2º de ESO
Actividades y ejercicios

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde.

CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

1. ¡Inventa problemas similares!
2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74.791 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?
3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo? Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?
5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.
6. Informan que a una manifestación han ido 500.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?
7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)
8. ¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?
9. Aprende a hacer magia. Piensa un número. Súmale 10. Dobla el resultado. Réstale 6. Calcula la mitad. Quita el número del principio. ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?
10. ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?
11. Cuadrado Mágico

Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

12. ***"El depósito":*** De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1.200 litros de agua ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

13. Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?
14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?
15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2: $4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2$
    Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.
16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?
17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona les invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?
18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

o o o

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

20. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

21. Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas…). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?

22. Otro juego: Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

3 6	**5 7**	**10 7**	**2 7**
+ –	**x /**	**+ –**	**+ –**
/ =	**+ =**	**x =**	**x =**
33	**147**	**123**	**95**

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

CURIOSIDADES. REVISTA

Un enigma

Cuatro paredes, sin puertas
Con seis filos las harás
Y ten además en cuenta
Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores
De cada fila, por turno, se pueden tomar una, dos o toda la fila. Pierde quien debe tomar la última ficha.

O O
O O O
O O O O

El oso

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:

– Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al este, y por último 2 km al norte. Me encontré en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De qué color era el oso?

Amigo 1: – Naturalmente, era blanco.

Amigo 2: – ¡Falso! ¡Ahí no hay osos!

Analiza dónde estaba el cazador.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. "El hotel de los líos": Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen?

2. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?
3. La invitación: Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Para empezar hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas.

4. "Los cachorros": Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad que le queda más medio, y a su primo la mitad que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?

Ayuda: Haz un esquema

5. Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?
6. Un amigo dice a otro:
   - El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?
   - No, me falta un dato.
   - Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.

¿Qué edad tienen las hijas?

7. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.
8. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.
9. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.
10. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5,2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m^2, ¿cuánto costará pintarla?
11. Monedas Ordenadas

Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:

12. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "*Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquenla*" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "*Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas*" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

13. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lal Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de suma:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\quad \text{LAL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$

¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una suma correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, pero la solución no es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).

14. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	➢ Estima el resultado. ➢ Experimenta, juega con el problema. ➢ Hazlo más fácil para empezar. ➢ Haz un diagrama, un esquema... ➢ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➢ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

CAPÍTULO 2: NÚMEROS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:
   a) 8216 b) 591274 c) 918273 d) 90003040506
2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?
   a) 708544 b) 67339001 c) 5092175 d) 9847
3. Razona por qué, en el número natural 77777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.
4. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:
   a) MDCVX b) MMMCCXXXIIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII
5. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.
6. Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar n. Ya sabes que C_n es igual a n^2: $C_n = n^2$
   Comprueba que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.
7. Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3… Exprésalo de forma general.
8. Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.
9. Dibuja tres números hexagonales.
10. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
    a) Un submarino navega a 345 m de profundidad
    b) Hoy el termómetro marcaba 15 º C
    c) El coche estaba en el sótano 5.
    d) Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo
11. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:
    a) Me he quedado sin dinero.
    b) Miguel nació en el año dos mil.
    c) El garaje está en el tercer sótano.
12. Indica el significado de los números –4, 0 y +7 en cada una de las situaciones siguientes:
    a) En un garaje b) En una temperatura c) En una cuenta
13. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:
    a) $|+43|$ b) $|-7,2|$ c) $|0|$ d) $|-81,7|$
14. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.
15. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.
16. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible: a) $\frac{24}{18}$ b) $\frac{21}{49}$ c) $\frac{7}{7}$
17. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:
    a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{11}$ y $\frac{33}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$
18. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{4}$
19. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$
20. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:
    a) $\frac{-1}{5}$ b) $\frac{9}{-4}$ c) $\frac{-3}{7}$ d) $\frac{2}{-15}$
21. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.
22. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes: a) $\frac{97}{2}$ b) $\frac{345}{4}$
23. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{25}{12}$

24. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\,\overline{8}$ f) $2'64\,\overline{08}$

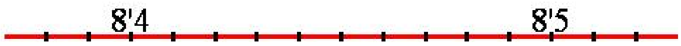
25. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\,\overline{8}$ f) $2'64\,\overline{08}$ g) $3'99\,\overline{96}$

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

26. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

27. Sitúa en la siguiente recta los números 8'43, 8'48, 8'51 y 8'38



28. Representa en una recta numérica los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

29. Completa en tu cuaderno con el signo < (menor) o > (mayor) según corresponda:

a) –13,6 –67,1 b) –80,2 +94,5 c) +37 +48 d) +52 –64 e) –21 |–25|

30. Ordena de menor a mayor a) +5,1, –4,9, –1,5, +18,2, 5,17 b) +6,9, –7,2, –8,5, –5,9, –7,21

31. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) –0,872 y –0,8721 b) 3,58 y |–3,57| c) 7,0001 y 7,00001 d) –4,78 y –8,92

32. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6'147 y menores que 6'2.

3. OPERACIONES

33. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) (+12,8) + (+57) + (–4,6) b) (–83,2) – (–24,1) + (–10,5) c) (–35) + (–48) + (+92)

34. Efectúa estas operaciones

a) (+3,8) + (+4,2) – (–52) b) (–614) + (–77) + (–811) c) (–97) – (–12) + (+26) d) (–45) + (+52)

35. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

36. Un avión vuela a 3672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?

37. Arquímedes nació en el año 287 a.C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?

38. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.

39. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

40. Realiza las siguientes sumas de fracciones: a) $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100}+\frac{13}{24}$

41. Calcula: a) $\frac{5}{14}-\frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6}-\frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100}-\frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21}-\frac{7}{3}$

42. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+35) · (+2) b) (+4) · (–72) c) (–8) · (–45) d) (–5) · (+67)

e) (+28) : (+2) f) (+27) : (–3) g) (–36) : (–2) h) (–54) : (+9)

43. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+721) · (+3) b) (+562) · (–3) c) (–915) · (–2) d) (–6) · (+72)

e) (+303) : (+3) f) (+505) : (–5) g) (–160) : (–4) h) (–704) : (+2)

44. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) (+2) · (+40) b) (+30) · (–2) c) (–60) · (–3) d) (–50) · (+8)

e) (+80) : (+4) f) (+18) : (–3) g) (–15) : (–5) h) (–70) : (+7)

45. Calcula: a) $\frac{8}{22}\cdot\frac{3}{75}$ b) $6\cdot\frac{7}{11}$ c) $23\cdot\frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{3}$

46. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15}\cdot\frac{10}{12}$

47. Calcula: a) 7,3·2,54 b) 2,89·7,21 c) 3,54·5,2·6,8 d) 6,9·7,5·6,1

48. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 756 · 4 – 756 · 3 b) 350 · 8 + 350 · 2 c) 927 · 13 – 927 · 3 d) 700 · 33 – 700 · 3

49. Efectúa: a) $9\cdot(4{,}01+3{,}4)$ b) $7{,}3\cdot(12+5{,}14)$ c) $2{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

50. Realiza los productos indicados: a) $\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

51. Efectúa las siguientes operaciones: a) $\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{8}\right)$

52. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d\cdot c + r$
 8214 : 26 b) 271093 : 452 c) 1112220000 : 385 d) 274 : 25

53. Realiza las siguientes operaciones:
a) +4 – (+5) · (-3) b) +6 + (–9) : (+2–5) c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)]

54. Realiza las siguientes operaciones:
a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)
d) +11 + (+7) · (+6 – 8) e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)] f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)]

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

1. Realiza las siguientes operaciones: a) (34 + 52) · 5 b) 89 · 2 + 12 c) 55 + 67 · 3 + 13 d) 280 – 110 · 2 + 90
2. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:
 a) 8 · (22 – 20) b) 8 · 22 – 20 c) 8 · 22 – 8 · 20 d) 8 · (22 + 20)e) 8 · 22 + 20
3. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.
4. Realiza las siguientes operaciones:
 a) 23·6 + (35–13) :11–4·7 b) 48:4·8:2– (3·12):6 c) 357–23·7 +280:14 d) 20·9–11·7+265:53

Números enteros

5. Efectúa en tu cuaderno:
 a. 6 – (8 + 10 – 1 – 2) b. 7 + (2 – 8 – 1) – (8 – 1 + 6)
 c. (10 – 2 – 7) – (1 – 9 – 16) d. –(9 – 6 – 8) – (– 7 – 10 + 2)
6. Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:
 a. 15 + [2 – 8 – (10 – 3)] b. 7 – [(5 – 8) – (6 – 12)]
 c. (5 – 14) – [2 – (2 – 4 – 3)] d. (1 – 11 + 6) – [(3 – 2) – (4 – 16)]
 e. [8 – (4 – 16)] – [10 – (5 – 12)]
7. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:
 a. (+4) · (+8) b. (–11) · (–5) c. (+12) · (–6) d. (–11) · (–10) e. (+16) : (+4)
 f. (–12) : (+6) g. (+24) : (–3) h. (–81) : (–9) i. (–63) : (+7) j. (–30) : (–10)
8. Halla en tu cuaderno:
 a. $(-2)^1$ b. $(-2)^2$ c. $(-2)^3$ d. $(-2)^4$ e. $(-2)^5$
 f. $(-2)^6$ g. $(-2)^7$ h. $(-2)^8$ i. $(-2)^9$ j. $(-2)^{10}$
9. Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:
 a. 18 – 7 · 3 b. (18 – 7) · 3 c. (–12) – 4 · (–8)
 d. [(–12) – 4] · (–8) e. (–5) · (+7) + (–3) f. (–5) · [(+7) + (–3)]
10. Calcula mentalmente: a. $(-1)^1$ b. $(-1)^2$ c. $(-1)^3$ d. $(-1)^4$ e. $(-1)^5$ f. $(-1)^6$ g. $(-1)^7$ h. $(-1)^8$ i. $(-1)^9$ j. $(-1)^{10}$
11. Calcula en tu cuaderno: a) $(-6)^4$ b. $(+5)^5$ c. $(-3)^3$ d. $(+4)^3$ e. $(-9)^2$ f. $(-10)^6$
12. Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: −5, 7, −3, 0, −6, 1, 2
13. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía: Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he tomado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?
14. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?
15. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?
16. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?
17. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?
18. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?
19. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?
20. Hace una hora el termómetro marcaba –5 ºC y ahora marca 5 ºC. La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?

21. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja 12 ºC a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?
22. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edifico que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?
23. Un juego

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre 3.

−6		+6
	+2	
		0

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre −70.

		+7
	−7	
−7		+2

24. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:
–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.
El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Fracciones

25. Realiza los siguientes cálculos: a) $\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}}{5}\cdot\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{4}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}+1$ c) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2$ d) $\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}\right):\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{8}\right)$
26. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.
27. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?
28. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?
29. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

a) $\dfrac{8}{3}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{16}{7}$ e) $\dfrac{21}{4}$ f) $\dfrac{5}{6}$

30. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.
31. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\dfrac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\dfrac{5}{4}$ de 500?
32. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km^3, ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?
33. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los 3/7 y los robles, 1/3. ¿Qué espacio ocupan las encinas?
34. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los 3/5 de su sueldo y José los 5/7, ¿quién gasta más?
35. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\dfrac{7}{6}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{\quad}{6}=\dfrac{\quad}{6}$ b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{\quad}{70}-\dfrac{\quad}{70}=\dfrac{\quad}{70}$

36. 1/3 de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos,,,) , en comer gastan 3/7, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?
37. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los 3/20 del total. Si se desperdician los 1/7, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?
38. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan ¼ sin corregir, ¿cuánto tiempo deberá dedicar todavía?
39. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\dfrac{\quad}{5}$ b) $\dfrac{34}{\quad}$ c) $\dfrac{\quad}{2}$

40. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}$ b) $\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{6}$ c) $\dfrac{5}{6}:\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{3}{16}:\dfrac{3}{10}$

41. Tres náufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada náufrago?
42. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las repartan de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

Expresiones decimales

43. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $1,8\overline{7}$ dé como resultado un número natural.
44. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:

    a) 9,235 b) 57,0001 c) $8,\overline{7}$ d) $3,52\overline{87}$ e) $5'99\overline{96}$
45. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:

    a) 8,9351 b) $5,19\overline{90}$ c) $83,\overline{74}$ d) 77,992 e) $56,\overline{01}$
46. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.
47. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0'72 euros y cada lapicero 0'57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?
48. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1,53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 · (15 + 3)?

   a) 303 b) 380 c) 360 d) 90
2. El resultado de la operación: {(–5 + 8) · (–3 – 5) + (–7 + 1) : (+9 – 3)} es:

   a) –25/6 b) +24 c) –25 d) –5
3. Un termómetro ha subido 4 ºC, luego ha bajado 6 ºC, después ha bajado 8 ºC y, por último, marca menos 9 º C. La temperatura inicial era:

   a) –1 ºC b) –19 ºC c) +1 ºC d) –14 ºC
4. Al viajar desde una latitud de 9º Norte hasta otra de 20º Sur, la variación de latitud es:

   a) 11 Sur b) 29º Norte c) 11º Norte d) 29º Sur
5. Si estás situada en el punto –15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?

   a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5 d) +14 +12 – 1
6. Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$:

   a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$
7. El resultado de la operación $(\frac{2}{5} - \frac{5}{2})\cdot 2 + \frac{51}{10}$ es:

   a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3
8. Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{9}+\frac{1}{3}$:

   a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$
9. Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$:

   a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$
10. Ordena de menor a mayor los números: 5,67; 5,68; 5,6666; 5,63; 5,5; 5,8; 5,6070.

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1792 que en 5431.
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas. -En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.	La operación 2 + 3 · 7 tiene como resultado 23, no 35, que es lo que resultaría efectuando antes la suma que el producto.
Números enteros	$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$	
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	82,6 > 36,1 > 0 > –3 > –36,7 –2,59 < –1,3
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: + · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –	(+5) · (+6) = +30 (–1) · (–87) = +87 (–5) · (+6) = –30 (+9) · (–4) = –32
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{10}{9}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Expresiones decimales	Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal	21 '375 Parte entera: 21; Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta y periódica	Exacta: Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras. Periódico: Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	Exacta: 5,7767 Puro: $3,\overline{07} = 3,0707070 \ldots\ldots$ Mixto: $4,8\overline{13} = 4,813131 \ldots\ldots$

CAPÍTULO 3: POTENCIAS Y RAÍCES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POTENCIAS

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:
a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:
a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.
3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.
4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:
a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2
5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:
a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.
6. Calcula mentalmente:
a) 1^{6562} ; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782} ; e) 1^{1000} ; f) 9761^0 .
7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:
a) $10^{\square}$ = 100.000 b) $10^{\square}$ = 100.000.000 c) $10^{\square}$ =1000.
9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:
a) 82.345 b) 3.591.825 c) 700.098 d) 2.090.190.
10. Calcula: a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.

11. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.
a) Compruébalo. Marca 8 * * = , ¿qué obtienes?
b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: 8 * * = = =…
c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.
d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

12. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:
a) $8^{10} \cdot 8^2$ b) $5^{23} \cdot 5^3$ c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$ d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$
e) $(6^3)^2$ f) $(4^2)^4$ g) $(3^0)^6$ h) $(7^3)^2$
i) $9^{10} : 9^2$ j) $3^{23} : 3^{3}$ k) $11^8 : 11^3$ l) $5^{30} : 5^9$
m) $14^4 : 14^4$ n) $1^{35} : 1^{35}$ o) $7^3 : 7^0$ p) $8^4 \cdot 8^0$
13. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.
14. Calcula: a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.
15. Calcula mentalmente:
a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$
d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escribe en forma de una única potencia a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.
17. Calcula mentalmente: a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.
18. Calcula mentalmente: a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.
19. Escribe en forma de una única potencia y calcula: a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.
20. Escribe en forma de una única potencia: a) $\dfrac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\dfrac{1{,}6^6 \cdot 1{,}6^{20} \cdot 1{,}6^1}{1{,}6^{15} \cdot 1{,}6^9}$ c) $\dfrac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$
21. Escribe en forma de una única potencia:
 a) $\dfrac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\dfrac{(-1{,}6)^6 \cdot (-1{,}6)^{20} \cdot (-1{,}6)^1}{(-1{,}6)^{15} \cdot (-1{,}6)^9}$ c) $\dfrac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$
22. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5'2^2 \cdot 5'2$ d) $27^3 \cdot 27$.
23. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $3^4 \cdot 23^2$ c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.
24. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $7{,}4^2 \cdot 7{,}4^3 \cdot 7{,}4$ b) $0{,}82^4 \cdot 0{,}82^2$ c) $7{,}35^3 \cdot 7{,}35^5$ d) $0{,}002^2 \cdot 0{,}002$.

3. RAÍCES

25. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.
26. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:
 a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.
27. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:
 a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.
28. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:
 a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.
29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:
a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.
30. Introducir los siguientes factores en el radical: a) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $10 \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ e) $3 \cdot \sqrt[3]{7}$
31. Extraer los factores que se pueda del radical: a) $\sqrt[3]{10000\ x^9 y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.
32. Calcula: a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Escribe en forma de potencias de 10:
 a) Un millón b) Un billón c) Una centena de millar.
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:
 a) 25^0 b) 10^6 c) $5 \cdot 10^4$ d) 2^4 e) 4^2
 f) 10^2 g) 10^5 h) 10^{12} i) 10 j) 6^3
3. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10:
 a) 600000000 b) 250000000 c) 914000000000
4. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:
 a. La distancia de la Tierra al Sol → 150 000 000 km
 b. El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno: 37643750 000 000 000 000 000 átomos
5. Halla en tu cuaderno:
 a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$
 d) $(9 : 3)^5$ e) $(15 : 5)^3$ f) $(21 : 7)^3$
 g) $(75 : 5)^4$ h) $(4 : 2)^5$ i) $8^2 : 2^5$
6. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$ ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?
7. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:
 a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

8. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:
   a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$
9. Calcula: a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales? b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6 + 8)^2$ ¿Son iguales?
10. Calcula en tu cuaderno:
    a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 – 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$
11. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?
12. Calcula en tu cuaderno: a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$
13. Calcula 5^3 y 3^5 ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$ ¿Son iguales?
14. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.
15. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:
    a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$
    d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5$
16. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:
    a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$
    d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$
17. Un campo cuadrado mide 3600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?
18. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4? ¿Y para obtener 8^8?
19. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:
    a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$
    e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$
21. La superficie de un cuadrado es de 1000000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?
22. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:
    a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt{625}$
    d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1000000}$
23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:
    a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$
    e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$
24. Introduce los siguientes factores en el radical:
    a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{100}$ c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$
    e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$
25. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.
26. Escribe el signo = o ≠ en el hueco:
    a) $\sqrt{64 + 36} \ \square \ \sqrt{64} + \sqrt{36}$. b) $\sqrt{9 + 16} \ \square \ \sqrt{9} + \sqrt{16}$.
27. Halla en tu cuaderno:
    a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} – 4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} – 23\sqrt{12}$
    c) $5\sqrt{2} – 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28} – 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$
28. Calcula en tu cuaderno:
    a) $5 \cdot \sqrt{16} – 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$ b) $3 \cdot 10^2 – 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$
    c) $5 \cdot 3^2 – 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) – 2$ d) $32 : 2^3 – 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Problemas

29. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 7 225 m² de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?
30. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?
31. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8,25 minutos en llegar a la Tierra.
32. Halla el volumen de un cubo de 1,5 m de arista.
33. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es 8 100 m². Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.
34. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?
35. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.
36. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.
37. **Arquímedes**, en su tratado *El arenario* contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.
    a) Calcula el volumen de la Tierra en km³, y escribe ese volumen en notación exponencial.
    b) Pasa el volumen a mm³, en notación exponencial.
    c) Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm³. Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.
    d) Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm³ por 100.
    e) ¿Has obtenido $1,15 \cdot 10^{32}$ granos de arena?

AUTOEVALUACIÓN de 2º

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4$, $(-4)^3$ y $(-5)^2$
   a) –16, –12, 25 b) 16, –64, 25 c) 32, –64, 10 d) –64, –32, –26
2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4\cdot10^2 + 5\cdot10^2$?
   a) 900 b) $9\cdot10^4$ c) $20\cdot10^2$ d) 500
3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:
   a) 3^3 □ 27 b) 1^{35} □ 35 c) 732^0 □ 732 d) 10^5 □ 50
4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?
   a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683
5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $0'7^6 : 0'7^4$?
   a) $0'7^2$ b) $0'7^3$ c) $0'7^{10}$ d) 6/4
6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$
   a) –1000 b) –30 c) 100 d) 60
7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0'2)^2)^4$:
   a) $(0'2)^8$ b) $(-0'2)^6$ c) 0'032 d) –0'0016
8. ¿La raíz cuadrada de 81 vale?
   a) 18 b) 8,7 c) 9 d) 3
9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:
   a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e) 700
10. El lado de una superficie cuadrada de 196 centímetros cuadrados mide:
   a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm

RESUMEN

Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	7^2 es 7 al cuadrado y 7^3 es 7 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1 El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^6 = 1.000.000$ $10000000 = 10^7$
Notación científica.	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$9^2 \cdot 9^3 = (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^{2+3} = 9^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Raíz ***n*-ésima**	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introducir y extraer factores en radicales	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

CAPÍTULO 4: DIVISIBILIDAD.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. DIVISIBILIDAD

1. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.
2. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?
   15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.
3. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.
4. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.
5. Escribe frases usando las expresiones: "*ser múltiplo de*", "*ser divisor de*" y "*ser divisible por*" y los números 27, 3 y 9.
6. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:
   21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500
   Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?
7. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.
8. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:
   a) 15*A*72 sea múltiplo de 3.
   b) 2205*A* sea múltiplo de 6.
   c) 6*A*438 sea múltiplo de 11.
9. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.
10. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.
11. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	
984486725	Divisible por 5	
984486720	Divisible por 3	
783376500	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

12. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.
13. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.
14. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que $10 = 9 + 1$. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.
15. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que $10 = 11 – 1$. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.
16. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.
17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
    a) 50 es múltiplo de 10.
    b) 2 es divisor de 30.
    c) 4 es múltiplo de 16.
    d) 66 es divisible por 11.
    e) 80 es divisor de 8.
    f) 3 es divisible por 12.
18. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 372*x*54*y*.
19. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?
20. Calcula todos los divisores de los siguientes números:
    a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300

2. NÚMEROS PRIMOS

21. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.
22. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?
23. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.
24. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?
    Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.
25. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?
26. Descompón en factores primos los siguientes números:
    a) 50 b) 36 c) 100 d) 110
27. Descompón en factores primos los siguientes números:
    a) 150 b) 121 c) 350 d) 750
28. Descompón en factores primos los siguientes números:
    a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342
29. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?
30. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.
31. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:
    a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80
32. Calcula el M.C.D de los siguientes números:
    a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16
33. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:
    a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80
34. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:
    a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16
35. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.
    a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?
    b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?
36. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?
37. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?
38. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.
    a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?
    b) ¿A qué hora ocurrirá?
39. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Divisibilidad

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.
2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?
3. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:
   a) 24*A*75 sea múltiplo de 5. b) 1107*A* sea múltiplo de 3. c) 5*A*439 sea múltiplo de 6.
4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:
   1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150
5. Busca todos los divisores de 210.
6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Números primos

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de *m* y *n* sin averiguar el valor numérico de cada uno:
   a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
   b) $m = 3 \cdot 5$ $n = 2 \cdot 7$
   c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $n = 22 \cdot 32$
   d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $n = 2 \cdot 52 \cdot 7$
8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:
   a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ....
   b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ....
9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

a) 4 y 8	d) 7 y 10	g) 10 y 15	j) 2 y 2	m) 2, 3 y 4
b) 2 y 3	e) 6 y 12	h) 2 y 5	k) 4 y 1	n) 3,6, y 12
c) 3 y 12	f) 6 y 9	i) 4 y 6	l) 3 y 7	o) 3, 4 y 6

10. Calcula:
    a) m.c.m.(8, 40) M.C.D.(8, 40)
    b) m.c.m.(15, 35) M.C.D.(15, 35)
    c) m.c.m.(84, 360) M.C.D.(84, 360)
11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes
12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:
    a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.
    b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.
13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?
14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?
15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?
16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?
17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas maquinas durante ese periodo?
18. Comprueba si 2 047 es primo usando la hoja de cálculo

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
   a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.
   b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.
   c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
   d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
2. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?
   a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63} c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}
   b) D(63) = {1, 2, 9,21,63} d) D(63) = {0, 1,3, 7, 9, 21, 63}
3. La descomposición de 81000 en factores primos es:
   a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$
4. De los números:183, 143 y 1973,
   a) Todos son primos b) Ninguno es primo c) 143 es primo d) 1973 es primo
5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?
   a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.
   b) 11 es múltiplo de 121.
   c) 33 es divisor de 11.
   d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.
6. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2\cdot(3+4)=2\cdot3+2\cdot4$ es:
   a) La propiedad conmutativa. b) La propiedad distributiva.
   c) La propiedad asociativa. d) Esa igualdad no es cierta.
7. El M.C.D.(650, 700) es: a) 10 b) 30 c) 20 d) 50
8. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?
   a) El 17 de septiembre b) El 1 de septiembre c) El 17 de agosto d) Ese año no vuelven a coincidir
9. Queremos alicatar una pared de 615x225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios? a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible

RESUMEN

Concepto	***Definición***	***Ejemplos***
- Divisor - Divisible - Múltiplo	-*a* es divisor de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. -*a* es múltiplo de *b* o *a* es divisible por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	2: Acaba en 0 o cifra par. 3: La suma de sus cifras es múltiplo de 3. 5: Acaba en 0 o 5. 11: La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	• 7892 es divisible por 2. • 4510 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3. • 2057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4

CAPÍTULO 5: SISTEMAS DE MEDIDA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1. Clasifica como magnitudes o unidades de medida. Indica cuáles de las unidades de medida pertenecen al SI:
a) Centímetro cúbico b) Tiempo c) Hora d) Memoria de un ordenador e) Gramo f) Masa h) Kilómetros por hora
2. Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:
a) Área b) Herzio c) Yuan d) Grado Fahrenheit e) Año luz
3. Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:
   a) La edad de la Tierra b) El tamaño de un jardín
   c) La capacidad de un bidón d) La distancia entre Madrid y Valencia
   f) La masa de un armario e) Lo que tardas en hacer un problema
4. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

12 º C — 2 km — 33 m^2 — 5 l — 0,55 g

masa — longitud — capacidad — superficie — temperatura

5. Si Ramón mide 1,65 metros y Jesús mide 164 centímetros: ¿Quién es mas alto?
6. Contesta con una regla graduada:
   a) Mide la longitud de tu cuaderno. ¿Cuánto mide?
   b) Mide un lápiz. ¿Cuánto mide?
7. Averigua cuánto mide de largo tu habitación.
8. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:
   a) 54 dm b) 21,08 m c) 8,7 hm d) 327 mm
9. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:
   a) 8 m 1 mm en centímetros b) 3,5 km 27 dam en centímetros c) 13 km 21 mm en milímetros
   d) 7 hm 15 cm en centímetros e) 2 dam 5 dm en metros f) 0,6 m 340 mm en decímetros.
10. Observa la tabla anterior y calcula:
a) 35 dam^2= ____ m^2 b) 67 m^2 = ____mm^2 c) 5 km^2 = ____ m^2 d) 7 m^2 = ____ hm^2
11. Pasa 98 hm^2 37 dam^2 a centímetros cuadrados.
12. Expresa las siguientes superficies en áreas:
   a) 1.678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28.100 ca
13. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:
   a) Centímetros cuadrados b) Decámetros cuadrados c) Hectáreas d) Áreas.
14. Expresa en metros cúbicos 3,2 dam^3 5600 dm^3.
15. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:
   a) 0,38 m^3 b) 81 dm^3 c) 1,23 hm^3 d) 52 m^3
16. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?
17. Expresa en hectolitros:
   a) 34 L b) 1.232 cL c) 57 daL d) 107 hL
18. Ordena de menor a mayor estas medidas:
   a) 7,0001 hm^3 b) 23.000 L c) 8 mL d) 4 mm^3
19. Calcula el volumen (en litros y en cm^3) de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.
20. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:
   a) 17 g b) 59 dag c) 73,5 kg d) 350 g
21. Expresa en gramos las siguientes masas:
   a) 3,6 dag b) 59 kg c) 740,5 kg 8,5 dag d) 3 dag 15,10 dg
22. Expresa en kilogramos: a) 5 t 5 q 2,5 mag b) 9,35 t 750 dag c) 712 q 459 hg d) 22 t 3 mag 8 kg
23. Estima la masa de: a) tu cuaderno b) tu bolígrafo c) tu cartera d) tu mesa

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

24. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos
   a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´
25. Pasa de forma incompleja a forma compleja
   a) 12 º 34´ 40´´ b) 13 º 23´ 7 ´´ c) 49 º 56´ 32 ´´ d) 1 º 25´ 27 ´´
26. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	*EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS*	*EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS*
8465”		
	245 ´ 32 ´´	
		31 º 3´ 55 ´´

27. Utiliza una hoja de cálculo, y calcula:
   34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´
   b) 16º 30´ 1´´+ 12º 13´ 12´´ + 2º 1´
   16 º 45' + 23º 13" + 30º 20´ 30´´
   d) 65º 48´ 56´´ – 12º 33´ 25´´
   35º 54´ 23´´ – 15º 1´ 35"
   e) 43º 32´ 1 ´´ – 15º 50´ 50"

3. MEDIDA DEL TIEMPO

28. ¿Cuántos segundos tiene una hora?
29. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos?
30. ¿Cuántas semanas tiene un año no bisiesto?

