CAPÍTULO 4: DIVISIBILIDAD

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: “El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. DIVISIBILIDAD

1.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 3 y la del 6.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 3 y de 6.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 3 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,….

Todos ellos son múltiplos de 3.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{3}$

Es decir: $\dot{3} = \{0,\ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,\ldots\}$.

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 3 que hubieras podido escribir antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Múltiplos y divisores. Múltiplos y divisores son diferentes conceptos. Para encontrar múltiplos de un número, hay que multiplicar ese número por otros. Los divisores en cambio, son números que caben en otro número mayor una cantidad exacta de veces.

https://www.youtube.com/watch?v=YW_04Esg4QQ

Actividades propuestas

1. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.

2. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

3. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 3 es **divisor** de 9 porque al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 100 porque al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 7 es **divisor** de 49 porque al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

d) 1 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 1, el resto es 0.

e) 47 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 47, el resto es 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 9 es **divisible** por 3 porque 3 es divisor de 9, es decir, al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 100 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 100, es decir al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 49 es **divisible** por 7 porque 7 es divisor de 49, es decir, al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser ***múltiplo*** y ser ***divisor*** son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: $3 \cdot 7 = 21$, podemos deducir lo siguiente:
  - 3 y 7 son divisores de 21.
  - 21 es múltiplo de 3 y de 7.
  - 21 es divisible por 3 y por 7.

Actividades propuestas

4. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

5. Escribe frases usando las expresiones: "*ser múltiplo de*", "*ser divisor de*" y "*ser divisible por*" y los números 27, 3 y 9.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 492, 70, 376, 900, 564, 298 son divisibles por 2, ya que terminan en 2, 0, 6, 0, 4, y 8.

¿Sabrías explicar por qué?

Recuerda que un número cualquiera lo podemos escribir con las potencias de 10:

$$4\,652\,031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en todos los sumandos, excepto el último, aparece el 10, y 10 = 2 · 5, luego todos los sumandos son múltiplos de 2. Si el último lo es, el número es múltiplo de 2, si, como en el ejemplo, termina en 1, aunque el resto de los sumandos sea divisible entre 2, el último no lo es, luego el número no es divisible entre 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 531 es divisible por 3 ya que 5 + 3 + 1 = 9 que es múltiplo de 3.
- El número 4002 es divisible por 3 ya que 4 + 0 + 0 + 2 = 6 que es múltiplo de 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 99 es divisible por 3 ya que 9 + 9 = 18, y 18 es divisible por 3, pues 1 + 8 = 9 que es múltiplo de 3. Por tanto, 9, 18 y 99 son múltiplos de 3.
- El número 48 593 778 396 es divisible por 3 ya que 4 + 8 + 5 + 9 + 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 = 69, y 69 es divisible por 3 pues 6 + 9 = 15, y 15 lo es pues 1 + 5 = 6, que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 5 728 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4, pues 7 · 4 = 28.
- El número 5 718 **no** es divisible por 4 ya que termina en 18, que no es múltiplo de 4, pues 4 · 4 = 16 y 5 · 4 = 20.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 3 925 y 78 216 570 son divisibles por 5, pues terminan en 5 y en 0.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 5 532 es divisible por 6 ya que:
    - Lo es por 2 porque termina en 2.
    - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.
- El número 2 456 **no** es divisible por 6 ya que:
    - Lo es por 2 porque termina en 6.
    - No lo es por 3, ya que sus cifras suman 2 + 4 + 5 + 6 = 17, y 1 + 7 = 8 que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9

Ejemplo:

- El número 5 022 es divisible por 9 ya que: 5 + 0 + 2 + 2 = 9.
- El número 3 313 **no** es divisible por 9 ya que: 3 + 3 + 1 + 3 = 10 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0

Ejemplo:

- El número 825160 es divisible por 10 porque termina en 0.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa, si un número es divisible por 2 y por 5, lo es por 10.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 71 335 es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 15 – 4 = 11.
- El número 71 345 **no** es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 4) = 15 – 5 = 10, que no es múltiplo de 11.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

6. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4 520, 3 411, 46 095, 16 392, 385 500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?

7. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.

8. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 15 *A*72 sea múltiplo de 3.

b) 22 05*A* sea múltiplo de 6.

c) 6*A* 438 sea múltiplo de 11.

9. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

10. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

11. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
984 486 728	Divisible por 2	
984 486 725	Divisible por 5	
984 486 720	Divisible por 3	
783 376 500	Divisible por 6	
984 486 728	Divisible por 4	
23 009 845	Divisible por 11	

12. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.

13. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.

14. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que 10 = 9 + 1. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.

15. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que 10 = 11 – 1. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero *N*, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., *N*. De esta manera, los divisores de *N* serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 54 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 54 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que ***N*** sea divisible.

Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 48.
-

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 48.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 48 : 2 = 24 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 24.

Es divisible por 3. (4 + 8 = 12, múltiplo de 3) → 48 : 3 = 16 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 16.

Es divisible por 4. → 48 : 4 = 12 → Ya tenemos dos divisores: 4 y 12.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 48 : 6 = 8 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 8.

Como 48 : 8 = 6, y el cociente 6 es menor que el divisor 8, ya hemos terminado. 8 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.

Actividades propuestas

16. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 50 es múltiplo de 10.
b) 2 es divisor de 30.
c) 4 es múltiplo de 16.
d) 66 es divisible por 11.
e) 80 es divisor de 8.
f) 3 es divisible por 12.

18. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 3 72*x* 54*y*.

19. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

20. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. NÚMEROS PRIMOS

2.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores del 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 33, 48, 54, 70, 785 o 43 215 678 940 son compuestos.

Actividades propuestas

21. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

22. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

2.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100, en este caso, ordenados de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una lista así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5, algunos de los cuales ya estaban tachados, todos los que terminan en 0.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- ¿Hasta qué número debemos seguir tachando? ¡Piensa! ¡Piensa! Observa que 100 es igual a 10 · 10, por tanto al dividir un número menor que 100 por uno mayor que 11 el cociente es menor que 11.

Hemos llegado a una lista de la forma:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "*filtro*" (criba) por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "*primos*".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Actividades propuestas

23. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

24. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?

Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.

25. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

2.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número. Por ejemplo, si quiero expresar 11 como producto de dos números, sería:

$$11 = 1 \cdot 11 \text{ o también } 11 = 11 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

- Para descomponer el número 18 podríamos hacer: $18 = 9 \cdot 2$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 9 no es un número primo.

  Su descomposición es $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, que se expresa como $18 = 3^2 \cdot 2$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, un número primo no se puede descomponer, no podemos decir $11 = 11 \cdot 1$, pues 1 no es primo) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

- Por ejemplo: $80 = 40 \cdot 2$. Como $40 = 4 \cdot 10$ y $10 = 2 \cdot 5$, tenemos que: $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ y por tanto, su descomposición es: $80 = 2^4 \cdot 5$.

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 231:

Como 231 no es múltiplo de 2, pero sí de 3, lo dividimos: $231 : 3 = 77$.

Como 77 es múltiplo de 7, que es el menor primo posible por el que se pueda dividir: $77 : 7 = 11$.

Por tanto: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Esto se suele realizar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 5 148:

$$\begin{array}{r|l} 5\,148 & 2 \\ 2\,574 & 2 \\ 1\,287 & 3 \\ 429 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto: $5\,148 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

27. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

28. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1 240 b) 2 550 c) 4 520 d) 5 342

29. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10 000 y 100 000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

30. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

2.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 60 y 84:

Divisores de 60 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisores de 84 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

¿Cuáles son los divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

El mayor de los divisores comunes es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 60 y de 84.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

- En el ejemplo anterior, escribimos: M.C.D (60, 84) = 12

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 60, 72 y 84.

1. Factorizamos cada número:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números (2 y 3) elevados el menor exponente: 2^2 y 3.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D } (60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

31. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80

32. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

2.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

- Vamos a calcular m.c.m.(20, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 20 $\rightarrow$ 20, 40, 60, 80, 100, 120, …

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 60, 120, … pero el menor de ellos es el 60. Por tanto:

m.c.m.(20, 15) = 60.

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 60, 72 y 84 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. En nuestro caso: 2^3, 3^2, 5 y 7.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m.}\ (60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\ 520.$$

Actividades propuestas

33. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

34. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de cinta roja de 15 m y uno azul de 10 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y quiere cortar la cinta en trozos de la misma longitud para tenerlo preparado para empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima en que puede cortar cada rollo?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 10 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

$$\text{M.C.D.}\ (15, 10) = 5.$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de cinta en que cortará ambos rollos será de 5 m.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "*El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer*". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Estamos buscando un número de días que será múltiplo de 2, 4 y 7 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$\text{m.c.m. } (2, 4, 7) = 28$$

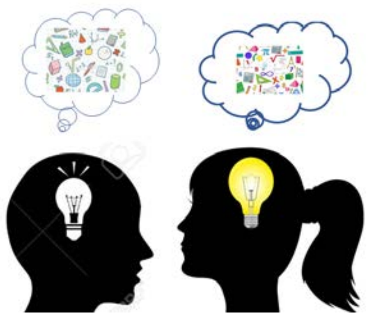
Por tanto, dentro de 28 días volverán a coincidir y la abuela les hará el pastel.

