

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012676

Fecha y hora de registro: 2013-10-08 16:13:16.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrights.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

Revisores: Javier Rodrigo y Raquel Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

2. SEMEJANZA

- 2.1. FIGURAS SEMEJANTES
- 2.2. TRIÁNGULOS SEMEJANTES. CRITERIOS DE SEMEJANZA.
- 2.3. TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES
- 2.4. TEOREMA DE TALES
- 2.5. PROPORCIONALIDAD EN LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES
- 2.6. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS



3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

- 3.1. ÁREA DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO
- 3.2. ÁREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIÁNGULO
- 3.3. ÁREA DEL TRAPECIO, ROMBO Y ROMBOIDE
- 3.4. ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES
- 3.5. ÁREA DE POLÍGONOS IRREGULARES



4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

- 4.1. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA
- 4.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA
- 4.3. ÁREA DEL CÍRCULO
- 4.4. USO DE GEOGEBRA PARA COMPRENDER LA LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL ÁREA DEL CÍRCULO
- 4.5. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR
- 4.6. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR
- 4.7. OTRAS ÁREAS



5. ÁNGULOS

- 5.1. ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

Resumen



En este capítulo estudiaremos el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, que nos ayudará en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.

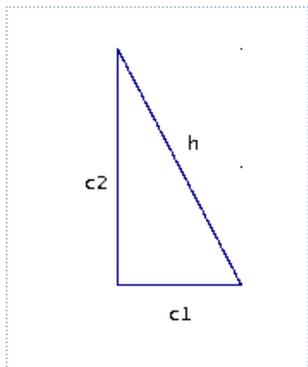
Estudiaremos el teorema de Tales y la semejanza, con los criterios para reconocer cuando dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza (escala) en mapas y en áreas y volúmenes.

Repasaremos las longitudes y áreas en polígonos y en figuras circulares, que utilizaremos en el próximo capítulo para obtener longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio.

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa vale 5 cm, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Actividades resueltas

- ✚ Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:

Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12) \times (13+12)} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$



Pitágoras es uno de los matemáticos más populares gracias a su teorema. Pero no sólo ha aportado este teorema, ya que los pitagóricos pusieron las primeras piedras científicas no sólo en la Geometría sino también en la Aritmética, la Astronomía y la Música.



[Universo matemático: Pitágoras, mucho más | RTVE Play](#)

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 cm y su hipotenusa 26 cm? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 cm. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Interpretación del teorema de Pitágoras

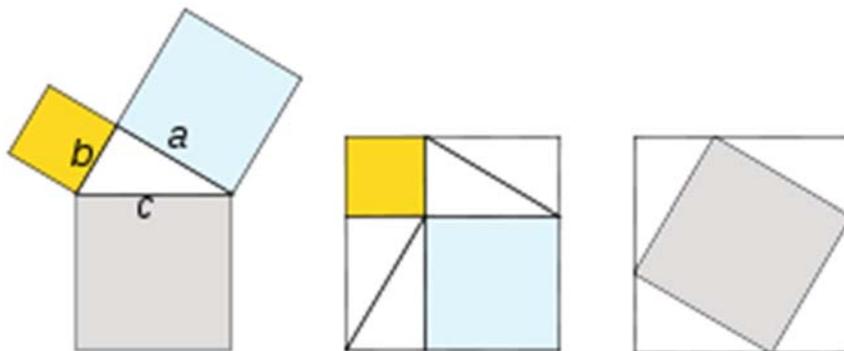
Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa h de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2 , c_2^2 . Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos a y b (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado a y b , en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Actividades propuestas

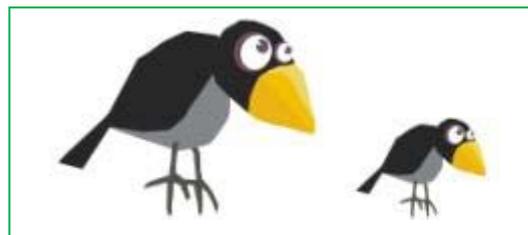
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
 - 8 cm y 6 cm
 - 12 m y 9 m
 - 6 dm y 14 dm
 - 22.9 km y 36.1 km.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
 - 27 cm y 12 cm
 - 32 m y 21 m
 - 28 dm y 12 dm
 - 79.2 km y 35.6 km
- Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
- Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
- Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 m.
- Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 cm y altura 5 cm.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*.

Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible.

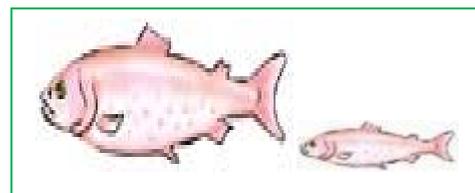


La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

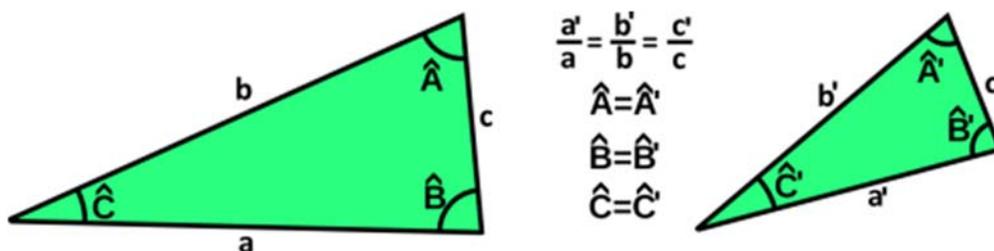
Ejemplo:

✚ Las figuras del margen **no** son semejantes



2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza**.