4. UNIDADES MONETARIAS

31. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1.200 € a libras, bolivianos, yenes y Dirhams:
32. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:
   a) 390 $ b) 4051,5درهم c) 104.800 ¥ (yenes) d) 5.103 Bs
33. Jessica se quiere comprar una tablet. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2.700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la tablet?
34. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de longitud

1. Descompón en sus distintas unidades:
   a) 3945,67 cm b) 415,95 mm c) 5148 m d) 67,914 km e) 0,82 dam
2. Completa con el número o unidad correspondiente:
   a) 50 m = _______ hm = 5000 _______
   b) 300 hm = 30 _____ = ___________ m
   c) _____ dm = _______ m = 2300 mm
   d) 40 km = 4000 ____ = ___________ dm
3. Ordena de menor a mayor:
   2,7 m; 30 cm; 0,005 km; 2600 mm; 0,024 hm; 26 dm.
4. Calcula la longitud que falta o sobra para tener a 1 m:
   a) 27 cm b) 300 mm + 25 cm c) 0,00034 km + 0,22 dam d) 0, 3 m + 27 cm + 120 mm
5. Unos amigos están planeando hacer el Camino de Santiago andando desde Frómista (Palencia). La distancia a recorrer es de unos 400 km. Ellos calculan que a un paso cómodo pueden andar 5 km en cada hora. Si piensan andar 6 horas al día, ¿cuántos días tardarán en hacer el camino?
6. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?
7. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 5 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?
8. Expresa en U.A.
   a) 38.000 km b) 8.000 m c) un millón de micras d) dos millones de metros

Unidades de superficie

9. Completa las siguientes igualdades
   a) 3,5 dam^2 = ______ m^2 = ______ dm^2 b) 0,08 km^2 = _______ m^2 = _____ cm^2
   c) 32 cm^2 = _____ dm^2 = ______ dam^2 d) 6075 m^2 = _____ dm^2 = ______ hm^2
10. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:
    a) 3 m^2 2 cm^2 5 mm^2 en decímetros cuadrados b) 6 dam^2 2 dm en metros cuadrados
    c) 9,3 hm^2 5 m^2 6 cm^2 en decámetros cuadrados d) 7 dm^2 5 dam^2 en milímetros cuadrados
11. Expresa en hectáreas:
    a) 3,2 km^2 b) 1.000 ca c) 600.000 dam^2 d) 824 m^2 e) 67 a f) 200 mm^2.
12. Expresa las siguientes superficies en áreas:
    a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca d) 37 m^2.
13. La superficie de China es de 9560000 km^2. ¿Cuántas ha tiene?
14. Dibuja en tu cuaderno el contorno de tu mano.
    a) Recorta después un cuadrado de 1 cm de lado y estima, en centímetros cuadrados, la superficie de tu mano.
    b) Si utilizas un papel normal de 60 g/m^2, y dibujas tu mano como en el ejercicio anterior y lo recortas, al pesar el papel con un peso muy preciso, obtienes de nuevo la superficie de la mano. (¡Antes de los ordenadores se calculaban así, con papel y tijeras, algunas superficies!). ¿Cuánto mide en cm^2?
15. El padre de Juan quiere comprar un terreno de 7,3 ha a 3,2 € cada m^2. ¿Cuánto le va a costar?

Unidades de volumen y de capacidad

16. Piensa en un cubo de lado una unidad. Piensa ahora en un cubo del doble de lado. ¿Cuántos cubitos de los primeros son necesarios para obtener ese cubo?
17. Expresa en metros cúbicos: 28,7 hm^3 5 m^3 2.800 dam^3 45 dm^3.
18. Expresa en litros:
    a) 8,1 hL b) 451 mL c) 2,3 kL d) 0,528 kL e) 6,25 cL f) 7,2 mL
19. Completa las siguientes igualdades:
    a) 2 m^3 = ______ L b) 33 cL = ______ dm^3 c) 500 mm^3 = _______ mL
    d) 230 mL = _____ dm^3 e) 0,02 hm^3 = _____ L f) 0,016 hL = _______ m^3
    g) 0,35 dm^3 = ____ mL h) 230 cL = ______ cm^3 i) 0,25 hm^3 = ______ kL
20. En una urbanización se recoge cada semana 27 m^3 de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?

Unidades de masa

21. ¿Qué tiene más masa, un kg de papel o un kg de plomo?
22. Expresa en gramos las siguientes masas:
    a) 2,7 dag b) 51,3 kg c) 35,7 kg 8,6 dag d) 3 dag 5 g 26,29 dg
23. Copia en tu cuaderno y completa:
    a) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg = ... dag b) 1 kg = .. hg = .. dag = .. g = ... cg = ... mg
    c) 1 tm = ... kg = ... g = hg = dag d) 1 qm = ... kg = ... g = ... tm = … hg = ... cg
24. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,943 hg							
75282,9 dg							
64,92 kg							
4375 dag							
369266 cg							

25. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro tiene una densidad de 19,3 y la plata de 10,5. Dos pulseras de igual masa, una de palta y otra de oro, ¿Cuál tendrá mayor volumen?

Medida de ángulos

26. Un ángulo mide la quinta parte de un recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
27. Calcula:
    a) 36º 57´ 37´´ + 45 º 18´ 54´´ b) 46 º 37´ 35´´+ 82 º 32´ 41´´ + 43 º 5´´ c) 26º 34' + 84º 21" + 81 º 39´ 49´´
    d) 56 º 54´ 56´´ – 23 º 59´ 96´´ e) 78 º 5´ 34´´ – 26º 5´ 47" f) 44 º 43´ 2 ´´ – 26 º 47´ 31"
28. La suma de dos ángulos es 236º 57' 46". Si uno de ellos mide 68º 57' 58", ¿cuánto mide el otro?

Unidades de tiempo

29. Joaquín va cada día a la escuela y tarda 15 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 50 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas.
30. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en una semana? ¿Y en un año? Esas horas, ¿cuántos días son?
31. Enrique va cada día a la escuela y tarda 20 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 30 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuántos segundos gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas en horas.
32. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántos minutos has dormido en una semana?, ¿y cuántos segundos? ¿Cuántos minutos en un año? ¿Y segundos?
33. Siete guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos

Unidades monetarias

34. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia dos mil euros a dólares, libras, yuanes y soles.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

35. Confecciona una hoja de cálculo con la siguiente tabla de equivalencias, para hacer los cambios de moneda.
36. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón? B) ¿Y al de Marruecos? C) ¿Y al del Reino Unido? Realiza los cálculos.
37. Con las equivalencias del cuadro adjunto, cambia a euros las siguientes cantidades:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (درهم)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

a) 4025 Dólares b) 5162 Libras c) 215,925 ¥ (yenes) d) 6.214 Bs

38. Pedro se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 3900 ¥ y 150 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil?

AUTOEVALUACIÓN

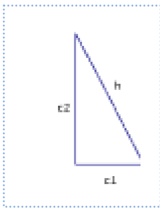
1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?
   a) 9 cm^3 b) 0,27 dm^3 c) 0,003 m^3 d) 27 cm^3.
2. De las siguientes medidas, ¿cuál es la mayor?
   a) 5,78 daL b) 578 L c) 5,78 kL d) 0,578 hL.
3. El resultado de sumar 0,07 kg + 0,62 dag + 9,3 hg es:
   a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1006,2 g.
4. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es:
   a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2000 mL
5. Gladys ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros y éstos los cambiará a soles en un nuevo viaje a Perú. ¿Cuántos soles tendrá?
   a) 3042 S/ b) 1800 S/ c) 235 S/ d) 140 S/
6. Una jarra de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las 3/4 partes de la jarra, ¿cuánto pesa?
   a) 1500 g b) 1,7 kg c) 16 hg d) 10,7 kg
7. El número de segundos de una semana es:
   a) 25200 s b) 604800 s c) 602520 s d) 10080 s
8. El número de segundos de un día es:
   a) 1440 s b) 85931 s c) 86400 s d) 10080 s
9. Transforma a segundos: 2 grados, 45 minutos y 3 segundos:
   a) 9903 s b) 2070 s c) 99030 s d) 10303 s
10. Juan ha cambiado mil euros a dólares, estando el cambio a 1,31 dólar el euro, ¿cuántos dólares le han dado?
   a) 131 $ b) 1310 $ c) 763 $ d) 1257 $

RESUMEN

Magnitud	Una **magnitud** se puede medir en distintas **unidades de medida**.
	La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros,... (distintas unidades de medida)
Longitud: metro	km $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dam $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ m $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mm
	0,32 km = 32 m = 3.200 cm 3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam
Superficie: metro cuadrado	km^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ hm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dam^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ m^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ cm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ mm^2
	0,0014 km^2 = 0,14 hm^2 = 14 dam^2 23.000 mm^2 = 230 cm^2 = 2,3 dm^2 = 230 dm^2
Unidades agrarias	1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2
	5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha 13.000 m^2 = 13.000 ca= 1,3 ha
Volumen: metro cúbico	km^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 mm^3
	3,2 hm^3 = 320 dam^3 = 32.00 m^3 2.800 mm^3 = 28 cm^3 = 0,28 dm^3
El litro	kL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ daL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ L $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mL
	3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L 85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L
Litros y m^3.	1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3
	4,5 cL = 45 mL = 45 cm^3 3 hL = 0,3 kL = 0,3 m^3 3 hL = 300 L = 300 dm^3
Masa: kilogramo	kg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dag $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ g $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mg
	2300 kg = 2,3 t 0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg
Medida de ángulos	Un grado = 1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo. ***Minuto:*** 1 minuto = 1´ = 1/60 parte de un grado. ***Segundo:*** 1 segundo = 1´´ = 1/60 parte de un minuto
Unidades de tiempo	Un **día** es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje. Un **año** es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. Un día tiene 24 **horas**. Una **hora** tiene 60 **minutos**. Un **minuto** tiene 60 **segundos**
Unidades monetarias	1 € = 0,86 £ = 9 Bs = … (varía constantemente)
	$200\,€ = 200\,€ \cdot \frac{0{,}86\,£}{1\,€} = \frac{200 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{€} = 172\,£$ $1.800\,Bs = 1.800\,Bs \cdot \frac{1\,Bs}{9\,Bs} = \frac{1.800 \cdot 1}{9} \cdot \frac{Bs \cdot €}{Bs} = 1.800\,€$

CAPÍTULO 6: LONGITUDES Y ÁREAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS



1. TEOREMA DE PITÁGORAS

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.
2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 8 *cm* y 6 *cm* b) 12 *m* y 9 *m* c) 6 *dm* y 14 *dm* d) 22,9 *km* y 36,1 *km*.

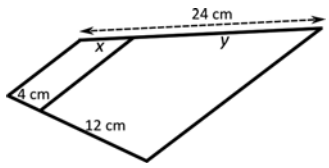
3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 27 *cm* y 12 *cm* b) 32 *m* y 21 *m* c) 28 *dm* y 12 *dm* d) 79,2 *km* y 35,6 *km*

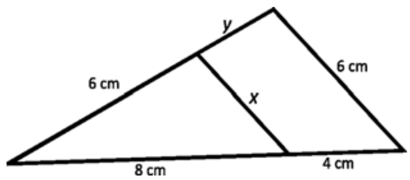
4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
6. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 5 *dm*.
7. Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.
8. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.
9. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.

2. SEMEJANZA

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    - a) Un ángulo de 70º y otro de 50º. Un ángulo de 70º y otro de 60º.
    - b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
    - c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3,5 cm, c' = 4,5 cm
    - d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 12 cm, b' = 15 cm, c' = 22 cm
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    - a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
    - b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 16 cm, ¿c'?
12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

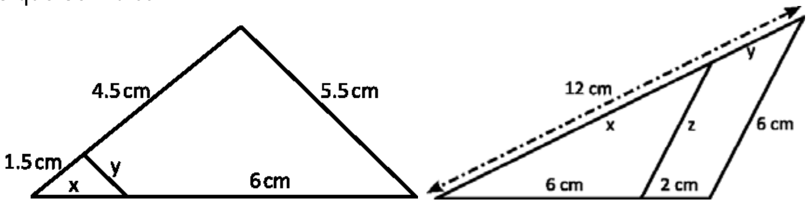


a)



b)

13. Calcula los valores de x e y en las siguientes figuras.
14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.
15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?
16. Calcula las longitudes que se indican:



17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 25 *cm* y 40 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
19. Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?
20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

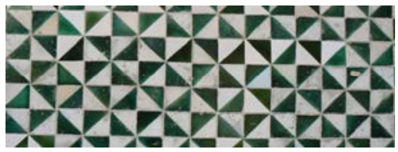
23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.
24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

2. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

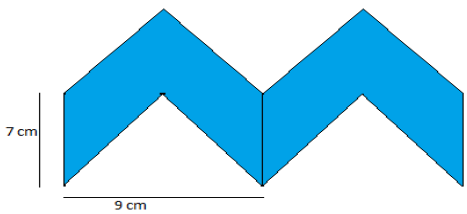
25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 *cm*. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

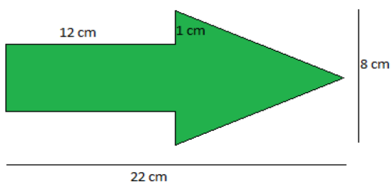
Baldosas rectangulares

26. Las baldosas de la figura miden 24 *cm* de largo y 9 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?
27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?
28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?