Actividades propuestas

35. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?



MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS

36. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

37. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

38. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

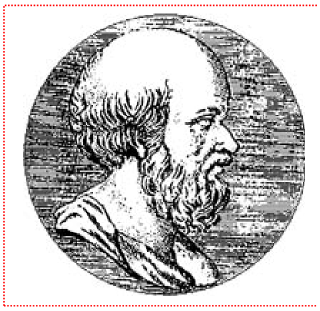
a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?

b) ¿A qué hora ocurrirá?

39. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



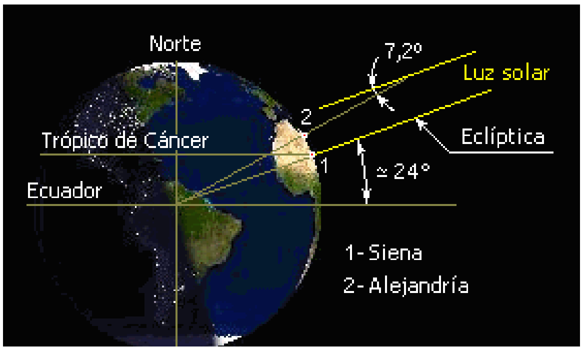
¿Quién era Eratóstenes el de la famosa criba que estudiamos antes?

Eratóstenes nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de Africa. Vivió entre los años 275 a C y 195 antes de Cristo.

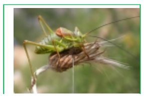
Por varias décadas, fue el director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue amigo de Arquímedes.

Aún así, Eratóstenes se hizo famoso por tres descubrimientos:

- Por la **medición increíblemente precisa que hizo del diámetro de la Tierra**
- Por haber fabricado una **criba**, o un filtro, para descubrir todos los números primos.
- La invención de la esfera armilar.



¿QUÉ RELACIÓN TIENEN EL ESPIONAJE CON LA EVOLUCIÓN DE ALGUNOS INSECTOS?

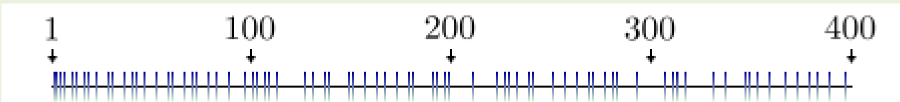


La relación entre ambos son los **números primos**.

La teoría de los números primos tiene aplicación en la **criptografía**, ciencia que estudia formas de cifrar mensajes secretos que solo puedan ser descifrados por el receptor, pero por nadie más. El proceso de cifrado requiere el uso de una clave secreta y para descifrar el mensaje, normalmente, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés.

Pero lo ideal sería tener una clave para un cifrado fácil y descifrado difícil. Esto se logra **utilizando números primos muy grandes**, de 80 cifras o más.

Hoy en día la **criptografía** tiene gran importancia para las comunicaciones entre los gobiernos, compras por Internet o llamadas por teléfono móvil. Esto se debe a su extraña distribución:



Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LOS PRIMOS GERMAIN

Primos de Germain

En Teoría de Números se dice que un número natural es un **número primo de Germain**, si el número *n* es primo y 2*n* + 1 también lo es. Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200, son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191.

Sophie Germain (1776-1831)

Sophie Germain fue una matemática autodidacta. Nació en París en las últimas décadas del Siglo de las Luces. Sus primeros trabajos en Teoría de Números, entre 1804 y 1809, los conocemos a través de su correspondencia con C. F. Gauss, en la que mantenía oculta su identidad bajo el pseudónimo de Monsieur Le Blanc.