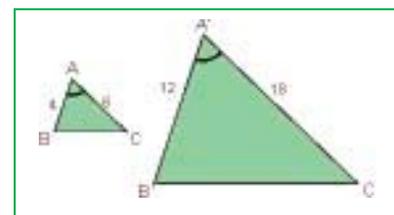
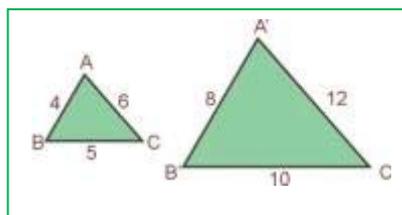
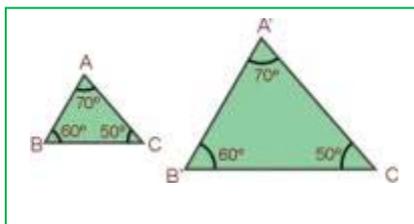
Dos triángulos son semejantes sí:

- **Primero:** Tienen dos ángulos iguales.
- **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales.
- **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta, por ejemplo, que tengan un lado y dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual, y necesariamente los lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, entonces los tres ángulos son iguales. Con más cuidado es preciso mirar el tercer criterio, y en otro curso se demostrará con más rigor.

Ejemplo



Actividades propuestas

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

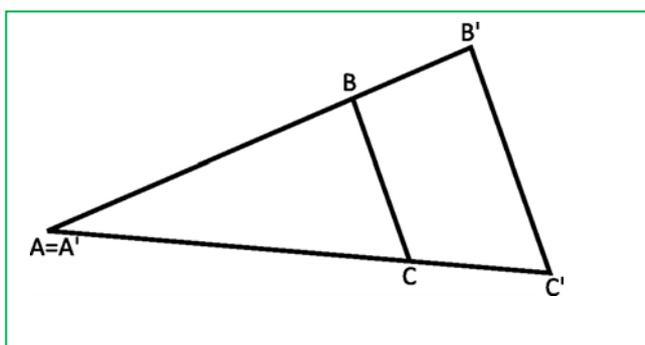
- Un ángulo de 80° y otro de 40° . Un ángulo de 80° y otro de 60° .
- Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70° . Triángulo isósceles con ángulo igual de 50° .
- $A = 30^\circ$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 14$ cm, $c' = 18$ cm
- $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 20$ cm, $b' = 25$ cm, $c' = 35$ cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

- $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 24$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?
- $A = 45^\circ$, $b = 16$ cm, $c = 8$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

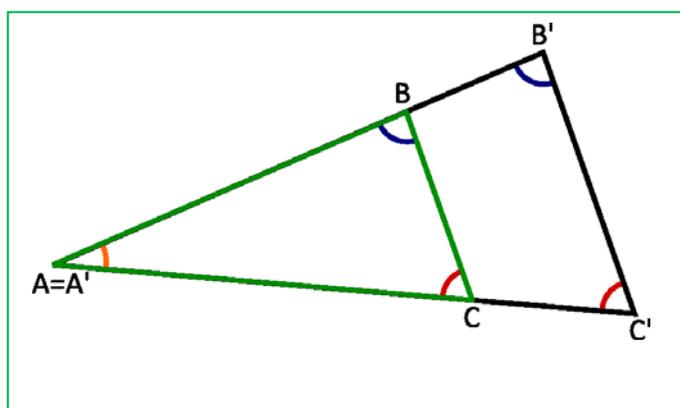
2.3. Triángulos en posición de Tales



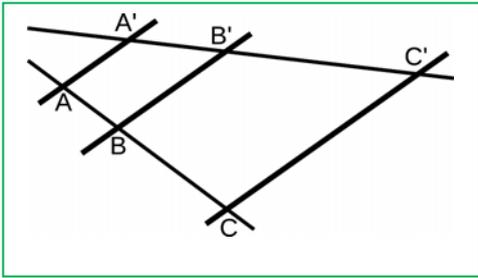
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros, por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



2.4. Teorema de Tales



El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

Dadas dos rectas, y varias rectas paralelas entre sí, que las cortan respectivamente en los puntos A, B, C y A', B', C' . Entonces el **Teorema de Tales** afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

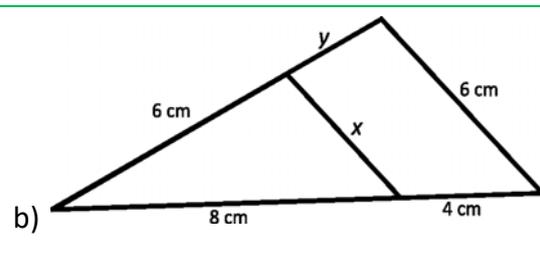
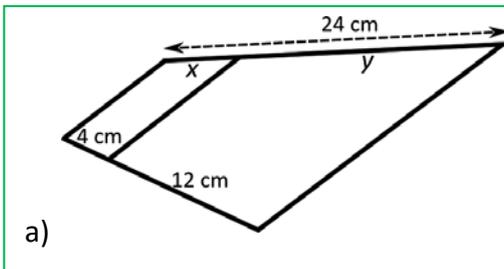
En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes en posición Tales, y que por lo tanto se puede deducir que sus lados son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Observación: En este caso no relacionamos los segmentos AA', BB' y CC' que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

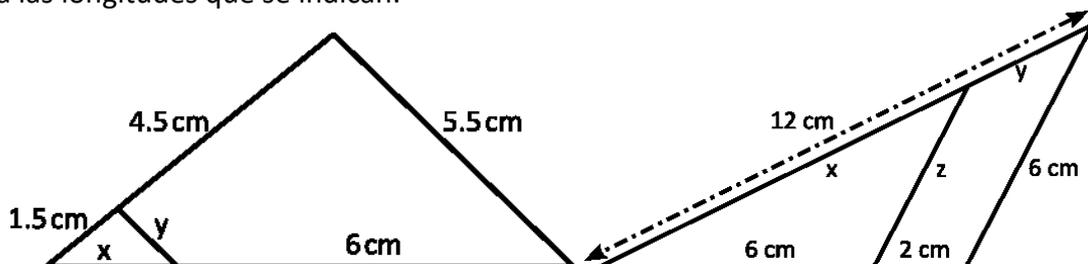
13. Calcula los valores de x e y en las siguientes figuras.