29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 *mm* y una altura de 12 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?
30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 *cm*. Si su hipotenusa mide 14 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)
31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 2,3 y 1,7 *m* y altura 1,4 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?
33. Calcula el área de un romboide de 24 *cm* de base y 21 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?
34. Dado un hexágono regular de lado 4 *cm*, calcula la longitud del apotema y determina su área.
35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 *cm*, calcula la longitud del apotema y determina su área.
36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:

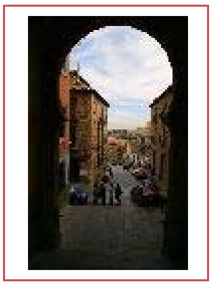




37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

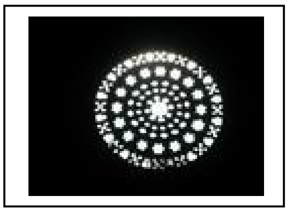
4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

38. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.



39. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

40. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París*". Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



41. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 5,3 *m*. ¿Cuál es la longitud del arco?

42. Un faro gira describiendo un arco de 160º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

43. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 *m*, y la de la siguiente figura es de 3 *m*.
   a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.
   b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas
   c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 *m*.
   d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

44. Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 *cm*.

45. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 *cm* y que forma un ángulo de 60 º. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

46. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 *cm* y 12 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

47. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 12 *cm* y que forma un ángulo de 60 º. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

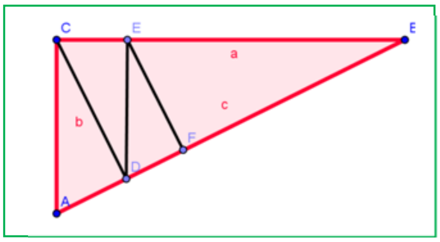
Teorema de Pitágoras

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta
2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.
3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.
4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 *cm* y 6,9 *cm*?
5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 16 *cm* y 12 *cm*   b) 40 *m* y 30 *m*   c) 5 *dm* y 9,4 *dm*   d) 2,9 *km* y 6,3 *km*.
6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
   25 *cm* y 15 *cm*   b) 35 *m* y 21 *m*   c) 42 *dm* y 25 *dm*   d) 6,1 *km* y 4,2 *km*
7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.
8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm
9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

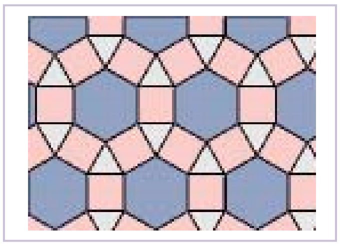
10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 30º y otro de 20º. Un ángulo de 120º y otro de 20º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.
    c) A = 40º, b = 8 cm, c = 12 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 6 cm
    d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 12 cm, b' = 16 cm, c' = 24 cm
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
    b) A = 50º, b = 3 cm, c = 7 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?
12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?
13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.

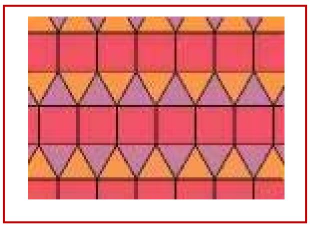


17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?
19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.
21. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.
22. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
    a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 8 *m* y 6 *m* c) 3 *dm* y 7 *dm* d) 27,3 *km* y 35,8 *km*.
23. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
    a) 5 *cm* y 3 *cm* b) 10 *m* y 6 *m* c) 25 *dm* y 10 *dm* d) 34,7 *km* y 12,5 *km*
24. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
25. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
26. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.
27. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
28. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?
29. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?
30. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.
31. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.
32. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?
33. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

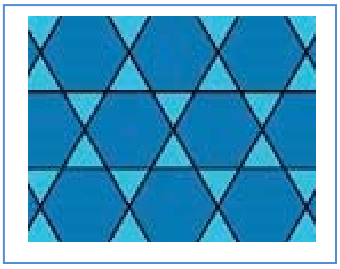
Problemas



34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.



35. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.



36. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?
37. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 *m*, y se separa de la pared una distancia de 2 *m*, ¿cuál es su longitud?
38. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 *m* de largo y 60 *m* de ancho. Calcula:
    a) La diagonal del terreno cuadrado. b) La diagonal del rectángulo
    c) El área de cada terreno. d) ¿Cuál tiene mayor superficie?

39. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas

superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.

40. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?
41. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?
42. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.
43. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:
    a) Longitud de una arista.
    b) Altura del triángulo de la base.
    c) Perímetro de la base
    d) Altura de una cara
    e) Perímetro de una cara
44. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?
45. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de un cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris…. Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?

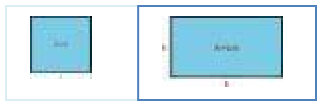
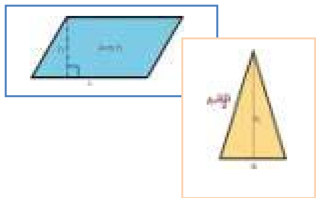
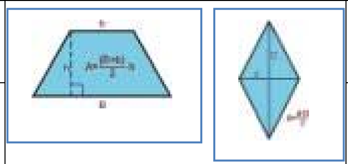
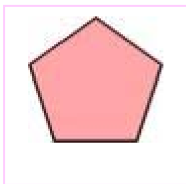
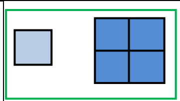
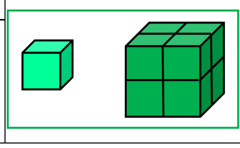
46. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro: a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor. b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza. c) Calcula la superficie de cada abanico.

47. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1,2 m. a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas. b) La superficie de dicha estrella. c) La superficie de la cruz.

AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
   a) 6,32 *cm* b) 7 *cm* c) 0,05 *m* d) 627 *mm*
2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
   a) 714 *cm* b) 7,4 *m* c) 8 *m* d) 8925,1 *mm*
3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
   a) 4,3 dam^2 b) 21 m^2 c) 40 m^2 d) 1273057 cm^2
4. El área de un rectángulo de 10 cm de diagonal y 8 cm de base es:
   a) 53 cm^2 b) 80 cm^2 c) 48 cm^2 d) 62 cm^2
5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
   a) 45 *dm* b) 181 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*
6. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:
   a) 49 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 48,37 cm^2
7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 *m* mide aproximadamente:
   a) 3,14 *m* b) 1,4 *m* c) 1,26 *m* d) 1,7 *m*
8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* mide:
   a) 6,32 *cm* b) 5 *cm* c) 0,052 *m* d) 62 *mm*
9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 6 *m*, el otro cateto mide:
   a) 87 *cm* b) 4 *m* c) 8 *m* d) 5,1 *mm*
10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 *cm* y 16 *cm* es:
   a) 34 *cm* b) 70 *cm* c) 40 *cm* d) 62 *cm*

RESUMEN

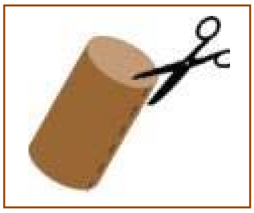
			Ejemplos
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	$A = \text{lado}^2 = l^2$		Si $l = 4$ *cm* $\Rightarrow$ A = 16 cm^2
Área del rectángulo	A = base por altura = $a \cdot b$		Si $a = 3$ *cm*, $b = 5$ *cm* $\Rightarrow$ A = 15 cm^2.
Área del paralelogramo	A = base por altura = $a \cdot b$		a = 7 *m*, b = 9 *m* $\Rightarrow$ A = 63 m^2
Área del triángulo	A = (base por altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m $\Rightarrow$ A = 15 m^2
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		B = 7; b = 3; h = 5 $\Rightarrow$ A = 25
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		D = 4, D = 9 $\Rightarrow$ A = 36/2 = 18
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		Lado = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, número de lados = 5 $\Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5 = 30$ *cm*; Área = $15 \cdot 5 = 75$ cm^2.
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema		
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales		Si el lado del cuadrado mide 5 *m*, otro semejante de lado 15 m, $k = 3$, tiene un área multiplicada por 9, y el volumen del cubo multiplicado por 27.
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k, la razón entre las áreas es k^2, y entre los volúmenes k^3.		

CAPÍTULO 7: CUERPOS GEOMÉTRICOS. VOLÚMENES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL ESPACIO

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un rollo de papel higiénico.

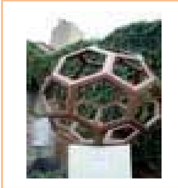


a) ¿Qué forma tienen las bases de la lata?
b) ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?
c) Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?
d) Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?

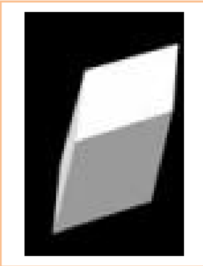
2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.
3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).
4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.
5. Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?
6. Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
a) esfera b) cilindro c) poliedro regular d) prisma e) pirámide f) cono
7. Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67
8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F.
9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E.
10. Indica el plano que contiene a la recta *t* y al punto B.
11. Indica el plano que contiene a las rectas *s* y *t*.
12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.
13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.
14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
    a) Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
    b) Tres pares de rectas que se crucen.
    c) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α. Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.
16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:
a) un cubo b) un cilindro c) un cono d) una esfera e) una pirámide
17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
    a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
    b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
    c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
    d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
    e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.
18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.
20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.
21. Las rectas paralelas en la realidad se mantienen paralelas en el dibujo.
22. Los segmentos iguales sobre rectas paralelos mantienen igual longitud.
23. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.
24. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.
25. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.
26. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.
27. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.

2. POLIEDROS

28. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.



29. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?

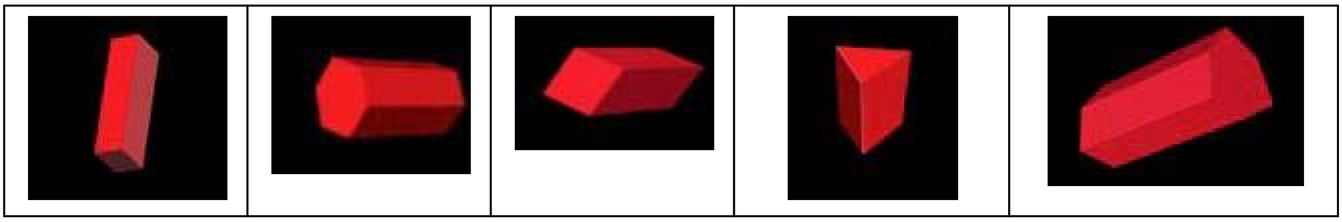


30. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:

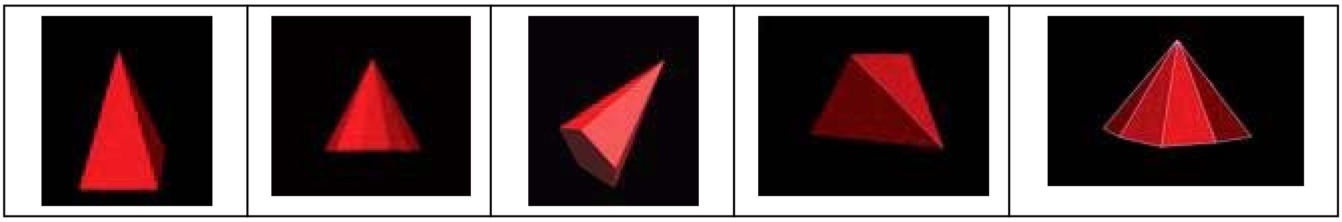
31. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

32. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.

33. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.



34. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!
35. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?
36. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).
37. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.
38. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.
39. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas o oblicuas y del número de lados de su base.



40. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!
41. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.
42. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.
43. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?
44. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?
45. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.
46. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación*: puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

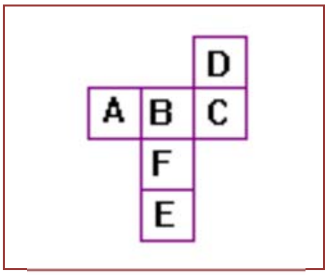
3. CUERPOS REDONDOS

47. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.
48. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.
49. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

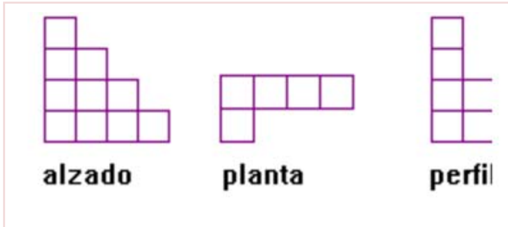
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El espacio

1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.
2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
   a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
   b) Un cono con cortes paralelos a su base
   c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
   d) Una prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara
3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.
4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.
5. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta.



6. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería…
7. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?

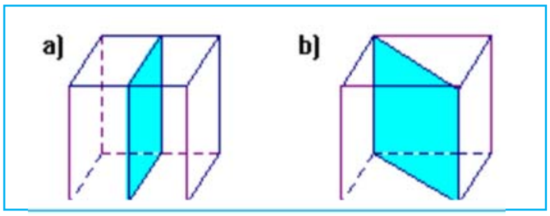


8. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
   a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.
   b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
   c) ¿Existen rectas paralelas?
9. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.

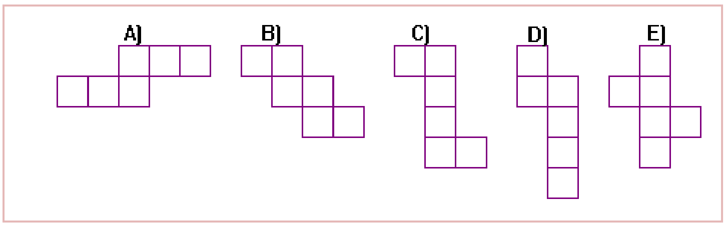
Poliedros

10. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120 º, ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?
11. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60º y 120 º. Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.
12. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.
13. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a Aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.
14. Un balón de futbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.
15. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina… ¡Seguro que se te ocurren otras formas!
16. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?

17. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



18. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.
19. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.



20. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (*Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina*).
21. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.
22. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.
23. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm.
24. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?
25. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.
26. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?
27. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?
28. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.
29. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.
30. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?
31. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?
32. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.
33. Construye un pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.
34. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?
35. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?
36. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.
37. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm.
38. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.
39. Calcula la superficie total de un tronco de cono de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.
40. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de 67π cm^2. ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?

