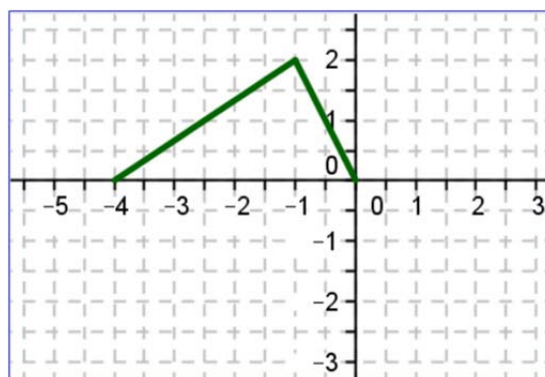
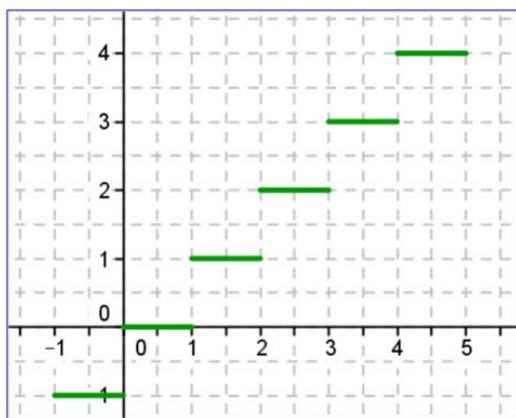
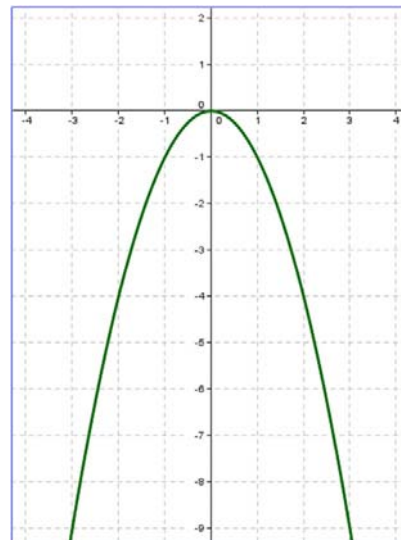
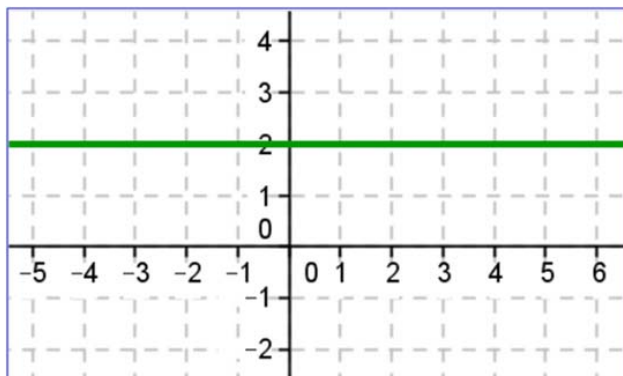
Vasija

5. Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.
- Representa los puntos $M = (3, 4)$ $N = (-1, 1)$ y $R = (2, -4)$
 - Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto $(1, -1)$ del sistema anterior.
 - Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.
 - ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado.
6. Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.
- Representa un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3,3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1,9 cm.
 - ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.
 - ¿Cómo son éstos puntos entre sí dos a dos?
7. Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.

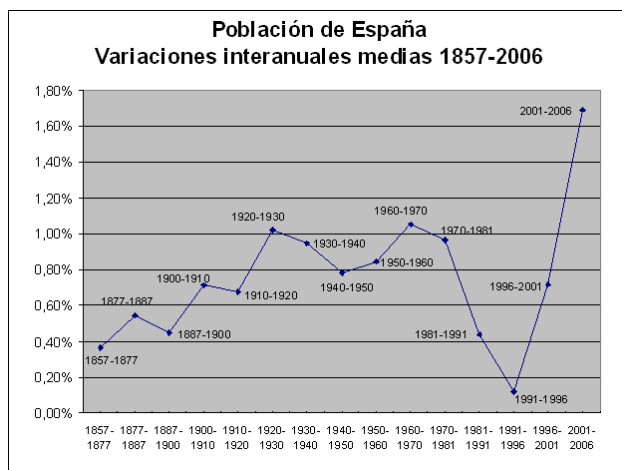


Tablas y Gráficas

8. Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:



9. El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la población española, mediante la gráfica siguiente:



Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

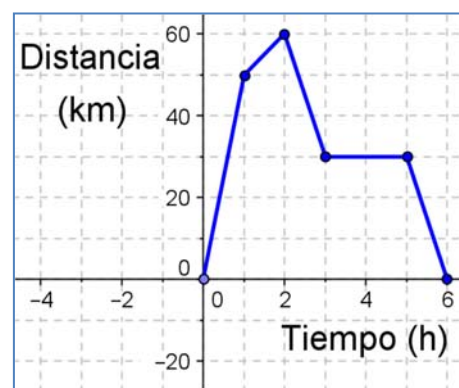
- a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?
 b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?
 c) ¿Y entre 1991 y 2001?