14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



2.5. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos... a la razón de semejanza se le llama **escala**.

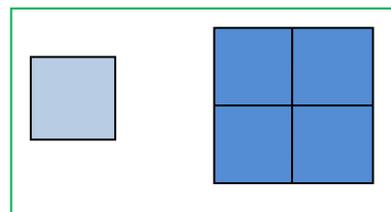
Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k , entonces la razón entre sus áreas es k^2 .

Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen.

Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.



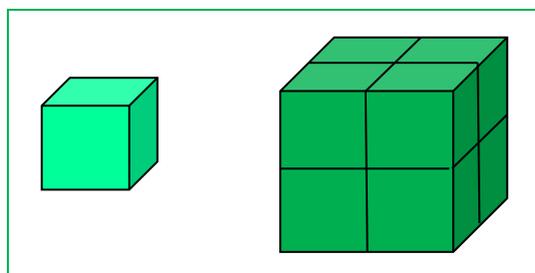
Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k , entonces la razón entre sus volúmenes es k^3 .

Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen.

Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.



Actividades resueltas

✚ La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

El peso está relacionado con el volumen. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material, que pese 1 kilo. Por tanto, $k^3 = 8\,000\,000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 m, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1.5$ m. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

- El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
- En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm, 25 cm y 40 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
- Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?
- La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?



2.6. Escalas: planos y mapas

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos “**escala**”

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:



✚ En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50 000 m, es decir a 50 km.

Ejemplo:

✚ Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la

foto nos da una escala:

$$1 : 600.$$

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3.5 cm. La altura real de las torres será:

$$3.5 \cdot 600 = 2\,100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$



CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes**.

Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1 : 70 000

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1 000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0.05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1.4 cm	700 m	
7 cm	0.7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2.7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de polígonos que ya conoces del curso anterior. Si las recuerdas, puedes saltarlo.

3.1. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2$$

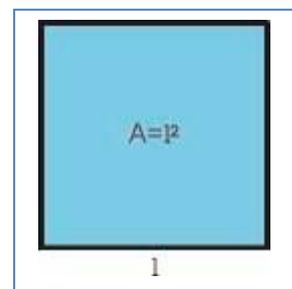
El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un cuadrado de 15 dm de lado, el área de dicho cuadrado es 225 dm² ya que:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 15^2 = 225 \text{ dm}^2.$$



Actividades resueltas

- ✚ Calcula el área y el perímetro de la baldosa de la figura de 9 cm de lado

Solución: La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = 4(\text{lado}) = 4(9) = 36 \text{ cm}.$$

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2.$$



Baldosa cuadrada

- ✚ Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de 8 cm de base y 3 cm de altura

Solución: Por tratarse de un rectángulo:

$$\text{Perímetro} = 2(\text{base}) + 2(\text{altura}) = 2(8) + 2(3) = 22 \text{ cm}.$$

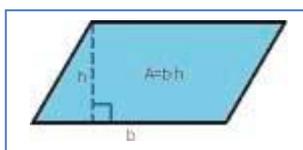
$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2.$$

3.2. Área de paralelogramo y del triángulo

Ya sabes que:

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

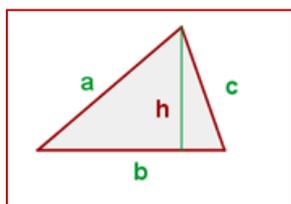
$$\text{Área}_{\text{Paralelogramo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$



Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El área de un triángulo es la mitad del área de un paralelogramo:



$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Ejemplo:

✚ El área de un triángulo de base $b = 7 \text{ cm}$ y altura $h = 5 \text{ cm}$ es 17.5 cm^2 ya que:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17.5 \text{ cm}^2.$$

Actividades resueltas

✚ La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 5 metros y su altura mide 4 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?

Solución: Como la vela tiene forma triangular:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ m}^2.$$



✚ Halla los siguientes perímetros y áreas:

a) Un cuadrado de 5 metros de lado:

Perímetro: La suma de sus cuatro lados: $5 + 5 + 5 + 5 = 20 \text{ m}$.

Área: lado \cdot lado = $5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2$.

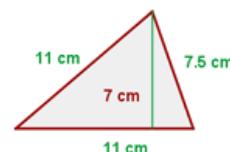
b) Un rectángulo de 7 metros de ancho y 6 m de largo

Perímetro: Suma de sus lados: $7 + 7 + 6 + 6 = 26 \text{ m}$.

Área: Largo por ancho = $7 \cdot 6 = 42 \text{ m}^2$.

c) Triángulo de base 11 cm y altura 7 cm, y cuyos otros dos lados miden 11 cm y 7.5 cm:

Área: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$



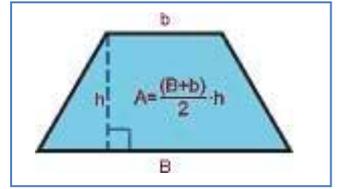
Perímetro: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5 \text{ cm}$

Actividades propuestas

25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

3.3. Área del trapecio, rombo y romboide

Imagina un trapecio. Gíralo 180°. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

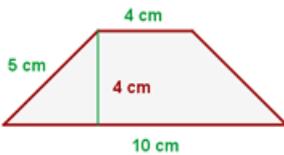


El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

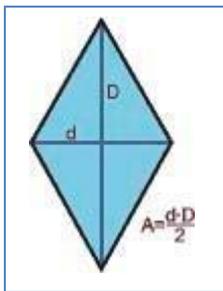
$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Ejemplo:

✚ Tenemos el siguiente trapecio cuya base $B = 10 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, su área es:



$$A = \frac{(10+4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

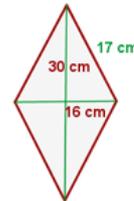
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo:

✚ Si tenemos un rombo cuyas diagonales son $D = 30 \text{ cm}$ y $d = 16 \text{ cm}$ respectivamente y un lado 17 cm , el área será

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$



Y el perímetro $17 \cdot 4 \text{ cm}$ al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados: 15 cm , (la mitad de la diagonal D), 8 cm (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 cm , el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

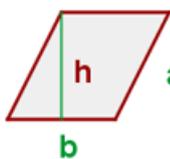
$$A = (8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240 \text{ cm}^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.