Cuerpos redondos

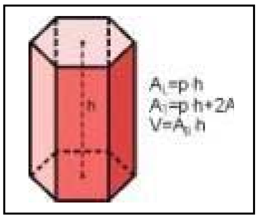
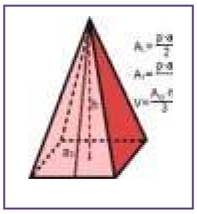
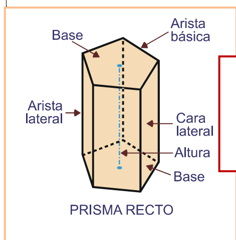
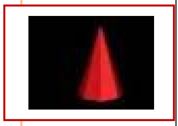
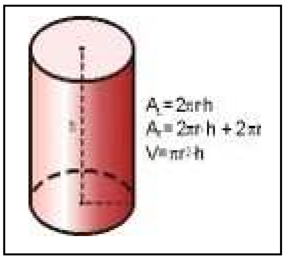
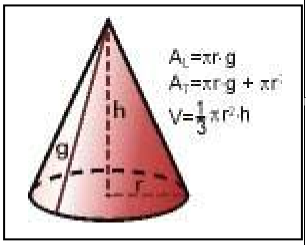
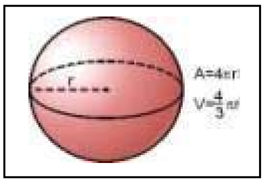
41. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:
    a) un lado, un rectángulo   b) un cateto, un triángulo rectángulo
    c) la hipotenusa, un triángulo rectángulo   d) su diámetro, una círculo.
42. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.
43. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.
44. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.

45. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.
46. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.
47. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.
48. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.
49. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.
50. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un tetraedro de lado 10 cm.
51. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.
52. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (*Ayuda*: La apotema del pentágono mide 5,4 cm).
53. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?
54. Calcula la superficie y el volumen de una esfera si la longitud de su circunferencia máxima es de 10π m.
55. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.
56. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si R = 6 cm.
57. Un cono tiene de altura h = 7 cm, y radio de la base r = 2 cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.
58. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.
59. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.
60. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Calcúlalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.
61. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?
62. Utiliza una hoja de cálculo (o la calculadora) para calcular el volumen de una esfera de radio 7 u, tomando para π diferentes aproximaciones.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?
   a) el cilindro   b) la esfera   c) el icosaedro   d) el dodecaedro
2. La definición correcta de poliedro regular es:
   a) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares
   b) Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales
   c) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales
   d) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.
3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta
   a) Un prisma oblicuo puede ser regular
   b) El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura
   c) Las caras de un dodecaedro son hexágonos
   d) El volumen de una pirámide es área de la base por la altura
4. Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:
   a) 2πrh   b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) 2πr(h + r)   d) 2/3πrh
5. El número de vértices de un icosaedro es: a) 20   b) 12   c) 30   d) 10
6. El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:
   a) 83,1 cm^3; 96 cm^2 b) 35,7 cm^3; 48 cm^2 c) 0,1 L; 0,9 ha   d) 106 m^3; 95 m^2
7. El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente: a) 62 cm^3; 24 cm^2 b) 7000 L; 0,48 ha   c) 7 cm^3; 8 cm^2 d) 27,6 m^3; 48 m^2
8. El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:
   a) 0,12π L   b) 36π cm^3 c) 12 π cm^3;   d) 36π cm^3
9. El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:
   a) 100π m^3; 40π m^2 b) 100π cm^3; 40π cm^2 c) 31,4 cm^3; 12,56 cm^2 d) 33π cm^3; 7π cm^2
10. El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:
   a) 288π cm^3; 144π cm^2 b) 144π cm^3; 288π cm^2 c) 452 m^3; 904 m^2 d) 96π cm^3; 48π cm^2

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos	
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. Perspectiva caballera.	
Posiciones relativas	Dos planos o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.	
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos	
Poliedros regulares	Poliedro con todas las caras polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.
Prisma. Volumen Pirámide. Volumen.	 	 
Cilindro. Volumen.	 	Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de 45π m^3, y una superficie lateral de 30π m^2.
Cono. Volumen.		Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de 15 m^3.
Esfera. Volumen. Superficie		Una esfera de radio 3 tiene un volumen de 36π m^3, y una superficie de 36π m^2.

CAPÍTULO 8: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

11. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?
12. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.
13. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?
14. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?
15. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

2. TRASLACIONES

16. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** y ***CB***. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.
17. El vector fijo ***AB*** tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.
18. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo ***AB*** son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.
19. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.
20. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) y *F* (–2, –5).
21. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.
22. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos ***DE*** y ***FG***. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?
23. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama u al vector fijo ***AB*** e indica sus componentes. b) Llama v al vector fijo ***BC*** e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector w = u + v. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.
24. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector u = (2, 3) con origen en *A*, y el vector v = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma u + v, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre u y v.
25. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:
    a) $3\cdot\left(\frac{1}{3},\ -\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot(4,\ 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]
    c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)]   d) 9.3·(2, 6) + (3.7, 5.2)
26. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) y ***w*** = (3, 4):
    a) 2***u*** – (***v*** + ***w***)   b) 3***w*** – 2***u*** + ***v***   c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***
27. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
28. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?
29. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

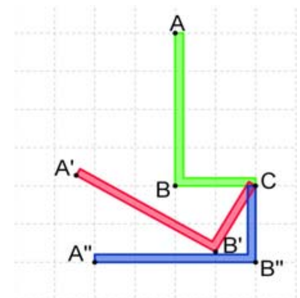
Un friso en Camboya

30. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?
31. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).
32. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?
33. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.
34. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

35. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.
36. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.
37. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

3. GIROS O ROTACIONES

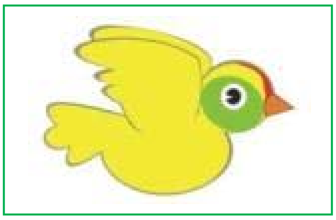
38. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.
39. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.
40. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?
41. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



42. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.
43. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?
44. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?
45. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.
46. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.
47. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

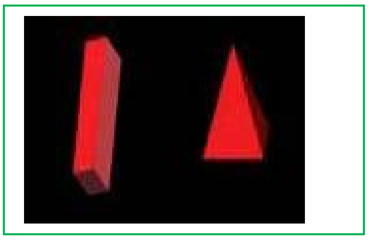
4. SIMETRÍAS

48. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto P' simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'*. (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).
49. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.
50. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.
51. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.
52. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.
53. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
54. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.
55. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.
56. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.
57. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.
58. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

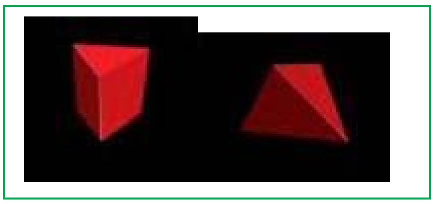


a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.
c) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.
d) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?
e) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

59. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.
60. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.
61. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?
62. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?
63. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?
64. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:



a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?
b) Una pirámide recta de base cuadrada.
c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?



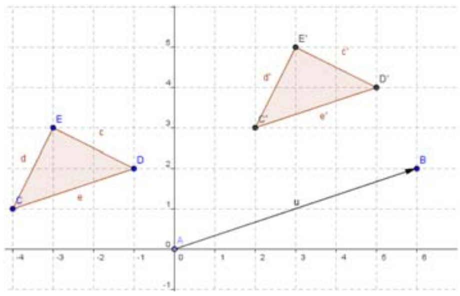
65. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:

a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.
b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?
c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

66. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.
67. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

68. - *Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.*

- En un archivo de *Geogebra* Visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta Nuevo Punto define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta Vector entre dos puntos determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).



- Define con Nuevo Punto *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con Polígono dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - ➢ Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta Trasladar objeto acorde a vector para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C’D’E’*.

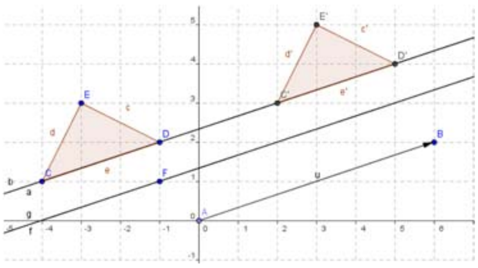
  ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC’B, ADD’B y AEE’B*?

69. Comprueba en la ventana algebraica que:

   a) Las coordenadas de los puntos *C’, D’ y E’* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

   b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C’D’E’* coinciden

- Dibuja con Recta que pasa por 2 puntos, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C’* y *D’* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*



- Para comprobar la conjetura define un Nuevo Punto *F* (-1, 1) y con Recta paralela dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.

70. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

71. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

72. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45º.

   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.

   b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

73. Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.

   b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.

   c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

74. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

75. Análisis de mosaicos de la Alhambra: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 180º? ¿Y de 30º?

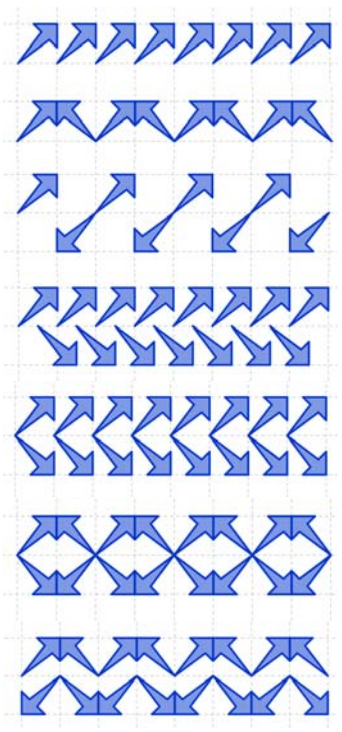
76. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

77. Generación de un mosaico mediante giros y traslaciones: animación. Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

78. También puedes ver en la siguiente animación cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.

79. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

80. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

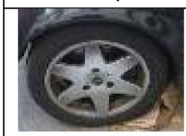


L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

81. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

82. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

83. **Análisis de tapacubos:** Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

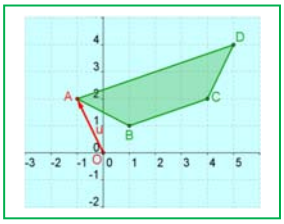
 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12

a) Tiene simetría central.
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?
2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.
3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A'* (1, 5).
4. Por la traslación de vector u = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A'*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A'*?
5. Por la traslación de vector u = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A'* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?
6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector u = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.
7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C'* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?
8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?

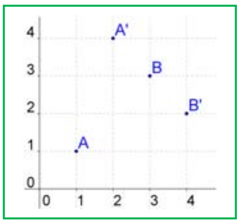


9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.
10. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.
11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
    a) Trasládalo con la traslación de vector u = (3, 0).
    b) Trasládalo después mediante la traslación de vector v = (0, 4).
    c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
    d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.
12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector u = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector v = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.
13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector u = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?
14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.
    b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.
    c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?
15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).
16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
    b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
    c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.
17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

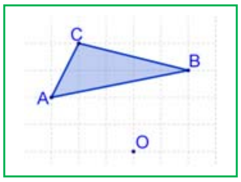
Giros

18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A''* obtenido al girar *A'* 90º con el mismo centro de giro.
19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.
20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.
21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.
23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.
24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?
25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P'*?
27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.
28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?



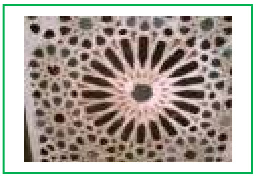
29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.



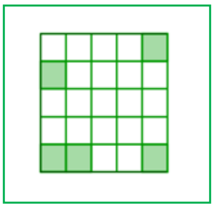
30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.
31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?
32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (***Ayuda***: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.
34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

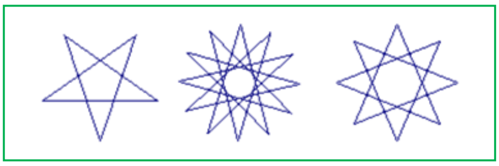
a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular



35. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?

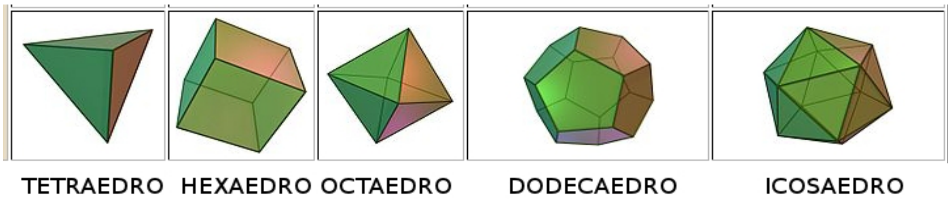


36. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
37. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?
38. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

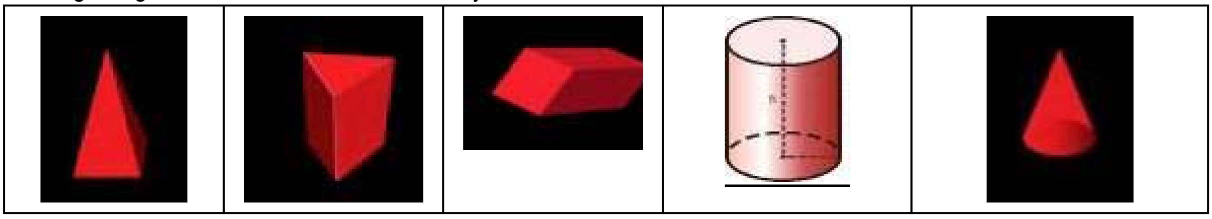


39. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.
40. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.
41. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?
43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?

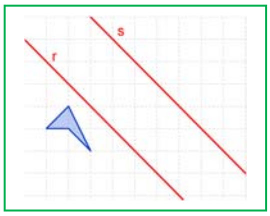


Simetrías

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.
46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.
47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

    a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH
48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

    a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.
    e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.
49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.

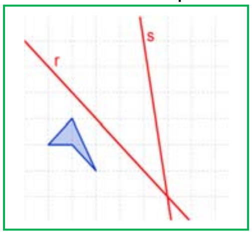


    a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

    Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:

    b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*.
    c) ¿Qué elementos la definen?
    d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



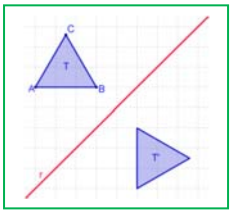
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

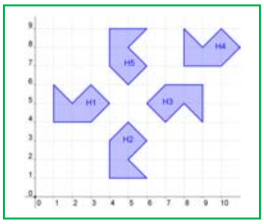


52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*?

