

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009031

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:35:24.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

2. PRIMERAS ESTRATEGIAS

- 2.1. ESTIMA EL RESULTADO
- 2.2. EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA
- 2.3. HAZLO MÁS FÁCIL PARA EMPEZAR
- 2.4. HAZ UN DIAGRAMA, UN ESQUEMA...
- 2.5. MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS
- 2.6. ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 3.1. ¡EUREKA!
- 3.2. BLOQUEOS

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

1. La piscina de tu pueblo tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 25 m de largo y 15 m de ancho. El alcalde desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?



Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema



Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

Datos: Dimensiones de la piscina: 25 por 15 m. Precio del metro de valla: 12 euros.

Piden: El coste de la valla. Para saberlo debemos calcular su perímetro.

Fase 2: Busca una buena estrategia

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrás que sumar? ¿Habrás que multiplicar? ¿Habrás que restar? ¿Habrás que dividir?

Para calcular el perímetro debemos sumar $25 + 25 + 15 + 15$. Para conocer el precio debemos multiplicar la longitud del perímetro por el precio de un metro de valla.

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si sumamos $25 + 25 + 15 + 15 = 80$ m tenemos el perímetro del rectángulo. Multiplicamos 12 por 80 y tenemos 960 euros que es lo que costará hacer la valla.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Comprobamos todas las operaciones. ¿Es razonable que el perímetro de la piscina sea de 80 metros? Si fuese de 100 metros nos costaría 1 200 euros la valla, luego al ser menor, el precio también parece razonable.

Actividades propuestas

1. ¡Inventa problemas similares!
2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74 791 km. Si las revisiones son cada 5 000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24 312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?
3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo? Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.



2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan $75\,000 - 74\,791 = 209$ km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km por lo que debe empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?
5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.
6. Informan que a una manifestación han ido 500 000 personas, ¿cómo crees que las han contado?
7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)
8. ¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?



2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra que debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

9. Aprende a hacer magia.
 - Piensa un número.
 - Súmale 10.
 - Dobla el resultado.
 - Réstale 6.
 - Calcula la mitad.
 - Quita el número del principio.
 - ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?



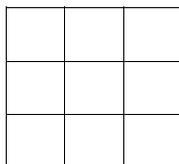
2.3. Hazlo más fácil para empezar

10. ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema. ¿Para obtener un 0 has multiplicado un 2 por un 5?

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con los mil primeros números enteros empieza sólo con 10. A continuación con 20, luego 100... Manipula los objetos. Piensa, que hay más ¿múltiplos de dos o múltiplos de 5?

11. Cuadrado Mágico



Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de $1 + 2 + \dots + 9 = \dots$? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: ...?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema.

Un cuadrado más difícil: Distribuye los números $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ de forma que los **productos** de sus filas, columnas y diagonales de siempre el mismo valor. Una ayuda: Pon en el centro el 6.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

12. "El depósito": De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1 200 litros de agua ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

13. Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?

14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2: $4 : 4 + 4 : 4 = 1+1=2$

Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.

16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?

17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?

2.6. Escoge una buena notación

En los problemas de matemáticas es muy importante escoger una buena notación. Decidir, por ejemplo, que llamamos x a lo que no conocemos, en los problemas de ecuaciones.

Actividades propuestas

18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x . Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 11.

Paso 2: Busca una buena estrategia. Escogemos una buena notación

Llamamos x a número que buscamos: $x + (x + 1) = 11$.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Jugamos con los números y observamos que $5 + 6 = 11$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, el siguiente a 5 es 6, y $5 + 6 = 11$.

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka!** pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tu mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continúa trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka! Tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de **¡Ajá!**

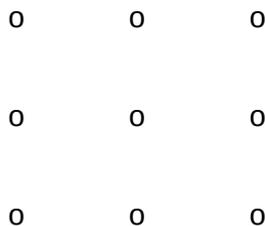
En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamaremos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problema, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.



Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

20. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.



4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases:

1. Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado.
2. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora.
3. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena.
4. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.



Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

21. Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas...). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?

22. Otro juego: Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.



3	6
+	-
/	=
33	

5	7
x	/
+	=
147	

10	7
+	-
x	=
123	

2	7
+	-
x	=
95	

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

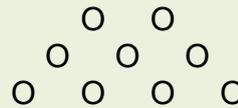
CURIOSIDADES. REVISTA**Un enigma**

Cuatro paredes, sin puertas
 Con seis filos las harás
 Y ten además en cuenta
 Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores
 De cada fila, por turno, se pueden tomar
 una, dos o toda la fila. Pierde quien debe
 tomar la última ficha.

**El oso**

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:
 – Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al
 este, y por último 2 km al norte. Me encontré
 en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De
 qué color era el oso?

Amigo 1: – Naturalmente, era blanco.

Amigo 2: – ¡Falso! ¡Ahí no hay osos!

Analiza dónde estaba el cazador.



Solución: El tetraedro

Solución: El primer amigo opina que el cazador estaba en el Polo Norte. El segundo amigo que estaba en un punto de un meridiano del hemisferio sur, tal que al andar 2 km llegara a otro meridiano de circunferencia 2 km. Pero hay más. Muchas más soluciones posibles. Búscalas

El número de filas y de fichas, (monedas, bolitas de papel, palillos...) puede modificarse. Es importante buscar la estrategia ganadora.

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Estima el resultado. ➤ Experimenta, juega con el problema. ➤ Hazlo más fácil para empezar. ➤ Haz un diagrama, un esquema... ➤ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➤ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.



El problema del cuadrado y la circunferencia que se tocan MIS PROBLEMAS FAVORITOS. Tenemos esta configuración de un cuadrado y una circunferencia que se tocan en tres puntos, ¿mide más la circunferencia o el perímetro del cuadrado? Hoy os quiero enseñar un problema que me encanta, os diré por qué y... ¡Vamos a solucionarlo! Eduardo Sáenz de Cabezón



<https://www.youtube.com/watch?v=UQXGkEtD2sQ>

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **“El hotel de los líos”:** Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen?

2. El radio de la Tierra es de 6 240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?



3. **La invitación:** Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Para empezar, hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas.

4. **"Los cachorros":** Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad de lo que le queda más medio, y a su primo la mitad de lo que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?



Ayuda: Haz un esquema

5. Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?
6. Un amigo dice a otro:
- El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?
 - No, me falta un dato.
 - Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.

¿Qué edad tienen las hijas?

7. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.
8. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.
9. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.
10. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5.2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m², ¿cuánto costará pintarla?



11. Monedas Ordenadas

Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:



12. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifiquenla" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosas, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?
13. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lal Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de suma:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ + \text{LAL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$

¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una suma correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, pero la solución no es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).

14. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m³ de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?



PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, “*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*” y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por **George Polya** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, es el “arte de resolver problemas” y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: “*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*”.

Polya considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la

atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba “enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir”. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos de que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz**, encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado: En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Decía Giner de los Ríos: El maestro es quien exige del discípulo que piense y reflexione por sí, y en la medida de sus fuerzas, que investigue, cuestione, intente, dude, despliegue las alas de su espíritu. O Cossio: Dad la ocasión al estudiante de pensar por él mismo y ser el creador de su propia instrucción.

Para saber más entra en: <http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91>