En noviembre de 1804 está fechada la primera carta, Gauss, en su respuesta, admira la elegancia de una de sus demostraciones. En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento en Teoría de Números. Demostraba que si *x*, *y*, *z* son números enteros, tales que $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ entonces, al menos uno de los números *x*, *y* o *z* debe ser divisible por 5. *Reanudó la correspondencia, ya con su nombre en 1819. Posteriormente, hacia 1819, Sophie retomó sus trabajos en Teoría de Números. De esta época es otro de los resultados de Sophie. Utilizando adecuadamente su teorema conseguía demostrar que para todo número primo n menor que 100 (y por lo tanto para todo número menor que 100) no existe solución a la ecuación de Fermat, cuando los números x, y, z no son divisibles por n.*

Los Primos Germain y el teorema que lleva su nombre fue el resultado más importante, desde 1738 hasta 1840, para demostrar el último teorema de Fermat, además permitió demostrar la conjetura para n igual a 5. La demostración se dividió en dos casos: el primero consistía en probarlo cuando ninguno de los números x, y, z es divisible por n, y el segundo cuando uno sólo de los tres números es divisible por n. Además, con esta clasificación el primer caso del Teorema de Fermat para n = 5 quedaba probado. En 1825 Legendre y Dirichlet completaron la demostración para n = 5 en el segundo caso.

El teorema de Sophie Germain demuestra que si n es un número primo tal que 2n + 1 es primo, entonces el primer caso del teorema de Fermat es verdadero. El trabajo se había simplificado a la mitad. El teorema de Germain será el resultado más importante relacionado con la conjetura de Fermat desde 1738 hasta la obra de Kummer en 1840.

Posteriormente sus investigaciones se orientaron a la teoría de la elasticidad y en 1816 consiguió el Gran Premio de las Ciencias Matemáticas que la Academia de Ciencias de París

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Conjetura de Fermat

Hace más de 350 años el matemático francés Pierre Fermat, en el siglo XVII, en 1637, escribió en el margen de un libro, en la *Arithmética* de *Diofanto*, un pequeño problema, dijo que lo había demostrado, pero no anotó la demostración porque no le cabía en dicho margen.

El último teorema de Fermat es una afirmación sobre los números naturales que dice que: Si n es un número natural mayor o igual a 3, la ecuación x elevado a n más y elevado a n es igual a z elevado a n, $x^n + y^n = z^n$, no tiene ninguna solución cuando x, y y z no son 0.

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla."

Observa que para $n = 2$, es el *Teorema de Pitágoras,* que sabemos que tiene solución, las ternas pitagóricas.

Muchos matemáticos intentaron demostrarlo sin éxito. Parece algo sencillo y sin embargo se ha necesitado utilizar matemáticas que entonces no se conocían para demostrarlo. *Andrew Wiles* utilizó en 1995 que las curvas elípticas semiestables son racionales o son modulares.

Fermat

Criptografía y números primos

La Teoría de Números se aplica generalmente a la criptografía. Hoy en día, el sistema criptográfico más común se llama RSA. Se utiliza mucho para mantener la seguridad en internet y en las finanzas.

Se usan números muy grandes que sean producto de dos números primos, también muy grandes.
Tú sabes encontrar los factores primos de un número, pero si es muy grande, ni siquiera lo saben hacer los ordenadores. Ahora se está queriendo utilizar la computación cuántica.

Conjeturas matemáticas

Una **conjetura matemática** es una afirmación que no ha podido ser demostrada ni refutada. Si se logra demostrar, como la de *Fermat*, deja de ser una conjetura y pasa a ser un teorema. Así ha ocurrido con:

Teorema de los cuatro colores, probado en 1976, dice que todo mapa se puede colorear con sólo cuatro colores sin que dos zonas adyacentes tengan el mismo color. Fue demostrado con ayuda del ordenador.

Conjetura de *Poincaré* que trata sobre la esfera en cuatro dimensiones. *G. Perelman* lo demostró en 2004.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	-*a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. -*a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	**2:** Acaba en 0 o cifra par. **3:** La suma de sus cifras es múltiplo de 3. **5:** Acaba en 0 o 5. **11:** La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	• 7 892 es divisible por 2. • 4 510 es divisible por 2 y por 5. • 2 957 es divisible por 3. • 2 057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m. (18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D. (18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Divisibilidad

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

3. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 24 *A*75 sea múltiplo de 5.

b) 11 07*A* sea múltiplo de 3.

c) 5*A* 439 sea múltiplo de 6.

4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

5. Busca todos los divisores de 210.

6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
30 087	Divisible por 3	
78 344	Divisible por 6	
87 300	Múltiplo de 11	
2 985 644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Números primos

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de *m* y *n* sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

b) $m = 3 \cdot 5$ $\quad n = 2 \cdot 7$

c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $\quad n = 22 \cdot 32$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $\quad n = 2 \cdot 52 \cdot 7$