53. **Libro de espejos:** Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Problemas

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.



a) Una traslación según el vector (1, 3).

b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.

c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?

b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?

c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?

d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)

a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

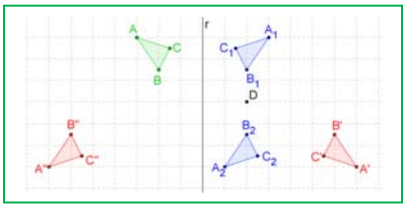
a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

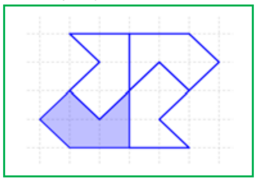


62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

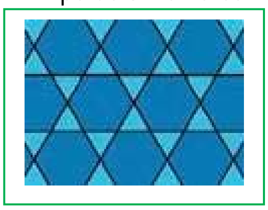
b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.

c) ¿Qué conclusión obtienes?



63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.



65. **Análisis de un mosaico:** Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.

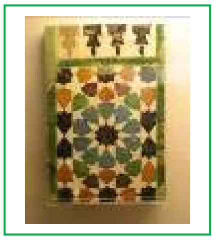
a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.



66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

67. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico. Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.

68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibújalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

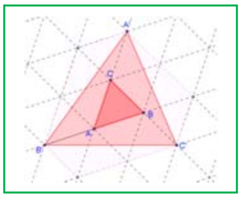
72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
74. Describe las **isometrías** que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera	b) Cilindro recto	c) Prisma regular de base cuadrada
d) Cono	e) Cilindro oblicuo	f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

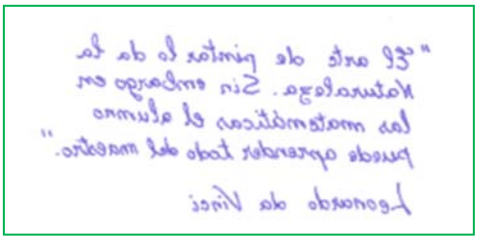
75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).
76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
    a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
    b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
    c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
    d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?



78. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.
79. **Caleidoscopios diédricos:** ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.
80. **Simetrías plegando** papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.
81. **La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci:** ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.



82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:
   a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60º.
   b) La simetría de eje *n*
   c) La simetría de eje *m*
   d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*
   e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)
2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector **u**:
   a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)
3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) **no** puede ser:
   a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º b) Una traslación de vector **u** = (2, 2)
   c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º d) Una simetría de eje *y* = *x*.
4. La transformación identidad también se llama:
   a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)
5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
   a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles
6. La simetría central en el plano es un giro de:
   a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º
7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
   a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central
8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)
9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:
   a) O b) H c) S d) D
10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
    a) Dos giros de distinto centro b) Dos simetrías de ejes secantes
    c) Un giro y una simetría d) Dos simetrías de ejes paralelos.

RESUMEN

Semejanza	Transformación geométrica que conserva los ángulos y las distancias son proporcionales.	Un fotocopia reducida
Traslación	Viene determinada por su vector de traslación. Son isometrías directas. La composición de dos traslaciones es una traslación.	El trasladado del punto P (1, 2) por la traslación de vector **v** = (4, 5) es P' (5, 7).
Giro o rotación en el plano Giro en el espacio	Viene determinado por el centro de giro y el ángulo de giro. Viene determinado por el eje de giro y el ángulo	El girado del punto P (1, 2) por el giro de centro el origen y ángulo 90º es P' (2, –1)
Simetría axial Simetría especular	Se conoce por su eje de simetría Se conoce por su plano de simetría	El simétrico del punto P (1, 2) por la simetría de eje el eje de ordenadas es P' (–1, 2)
Isometrías	Son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.	Traslaciones, giros y simetrías
Composición de isometrías	La composición de dos isometrías directas es una isometría directa. La composición de dos isometrías inversas es una isometría directa. La composición de una isometría directa con una inversa es una isometría inversa.	
Composición de isometrías en el plano	La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro. La composición de dos simetrías es un giro o una traslación.	
Elementos invariantes en el plano	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. El **giro** deja invariante **un** punto, el centro de giro. La **simetría** deja invariante una **recta**, el eje de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el plano.	
Elementos invariantes en el espacio	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja invariante **un** único punto, el centro de simetría. El **giro** deja invariante una **recta**, el eje de giro. La **simetría** deja invariante el **plano** de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el espacio.	

CAPÍTULO 9: MAGNITUDES PROPORCIONALES. PORCENTAJES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente. ¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?
2. Medio kilo de cerezas costó 1,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.
3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes
4. Completa las siguientes proporciones:

   a) $\frac{5}{22}=\frac{45}{x}$ b) $\frac{0,3}{x}=\frac{7}{14}$ c) $\frac{x}{9,5}=\frac{4,7}{1,9}$ d) $\frac{0,05}{100}=\frac{x}{400}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

   a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2,5:

0,5	9	6		20			2,5
			50		8	25	

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:
   - La cantidad de filetes que debo comprar y el número de personas que vienen a comer.
   - El peso de una persona y su altura.
   - El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
   - El precio de una tela y lo que necesito para hacer un vestido.
   - Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
   - El peso de una persona y su sueldo.
8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

   a) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$ c) $\frac{7,5}{56,9}=\frac{x}{2}$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

   a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 18. ¿Hay más de una solución?

10. El coche de Juan gasta 5,5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?
11. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?
12. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?
13. Cuatro camisetas nos costaron 25,5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?
14. Calcula mentalmente:

    a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.
17. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?
18. ¿Cuál de estas dos oferta ofrece un mayor % de descuento:

Antes 44,99 €
Ahora 31,99 €

Antes 11,99
Ahora 9,99

19. Completa:
    a) De una factura de 540 € he pagado 459 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
    b) Me han descontado el 16 % de una factura de …………….. € y he pagado 546 €.
    c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
20. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.
21. Una persona invierte 3570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3659,25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.
22. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?
23. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 $	105 $	90,4 $	100,20 $	12 $
Precio final					

24. El precio de un televisor es 650€ + 21% IVA. Lo pagaremos en seis meses sin recargo. Calcula la cuota mensual.

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

25. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.
26. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 3,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?
27. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
36 cm	
	7,7 km
0,005 m	

28. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,5 cm	900 m	
7 cm	7,7 hm	
4 cm	12 km	

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

29. Cinco trabajadores terminan su tarea en 8 días. El número de trabajadores y el número de días que tardan, ¿son magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?
30. Completa la tabla de proporcionalidad inversa y señala el coeficiente de proporcionalidad.

Velocidad en km/h	100	120			75
Tiempo en horas	6		20	4	

31. Hemos cortado una pieza de tela en 24 paños de 0,80 cm de largo cada uno. ¿Cuántos paños de 1,20 m de largo podremos cortar?
32. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 €. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo, ¿cuántos euros debe poner ahora cada uno?
33. Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

REGLA DE TRES COMPUESTA

34. Seis personas gastan 2100 € durante 4 meses en gastos de transporte. Si el gasto durante 10 meses ha sido de 3600 €, ¿a cuántas personas corresponde?
35. Con una jornada de 8 horas diarias, un equipo de 20 personas tarda 9 días en concluir un trabajo. ¿Cuántas personas se necesitan para realizar el mismo trabajo, trabajando 9 horas diarias para realizar el trabajo en 5 días?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos
2. ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental: a) 6, 24, 12, 3 b) 35 0,5 1,25 7
3. Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?
4. Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11.36		56.8		25.56

5. En España muchos productos llevan en el precio un impuesto llamado IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), del 21 %. En los tickets de los establecimientos suelen marcar el precio final, sumando el 21 % de IVA. Calcula el precio final de una batidora que vale 110 € +IVA
6. Con 48 € puedo comprar 20 piezas de madera. Si las piezas costaran 1,50 € cada una, ¿cuántas podría comprar con el mismo dinero?
7. ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

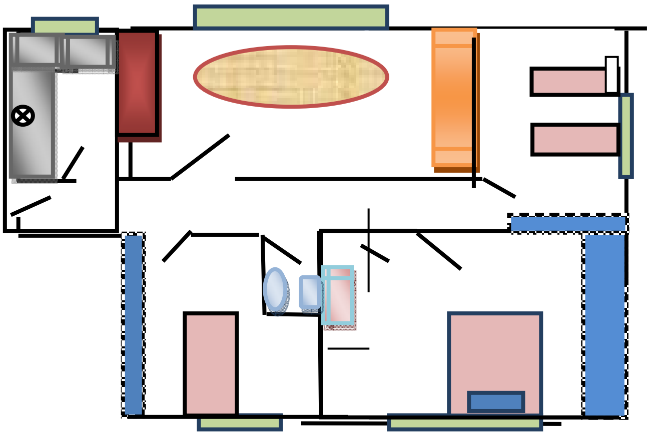
MASA DE ROSQUILLAS
2kg de harina
6 huevos
1kg y medio de azúcar

MASA DE ROSQUILLAS
Medio kilo de harina
4 huevos
400 g de azúcar

8. Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso ¿cuántos días podremos dar de comer a les restantes?
9. Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4,5		10		3

10. Cada gominola cuesta 5 cent y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?
11. Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿cuánto tiempo tardarán el llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?
12. Observa el plano de esta vivienda dibujado a una escala 1:400. ¿Cuáles son las dimensiones reales del salón? ¿Y de la cocina?



13. Expresa en euros el cambio de 1400 $, si cada euro cotiza a 1,26 $
14. El agua al congelarse aumenta un 10 % su volumen. ¿Cuántos litros de agua necesitamos para conseguir una barra de hielo de 75 dm^3?
15. Un pantalón costaba 36 € pero en las rebajas se vende a 28 €. ¿Qué % han rebajado?
16. El precio de una televisión es 847 €, IVA incluido. Calcula el precio sin IVA.

17. Señala en cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales:
   a) La cantidad de árboles talados y los kilos de leña almacenados
   b) La velocidad del tren y el tiempo que tarda en llegar a su destino
   c) El tamaño de la bolsa y la cantidad de bolsas necesarias para guardar la compra
   d) La distancia que recorre un automóvil y la gasolina que gasta
   e) Las personas que asisten al cumpleaños y el tamaño del trozo de tarta que toca a cada uno
   f) El radio de una circunferencia y su longitud
   g) Las bombillas que iluminan una sala y el gasto en electricidad.
18. Para vaciar un depósito hemos empleado 17 cubos de 22 litros cada uno. Si la siguiente vez los cubos tienen una capacidad de 34 litros ¿cuántos necesitaremos?
19. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado

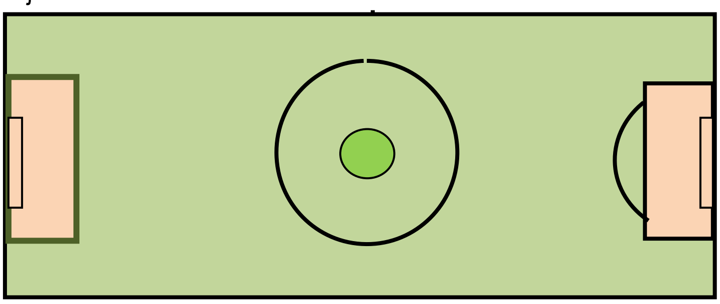
Antes	Después
23,95	15,95

20. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21,6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12,20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?
21. Un empleado público que gana 1154€ netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5% a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?
22. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.

A la vista de este cuadro de precios ¿Cuánto cuesta estacionar un coche en zona azul y en zona verde durante 80 minutos? ¿Y durante 45 minutos?

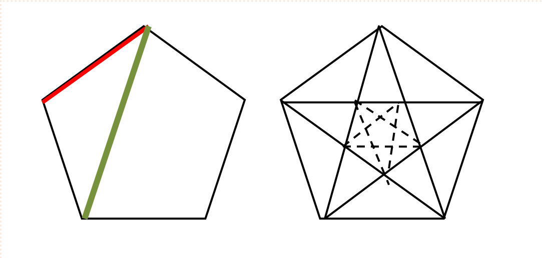
Zona azul	Tarifa		Zona verde	Tarifa
Hasta veinte minutos	0,25 €		Hasta veinte minutos	0,55 €
Media hora	0,45 €		Media hora	1,05 €
Una hora	1,20 €		Una hora	2,25 €
Hora y media	1,90 €		Hora y media (máx.)	3,50 €
Dos horas	2,50 €			

23. El precio de un ordenador portátil es 899€ IVA (21 %) incluido. Calcula su precio sin IVA.
24. El juego cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324€ + IVA (21 %). Calcula el precio de cada rueda.
25. En un dibujo, el campo de fútbol mide 24 cm por 16 cm. El campo mide 90 m de largo ¿Cuánto mide de ancho? ¿A qué escala está dibujado?



26. En un mapa dibujado a escala 1: 250000, la distancia entre dos puntos es de 0,15 m. Calcula la distancia real en km
27. La base y la altura de un rectángulo miden 14 cm y 32 cm. ¿A qué escala hemos dibujado otro rectángulo semejante al anterior, de 49 cm de base? Calcula su altura.
28. Con 840 kg de pienso alimentamos a 12 animales durante 8 días. ¿Cuántos animales similares podrían alimentarse con 2130 kg durante 15 días?
29. Para almacenar 2580 kg de mercancía en 4 días contratamos a 6 personas. Si sólo podemos contar con 5 personas y la carga es de 3000 kg ¿Cuántos días se tardará en el almacenaje?

30. Teano fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos **la proporción áurea**. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas. Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la escuela pitagórica, y su relación con el número de oro.



31. Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva.
La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro:

$$\frac{\text{Segmento verde}}{\text{Segmento rojo}} = \frac{\text{Diagonal}}{\text{Lado}} = 1,618\ldots$$

32. Al número de oro se le llama "La Divina Proporción" porque los objetos áureos son armoniosos a la vista. Esto sucede con las dimensiones de muchos rectángulos. Si divides el lado mayor entre el menor debes obtener el número de oro. Busca a tu alrededor alguno de esos rectángulos armoniosos.

33. El número de oro, del que conocerás más características en próximos cursos, tiene un valor aproximado de 1,62.
Si quieres saber si eres áurea o áureo, puedes establecer la siguiente razón:

$$\frac{\text{tu altura}}{\text{la distancia entre el suelo y tu ombligo}}$$ y debe aproximarse lo más posible al número de oro. Mídete.