El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$



Ejemplo:

- a** Si tenemos un romboide de 5 cm de base y 4 cm de altura su área es $5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2$.
Si el lado vale 4, el perímetro es $5 + 5 + 4 + 4 = 18 \text{ cm}$.

Actividades resueltas

✚ Calcula el área de las siguientes figuras planas:

- a) Un trapecio de bases 12 y 8 cm y de altura 5 cm
b) Un rombo de diagonales 27 y 8 cm

$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(12+8) \cdot 5}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{27 \cdot 8}{2} = 108 \text{ cm}^2.$$

3.4. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área: $(\text{base} \cdot \text{altura})/2$. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, la apotema del polígono.

Ejemplo

- ✚ El hexágono regular de lado 4 cm y apotema 3.5 cm lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 cm y altura 3.5 cm, por lo que el área de cada uno es:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{4 \cdot 3.5}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$

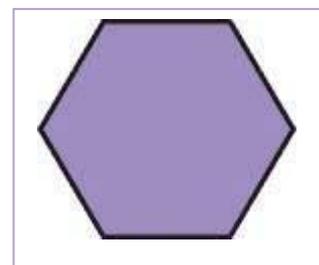
El área del hexágono es por tanto:

$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3.5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3.5 = 42 \text{ cm}^2.$$

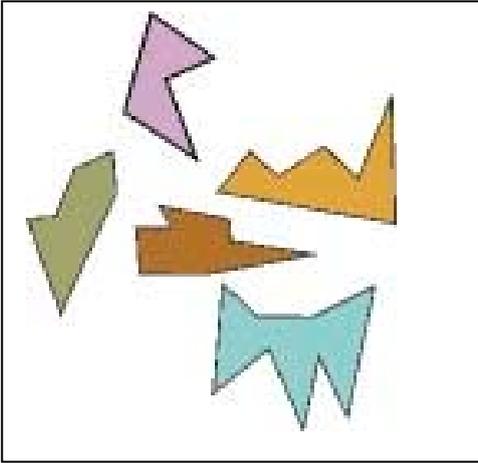
Al ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$ el semi perímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

El **área de un polígono regular** es igual al semi perímetro por la apotema.

$$\text{Área} = \text{semi perímetro} \cdot \text{apotema}$$

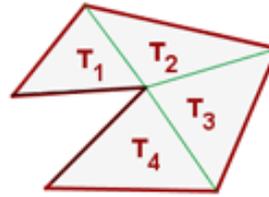


3.5. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.



$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Ejemplo:

✚ El área de esta figura irregular es 84 cm^2 . ¿Qué hemos hecho para calcularla?

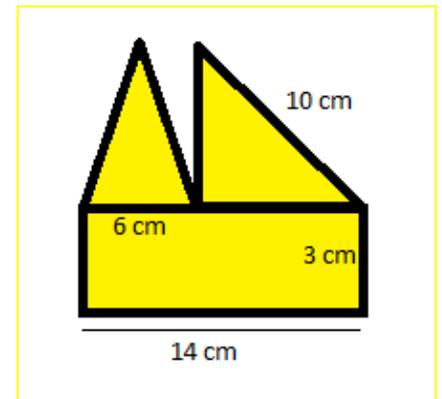
Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide 6 cm .

$$\text{Área}_{\text{triángulo 1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{triángulo 2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2. \quad \text{Área}_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42 \text{ cm}^2.$$

Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas:

$$A_{\text{total}} = 18 + 24 + 42 = 84 \text{ cm}^2.$$



Actividades resueltas

✚ Para calcular el área del polígono de la derecha, lo dividimos primero en cuadriláteros conocidos.

Tenemos un rombo cuyas diagonales miden 14 dm y 10 dm , un trapecio de altura 7 dm y bases 16 y 11 dm y un triángulo de altura 5 dm y base, la base menor del trapecio.

Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

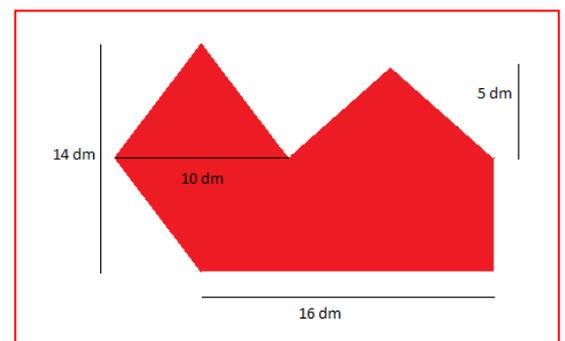
$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70 \text{ dm}^2.$$

El trapecio tiene de base mayor 16 dm , de base menor $16 - 5 = 11 \text{ dm}$, y de altura 7 dm , luego:

$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} \text{ dm}^2.$$

La base del triángulo mide 11 dm y su altura 5 dm , luego su área mide: $\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} \text{ dm}^2$.

Sumando todas las áreas obtenidas: $\text{Área}_{\text{TOTAL}} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192 \text{ dm}^2$.



Actividades propuestas

26. Las baldosas de la figura miden 24 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?



Baldosas rectangulares



28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 mm y una altura de 12 mm . ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?



30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 cm . Si su hipotenusa mide 14 cm , ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 cm . ¿Cuánto mide el área de la cometa?