Razona sobre el significado de esta gráfica.

- a) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?
 b) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?
 c) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

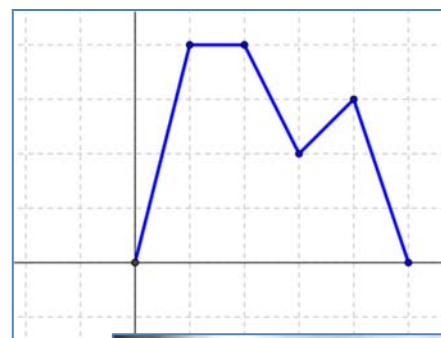
10. Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:

- a. ¿A qué distancia de su casa llega?
 b. ¿Cuánto tiempo está parado?
 c. ¿Cuánto tarda en volver?
 d. A las dos horas ¿a qué distancia está de su casa?
 e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?
 f. ¿Cuándo va más deprisa? Y ¿Cuándo más despacio?



11. La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.

- A. Inventa una situación que pueda ser representada por esta gráfica.
 B. Señala cuales son las magnitudes y en qué unidades se miden.
 C. Indica, en los ejes, los números adecuados.
 D. Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.



12. El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:



Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados.

13. Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

- a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €
 b. Un número y la mitad de dicho número.
 c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.



Las funciones

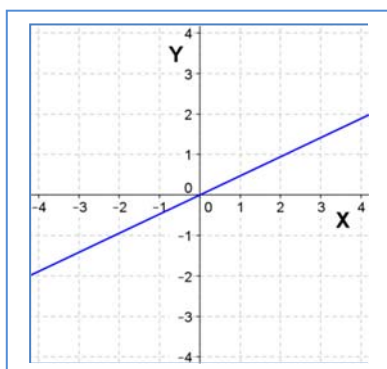
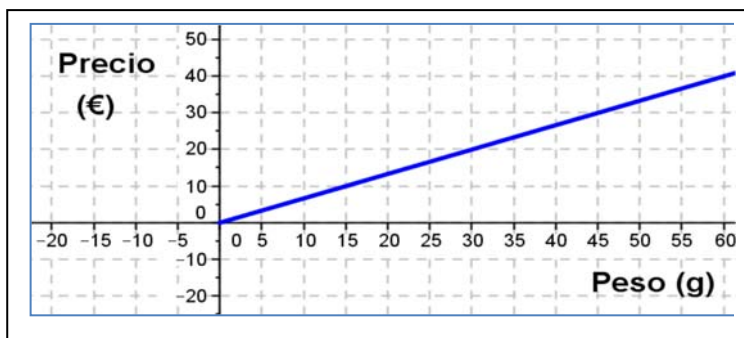
14. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

- La temperatura del puré a largo del tiempo.
- El precio de una camiseta y su color.
- El área de un cuadrado y su lado.
- El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.
- El volumen de una esfera y su radio.



15. Propón dos situaciones diferentes a todas las que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

16. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.

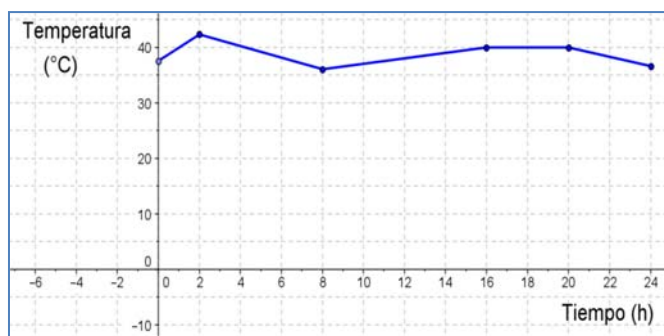


¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? ¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?

17. Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: $d = 100 \cdot t$. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?

18. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?

19. La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día.



Mirando la gráfica indica:

- ¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana? ¿y a las doce de la noche?
- ¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?
- ¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?
- ¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?
- Describe con palabras esta situación.

20. Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.



21. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

- La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
- El precio de un coche y su color.
- El volumen de un líquido y su peso.
- La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
- La longitud de un muelle y el peso colgado en él.



22. Propón dos situaciones diferentes a todas las que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

23. En una papelería 10 lápices cuestan 2,5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?



24. Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.

AUTOEVALUACIÓN

1) El punto de coordenadas $A = (-5, -6)$ está situado en el:

- a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

2) Indica qué afirmación es falsa:

- a) El eje de abscisas es el eje OY
 b) El eje de ordenadas es vertical
 c) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas
 d) El eje de ordenadas es el eje OY

3) Los puntos de coordenadas $A = (0, -5)$, $B = (0, 4)$, $C = (0, -7)$, $D = (0, 8)$ están todos ellos en el:

- a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

4) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

- a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

5) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

- a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa
 c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

6) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

- a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) $Y = 3X + 2$.
 c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.

7) Indica qué afirmación es falsa:

- a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas
 b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente
 c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente

8) Escribe una tabla de valores de la función $y = 2x - 3$.

x	1	2	3	4
y				

- a) -1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) -1, -7, -9, -11. d) -1, 0, 3, 6.

9) Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado.

PARA EL PROFESORADO

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de secundaria. Esto no es extraño si analizamos cómo ha evolucionado dicho concepto a lo largo de la historia.

En la historia de las Matemáticas comienza a plantearse el concepto de función hacia el siglo XIV y ha sido uno de los que ha presentado una mayor dificultad, siendo en el siglo XX uno de los ejes de la investigación matemática. Incluso para los matemáticos del siglo XVIII no estaba muy claro el concepto de función. Por ejemplo, en un artículo de *Jean Bernoulli* publicado en 1718 se encuentra esta primera definición: “Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes”. Los matemáticos estaban dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer. Fue *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en su obra “La teoría analítica del calor” el motor para la profundización del concepto de función. Recordemos que cuando Fourier expuso su desarrollo de una función en serie trigonométrica, empezó a discutirse sobre qué era una función, cuáles podían ajustarse a ese desarrollo, y este hecho fue un catalizador en la historia de las Matemáticas que, entre otras muchas cosas, llevó a formalizar este concepto. La noción moderna de función es muy reciente, podemos fecharla en la obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, donde aparece la noción de función como correspondencia, independiente de una representación analítica o geométrica.

A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos del mundo que nos rodea y ha sido expresado en distintos lenguajes —verbal, gráfico, algebraico y numérico—. Por tanto, para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones, es preciso estudiar este concepto desde distintos aspectos, utilizando diferentes lenguajes y trabajando en distintas situaciones.

Ya que las relaciones funcionales se encuentran con frecuencia en nuestro entorno, el estudio de funciones, por los estudiantes de 1º de E.S.O., debe comenzar con el tratamiento de aquellas situaciones que existen en su entorno, sin olvidar las relacionadas con otras áreas de conocimiento (las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.).

Desde el primer curso de la E.S.O. los estudiantes pueden ir aproximándose al concepto de función interpretando los significados de las distintas expresiones de las funciones. Estos procedimientos se han de trabajar a lo largo de toda la etapa, y se van adquiriendo a medida que aumenta la madurez cognitiva y el campo de experiencia del estudiante.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de programas informáticos específicos como el [Geogebra](#), o por aplicaciones elaboradas ya por algunos profesores y que están a disposición de todos, como las elaboradas dentro del [Proyecto Gauss](#) (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado) o en páginas personales de estos.

Bien utilizando un solo ordenador en el aula —con la PDi o mediante la proyección de la pantalla—, o bien con el uso de los ordenadores por los estudiantes en el aula de informática, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas y la interpretación de sus puntos y es un apoyo inestimable para acercarse a la representación de funciones y al concepto de función.

Por último hay que indicar que la tercera parte de este capítulo pretende una primera formalización al

concepto de función y, aunque se ha tratado de seleccionar actividades en las que las relaciones funcionales son esencialmente proporcionales, puede ser de mayor dificultad.

De este modo, encontrar la expresión algebraica a partir de la representación gráfica de una función sencilla es una de las ampliaciones que se pueden proponer a los estudiantes más aventajados y puede servir para el estudio y comprensión mayor del significado de las funciones.

Por todo ello, y dependiendo del tiempo que se desee o se pueda emplear para el desarrollo de este capítulo, esta tercera parte se puede suprimir sin que haya ninguna actividad, de las partes anteriores, que quede sin terminar de desarrollar.

2º DE ESO

ÍNDICE

1. Resolución de problemas.	3
-----------------------------	---

NÚMEROS

2. Números	17
3. Potencias y raíces	46
4. Divisibilidad	66
5. Porcentajes	87

GEOMETRÍA

6. Sistemas de medida.	101
7. Figuras planas	126
8. Longitudes y áreas. Semejanza	159
9. Cuerpos geométricos. Volúmenes	185

ÁLGEBRA. GRÁFICAS

10. Álgebra	217
11. Tablas y gráficas. El plano cartesiano. Funciones.	247

ÍNDICE

285