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación
   a) Proporcional directa b) proporcional inversa c) no es proporcional
2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:
   a) 22,4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €
3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699,20€. El importe total de la factura sin descuento era:
   a) 920€ b) 1220€ c) 880€
4. De Jaén a Cádiz se tardan 4h y 15 minutos por carretera a una media de 86 km/h. Si subimos la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto se tardará en hacer el recorrido?
   a) 3h 39 minutos b) 3h 6 minutos c) 3h 56 minutos
5. La distancia entre dos ciudades es 108 km. En el mapa se representa con una distancia de 6 cm. La escala del mapa es:
   a) 1:180000 b) 1: 18000 c) 1:1600000 d) 1:1800000
6. Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:
   a) 3227 € b) 2998 € c) 3028 €
7. Los datos que completan esta tabla de proporcionalidad inversa son:

Personas que realizan un trabajo	30		10	9	
Días que tardan en realizarlo	15	6			25

   a) 12; 5; 4,5; 50 b) 75; 45; 30; 18 c) 75; 45; 50; 18
8. Cuatro personas han pagado 1540 € por siete noches de hotel. ¿Cuánto pagarán 6 personas si desean pasar 12 noches en el mismo hotel?
   a) 3690 € b) 3960 € c) 3820 €
9. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios, empleando 3 horas al día?
   a) 40 días b) 30 días c) 50 días
10. 48 estudiantes necesitan 12450 € para organizar un viaje de estudios de 10 días. ¿Cuántos días durará el viaje si disponen de un 15 % más de dinero y acuden 8 estudiantes menos?
   a) 12 días b) 18 días c) 15 días

RESUMEN

Concepto	***Definición***	***Ejemplo***
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado	1 : 20000
Magnitudes inversamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número	A por B es igual a C por D
Razón de proporcionalidad inversa	Producto de ambas magnitudes	45 · 70

PORCENTAJE CON CALCULADORA

En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. Escribe la cantidad
2. Multiplica por el tanto
3. Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.

650	·	16	SHIF	%	=	104

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- Sigue los pasos 1,2 y 3 anteriores
- Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual
- Pulsa la tecla - para una disminución porcentual

1370	·	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4

1370	·	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6

CAPÍTULO 10: ÁLGEBRA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

88. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
    a) El triple de un número más su mitad.
    b) La edad de una persona dentro de 10 años.
    c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.
    d) La diferencia entre dos números consecutivos.
89. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.
90. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.
91. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:
    a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$
92. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:
    a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
    b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
    c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.
93. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:
    a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$
94. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.
95. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
    a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$ b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$
96. Efectúa los siguientes productos de polinomios:
    a) $(-2x)\cdot(3x^2-4)$ b) $(2x^3+1)\cdot(-4x+5)$ c) $(4x^3-x^2-1)\cdot(2x+6)$ d) $(-1)\cdot(8x^2+7x-9)$

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

97. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

98. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:
    a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.
99. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:
    a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$
100. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

101. Resuelve las siguientes ecuaciones:
    a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$
102. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.
    a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$
103. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:
    a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

104. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.
105. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?
106. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).
107. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando *x* al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.
108. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).
109. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?
110. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.
111. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.
112. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.
113. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?
114. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?
115. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?
116. Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?
117. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?
118. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.
119. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

120. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

121. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

122. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

123. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

124. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 7y = 9 \\ 8x - 5y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x - 9 = 5y \\ 4x + 7y = 2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

125. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x + 4y = -5 \\ 3x - 6y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 8x + 7y = 10 \end{cases}$

126. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

127. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

128. Abre una hoja de cálculo y diseña una que te permita resolver sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.

129. Utiliza la hoja Sistemas y ecuaciones para comprobar las soluciones de las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de este capítulo

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

1. Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:
   a) Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.
   b) Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.
   c) Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.
   d) Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.
2. En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.
3. Escribe en lenguaje algebraico
   a) La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años
   b) La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.
4. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:
   a) Raquel tiene x cromos
   b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel
   c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe
   d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos
   e) Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.
5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restamos 7 a la mitad de un número	2) $3x + 9$
c) El triple de un número más el doble del siguiente	3) $8x$
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra	4) $x/2 – 7$
e) El perímetro de un octógono regular.	5) $x – 3$
f) La edad de alguien hace 3 años	6) $20 – x$

6. Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x:

a) $y = 0,5 + 3x$ para $x = 3$ b) $y = 1,6x$ para $x = 0,75$ c) $y = 4 + 1,5x$ para $x = 2,1$

7. Simplifica las siguientes expresiones:
   a) $3a^2b – 2a^2b + 7a^2b$ b) $5xy + 7xy – 2xy$ c) $6x + 9x – 3x$
   d) $2x + 7x – 2y$ e) $3ab + 8ab – 6ab$
8. Realiza las operaciones siguientes
   a) $3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y$ b) $(2x – 5x^2) – (3x^2 + 5x)$
   c) $3(7x – 3) – 2(2x + 5)$ d) $2a – 5a + 7a – 8a + b$

Ecuaciones de primer grado

9. Encuentra el número que falta:
   a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1
10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	*Edad en años*
Julia	$3x – 9$
María	$x^2 – 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x – 2x + 9$

11. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:
   a) $x + 3 = 2$ b) $x – 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.
a) $x + 10 = 17{,}5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2{,}5 = x$
b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h) $3x = 15$* *j) $x = 7{,}5$*

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$
b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$
c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).
a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:
a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:
a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resuelve las ecuaciones:
a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

21. Resuelve:
a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

22. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie
1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$
6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie
11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$
16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie
21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$
26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie
31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10 = 3/2$
36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie
41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$
45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x + 1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$
48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie
51) $x/3 - 2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$
55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$
59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie
61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$
63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$
65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x$
67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$
69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie
71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$
75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$
79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemas

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?
24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:
    a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?
    b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?
    c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?
    d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?
25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?
26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.
27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?
28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)
29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?
30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?
31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?
32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?
33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?
34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?
35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?
36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.
37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.
38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.
39. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?
40. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?
41. Cuadrados mágicos: En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:
    - ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
    - Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
    - A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
    - Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
    - Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
    - Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

    Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.
    a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto
    b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.
43. Diseña una hoja de cálculo para resolver ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones de segundo grado

44. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

Sistemas lineales

45. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

46. Diseña una hoja de cálculo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 8,3x – 2,5 + *y*, son:
   a) 8,3, 2,5 y 1 b) +8,3, –2,5 y +1 c) + 8,3 y – 2,5 d) 8,3, 1, 2,5
2. El valor numérico de la expresión algebraica 4 a + 3 b, cuando *a* = 5 y *b* = – 2, es:
   a) 14 b) –14 c) 26 d) – 26
3. La solución de la ecuación 3,4 + 5,2*x* – 8,1*x* = 9,4 + 7,3*x* es:
   a) –10/17 b) +6/–10,2 c) – 10/1,7 d) 0,58
4. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:
   a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2
5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?
   a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$
6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:
   a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20
7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?
   a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$
8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:
   a) 9 y 12 b) 10 y 10 c) 12 y 6 d) 8 y 12
9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:
   a) 900 €, 400 € y 650 € b) 450 €, 650 € y 950 € c) 600 €, 400 €, 1000 € d) 650 €, 400 €, 950 €
10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?
    a) 340 km y 200 km b) 300 km y 240 km c) 420 km y 120 km d) 320 km y 220 km.

RESUMEN

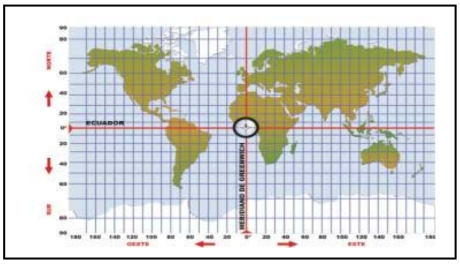
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	Área de un rectángulo = base por altura: $A = b \cdot a$
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$; $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin *x* en el otro. Operar Despejar la *x*.	**$(3x - 1) = 7/2$** 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

CAPÍTULO 11: TABLAS Y GRÁFICAS. FUNCIONES

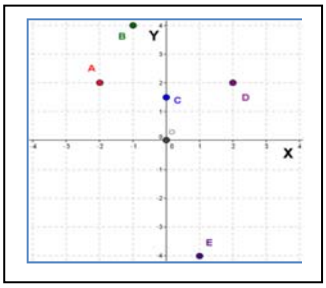
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1. Describe y marca en el plano adjunto como llegarías a:
   a. Cabo Sur
   b. Bahía Norte
   c. Playa fea



2. En el mapa indica en que cuadrante se encuentran los siguientes paises:
   a. Australia
   b. España
   c. Argentina
   d. China



3. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:

4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:
   A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1’5, 0’5) y D = (0, –1)

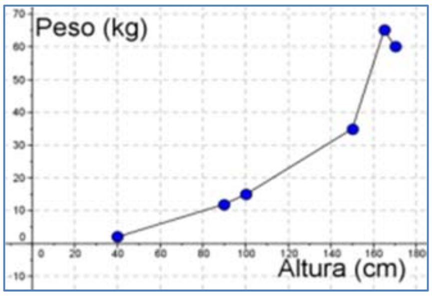
2. TABLAS Y GRÁFICAS

5. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.
6. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.
7. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *“Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado”*
8. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.
9. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.
10. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre una *compañía de telefonía*. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.
11. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

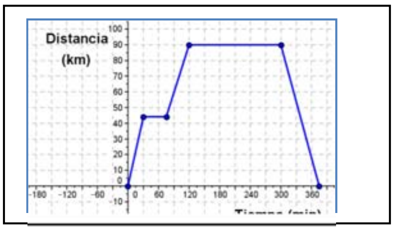
    Consumo de gas: .... 0,058 € por kw/h
    Impuesto especial:............... 0,002 € por kw/h
    Término fijo:......................... 4,30 € por mes
    Alquiler de contador…. 2,55 €

    La factura era de dos meses, había consumido 397 kw/h y el gasto ascendía a 34,97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26,15 € con un consumo de 250 kw/h.
    Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?
12. *La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa.*
    Construye una gráfica de esta situación.
13. *“María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos.”*
    Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:
    a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía 150 cm?
    b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?
    c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?



15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.
Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:
a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?
b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?
c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?
d) Haz una descripción verbal del viaje

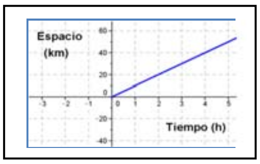


3. LAS FUNCIONES

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.
    a. El consumo de un coche y la distancia recorrida.
    b. La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor.
    c. El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí.
    d. La temperatura de un lugar y la hora del día.
    e. El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.
17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.
18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula: $\boldsymbol{l = 2 \cdot \pi \cdot r}$
21. María quiere comprar una cinta que vale a 0'7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.
22. Representa gráficamente las funciones:
a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = -2x$, *e)* $y = -3'2x$, *f)* $y = -1'2x$
23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.
24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?
25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?
26. Utiliza *Geogebra* para nuevamente representar gráficamente las funciones:
a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = -2x$, *e)* $y = -3'2x$, *f)* $y = -1'2x$

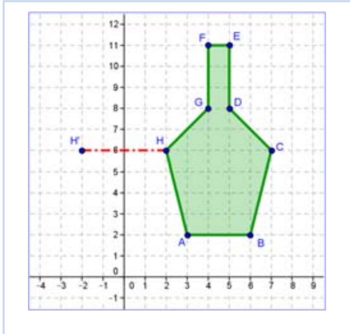
Indica en las funciones anteriores sus características: a) cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. b) ¿Son continuas? c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados. d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano cartesiano. Coordenadas

1) Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

$$I=\left(\frac{3}{2},-3\right)\qquad J=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\qquad K=(6,3'5)\qquad L=\left(-\frac{3}{4},-0'5\right)$$



2) Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

$$M=\left(4,-\frac{5}{2}\right)\qquad N=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\qquad P=\left(-6,-\frac{9}{5}\right)\qquad Q=\left(-\frac{7}{2},5\right)$$

$$R=(2,0)\qquad S=(-7,0)\qquad T=\left(0,-\frac{7}{2}\right)\qquad U=(0,7)\qquad O=(0,0)$$

3) Observa la siguiente vasija:

a. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.
b. Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H' es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.
c. Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?
d. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

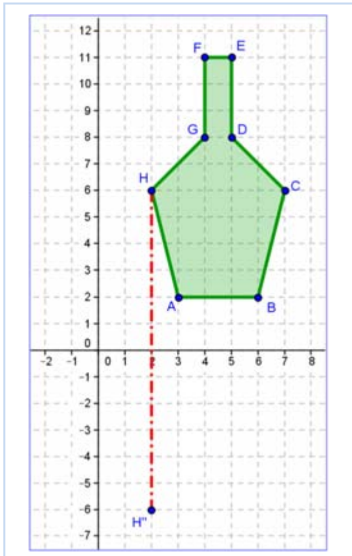
e. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
f. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

4) Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.

a. Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H'' es el reflejado de H por este nuevo espejo.
b. Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.
c. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?.

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.



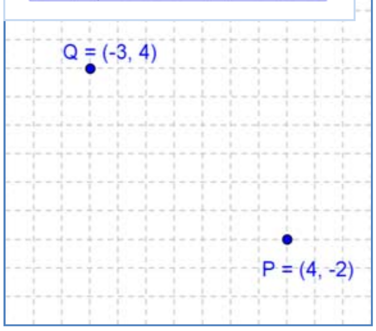
5) Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.

a. Representa los puntos M = (3, 4) N = (–1, 1) y R = (2, –4)
b. Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto (1, –1) del sistema anterior.
c. Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.
d. ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado.

6) Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.

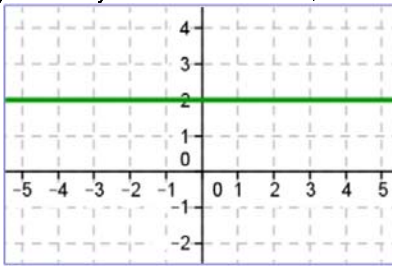
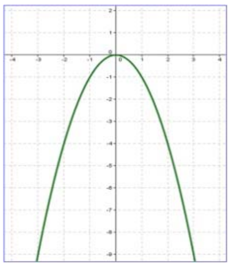
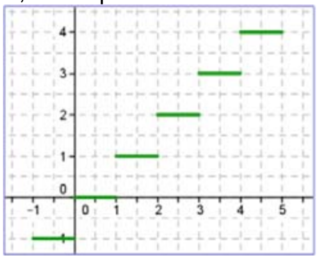
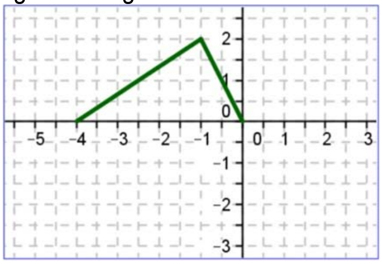
a) Representa un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3,3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1,9 cm.
b) ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.
c) ¿Cómo son éstos puntos entre sí dos a dos?

7) Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.



Tablas y Gráficas

8) Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:

9) El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la `población española, mediante la gráfica siguiente:

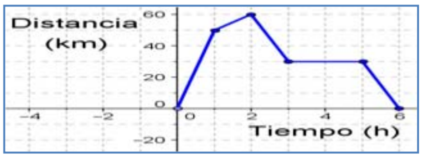
Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?
b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?
c) ¿Y entre 1991 y 2001?

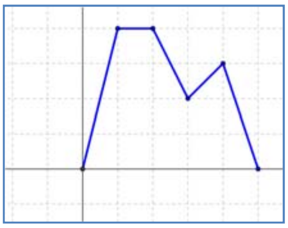
Razona sobre el significado de esta gráfica.

d) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?
e) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?
f) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

10) Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:



a. ¿A qué distancia de su casa llega?
b. ¿Cuánto tiempo está parado?
c. ¿Cuánto tarda en volver?
d. A las dos horas ¿a qué distancia está de su casa?
e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?
f. ¿Cuándo va más deprisa? Y ¿Cuándo más despacio?



11) La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.

A. Inventa una situación que pueda ser representada por esta gráfica.
B. Señala cuales son las magnitudes y en qué unidades se miden.
C. Indica, en los ejes, los números adecuados.
D. Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.

12) El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:

Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados.

13) Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €
b. Un número y la mitad de dicho número.
c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

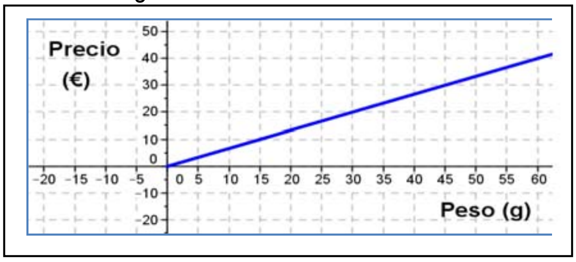
Las funciones

14) En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura del puré a largo del tiempo.
b. El precio de una camiseta y su color.
c. El área de un cuadrado y su lado.
d. El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.
e. El volumen de una esfera y su radio.

15) Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

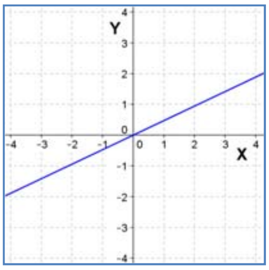
16) Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



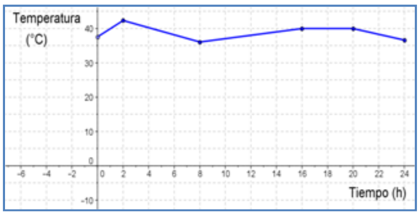
¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente?
¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?

17) Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: $d = 100 \cdot t$ ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?

18) Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?



19) La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día.



Mirando la gráfica indica:

¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana? ¿y a las doce de la noche?

¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?

¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?

¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?

Describe con palabras esta situación.

20) Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

21) En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
b. El precio de un coche y su color.
c. El volumen de un líquido y su peso.
d. La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
e. La longitud de un muelle y el peso colgado en él.

22) Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente?

23) En una papelería 10 lápices cuestan 2,5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?

24) Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.

AUTOEVALUACIÓN

1) El punto de coordenadas A = (–5, –6) está situado en el:
   a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.
2) Indica qué afirmación es falsa:
   a) El eje de abscisas es el eje OY
   b) El eje de ordenadas es vertical
   c) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas
   d) El eje de ordenadas es el eje OY
3) Los puntos de coordenadas A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) están todos ellos en el:
   a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante
4) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

   a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4
5) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

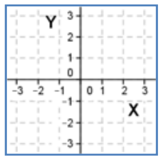
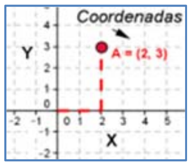
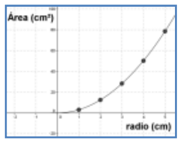
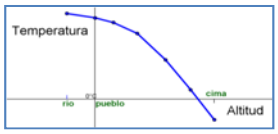
X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

   a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa
   c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área
6) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:
   a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) Y = 3X + 2.
   c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.
7) Indica qué afirmación es falsa:
   a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas
   b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente
   c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente
8) Escribe una tabla de valores de la función y = 2x – 3.

x	1	2	3	4
y				

   a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.
9) Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado.

RESUMEN

<table>
<tr><td>Sistema de referencia cartesiano</td><td>Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas Ejes, que se cortan en un punto llamado Origen. El eje horizontal se denomina eje de abscisas, y al eje vertical, eje de ordenadas.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Coordenadas</td><td>Es un par ordenado de números (x, y), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Tabla de valores</td><td>Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.</td><td><table><tr><td>Tiempo (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gráficas a partir de situaciones</td><td>Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Función</td><td>Una magnitud Y está en función de otra magnitud X, si el valor de Y depende de manera única del valor que tenga X.</td><td>La temperatura del agua T varía en función del calor recibido Q</td></tr>
<tr><td>Variables</td><td>En las relaciones funcionales, a las magnitudes variables relacionadas las llamamos solamente variables</td><td>“El precio del kg de peras es 1,80 €.” el peso y el precio son las variables</td></tr>
<tr><td>Variable dependiente e independiente</td><td>Cuando tenemos dos magnitudes variables que están relacionadas de tal forma que Y es función de X, a la magnitud Y se la denomina variable dependiente, y a la magnitud X se la denomina variable independiente.</td><td>El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
El consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente</td></tr>
<tr><td>Variables y valores</td><td>Cuando tenemos una función entre dos variables X e Y, a los valores que toman estas variables les denominamos x e y respectivamente.</td><td>Cuando la magnitud X toma el valor x, la magnitud Y vale y.</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 12: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:
   a) La superficie de los países de la Comunidad Europea
   b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada
   c) El área de un círculo del que se conoce el radio
   d) Tiramos una chincheta y anotamos si cae con la punta hacia arriba
   e) Saber si el próximo mes es febrero.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

En ocasiones puede interesarnos saber cuál es la frecuencia, absoluta o relativa, del suceso *ser menor a igual a n*. Entonces se dice que es una **frecuencia acumulada**. Naturalmente esto sólo tiene sentido si los datos son numéricos.

3. Escribe la tabla de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del ejercicio 2. Observa que el último valor ahora es 1.
4. Para cada uno de los ejemplos anteriores, lanzar un dado, tirar dos monedas, indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.
5. En una bolsa tenemos 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5. Se hacen los dos experimentos siguientes:
   EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.
   EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.
   ¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?
   Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.
6. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.
7. Inventa cinco experimentos aleatorio y escribe el conjunto de posibles resultados
8. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar*"
9. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe*"
10. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de sacar dos cartas.
11. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las centenas del primer premio.
12. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.
13. Escribe tres sucesos aleatorios de tirar tres monedas.
14. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:
    a) El jueves vas al colegio.
    b) Cruzas la calle y te pilla un coche.
    c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.
    d) Le toca la lotería a Juan.
    e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol.
    f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima.
    g) ¿Amanecerá mañana?
    h) Mañana haya un terremoto en Madrid.
15. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.

16. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.
17. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
18. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla. ¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces? ¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces? ¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Posibles resultados	**Número de veces**
cara	56
cruz	44

19. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas acumuladas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

20. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.
21. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas del experimento tirar un dado de la actividad 20.
22. Dibuja los diagramas de líneas absolutas, relativas y relativas acumuladas del experimento tirar una moneda de la actividad 19.
23. Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en *Pictograma*.
24. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 19.
25. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 20.
26. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.
27. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.
28. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase, pregunta al menos a 10 personas, sobre el tiempo que tardan en ir desde su casa al centro escolar. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

29. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

30. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3,56.

31. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

a) Calcula la media.

b) Repite tu los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

32. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

33. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

34. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

35. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

36. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3,56. Calcula la varianza y la desviación típica.

4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

37. Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El azar y la probabilidad

1. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0,12	0,13					0,1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?
b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?
c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?
d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

2. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:

a) Tener un accidente de tráfico.
b) Salir de paseo y cruzar alguna calle.
c) Salir de paseo y que te caiga un rayo.
d) Mañana nazca algún niño en París.
e) Mañana no amanezca.
f) Mañana llueva.

3. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Escribe otra de frecuencias relativas.
c) Dibuja un diagrama de rectángulos.
d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.

4. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido: 7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2. Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Gráficos estadísticos

5. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van unos jóvenes al mes al cine. Los datos están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas.
b) Representa un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
c) Haz un pictograma
d) Representa los datos en un digrama de sectores.

6. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Porcentaje
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

a) Haz un diagrama de rectángulos
b) Representa un diagrama de líneas.
c) Haz un pictograma
d) Representa los datos en un digrama de sectores.

7. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.
8. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los datos en un diagrama de rectángulos y en un diagrama de líneas.

9. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas.
b) Representa estos datos en un diagrama de sectores.
c) Haz un pictograma.

10. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sectores que describa esta situación.

Medidas de centralización

11. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados: 6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4. Calcula la media aritmética.
12. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.
13. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21. Calcula la media aritmética.

14. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son:

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
c) Calcula la media.

15. Los jugadores de un equipo de baloncesto tiene las siguientes edades: 13, 12, 14, 11, 12, 12. Calcula la media.
16. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas hijos tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1. Calcula la media.

17. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

18. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

19. Se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

20. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,
3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas. b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas. c) Calcula la media, d) Calcula la mediana, e) Calcula la moda.

21. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1. Calcula la media, la mediana y la moda.

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Ordenador

23. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de mascotas en el ordenado y vuelve a calcular la media, la mediana y la moda.

24. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

25. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

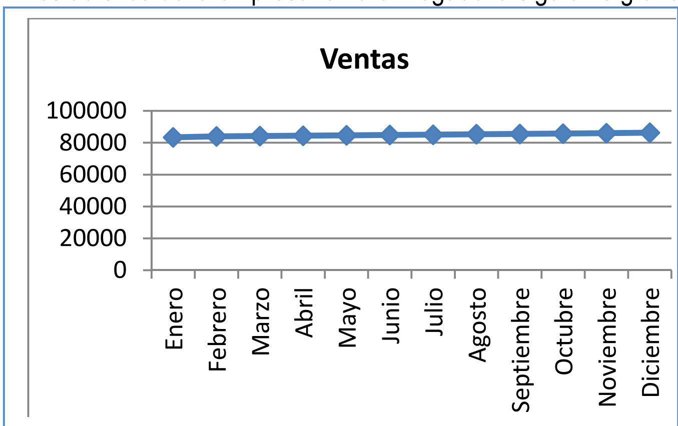
26. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la sema que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o… Piensa sobre qué podrías preguntar.

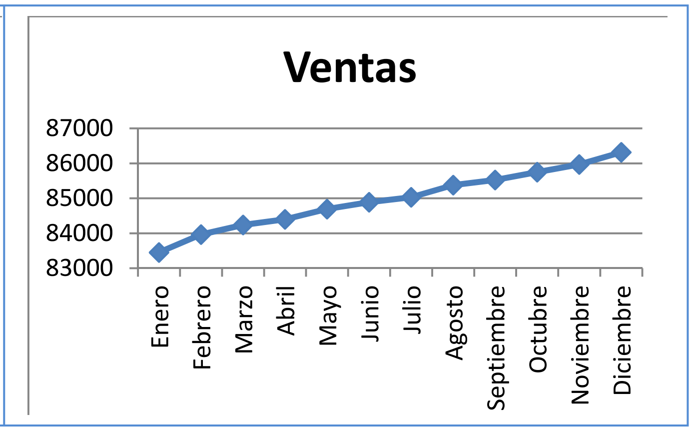
Problemas

27. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuanta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:





No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:
Ambos gráficos son correctos.
Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

28. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, x, …. Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, x, …Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

29. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño: 25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula la media, la moda y la mediana.

30. Con los datos del problema anterior:

a) Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m^3: (21, 23), (23, 25), … (39, 41)

b) Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas..

c) ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que 31 m^3?

d) ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que 35 m3?

31. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

32. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto suman estos dos números?

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica la respuesta correcta:

a) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta

b) La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores

c) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.

d) Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad

2. Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:

a) 1/40 b) 0,25 c) 4/40 d) 10/40

3. Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En … … …. … … …. las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

4. Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0,125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:

a) 45 º b) 30 º c) 60 º d) 72 º

5. En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

6. La media de los siguientes datos 7; 0; 9,5; 2; 4,1; 3,8, es:

a) 6,3 b) 3,8 c) 4,4 d) 5,5

7. La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

9. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?

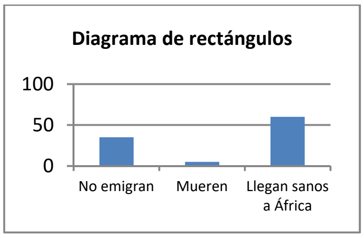
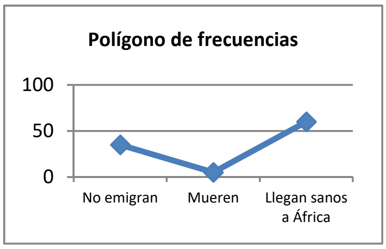
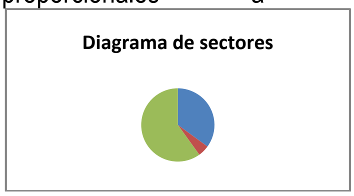
a) 3/4 b) 1/6 c) 2/6 d) 5/6

10. Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quien es una muestra:

a) Estudiantes de España y estudiantes de ese centro b) Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A

c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A d) Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A

RESUMEN

Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico	Si al tirar un dado hemos obtenido 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores	
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral	
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Diagrama de líneas	Se unen los puntos superiores de un una diagrama de rectángulos	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias 	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la media es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6. La moda es: 5. La mediana es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	
Moda	El valor que más se repite.	