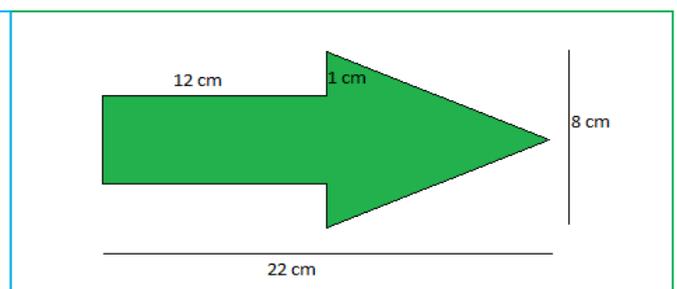
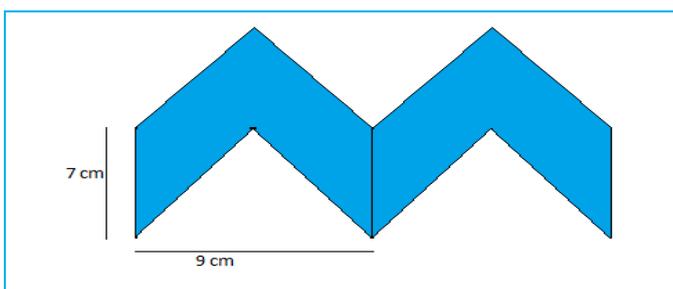
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 2.3 y 1.7 m y altura 1.4 m . ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

33. Calcula el área de un romboide de 24 cm de base y 21 cm de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

34. Dado un hexágono regular de lado 4 cm , calcula la longitud del apotema y determina su área.

35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 cm , calcula la longitud del apotema y determina su área.

36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:



37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de las figuras circulares que ya conoces del curso anterior. Si lo recuerdas bien, puedes saltarlo.

4.1. Longitud de una circunferencia

El número π (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = \text{Longitud de la circunferencia} / \text{Diámetro}$$

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3.14, otra 3.1416, y otra 3.141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r , entonces su diámetro mide $2r$, y su longitud, por la definición de π , mide $2 \cdot \pi \cdot r$.

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

Actividades resueltas

- ✚ La circunferencia de radio 7 cm tiene una longitud $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 7 = 14 \cdot \pi \approx 43.98$.

4.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360° . Por tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360.$$

Actividades resueltas

- ✚ Las ruedas de un carro miden 50 cm de diámetro, y tienen 16 radios. El ángulo α mide $360/16$. Por tanto la longitud del arco entre cada radio es

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360 = 50 \cdot \pi \cdot (360/16) / 360 = 50 \cdot \pi \cdot / 16 \approx 9.8 \text{ cm.}$$



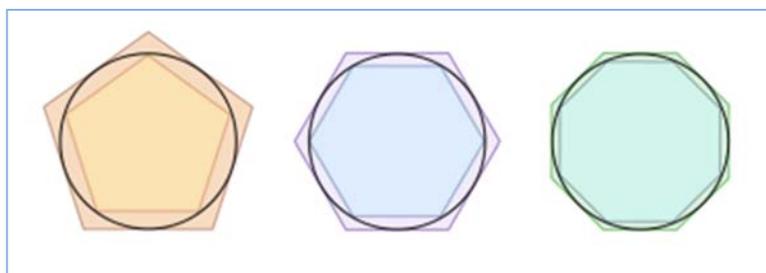
4.3. Área del círculo

El área del círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$

Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio r , con cada vez más lados. Entonces:

- La apotema del polígono se aproxima al radio.
- El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

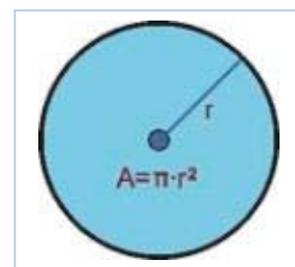


Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semi perímetro por la apotema, se aproxima a:

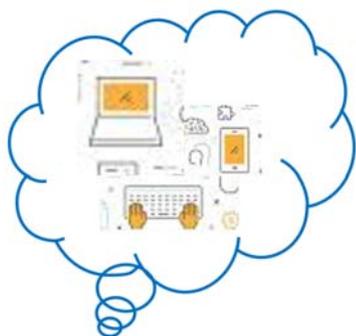
$$(2 \cdot \pi \cdot r / 2) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Actividades resueltas

- ✚ El área de un círculo de radio 5 cm es $A = 25 \pi \approx 78.54 \text{ cm}^2$. Y el de un círculo de 1 m de radio es $A = \pi \approx 3.14 \text{ m}^2$.
- ✚ El área de un círculo de diámetro 8 m es $A = 4^2 \pi = 16 \pi \approx 50.3 \text{ m}^2$. Y el de un círculo de 2 cm de diámetro es $A = 1^2 \pi = \pi \approx 3.14 \text{ cm}^2$.



4.4. Uso de Geogebra para comprender la longitud de la circunferencia y el área del círculo



Vamos a utilizar *Geogebra* para mejorar la comprensión sobre el número π comprobando cómo el cociente entre la longitud de la circunferencia y su radio es constante, aunque se modifique el radio, siendo igual a 2π . Del mismo modo vamos a trabajar con *Geogebra* con el área de un círculo y comprobar que el cociente entre el área y el cuadrado del radio permanece constante.

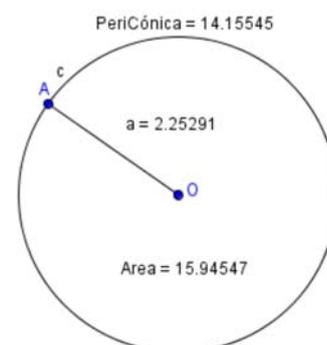
Si nunca has utilizado *Geogebra* busca en la web el archivo sobre *Geogebra* de Marea Verde y comienza por los primeros pasos.

Actividades resueltas

- ✚ Comprueba, utilizando *Geogebra*, la relación entre la longitud de la circunferencia y su radio.

Abre una ventana de *Geogebra*, en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula**.

- Define un **Nuevo punto** A y otro que, con el menú contextual, llamarás O y dibuja la **circunferencia**, c, con centro en O que pasa por A y el **segmento** OA.
- Utiliza la herramienta **Distancia** para medir la longitud de la circunferencia, *PeriCónica*; y el segmento OA, que es su radio y se denomina a.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente $PeriCónica[c]/a$, que aparece en la ventana algebraica como $b = 6.28$.
- Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**. El cociente b aparece como $b = 6.28319$, una aproximación del número 2π .
- **Desplaza** el punto A y observa que aunque cambian las medidas de la longitud de la circunferencia y del radio el cociente b permanece constante.



- ✚ Comprueba, utilizando *Geogebra*, la relación entre el área del círculo y su radio.

- Activa la herramienta **Área** para calcular la medida de la superficie del círculo.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente $Area[c]/a^2$, que aparece en la ventana algebraica como $d = 3.14159$, una aproximación del número π .
- **Desplaza** el punto A y observa que aunque cambian las medidas del área del círculo y del radio el cociente d permanece constante.

4.5. Área de la corona circular

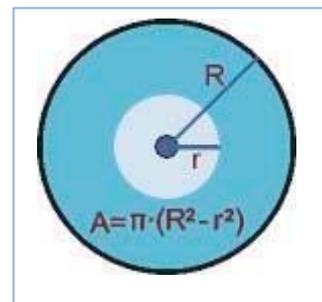
El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Actividades resueltas

- ✚ El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 cm y 5 cm es igual a:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (9^2 - 5^2) = \pi \cdot (81 - 25) = \pi \cdot 56 \approx 175.9\text{ cm}^2.$$



4.6. Área del sector circular

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.

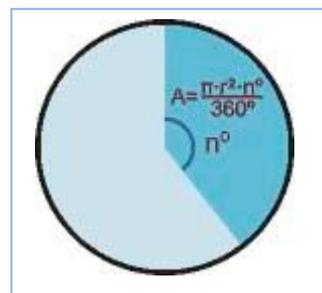
Actividades resueltas

- ✚ Para hallar el área del *sector* circular de radio 4 m que abarca un ángulo de 90° , calculamos el área del círculo completo: $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 16\pi \cdot 90 / 360 = 4\pi \approx 12.57\text{ m}^2.$$

- ✚ Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 4 m y altura 4 m , $A_T = 4 \cdot 4 / 2 = 8\text{ m}^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 12.57 - 8 = 4.57\text{ m}^2.$$

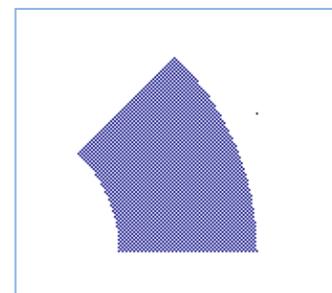


4.7. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.

El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios r y R que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.$$



Actividades resueltas

- ✚ Para hallar el área del sector de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de 90° , calculamos el área de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\pi$, y hallamos la proporción:

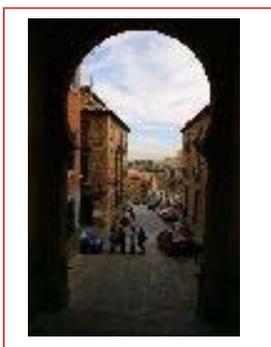
$$A_c = 15\pi \cdot 90/360 = 3.75\pi \approx 11.78 \text{ m}^2.$$

También se puede hallar con la fórmula anterior:

$$A_c = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11.78 \text{ m}^2.$$

Actividades propuestas

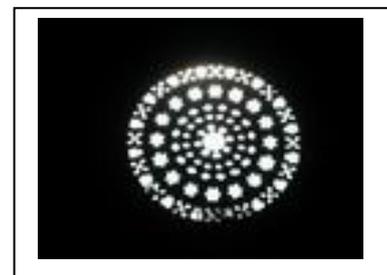
38. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella... y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.
39. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6 379 km. ¿Cuánto mide el Ecuador?
40. Antiguamente se definía un metro como: "la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París". Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



41. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 5.3 m. ¿Cuál es la longitud del arco?

42. Un faro gira describiendo un arco de 160° . A una distancia de 5 km, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

43. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 m, y la de la siguiente figura es de 3 m.

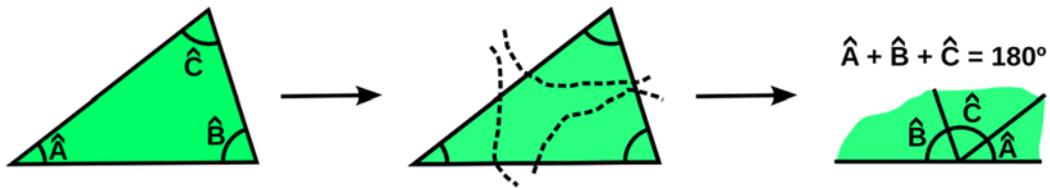


- a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.
- b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas
- c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 m.
- d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.
44. Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 cm.
45. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 cm y que forma un ángulo de 60° . Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.
46. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 cm y 12 cm y que forma un ángulo de 60° .

5. ÁNGULOS

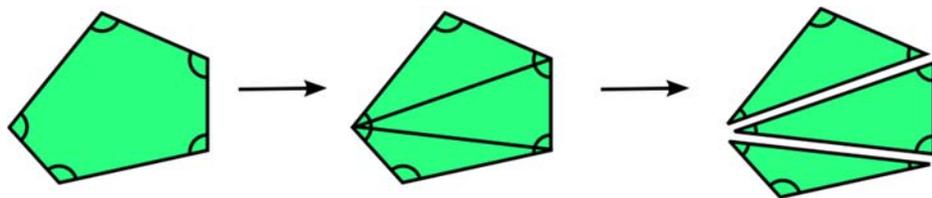
5.1. Ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180^\circ \cdot n$.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

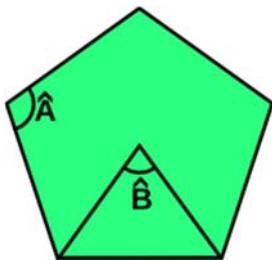
Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.



Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	$180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$
Pentágono	$180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$	Hexágono	$180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$

Si el polígono de n lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre n la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



✚ En un pentágono la suma de los ángulos interiores es $180 \cdot 3 = 540^\circ$.

Por lo tanto, el **ángulo interior**: $\hat{A} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

El ángulo **exterior** de un polígono se forma por un lado y la prolongando del lado contiguo.

Es por tanto, suplementario del ángulo interior adyacente. Es decir, suman 180 grados.

Para cada vértice existen dos ángulos exteriores en cualquier polígono

5.2. Ángulos de la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

Ángulo central	Ángulo inscrito	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

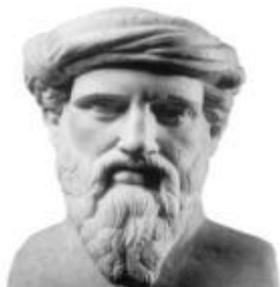
Demostración de la propiedad

Debemos comprobar que el ángulo \hat{B} es la mitad de \hat{A} . $2\hat{B} = \hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero $BCOD$ y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360° .	BO y OD son radios de la circunferencia. Por lo tanto BDO es isósceles y \hat{B}_2 y \hat{D} son iguales.
Lo mismo para \hat{B}_1 y \hat{C} Entonces $\hat{C} + \hat{D} = \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = \hat{B}$	Además, el ángulo \hat{O} del cuadrilátero mide $360^\circ - \hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C} + \hat{D}) + \hat{O} = 360^\circ$. $\hat{B} + (\hat{B}) + 360^\circ - \hat{A} = 360^\circ$. $2\hat{B} = \hat{A}$

CURIOSIDADES. REVISTA

Biografía de Pitágoras

Pitágoras de Samos nació aproximadamente en el año 580 a. C. y falleció aproximadamente en el 495 a. C. Destacó por sus contribuciones en Matemáticas, Filosofía y Música. Se le conoce por el teorema de Pitágoras, que lleva su nombre, aunque es probable que dicho teorema ya se conociera en Mesopotamia y Egipto, países que visitó. Pitágoras fundó la Escuela Pitagórica, en la que todos los descubrimientos eran de la comunidad, que mantenía entre otras normas muy estrictas, la de ser vegetariano, y que hombres y mujeres eran iguales, jera una comunidad feminista! El lema de los pitagóricos era: *"Todo es número"*. Cuando Pitágoras murió quedó su mujer, Teano, dirigiendo la Escuela. Curiosidad: Los pitagóricos mostraban odio a las judías. No se conoce el origen de esa aversión. ¿Preferirían contar con lentejas?

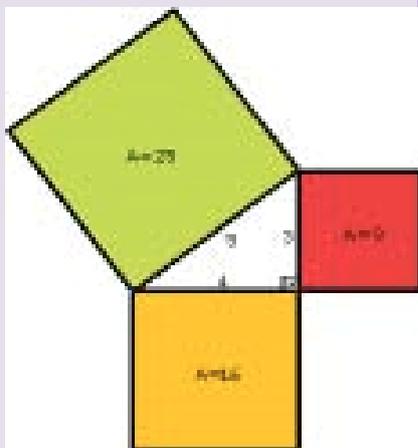


Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes tesoros de la Geometría. Se habla de las 370 demostraciones del Teorema de Pitágoras: chinos, hindúes, árabes... tienen la suya.

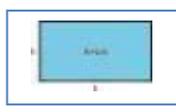
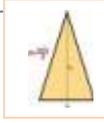
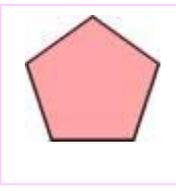
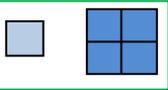
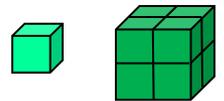
Teorema de Pitágoras y los egipcios

Dos mil años antes de Cristo, en las orillas del Nilo, los egipcios utilizaban una cuerda con trece nudos para trazar ángulos rectos. Sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 era un triángulo rectángulo.



Incluso hoy algunos albañiles verifican la perpendicularidad de los marcos de las puertas y de las ventanas mediante la regla que llaman: 6, 8 y 10.

RESUMEN

DEFINICIÓN	CONCEPTO	EJEMPLOS
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$	$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	$A = \text{lado}^2 = l^2$ 	Si $l = 4 \text{ cm} \Rightarrow A = 16 \text{ cm}^2$
Área del rectángulo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$ 	Si $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \Rightarrow A = 15 \text{ cm}^2$.
Área del paralelogramo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$ 	$a = 7 \text{ m}, b = 9 \text{ m} \Rightarrow A = 63 \text{ m}^2$
Área del triángulo	$A = (\text{base por altura})/2 = a \cdot b/2$ 	$a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m} \Rightarrow A = 15 \text{ m}^2$
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura 	$B = 7; b = 3; h = 5 \Rightarrow A = 25$
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2 	$D = 4, D = 9 \Rightarrow A = 36/2 = 18$
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados 	Lado = 6 cm , apotema = 5 cm , número de lados = $5 \Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$; Área = $15 \cdot 5 = 75 \text{ cm}^2$.
Área de un polígono regular	Área es igual al semi perímetro por la apotema	
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r la longitud es igual a $2\pi r$. Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$ 	Radio = $3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud = $6\pi \approx 18.84 \text{ cm}$. Área = $9\pi \approx 28.26 \text{ cm}^2$.
Área del círculo	Si el radio es r , el área es igual a $\pi \cdot r^2$.	Si $\alpha = 30^\circ$ y $r = 3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud del arco = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0.5\pi \approx 1.57 \text{ cm}$
Área de la corona circular. Área del sector circular	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor. Si abarca un arco α grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$. 	$R = 7, r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125.6 \text{ u}^2$ $R = 4 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ \Rightarrow A = \pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8.373 \text{ cm}^2$
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales 	Si el lado del cuadrado mide 5 m , otro semejante de lado 15 m , $k = 3$, tiene un área multiplicada por 9 , y el volumen del cubo multiplicado por 27 .
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k , la razón entre las áreas es k^2 , y entre los volúmenes k^3 . 	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Teorema de Pitágoras**

- ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 cm y 6 cm de medida de sus catetos y 15 cm de hipotenusa? Razona tu respuesta
- Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.
- Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.
- ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8.2 cm y 6.9 cm?
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

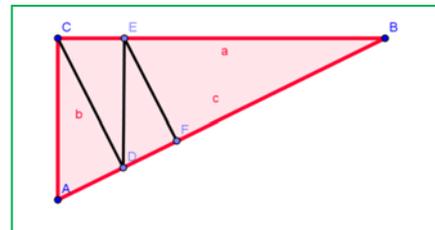
a) 16 cm y 12 cm	b) 40 m y 30 m
c) 5 dm y 9.4 dm	d) 2.9 km y 6.3 km.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 25 cm y 15 cm	b) 35 m y 21 m
c) 42 dm y 25 dm	d) 6.1 km y 4.2 km
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 m.
- Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm
- Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

- Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
 - Un ángulo de 30° y otro de 20° . Un ángulo de 120° y otro de 20° .
 - Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80° . Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50° .
 - $A = 40^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 12$ cm. $A' = 40^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = 6$ cm
 - $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. $a' = 12$ cm, $b' = 16$ cm, $c' = 24$ cm
- Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
 - $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?
 - $A = 50^\circ$, $b = 3$ cm, $c = 7$ cm. $A' = 50^\circ$, $b' = 18$ cm, ¿ a' ?
- Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?
14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC , de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD , CDE , DEF y EFB , y el escriba calcula la longitud del lado AD como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo ABC y del triángulo ACD . Determina la longitud de los segmentos CD , DE y EF .
17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
18. El mapa a escala 1:5 000 000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2 , ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?
19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.



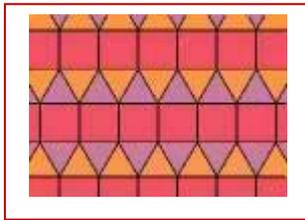
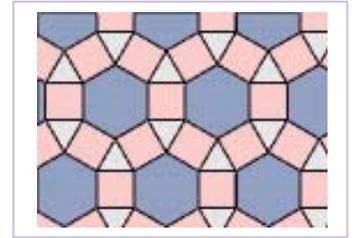
Áreas y perímetros

21. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
22. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3.4 cm de radio.
23. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
24. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
25. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.
26. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
27. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?
28. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?
29. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.
30. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.

31. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?
32. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

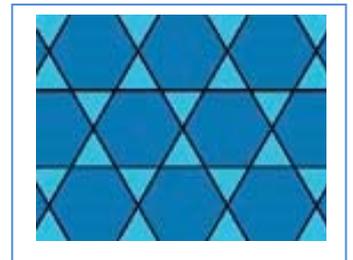
Problemas

33. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 *cm*, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.



34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 *cm*, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.

35. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 *cm*. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?



36. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 *m*, y se separa de la pared una distancia de 2 *m*, ¿cuál es su longitud?
37. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 *m* de largo y 60 *m* de ancho. Calcula:
- La diagonal del terreno cuadrado.
 - La diagonal del rectángulo
 - El área de cada terreno.
 - ¿Cuál tiene mayor superficie?
38. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 *cm* de lado o circular de 7 *cm* de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 *cm* de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.
39. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1.2 *m* de ancho y 1.5 *m* de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?
40. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 *m*, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

41. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.
42. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:
- Longitud de una arista.
 - Altura del triángulo de la base.
 - Perímetro de la base
 - Altura de una cara
 - Perímetro de una cara

43. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?

44. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de un cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris.... Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?



45. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro: a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor. b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza. c) calcula la superficie de cada abanico.

46. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1.2 m. a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas. b) La superficie de dicha estrella. c) La superficie de la cruz,



AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
a) 6.32 *cm* b) 7 *cm* c) 0.05 *m* d) 627 *mm*
2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
a) 714 *cm* b) 7.4 *m* c) 8 *m* d) 8 925.1 *mm*
3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
a) 4.3 *dam*² b) 21 *m*² c) 40 *m*² d) 1 273 057 *cm*²
4. El área de un rectángulo de 10 *cm* de diagonal y 8 *cm* de base es:
a) 53 *cm*² b) 80 *cm*² c) 48 *cm*² d) 62 *cm*²
5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
a) 45 *dm* b) 181 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*
6. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:
a) 49 *cm*² b) 48 *cm*² c) 50 *cm*² d) 48.37 *cm*²
7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 *m* mide aproximadamente:
a) 3.14 *m* b) 1.4 *m* c) 1.26 *m* d) 1.7 *m*
8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* mide:
a) 6.32 *cm* b) 5 *cm* c) 0.052 *m* d) 62 *mm*
9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 6 *m*, el otro cateto mide:
a) 87 *cm* b) 4 *m* c) 8 *m* d) 5.1 *mm*
10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 *cm* y 16 *cm* es:
a) 34 *cm* b) 70 *cm* c) 40 *cm* d) 62 *cm*