8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:

a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ………

b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ………

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

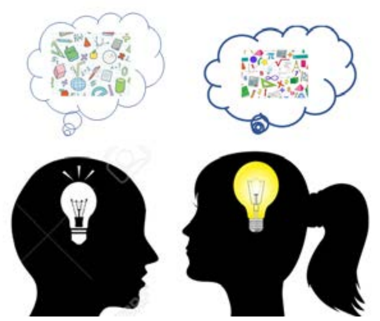
a) 4 y 8	d) 7 y 10	g) 10 y 15	j) 2 y 2	m) 2, 3 y 4
b) 2 y 3	e) 6 y 12	h) 2 y 5	k) 4 y 1	n) 3,6, y 12
c) 3 y 12	f) 6 y 9	i) 4 y 6	l) 3 y 7	o) 3, 4 y 6

10. Calcula:

a) m.c.m. (8, 40) M.C.D. (8, 40)

b) m.c.m. (15, 35) M.C.D. (15, 35)

c) m.c.m. (84, 360) M.C.D. (84, 360)



ESTIMA EL RESULTADO

11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes

12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:

a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.

b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas maquinas durante ese periodo?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hoja de cálculo para determinar si un número es primo

18. Comprueba *si* 2 047 *es primo usando la hoja de cálculo*

La criptografía es la ciencia de alterar un mensaje para que sólo lo conozcan el emisor y el receptor, muchos métodos de criptografía moderna funcionan utilizando números primos muy grandes. Se basan en la dificultad que existe para factorizar un número como producto de dos primos. Es fácil, con los ordenadores de hoy en día, multiplicar dos números primos muy grandes para conseguir un número compuesto, pero es muy difícil la operación inversa.

En la actualidad, con el desarrollo de la informática, es menos complicado determinar que un número muy grande es primo, los mayores encontrados son de la forma $2^p - 1$, con p primo.

Comenzamos con 2 047 = $2^{11} - 1$.

Para determinar que un número es primo es suficiente comprobar que no tiene por divisores, números primos, menores que su raíz cuadrada.

	Número: N	**Raíz de N**	
	2047	45,2437841	
d	Cociente	Parte entera	¿Es primo?
3	682,333333	682	0
5	409,4	409	0
7	292,428571	292	0
9	227,444444	227	0
11	186,090909	186	0
13	157,461538	157	0
15	136,466667	136	0
17	120,411765	120	0
19	107,736842	107	0
21	97,4761905	97	0
23	89	89	1
25	81,88	81	0
27	75,8148148	75	0
29	70,5862069	70	0
31	66,0322581	66	0
33	62,030303	62	0
35	58,4857143	58	0
37	55,3243243	55	0
39	52,4871795	52	0
41	49,9268293	49	0
43	47,6046512	47	0

- En la fila 4 escribe el número 2047 y en la misma fila y en la columna de la derecha una fórmula que utilizando la función **Raíz** calcula la raíz cuadrada de este número.
- En la primera columna de la tabla introduce posibles divisores del número, aunque basta con introducir los números primos es más rápido comprobar los números impares comenzando con 3 y **rellenando en serie** con incremento 2 hasta 45 (o hasta 43 que es primo).
- En la siguiente columna introduce una fórmula para calcular el cociente entre el número 2 047, identificado por su celda con referencias absolutas, y la celda que ocupa el divisor 3 y copia la fórmula con el controlador de relleno hasta el divisor 43.
- Calcula la parte entera de los cocientes de la columna anterior con una fórmula que utilice la función **Entero**.
- En la cuarta columna de la tabla se introduce una fórmula con la función lógica **SI** que devuelve 1 si los valores de las dos columnas anteriores de la misma fila son iguales y 0 en caso contrario. Esta fórmula permite encontrar, si existen, los divisores del número 2 047 que en este caso son 23 y 89.

El número 2 047 = $2^{11} - 1$ no es primo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.

b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.

c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.

d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.

2. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?

a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63} c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}

b) D(63) = {1, 2, 9, 21, 63} d) D(63) = {0, 1, 3, 7, 9, 21, 63}

3. La descomposición de 81000 en factores primos es:

a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

4. De los números:183, 143 y 1973,

a) Todos son primos b) Ninguno es primo c) 143 es primo d) 1 973 es primo

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.

b) 11 es múltiplo de 121.

c) 33 es divisor de 11.

d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.

6. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ es:

a) La propiedad conmutativa.
b) La propiedad distributiva.
c) La propiedad asociativa.
d) Esa igualdad no es cierta.

7. El M.C.D.(650, 700) es:

a) 10 b) 30 c) 20 d) 50

8. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?

a) El 17 de septiembre b) El 1 de septiembre c) El 17 de agosto d) Ese año no vuelven a coincidir

9. Queremos alicatar una pared de 615 x 225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?

a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF