MATEMÁTICAS

2º de ESO

LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Revisora Pepa Giménez

Textos Marea Verde

BOCM: Movimientos y transformaciones

TEXTOS MAREA VERDE

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

El Real Decreto 217/2022 del 29 de marzo establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria

https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-4975

La competencia matemática entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible. La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos.

En los descriptores de operativos de la competencia matemática, en ciencia tecnología e ingeniería se dice:

STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para **resolver problemas** analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.

STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.

STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la **cultura digital** e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.

STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la **realización de proyectos** para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.

Página 140: Las líneas principales en la definición de las competencias específicas de matemáticas son la **resolución de problema**s y las destrezas socioafectivas. Además, se abordan la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático, el establecimiento de **conexiones** entre los distintos elementos matemáticos, con otras materias y con la realidad, y la comunicación matemática, todo ello con el apoyo de **herramientas tecnológicas.**

Por otro lado, resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que también es una de las principales formas de aprender matemáticas. En la resolución de problemas destacan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de estrategias matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de las soluciones. Relacionado con la resolución de problemas se encuentra el pensamiento computacional. Este incluye el **análisis de datos**, la organización lógica de los mismos, la búsqueda de soluciones en secuencias de pasos ordenados y la obtención de soluciones con instrucciones que puedan ser ejecutadas por una herramienta tecnológica programable, una persona o una combinación de ambas, lo cual amplía la capacidad de resolver problemas y promueve el uso eficiente de recursos digitales.

El sentido numérico (capítulos 2, 3, 4) se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones.

El sentido de la medida (capítulo 5) se centra en la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural. Entender y elegir las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar magnitudes, utilizar los instrumentos adecuados para realizar mediciones, comparar objetos físicos y comprender las relaciones entre formas y medidas son los ejes centrales de este sentido. Asimismo, se introduce el concepto de probabilidad como medida de la incertidumbre (capítulo 12).

El sentido espacial aborda la comprensión de los aspectos geométricos de nuestro mundo (capítulos 6, 7 y 8). Registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas, describir sus movimientos, elaborar o descubrir imágenes de ellas, clasificarlas y razonar con ellas son elementos fundamentales de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

El sentido algebraico (capítulo 10) proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresándolas mediante diferentes representaciones, así como la modelización de situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas son características fundamentales del sentido algebraico. La formulación, representación y resolución de problemas a través de herramientas y conceptos propios de la informática son características del pensamiento computacional.

Por razones organizativas, en el sentido algebraico se han incorporado dos apartados denominados Pensamiento computacional y Modelo matemático, que no son exclusivos del sentido algebraico y, por lo tanto, deben trabajarse de forma transversal a lo largo de todo el proceso de enseñanza de la materia.

El sentido estocástico (capítulo 12) comprende el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones cotidianas.

El sentido socioafectivo integra conocimientos, destrezas y actitudes para entender y manejar las emociones, establecer y alcanzar metas, y aumentar la capacidad de tomar decisiones responsables e informadas, lo que se dirige a la mejora del rendimiento del alumnado en matemáticas, a la disminución de actitudes negativas hacia ellas, a la promoción de un aprendizaje activo y a la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato indispensable. Para lograr estos fines, se pueden desarrollar estrategias como dar a conocer al alumnado el **papel de las mujeres** en las matemáticas a lo largo de la historia y en la actualidad, **normalizar el error** como parte del aprendizaje, fomentar el diálogo equitativo y las **actividades no competitivas** en el aula. Los saberes básicos correspondientes a este sentido deberían desarrollarse a lo largo de todo el currículo de forma explícita.

En todos los capítulos hay: 1) resolución de problemas. 2) uso de herramientas tecnológicas. 3) relación con otras asignaturas o con situaciones de la vida cotidiana. 4) curiosidades y revista con atención a la historia de la Matemática y el papel en ella de las mujeres matemáticas. 5) Juegos, en especial, juegos colaborativos.

El capítulo 8 trata las transformaciones geométricas incluidas en el BOE como criterio de evaluación.

2º ESO

CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Ejemplo 1:

1. La piscina de tu pueblo tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 25 m de largo y 15 m de ancho. El alcalde desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

FASES

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

Datos: Dimensiones de la piscina: 25 por 15 m. Precio del metro de valla: 12 euros.

Piden: El coste de la valla. Para saberlo debemos calcular su perímetro.

Fase 2: Busca una buena estrategia

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrá que sumar? ¿Habrá que multiplicar? ¿Habrá que restar? ¿Habrá que dividir?

Para calcular el perímetro debemos sumar 25 + 25 + 15 + 15. Para conocer el precio debemos multiplicar la longitud del perímetro por el precio de un metro de valla.

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si sumamos 25 + 25 + 15 + 15 = 80 m tenemos el perímetro del rectángulo. Multiplicamos 12 por 80 y tenemos 960 euros que es lo que costará hacer la valla.

Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Comprobamos todas las operaciones. ¿Es razonable que el perímetro de la piscina sea de 80 metros? Si fuese de 100 metros nos costaría 1 200 euros la valla, luego al ser menor, el precio también parece razonable.

Actividades propuestas

1. ¡Inventa problemas similares!

2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74 791 km. Si las revisiones son cada 5 000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24 312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?

3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo? Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan 75 000 – 74 791 = 209 km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km por lo que debe empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?

5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.

6. Informan que a una manifestación han ido 500 000 personas, ¿cómo crees que las han contado?

7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)

8. ¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?

2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra que debes hacer con ellos.

Actividades propuestas

9. Aprende a hacer magia.

- Piensa un número.
- Súmale 10.
- Dobla el resultado.
- Réstale 6.
- Calcula la mitad.
- Quita el número del principio.
- ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Hazlo más fácil para empezar

10. ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema. ¿Para obtener un 0 has multiplicado un 2 por un 5?

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con los mil primeros números enteros empieza sólo con 10. A continuación con 20, luego 100... Manipula los objetos. Piensa, que hay más ¿múltiplos de dos o múltiplos de 5?

11. Cuadrado Mágico

Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de 1 + 2 + … + 9 = …? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: …?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema.

Un cuadrado más difícil: Distribuye los números {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} de forma que los **productos** de sus filas, columnas y diagonales de siempre el mismo valor. Una ayuda: Pon en el centro el 6.

2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

Actividades propuestas

12. ***"El depósito":*** De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1 200 litros de agua ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

13. Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?

14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

Actividades propuestas

15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2: 4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2

Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.

16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?

17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?

2.6. Escoge una buena notación

En los problemas de matemáticas es muy importante escoger una buena notación. Decidir, por ejemplo, que llamamos x a lo que no conocemos, en los problemas de ecuaciones.

Actividades propuestas

18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 11.

Paso 2: Busca una buena estrategia. Escogemos una buena notación

Llamamos x a número que buscamos: $x + (x + 1) = 11$.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Jugamos con los números y observamos que 5 + 6 = 11.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, el siguiente a 5 es 6, y 5 + 6 = 11.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka**! pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tu mismo, si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continúa trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka! Tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de ¡**Ajá**!
En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema, que en un primer momento, parecía imposible.

3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamaremos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problema, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

o o o

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

Bloqueo: Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.

20. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

Bloqueo: Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

Fases:

1. Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado.
2. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora.
3. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena.
4. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.

Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

21. Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas…). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?

22. Otro juego: Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

3 6	5 7	10 7	2 7
+ –	x /	+ –	+ –
/ =	+ =	x =	x =
33	147	123	95

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Un enigma

Cuatro paredes, sin puertas

Con seis filos las harás

Y ten además en cuenta

Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores

De cada fila, por turno, se pueden tomar una, dos o toda la fila. Pierde quien debe tomar la última ficha.

O O

O O O

O O O O

El oso

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:

– Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al este, y por último 2 km al norte. Me encontré en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De qué color era el oso?

Amigo 1: – Naturalmente, era blanco.

Amigo 2: – ¡Falso! ¡Ahí no hay osos!

Analiza dónde estaba el cazador.

Solución: El primer amigo opina que el cazador estaba en el Polo Norte. El segundo amigo que estaba en un punto de un meridiano del hemisferio sur, tal que al andar 2 km llegara a otro meridiano de circunferencia 2 km. Pero hay más. Muchas más soluciones posibles. Búscalas

El número de filas y de fichas, (monedas, bolitas de papel, palillos...) puede modificarse. Es importante buscar la estrategia ganadora.

Solución: El tetraedro

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Problema	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
Fases en la resolución de un problema	Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema. Fase 2: Busca una buena estrategia. Fase 3: Lleva adelante tu estrategia. Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.
Algunas estrategias	➢ Estima el resultado. ➢ Experimenta, juega con el problema. ➢ Hazlo más fácil para empezar. ➢ Haz un diagrama, un esquema... ➢ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas. ➢ Escoge una buena notación.
Emociones y resolución de problemas	Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka! Emoción negativa: Bloqueo
Juegos de estrategia	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

El problema del cuadrado y la circunferencia que se tocan MIS PROBLEMAS FAVORITOS. Tenemos esta configuración de un cuadrado y una circunferencia que se tocan en tres puntos, ¿mide más la circunferencia o el perímetro del cuadrado? Hoy os quiero enseñar un problema que me encanta, os diré por qué y… ¡Vamos a solucionarlo! Eduardo Sáenz de Cabezón

https://www.youtube.com/watch?v=UQXGkEtD2sQ

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **"El hotel de los líos":** Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen?

2. El radio de la Tierra es de 6 240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

3. **La invitación:** Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Para empezar, hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas.

4. **"Los cachorros"**: Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad de lo que le queda más medio, y a su primo la mitad de lo que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?

Ayuda: Haz un esquema

5. Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?

6. Un amigo dice a otro:

   – El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?

   – No, me falta un dato.

   – Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.

¿Qué edad tienen las hijas?

7. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.

8. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.

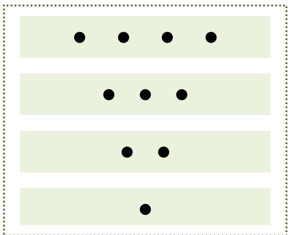
9. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.

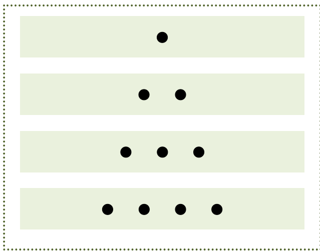
F. J. Martínez

10. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5.2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m^2, ¿cuánto costará pintarla?

11. Monedas Ordenadas

Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:





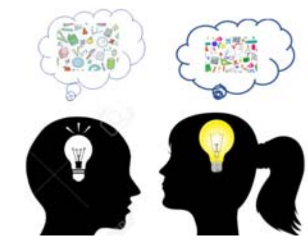
12. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "*Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquenla*" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "*Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas*" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

13. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lal Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de suma:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\ \ \text{LAL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$

¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una suma correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, pero la solución no es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).

14. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?



HAZ UN DIAGRAMA, UN ESQUEMA...

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*" y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por ***George Polya*** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas,* es el "arte de resolver problemas" y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: "*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*".

Polya considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de *Miguel de Guzmán* en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba *"enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir"*. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos de que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz,** encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado: En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Decía Giner de los Ríos: El maestro es quien exige del discípulo que piense y reflexione por sí, y en la medida de sus fuerzas, que investigue, cuestione, intente, dude, despliegue las alas de su espíritu. O Cossio: Dad la ocasión al estudiante de pensar por él mismo y ser el creador de su propia instrucción.
Para saber más entra en: http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos

Revisora: Pepa Giménez

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Sistema de numeración egipcio

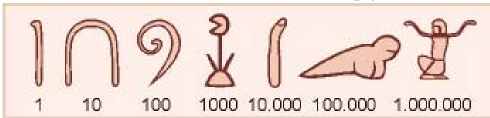
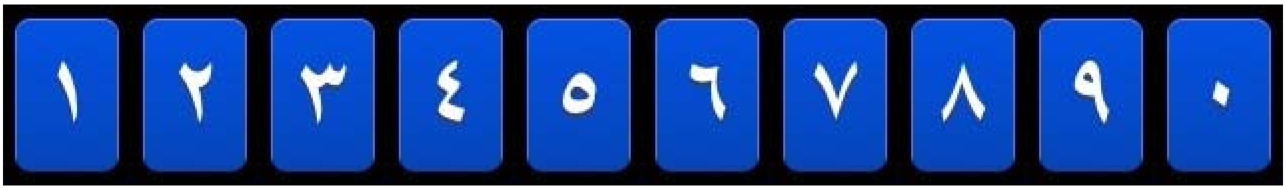


Ilustración: A. Ortega

Índice

Ilustración: A. Ortega

Sistema de numeración maya



Números arábigos

Resumen

Ya conoces muchos tipos de números, los números naturales, que sirven para contar, los números decimales, que nos sirven, entre otras muchas cosas, para usar los céntimos, las fracciones… También conoces, del curso pasado, los números enteros, los positivos, los negativos y el cero. En la historia de la humanidad aparecen mucho antes las fracciones, en Egipto y en Babilonia, que los números negativos. En los balances contables, por ejemplo, se ponía en rojo las deudas (pero no se usaba el signo menos). En el Renacimiento Tartaglia y Cardano ya obtuvieron soluciones negativas de algunas ecuaciones (de tercer grado) pero hasta el siglo XVII no se generalizó su uso. Observa que ya se usaban expresiones decimales y fracciones positivas y sin embargo se tardó mucho en utilizar los números negativos.

En este capítulo vamos a revisar como se trabaja con números positivos y negativos, fracciones y decimales, a sumarlos, restarlos, multiplicarlos, dividirlos, a calcular si valor absoluto, a representarlos en una recta y a compararlos.

1. NÚMEROS

Recuerda que:

Reloj con números romanos

El conjunto de los números naturales se representa por la letra $\mathbb{N}$ y está formado por los números 1, 2, 3, 4,...

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Es un conjunto infinito, pues no tiene un último elemento, aunque si tiene un primer elemento, el 1. Es un conjunto bien ordenado pues dados dos números naturales siempre sabemos si uno es menor que el otro.

1.1. El sistema de numeración

El sistema de numeración decimal

En el **sistema de numeración decimal** el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Otros sistemas de numeración decimal usados actualmente son los que se usan en países árabes como:

Europeo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arábigo-Índico	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Arábigo-Índico Oriental (Persa y Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

Actividades resueltas

- En el número 9 835 067 tenemos:

  - La cifra de las unidades: el $7 = 7 \cdot 10^0$

  - Luego la cifra de las decenas: el **6**, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será: $6 \cdot 10 = 60$

  - En tercer lugar, las centenas: el **0**, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$

  - En cuarto lugar las unidades de millar: **5**, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar: $5 \cdot 10^3 = 5\ 000$

  - Luego, las decenas de millar: **3** cuyo valor será: $3 \cdot 10^4 = 30\ 000$

  - En sexto lugar, las centenas de millar: **8**, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 10^5: $8 \cdot 10^5 = 800\ 000$

  - Y, por último, las unidades de millón: **9**, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 10^6: $9 \cdot 10^6 = 9\ 000\ 000$

Con esto observamos que el número 9 835 067 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$9\ 835\ 067 = 9 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

1	一
2	二
3	三
4	四
5	五
6	六
7	七
8	八
9	九
10	十
0	零 / 〇

Números chinos

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 8 216 b) 591 274 c) 918 273 d) 9 000 3040 506

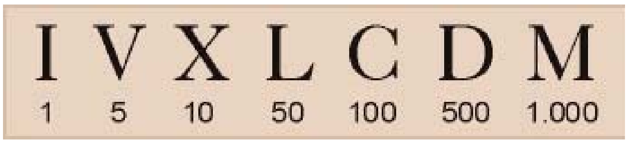
2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 708 544 b) 67 339 001 c) 5 092 175 d) 9 847

3. Razona por qué, en el número natural 77 777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias? I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1 000.



Números romanos

Ejemplo:

- El número MDL equivale en el sistema decimal al 1 550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1 555, pero las cifras M, D, y L siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Actividades propuestas

4. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:

a) MDCV b) MMMCCXXXIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII

video

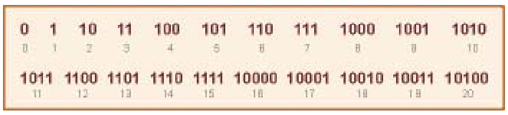
¿Quién inventó el CERO? Las matemáticas no podrían funcionar sin el cero, el signo numérico de valor nulo. Es pieza fundamental para las operaciones algebraicas y clave del mundo digital. Pero, ¿sabes cuándo se empezó a usar? ¿Cuál es el origen de este símbolo? Eduardo Sáenz de Cabezón:

https://www.youtube.com/watch?v=MOtCBPXO698

Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo.

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas, el 0 y el 1



Cifras del sistema binario

Actividades propuestas

5. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.

1.2. Los números triangulares, cuadrados, pentagonales…

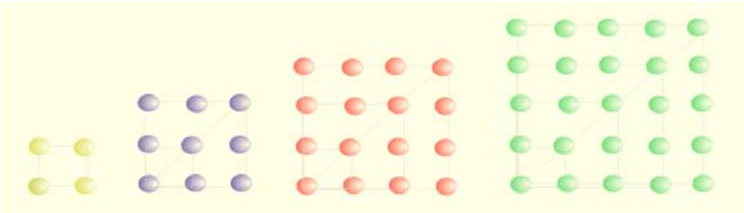
Los griegos, y en particular los pitagóricos solían representar los números mediante piedrecitas, cálculos, sobre la arena y los ordenaban formando dibujos geométricos poligonales.

Si los ordenas formando triángulos obtienes los números triangulares:

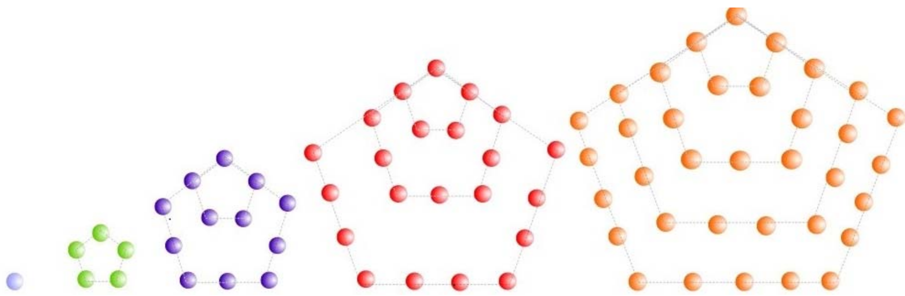
Observa que los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15….

- Añade 3 números triangulares más.

Si los ordenamos formando cuadrados obtienes los cuadrados perfectos que ya conoces: 1, 4, 9, 16, 25…



Se pueden ordenar formando pentágonos:



Los números pentagonales son: 1, 5, 12, 22, 35…

Y así con otros polígonos.

Estos números se usaron en la *Escuela Pitagórica* asociando al número una imagen geométrica.

Actividades propuestas

6. Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar *n*. Ya sabes que C_n es igual a n^2: $C_n = n^2$ Comprueba que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.

7. Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3… Exprésalo de forma general.

8. Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.

9. Dibuja tres números hexagonales.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Números enteros

Existen ocasiones de la vida cotidiana en que es preciso usar números distintos de los naturales, números positivos y negativos. Los números naturales no resultan ser suficientes.

Recuerda que:

Los **números enteros** son una ampliación de los números naturales:

- Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5…
- Los enteros negativos van precedidos del signo –: –1, –2, –3….
- El cero es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, \ldots\}$$

Al escribir un número entero positivo no se suele escribir su signo: + 2 = 2; +6 = 6.

Ejemplo:

- Juan está trabajando y el primer mes gana 1 000 euros, pero gasta 500 euros, por tanto, Juan tiene *en total* 1 000 − 500 = 500 €. Sin embargo, si el primer mes gana 1 000 pero sus gastos son mayores (alquiler del piso, impuestos…) y ascienden a 2 000 euros, se dice que *perdió en total* 2 000 – 1 000 = 1 000 euros. Unas veces existe una *ganancia* neta, y otras una *pérdida*, dependiendo de si las ganancias fueron mayores que los gastos o viceversa. Estas dos posibilidades se pueden expresar utilizando el signo de los números negativos (o positivos): en el primer caso ganó en total 1 000 – 500 = +500 euros, y en el segundo ganó en total 1 000 – 2 000 = – 1 000. Euros. Así, se entiende que una pérdida es una *ganancia negativa*.

video

¿Qué son realmente los Números Reales? Repasa los números naturales, enteros, racionales…

https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ

Los números negativos aparecen al considerar:

- El capital de una empresa que ha quebrado.
- Temperaturas por debajo de cero grados.
- Fechas antes de Cristo.
- Profundidad de un submarino bajo el nivel del mar.
- Se dice "*las seis menos cinco*" o las "*ocho menos veinte*".

Valor absoluto de un número

La distancia que separa un número del cero se define como **valor absoluto** del número.

- Es siempre un número positivo (o cero).
- Se escribe entre dos barras **| |**.

$|+6| = 6$

$|-3| = 3$

Ejemplo:

- El valor absoluto de +4, es 4, y se escribe: |+4| = 4;
- El valor absoluto de –9.3 es 9.3 y por tanto |–9.3| = 9.3, del mismo modo:
- |+23.5| = 23.5 y |–5/6| = 5/6.

Actividades propuestas

10. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:

a) Un submarino navega a 345 m de profundidad.

b) Hoy el termómetro marcaba 15 °C.

c) El coche estaba en el sótano 5.

d) Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo.

11. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:

a) Me he quedado sin dinero.

b) Miguel nació en el año dos mil.

c) El garaje está en el tercer sótano.

12. Indica el significado de los números –4, 0 y +7 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un garaje b) En una temperatura c) En una cuenta.

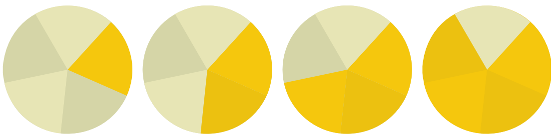
13. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+43| b) |–7.2| c) | 0 | d) |–81.7|

1.4. Fracciones

Los objetos matemáticos llamados **fracciones** permiten que las personas se entiendan al hablar de trozos, partes o porciones, tanto si se ha troceado en porciones idénticas como si son de diferentes tamaños.

Una fracción es el cociente de dos números enteros.



Comencemos con un ejemplo.

- Si dividimos un bizcocho en 5 partes iguales, cada porción es una de las cinco partes en las que hemos dividido el bizcocho. Escribiremos $\frac{1}{5}$ para representar cada trozo, es decir, cada una de las cinco quintas partes del bizcocho. Si colocamos en una bandeja tres de esas porciones, sobre la bandeja habrá tres quintas partes de bizcocho: $\frac{3}{5}$

El bizcocho completo puede representarse de la siguiente forma $\frac{5}{5}=1$ ya que está formado por cinco quintas partes.

En general, una ***fracción*** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto *m* como *n* son números enteros. Para referirnos a ella diremos *"m partido de n"*; *m* recibe el nombre de ***numerador*** y *n* es el ***denominador***.

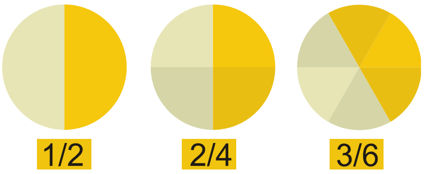
Para valores bajos del denominador, disponemos de denominaciones alternativas:

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$\frac{1}{2}$, un medio $\frac{2}{3}$, dos tercios $\frac{3}{4}$, tres cuartos $\frac{4}{5}$, cuatro quintos $\frac{3}{10}$, tres décimos

A partir del valor 11 del denominador: $\frac{7}{11}$, siete onceavos $\frac{11}{23}$, once veintitresavos

Una pregunta natural que surge es la siguiente: ¿es posible, o tiene sentido, que sea mayor el numerador que el denominador? La respuesta es afirmativa, sí.



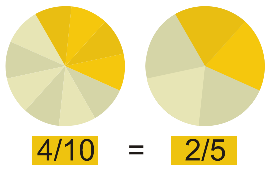
Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias.**

Reducción de una fracción. Fracciones irreducibles

Dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ son **equivalentes** si $m \cdot q = n \cdot p$

Las fracciones 1/2 y 2/4 son **equivalentes** pues representan la misma proporción. Es lo mismo media tarta que dos cuartos de tarta.

A partir de una fracción *m*/*n*, si *r* es cualquier número natural entonces la fracción **(*m*·*r*)/(*n*·*r*)** es **equivalente** a *m*/*n*: $\frac{m \cdot r}{n \cdot r} = \frac{m}{n}$



Ejemplo:

- Una fracción equivalente a 1/3 es, por ejemplo, 10/30, ya que $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{10}{30}$

Anteriormente dijimos que 1/2 y 2/4 son fracciones equivalentes. Por la misma razón, otras fracciones equivalentes son 3/5, 6/10 y 24/40 puesto que $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$, $\frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{24}{40}$, $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$.

Una manera alternativa de destacar estas relaciones consiste en decir que las fracciones 3/5 y 6/10 son reducciones de la fracción 24/40, mientras que 3/5 es una reducción de 6/10. Podemos intuir que la fracción 3/5 no puede reducirse más, es una **fracción irreducible**.

Obtendremos la mayor reducción de una fracción *p/q* al dividir tanto *p* como *q* entre su **máximo común divisor**.

Una fracción es **irreducible** cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.

Ejemplo:

- Una reducción de 24/40 es 6/10, pues la obtenemos al dividir tanto 24 como 40 entre 4. Como el máximo común divisor de 24 y 40 es 8, la mayor reducción de la fracción 24/40 es 3/5. Al ser el máximo común divisor de 3 y 5 igual a 1, la fracción 3/5 es irreducible, tal y como era de esperar.

Ejemplo:

- En ocasiones, una fracción se reduce a un número natural como, por ejemplo, la fracción 30/6, ya que el máximo común divisor de 30 y 6 es igual a 6, y al dividir 30, el numerador, entre 6 obtenemos 5.

Dos fracciones son equivalentes si se reducen a una misma fracción irreducible.

Actividades propuestas

14. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

15. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

16. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible: a) $\frac{24}{18}$ b) $\frac{21}{49}$ c) $\frac{7}{7}$

17. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{11}$ y $\frac{33}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$

18. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{4}$

19. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$

20. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\frac{-1}{5}$ b) $\frac{9}{-4}$ c) $\frac{-3}{7}$ d) $\frac{2}{-15}$

1.5. Expresiones decimales

Pero hay otras formas de expresar cantidades que no se corresponden con cantidades completas, como por ejemplo, el precio de un producto: 3.25 euros.

Una **expresión decimal** consta de dos partes:

- su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma
- y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma

La parte decimal indica porciones que hay que añadir a la parte entera dividiendo la unidad en 10, 100, 1 000 … partes.

Ejemplos: $\mathbf{1.3 = 1 + \frac{3}{10}}$ $\mathbf{1.03 = 1 + \frac{3}{100}}$

Actividades propuestas

21. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

Conversión de una fracción a expresión decimal

Dada una fracción se obtiene su expresión decimal, dividiendo.

Ejemplos: $\frac{93}{8} = 11.625$ $\frac{46}{11} = 4.18181818181\ldots.$

Recuerda que cualquier fracción tiene un desarrollo decimal **exacto** o **periódico**.

Las expresiones decimales periódicas cuyo desarrollo decimal periódico comienza inmediatamente después de la coma se llaman **periódicos puros**. Si el periodo se encuentra más allá de la coma estamos ante un número decimal **periódico mixto** y la parte decimal situada entre la coma y el periodo se llama **ante periodo**.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo: $\frac{178}{70} = 2.5\overline{428571}$

Hemos llegado a la expresión decimal de la fracción 178/70. Es el número decimal de parte entera 2, ante periodo 5 y periodo 428571.

Actividades propuestas

22. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes: a) $\frac{97}{2}$ b) $\frac{345}{4}$

23. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{25}{12}$

Conversión de una expresión decimal en fracción

Si la expresión decimal es **exacta**, basta dividir por una potencia de 10 de forma que desaparezca la coma.

Ejemplo: $31.528 = \frac{31528}{1000}$

Si es **periódico puro**, veamos la forma de proceder: $X = 7.\overline{31}$

$$100 \cdot X = 100 \cdot 7.\overline{31} = 100 \cdot 7.31313131\ldots.. = 731.313131\ldots.. = 731.\overline{31}$$

$$100 \cdot X - X = 731 - 7 \Rightarrow 99 \cdot X = 724 \Rightarrow X = \frac{724}{99}$$

Un número decimal **periódico puro** se convierte en aquella fracción que tiene por numerador, la diferencia entre el número formado por la parte entera y el periodo menos la parte entera, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo.

Ejemplos: $0.\overline{5} = \frac{5}{9}$ $0.\overline{934} = \frac{934}{999}$ $4.\overline{6} = \frac{46-4}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$

Si es **periódico mixto**, veamos la forma de proceder con un ejemplo:

$$X = 7.6\overline{31}$$

$$10 \cdot X = 10 \cdot 7.6\overline{31} = 76.31313131\ldots..$$

$$1000 \cdot X = 1000 \cdot 7.6\overline{31} = 7631.313131\ldots..$$

$$(1000 - 10) \cdot X = 7631 - 76 \Rightarrow X = \frac{7631-76}{990} = \frac{6555}{990}$$

Una expresión decimal **periódica mixta** se convierte en aquella fracción que tiene por numerador a la diferencia entre, el número natural formado por la parte entera, el ante periodo y el periodo, menos el número natural formado por la parte entera y el ante periodo, y por denominador al número formado por una cantidad de nueves igual al número de cifras del periodo seguido de una cantidad de ceros coincidente con el número de cifras del ante periodo.

Ejemplo: $0.3\overline{49} = \frac{349-3}{990} = \frac{346}{990}$ $8.07\overline{458} = \frac{807458-807}{99900} = \frac{806651}{99900}$

Observa que:

Si calculamos la suma $0.\overline{3}+0.\overline{6}$. Parece natural que

$$0.\overline{3}+0.\overline{6}=0.333333\ldots.. + 0.666666\ldots.. = 0.999999\ldots.. = 0.\overline{9}$$

Por otro lado $0.\overline{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ y $0.\overline{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. Así que sumando $0.\overline{3}+0.\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ de modo que $1=0.\overline{9}=\ 0.999999\ldots..$

1.6. Aproximaciones, truncamientos y redondeos

- Si vamos a pagar con un billete de 50 euros una compra que asciende a 32.69 euros, esperamos una vuelta de 17.31 euros. Si en la caja no hay monedas de un céntimo, nos propondrán que demos por buena una vuelta de 17.30 euros. Es una *aproximación a la baja*.
- Si realizamos una compra por un importe de 12.44 euros y la saldamos con 12.45 euros estamos ante una *aproximación al alza*.

Una manera de realizar una aproximación a la baja de un número decimal es el ***truncamiento***. Consiste en decidir cuántas cifras decimales queremos considerar y, simplemente, eliminar las restantes a partir de la última cifra decimal mostrada.

Otra forma de realizar una aproximación es a través de un ***redondeo***. Éste consiste en decidir cuántas cifras decimales va a tener la aproximación, realizar el truncamiento oportuno y, en función de cuál sea la primera cifra decimal no considerada, mantener o incrementar en una unidad la parte decimal del truncamiento. El criterio para efectuar, o no, dicho incremento es el siguiente:

- Cuando la primera cifra decimal eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, el **redondeo** coincide con el truncamiento.
- Si la primera cifra decimal no considerada es un 5, 6, 7, 8 o 9, el **redondeo** se obtiene al aumentar en una unidad la parte decimal del truncamiento.

Ejemplo:

- Redondeamos y truncamos la expresión decimal 45.98351.

	Redondeo	***Truncamiento***
Décimas	46.0	45.9
Centésimas	45.98	45.98
Milésimas	45.984	45.983
Diezmilésimas	45.9835	45.9835

Actividades propuestas

24. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

a) 11.1234 b) $6.\overline{6}$ c) $9.3\overline{50}$ d) $8.\overline{71}$ e) $8.334\overline{8}$ f) $2.64\overline{08}$

25. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

a) 11.1234 b) $6.\overline{6}$ c) $9.3\overline{50}$ d) $8.\overline{71}$ e) $8.334\overline{8}$ f) $2.64\overline{08}$ g) $3.99\overline{96}$

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

2.1. Representación en la recta numérica

Recuerda que:

Para representar **números enteros** en la recta numérica:

1. Debemos trazar una recta horizontal y marcamos el **cero**, que se llama **origen**
2. Dividimos la recta en segmentos iguales, de longitud 1
3. Colocamos los números positivos a partir del cero a la derecha y los números negativos a partir del cero a la izquierda.

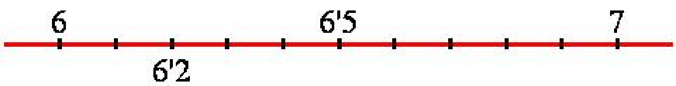
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Ejemplo:

- Representa en una recta numérica: –2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 y 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

- Para representar un número decimal como 6.2 en primer lugar nos fijamos en su parte entera, 6, lo que nos informa de que 6.2 se encuentra entre los números naturales 6 y 7. Como su parte decimal posee una sola cifra, son 2 décimas, deberemos dividir el segmento de extremos 6 y 7 en diez partes iguales para, finalmente, situar 6.2 sobre la segunda de las marcas.

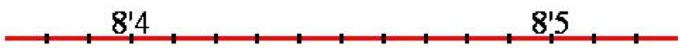


Actividades propuestas

26. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números:

–8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

27. Sitúa en la siguiente recta los números 8.43, 8.48, 8.51 y 8.38



2.2. Comparación de números

Al representar los números en la recta numérica quedan **ordenados**.

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica es mayor, y cuanto más a la izquierda esté situado es menor.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- –7 está más a la izquierda que +4 por tanto –7 es menor que +4. Se escribe –7 < +4

El signo **<** se lee "menor que" y el signo **>** se lee "mayor que".

Decidir si un número decimal es mayor o menor que otro es bastante sencillo. Si sus partes enteras son distintas, ellas ya determinan cuál es mayor.

Ejemplo:

- 13.66 es mayor que 11.4, pues el primero tiene parte entera 13 y el segundo 11.

Si tienen igual parte entera pasamos a mirar su primera cifra decimal, la de las decenas. Si son diferentes, ya podemos decidir.

Ejemplo:

- 7.25 es menor que 7.3, ya que tienen la misma parte entera y la primera cifra decimal de 7.3 es mayor que la primera cifra decimal de 7.25.

En general, si coinciden las partes enteras buscamos la primera cifra decimal en la que los números difieren. La que sea mayor pertenecerá al mayor número decimal.

Ejemplo:

- Podemos ordenar números utilizando los signos anteriores:

$$-7.8 < -3.5 < -2.9 < -1.3 < 0 < 2.7 < 4.4 < 8.2.$$

O bien:

$$8.2 > 4.4 > 2.7 > 0 > -1.3 > -2.9 > -3.5 > -7.8.$$

- Parece raro que el 0 sea mayor que otro número, pero piensa que se tiene más si no se tiene nada, que si se debe dinero. Si el termómetro marca 0 °C no hace mucho calor, pero menos calor hace si marca –10 °C. Es decir: 0 > –10

Actividades propuestas

28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

29. Completa en tu cuaderno con el signo **<** (menor) o **>** (mayor) según corresponda:

a) –13.6   –67.1   b) –80.2   +94.5   c) +37   +48   d) +52   –64   e) –21 |–25|

30. Ordena de menor a mayor

a) +5.1, –4.9, –1.5, +18.2, 5.17   b) +6.9, –7.2, –8.5, –5.9, –7.21

31. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) –0.872 y –0.8721   b) 3.58 y |–3.57| c) 7.0001 y 7.00001   d) –4.78 y –8.92

32. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6.147 y menores que 6.2.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

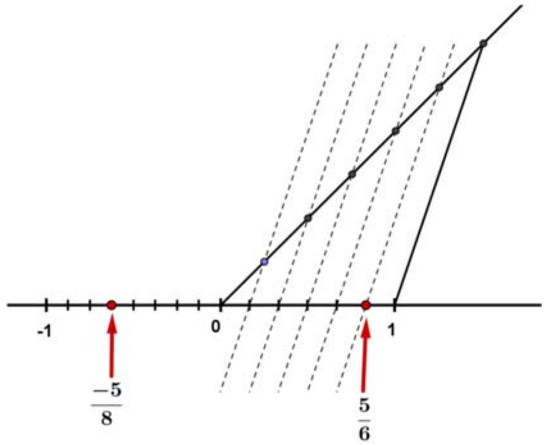
2.3. Representación de fracciones

a) Si la fracción es propia:

Por ejemplo

- *Representa la fracción* 5/6: El valor está entre 0 y 1, por tanto dividimos la primera unidad en 6 partes iguales y tomamos 5.

En la figura se indica cómo hacerlo de forma exacta usando el ***Teorema de Tales***. Trazamos una recta oblicua cualquiera que pase por 0, marcamos con el compás 6 puntos a igual distancia entre sí (la que sea, pero igual). Unimos el último punto con el 1 y trazamos paralelas a ese segmento que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua (las líneas discontinuas). Estas rectas paralelas dividen el intervalo [0, 1] en 6 partes iguales.



Fíjate que para dividir en 6 partes iguales sólo hay que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, siempre uno menos. Para dividir en 8 partes iguales marcamos 7 puntos intermedios.

Si la fracción es negativa se hace igual pero en el intervalo [–1, 0].

En la figura hemos representado –5/8, hemos dividido el intervalo [–1, 0] en 8 partes iguales y hemos contado 5 empezando en el 0. Asegúrate de entenderlo y si no es el caso pregunta. *Por cierto, la flecha apunta al punto y no al espacio que hay entre ellos.*

Si queremos representar la fracción propia *a/b* **se divide la primera unidad en "*b*" partes iguales y se cuentan "*a*" divisiones.**

En caso de ser **negativa** se hace igual pero contando desde 0 hacia la **izquierda.**

b) Si la fracción es impropia:

Actividades resueltas

- *Representamos* 13/6. Lo primero es escribirla en su forma mixta, $\frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6}$, ahora es fácil representarla, nos vamos al 2, la unidad que va del 2 al 3 la dividimos en 6 partes iguales y tomamos 1 (ver imagen).

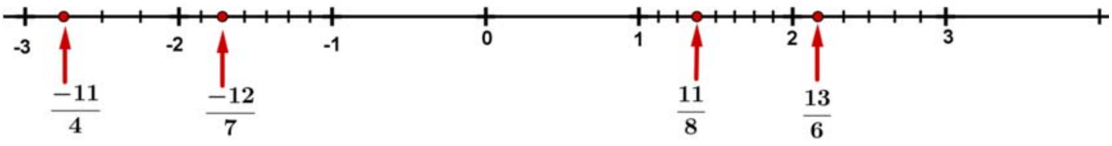
  Igual para $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$, nos vamos al 1 y la unidad que va del 1 al 2 la dividimos en 8 partes iguales y tomamos 3.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si la fracción es negativa procedemos así:

- *Representamos* $\frac{-12}{7} = -\left(1+\frac{5}{7}\right) = -1-\frac{5}{7}$, nos vamos al –1, la unidad que va del –1 al –2 la dividimos en 7 partes iguales y contamos 5 hacia la izquierda empezando en –1.

  Representamos $\frac{-11}{4} = -\left(2+\frac{3}{4}\right) = -2-\frac{3}{4}$, nos vamos al –2, dividimos en 4 partes iguales y tomamos 3, contando hacia la izquierda y empezando en –2 (ver imagen).

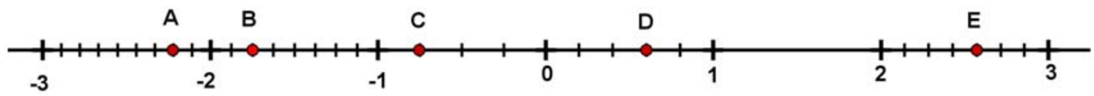


Actividades propuestas

33. Representa en la recta numérica las fracciones: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

34. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

35. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos *A, B, C, D* y *E,* expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos *A, B* y *E*.



Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. OPERACIONES

3.1. Suma y resta. Propiedades

Suma de números enteros

Recuerda que:

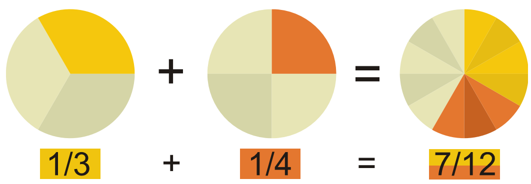
Para **sumar** dos números enteros de igual signo se suman sus valores absolutos y se pone el signo de los sumandos

Para **sumar** dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto

Ejemplo:

- Tienes 75 € y te dan 50 € entonces tienes 125 €: **+75 + 50** = **+125.**
- Debes 75 € y gastas 50 € entonces acumulas una deuda de 125 €: **–75 – 50** = **–125.**
- Tienes 75 € pero debes 50 € entonces tienes 25 €: **–50 + 75 = +25.**
- Debes 75 € y tienes 50 € entonces debes 25 €: **–75 + 50 = –25.**

Suma de fracciones



Recuerda que:

Para realizar la suma de dos fracciones debemos conseguir que tengan el mismo denominador buscando fracciones equivalentes. Así, para sumar $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ deberemos buscar y encontrar dos números naturales *r* y *s* que nos transformen cada una de las anteriores fracciones en otras **equivalentes**, (*m*·*r*)/(*n*·*r*) y (*p*·*s*)/(*q*·*s*), de forma que las nuevas fracciones tengan el **mismo denominador**, es decir, que ***n*·*r* = *q*·*s***, en cuyo caso: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{q\cdot s}=\frac{m\cdot r}{n\cdot r}+\frac{p\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m\cdot r+p\cdot s}{n\cdot r}$

Como hay muchas parejas de números naturales *r* y *s* que hacen posible esa igualdad, buscaremos los más pequeños.

Puesto que *n*·*r* es múltiplo de *n* y *q*·*s* es múltiplo de *q*, alcanzaremos *r* y *s* a partir del **mínimo común múltiplo** de *n* y *q*.

$$n\cdot r=q\cdot s=m.c.m.(n,q)$$

El valor de *r* resulta de dividir ese mínimo común múltiplo entre *n* y el de *s* se obtiene al dividir el mínimo común múltiplo entre *q*.

Ejemplo: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}$

Los denominadores son diferentes, 4 y 6. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 4 nos da 3 y al hacerlo entre 6 obtenemos 2. $\frac{7}{4}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{21}{12}$ $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$

Finalmente: $\frac{7}{4}+\frac{5}{6}=\frac{21}{12}+\frac{10}{12}=\frac{31}{12}$

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Suma de expresiones decimales

Suma de expresiones decimales. Ahora basta con que las partes decimales tengan el mismo número de cifras. Si no lo tienen desde un principio, añadimos los ceros que sean necesarios para ello.

Ejemplos: $67.7 + 71.15 = 67.70 + 71.15 = 138.85$ $44.39 + 23 = 44.39 + 23.00 = 67.39$

- Si una persona tiene 8 euros y 42 céntimos de euro y otra tiene 7 euros y 94 céntimos ¿cuánto dinero tienen entre las dos?

Tenemos que sumar. En total tienen 8 + 7 = 15 euros y 42 + 94 = 136 céntimos. Pero, como 100 céntimos de euro es lo mismo que 1 euro, 136 céntimos de euro es igual a 1 euro más 36 céntimos. De esta forma, esas dos personas tienen 15 + 1 = 16 euros y 36 céntimos.

Propiedades de la suma

Conmutativa. No importa en qué orden sumemos dos números:

$$a + b = b + a$$

Ejemplo: $714.66 + 2.47 = 717.13$ $\quad 2.47 + 714.66 = 717.13$

Asociativa. Nos permite sumar más de dos números agrupándolos como queramos, de dos en dos.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo: $95.7 + 30.02 + 17.4 = (95.7 + 30.02) + 17.4 = 125.72 + 17.4 = 143.12$

$$95.7 + 30.02 + 17.4 = 95.7 + (30.02 + 17.4) = 95.7 + 47.42 = 143.12$$

Elemento neutro. El número 0 sumado a cualquier otro número no lo altera.

Ejemplo: $0 + 78.324 = 78.324 = 78.324 + 0$

Opuesto de un número: El **opuesto** de un número es otro número de igual valor absoluto y distinto signo que verifica que a + Op(+a) = 0.

Se escribe: Op(+a) = –a, Op(–a) = +a o bien: – (+a) = –a, –(–a) = +a

Ejemplo:

- Op(+5) = –5 Op(–7.3) = +7.3 – (+5) = –5 –(–7.3) = +7.3.

Resta

Para **restar** dos números se suma al primero el opuesto del segundo.

El signo **menos delante de un paréntesis** cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

Actividades propuestas

36. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) (+12.8) + (+57) + (–4.6) b) (–83.2) – (–24.1) + (–10.5) c) (–35) + (–48) + (+92)

37. Efectúa estas operaciones

a) (+3.8) + (+4.2) – (–52) b) (–614) + (–77) + (–811) c) (–97) – (–12) + (+26) d) (–45) + (+52)

38. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

39. Un avión vuela a 3 672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?

40. Arquímedes nació en el año 287 a. C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?

41. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.

42. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

Arquímedes

43. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100}+\frac{13}{24}$

44. Calcula: a) $\frac{5}{14}-\frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6}-\frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100}-\frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21}-\frac{7}{3}$

3.2. Producto y cociente. Propiedades

Producto de números enteros

Recuerda que:

Para **multiplicar** dos números enteros se debe:

1º) Multiplicar sus valores absolutos

2º) Aplicar la **regla de los signos** siguiendo lo siguiente:

Es decir, se asigna el signo **+** si ambos factores tienen el mismo signo, y el signo **–** si tienen distinto signo.

+ · + = +

– · – = +

+ · – = –

– · + = –

Ejemplos:

(+7) · (+3) = +21 **(–1) · (–1) = +1** **(+8) · (–4) = –32** **(–2) · (+9) = –18**

- Luis gana 1000 euros al mes, si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará al cabo de 7 meses?

  (+1 000) · (+7) =+7 000 € ahorrará al cabo de 7 meses.

- El recibo mensual es de 65 euros al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 4 meses?

  (–65) · (+4) = –260 € gastará al cabo de 4 meses.

- Álvaro gasta 12 euros al mes en golosinas. Deja de comprarlas durante 5 meses. ¿Cuánto ha ahorrado? **(–12) · (–5) = +60 €** ahorrará al cabo de 5 meses.

Producto de fracciones

Para **multiplicar** dos fracciones multiplicamos sus numeradores entre sí y lo mismo hacemos con los denominadores: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo: $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot4}{8\cdot7}=\frac{20}{56}$

Podemos simplificar, reducir, el resultado: $\frac{20}{56}=\frac{4\cdot5}{4\cdot14}=\frac{5}{14}$

Producto de expresiones decimales

Para realizar el producto de dos expresiones decimales se debe:

- Multiplicar, en primer lugar, los números ignorando la coma que posee cada uno de ellos.
- Al resultado de ese producto le ponemos una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplos: $5.7\cdot3.3=18.81$

- 5.7·3.3 = 18.81 93.05·72.4 = 6 736.820 = 6 736.82 44.16·8 = 353.28

Propiedades de la multiplicación.

Conmutativa. No importa en qué orden multipliquemos dos números.

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Ejemplos: 3 · 5 = 5 · 3 = 15 3 · (–5) = (–5) · 3 = –15 1.552·5.9 = 5.9·1.552 = 9.1568

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}=\frac{11}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{77}{45}$$

Asociativa. Nos permite multiplicar más de dos números agrupándolos como queramos de dos en dos.

$$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Ejemplos: (2 · 3) · 5 = 2 · (3 · 5) = 30 (2 · 3) · (–5) = 2 · (3 · (–5)) = –30

5.7·3.2·7.14 = (5.7·3.2)·7.14 = 5.7·(3.2·7.14) = 130.2336 $\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}\cdot\left(\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{77}{90}$

Elemento neutro. El número 1 multiplicado por cualquier otro número, no lo altera.

$$1\cdot a=a=a\cdot1$$

Ejemplo: 2·1 = 2 1·(–5) = (–5) 7.3512·1 = 7.3512 $1\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{9}$

Observa que:

En ocasiones existe un número que multiplicado por otro nos da la unidad. Cuando ese número existe, se llama inverso. Dentro del conjunto de los números naturales y de los números enteros, no existe el elemento inverso. Pero con las fracciones, sí.

Ejemplo: $\frac{5}{11}\cdot\frac{11}{5}=\frac{55}{55}=1$ $\frac{1}{11}\cdot\frac{11}{1}=\frac{11}{11}=1$ $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{10}=1$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Cuando en una multiplicación uno de los factores es la suma de dos números, como, por ejemplo,

$$8.3 \cdot (6.5 + 1.04)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$6.5 + 1.04 = 6.50 + 1.04 = 7.54$ $\quad\quad 8.3 \cdot 7.54 = 62.582$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$8.3 \cdot (6.5 + 1.04) = (8.3 \cdot 6.5) + (8.3 \cdot 1.04) = 53.95 + 8.632 = 62.582.$$

Comprobemos que obtenemos el mismo resultado:

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

En general, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma con fracciones nos dice:

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)$$

Conviene comentar que esta propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente denominamos **sacar factor común**:

$$\frac{12}{5}+\frac{22}{15}=\frac{2\cdot 6}{5}+\frac{2\cdot 11}{5\cdot 3}=\left(\frac{2}{5}\cdot 6\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{11}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(6+\frac{11}{3}\right)$$

Ejemplos:

a) 6 350 · 4 – 6 350 · 3 = 6 350 · (4 – 3) = 6 350 · 1 = 6 350

b) 635 · 2 + 3 · 635 = (2 + 3) · 635 = 5 · 635 = 3 175

c) 928 · 6 – 928 · 5 = 928 · (6 – 5) = 928 · 1 = 928

d) 928 · 7 + 928 · 3 = 928 · (7 + 3) = 928 · 10 = 9 280

e) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{58}{15}$

Actividades propuestas

45. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+35) · (+2) b) (+4) · (–72) c) (–8) · (–45) d) (–5) · (+67)

e) (+28) : (+2) f) (+27) : (–3) g) (–36) : (–2) h) (–54) : (+9)

46. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+721) · (+3) b) (+562) · (–3) c) (–915) · (–2) d) (–6) · (+72)

e) (+303) : (+3) f) (+505) : (–5) g) (–160) : (–4) h) (–704) : (+2)

47. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) (+2) · (+40) b) (+30) · (–2) c) (–60) · (–3) d) (–50) · (+8)

e) (+80) : (+4) f) (+18) : (–3) g) (–15) : (–5) h) (–70) : (+7)

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

48. Calcula: a) $\frac{8}{22}\cdot\frac{3}{75}$ b) $6\cdot\frac{7}{11}$ c) $23\cdot\frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{3}$

49. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15}\cdot\frac{10}{12}$

50. Calcula: a) 7.3·2.54 b) 2.89·7.21 c) 3.54·5.2·6.8 d) 6.9·7.5·6.1

51. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 756 · 4 – 756 · 3 b) 350 · 8 + 350 · 2 c) 927 · 13 – 927 · 3 d) 700 · 33 – 700 · 3

52. Efectúa:

a) $9\cdot(4.01+3.4)$ b) $7.3\cdot(12+5.14)$ c) $2.9\cdot(25.8-21.97)$

53. Realiza los productos indicados:

a) $\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

54. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{8}\right)$

División de números naturales

Ejemplo:

- En el comedor del instituto las mesas son de 4 personas y en la clase de 1º de la ESO hay 35 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 8 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \hline 3 & 8 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

35 $\rightarrow$ Dividendo 4 $\rightarrow$ Divisor 8 $\rightarrow$ Cociente 3 $\rightarrow$ Resto

Además, como ya sabes, se verifica que: 35 = (4 · 8) + 3

Esta propiedad se verifica siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & C \end{array}$$

Se verifica que:

D* = (*d* · *c*) + *r

Dividendo es igual a divisor por cociente más el resto

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- El cociente entre 3 658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3\,658 = 65 \cdot 56 + 18$$

Ejemplos:

- 27/3, 27: 3 y $\frac{27}{3}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 27 entre 3.

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

- Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo. Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65 la división es exacta.

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.6666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

Cociente de números enteros

Para **dividir** dos números enteros se debe:

1º) Calcular el cociente de sus valores absolutos

2º) Asignar al resultado un signo mediante la siguiente regla:

Ejemplo:

(+36) : (+6) = +6

(–32) : (–4) = +8

(+27) : (–3) = –9

(–49) : (+7) = –7

+ : + = +

– : – = +

+ : – = –

– : + = –

Actividades propuestas

55. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$

8 214 : 26   b) 271 093 : 452   c) 1 112 220 000 : 385   d) 274 : 25

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Jerarquía de operaciones

En la expresión: 5 · 4 + 3, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una **prioridad** en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería: 5 · 4 + 3 = 20 + 3 = 23

¿Y en 9 : 3 · 2? Son divisiones y multiplicaciones con igual prioridad. Podemos convenir que primero se realiza la primera operación, la que está más a la izquierda: 9 : 3 · 2 = 3 · 2 = 6.

Prioridad de operaciones:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **multiplicaciones** y **divisiones** y luego, las **sumas y restas.**

En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.

Ejemplo:

- Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

  (17 + 8) · 6 = 25 · 6 = 150　　　17 + 8 · 6 = 17 + 48 = 65

Notas

- Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: (21 · 2) + 30 resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.
- Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Ejemplo:

Jerarquía de operaciones	[(+7 – 5) · (+4 – 8 – 3)] + (– 27) : (–3) + 20
1) Se resuelven los paréntesis	[(+2) · (– 7)] + (– 27) : (–3) + 20
2) Se realizan multiplicaciones y divisiones	[– 14] + (+9) + 20
3) Se efectúan sumas y restas	Resultado = 15

Actividades propuestas

56. Realiza las siguientes operaciones:

a) +4 – (+5) · (-3)　　b) +6 + (–9) : (+2–5)　　c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)]

57. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6)　　b) –6 + (–7) : (+7)　　c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11 + (+7) · (+6 – 8)　　e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)]　　f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)]

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

- $7\,810\,000\,000\,000 = 7.81 \cdot 10^{12}$ — $0.000000000038 = 3.8 \cdot 10^{-11}$
- $500\,000 = 5 \cdot 10^5$ — $0.00002 = 2 \cdot 10^{-5}$
- Hay galaxias que están a 200 000 000 000 000 km de nosotros, y lo escribimos $2 \cdot 10^{14}$
- La masa de un electrón es aproximadamente de 0.000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9.11 \cdot 10^{-28}$

Actividades resueltas

- En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.

Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9 223 372 036 854 775 808 que da un poco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4.29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$

Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

Ejemplo:

- $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$
- $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$
- Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica: $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

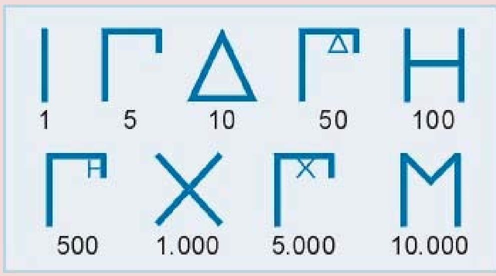
Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

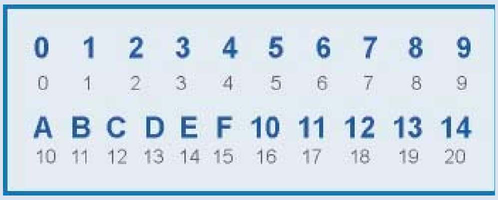
CURIOSIDADES. REVISTA

Sistemas de numeración



Números griegos clásicos

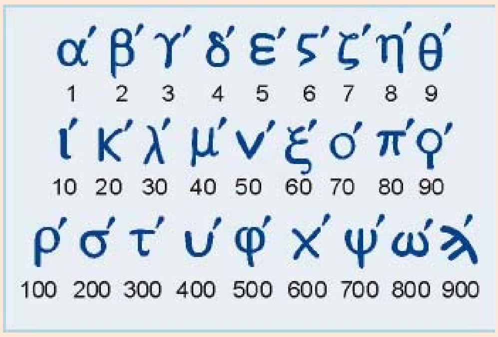
Como sabes, en Babilonia, hace más de cinco mil años, se usaba un sistema de numeración en base ***doce*** y uno en ***base 60***. ¡Imaginas cuántos dígitos hacían falta! Hoy todavía perviven cuando decimos que el año tiene 12 meses, o que una hora tiene 60 minutos y un minuto, 60 segundos.



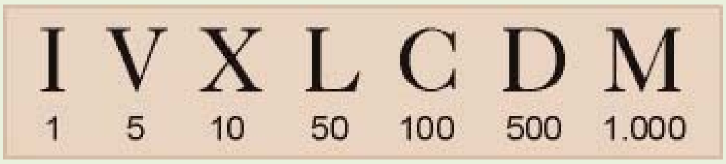
Sistema en base 16 que se usa en los ordenadores

Los ordenadores utilizan un sistema de numeración binario, con sólo dos dígitos, el 0 y el 1.

Aunque también se usa un sistema en base **16**, que se llama **sistema hexadecimal**.



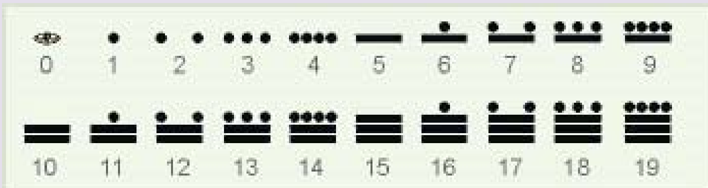
Números griegos



Números romanos

Números árabes

Números chinos



Números mayas

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Fracciones en Egipto

En el Antiguo Egipto y en Babilonia, hace más de 5000 años, ya se usaban fracciones. En Egipto usaban fracciones unitarias, es decir, con numerador 1: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… El Ojo de Horus es un jeroglífico que representa las fracciones unitarias de denominador una potencia de 2:

 = 1/2,  = 1/4,  = 1/8,

 = 1/16,  = 1/32,  = 1/64

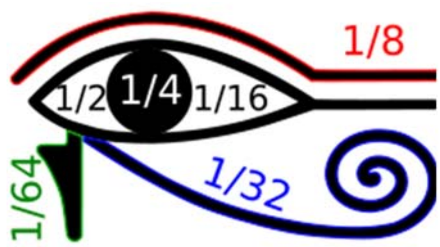


Imagen de Wikipedia. Si quieres saber más busca Ojo de Horus en Wikipedia.

Historia de los números enteros

Los chinos utilizaban los números negativos hace más de dos mil cuatrocientos años, ya que eran capaces de representar con varillas negras los números negativos y con rojas los positivos.

Los matemáticos hindúes usaban "los bienes", "las deudas" y "la nada".

Sin embargo en Europa la historia de la aceptación como números de los negativos fue un proceso que duró más de mil años, lleno de avances y retrocesos. Se tardó mucho en considerar a los negativos como números. En el siglo XVII aparecen, en el Diccionario Matemático, como ***raíces falsas***.

He aquí algunas frases de personas famosas:

- Girard (1 590 - 1 639): *¿Por qué esas soluciones **imposibles**?*
- Descartes (1 596 - 1 650): *No pueden existir números menores que nada*.
- Stendhal (1 783 - 1 842): *Cual no sería mi desconcierto cuando nadie podía explicarme que menos por menos es más*.
- Newton (1 642 – 1 727): *Las cantidades son afirmativas, o sea, mayores que nada, o negativas, es decir, menores que nada. Así, en las cosas humanas las posesiones pueden llamarse bienes positivos pero las deudas bienes negativos...*
- D'Alembert (1 717 - 1 783) escribió en la Enciclopedia: *Decir que la cantidad negativa es menos que nada es expresar una cosa que no se concibe*.

Comenta con tus compañeros y compañeras las frases de arriba.

Producto

Aunque en primaria se usaba el símbolo "x", para denotar el producto lo simbolizaremos con un punto: ·

Leibniz escribió a *Bernoulli* diciendo que no le gustaba usar para el producto la letra x pues se confunde con la letra *x* y empezó a utilizar el punto.

Los ingleses, que no siguen a *Leibniz* porque le hace sombra a *Newton*, usan el punto en lugar de la coma para expresar los números decimales: 3.5 = 3.5 = 3.5, y los ordenadores también.

Cociente

La palabra "**cociente**" significa el resultado de hacer una "**división**" Los símbolos utilizados para representarlas son:

/, : , y la fracción: ─

La barra horizontal de fracción, ─, es de origen árabe, incómoda si se escribe en una única línea, por lo que, de nuevo *Leibniz*, la empezó a sustituir por la línea oblicua y los dos puntos.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa en el número	El 1 no tiene el mismo valor en 1 792 que en 5 431.
Jerarquía de las operaciones	-En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis y después lo demás. -En las operaciones sin paréntesis primero se realizan multiplicaciones y divisiones y luego sumas y restas. -En operaciones de igual prioridad, primero la de más a la izquierda.	La operación 2 + 3 · 7 tiene como resultado 23, no 35, que es lo que resultaría efectuando antes la suma que el producto.
Números enteros	Z = {... –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 ... }	
Ordenación de números	Es mayor el que esté más a la derecha en la recta numérica.	82.6 > 36.1 > 0 > –3 > –36.7 –2.59 < –1.3
Multiplicación	Se multiplican los valores absolutos y se aplica la regla de los signos: + · + = +; – · – = +; + · – = –; – · + = –	(+5) · (+6) = +30 (–1) · (–87) = +87 (–5) · (+6) = –30 (+9) · (–4) = –32
Fracciones equivalentes	Son fracciones que representan la misma proporción.	$\frac{10}{25}$ y $\frac{6}{15}$
Suma y resta de fracciones con distinto denominador	Transformamos cada fracción en otra equivalente de manera que las nuevas fracciones tengan el mismo denominador, y las sumamos.	$\frac{9}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}=$ $=\frac{27}{30}+\frac{14}{30}=\frac{27+14}{30}=\frac{41}{30}$
Fracción irreducible	Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1.	$\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{10}{9}$
Comparación de fracciones	Podemos determinar cuál es la mayor de dos o más fracciones reduciendo a común denominador.	$\frac{18}{11}<\frac{7}{4}<\frac{15}{8}$
Expresiones decimales	Constan de dos partes: su parte entera y su parte decimal.	21'375 Parte entera: 21 Parte decimal: 375
Expresión decimal exacta y periódica	Exacta: Su parte decimal tiene una cantidad finita de cifras. Periódico: Su parte decimal tiene una cantidad infinita de cifras que se repiten periódicamente. Pueden ser puros o mixtos	5.7767 Puro: $3.\overline{07} = 3.0707070\ldots.$ Mixto: $4.8\overline{13} =$ $4.813131\ldots.$

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) (34 + 52) · 5 b) 89 · 2 + 12 c) 55 + 67 · 3 + 13 d) 280 – 110 · 2 + 90

2. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 20) b) 8 · 22 – 20 c) 8 · 22 – 8 · 20 d) 8 · (22 + 20) e) 8 · 22 + 20

3. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) 23·6 + (35–13) :11–4·7 b) 48:4·8:2– (3·12):6 c) 357–23·7 +280:14 d) 20·9–11·7+265:53

Números enteros

5. Efectúa en tu cuaderno:

a. 6 – (8 + 10 – 1 – 2) b. 7 + (2 – 8 – 1) – (8 – 1 + 6)

c. (10 – 2 – 7) – (1 – 9 – 16) d. –(9 – 6 – 8) – (– 7 – 10 + 2)

6. Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:

a. 15 + [2 – 8 – (10 – 3)] b. 7 – [(5 – 8) – (6 – 12)] c. (5 – 14) – [2 – (2 – 4 – 3)]

d. (1 – 11 + 6) – [(3 – 2) – (4 – 16)] e. [8 – (4 – 16)] – [10 – (5 – 12)]

7. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a. (+4) · (+8) b. (–11) · (–5) c. (+12) · (–6) d. (–11) · (–10) e. (+16) : (+4)

f. (–12) : (+6) g. (+24) : (–3) h. (–81) : (–9) i. (–63) : (+7) j. (–30) : (–10)

8. Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:

a. 18 – 7 · 3 b. (18 – 7) · 3 c. (–12) – 4 · (–8)

d. [(–12) – 4] · (–8) e. (–5) · (+7) + (–3) f. (–5) · [(+7) + (–3)]

9. Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros:

–5, 7, –3, 0, –6, 1, 2

PROBLEMAS

10. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía. Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he tomado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?

11. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?

13. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?

14. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?

15. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?

16. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?

17. Hace una hora el termómetro marcaba –5 °C y ahora marca 5 °C. La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?

18. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja 12 °C a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?

19. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edifico que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?

20. Un juego

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre **3**.

–6		**+6**
	+2	
		0

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre **–70**.

		+7
	–7	
–7		**+2**

PROBLEMAS

21. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:

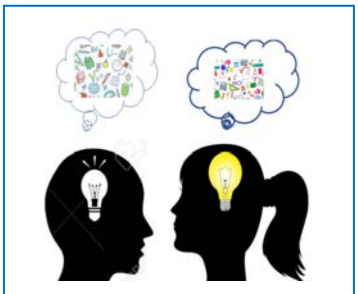
–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.

El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Fracciones

22. Realiza los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{\dfrac{5}{2}+\dfrac{2}{3}}{5}\cdot\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{4}{\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{3}}+1$ c) $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}}{\dfrac{5}{3}-\dfrac{9}{2}}-2$ d) $\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}\right):\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{8}\right)$



23. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.

24. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

25. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?

26. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

a) $\dfrac{8}{3}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{16}{7}$ e) $\dfrac{21}{4}$ f) $\dfrac{5}{6}$

27. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.

28. Representa en la recta numérica: a) $\dfrac{8}{3}$;b) $\dfrac{2}{5}$; c) $\dfrac{5}{2}$; d) $\dfrac{16}{7}$; e) $\dfrac{21}{4}$; f) $\dfrac{5}{6}$; g) 0.7; h) 3.5.

29. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\dfrac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\dfrac{5}{4}$ de 500?

30. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km^3, ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?

31. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los 3/7 y los robles, 1/3. ¿Qué espacio ocupan las encinas?

32. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los 3/5 de su sueldo y José los 5/7, ¿quién gasta más?

33. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\dfrac{7}{6}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{}{6}=\dfrac{}{6}$ b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{}{70}-\dfrac{}{70}=\dfrac{}{70}$

34. 1/3 de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos…) , en comer gastan 3/7, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?

35. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los 3/20 del total. Si se desperdician los 1/7, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?

36. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan 1/4 sin corregir, ¿cuánto tiempo deberá dedicar todavía?

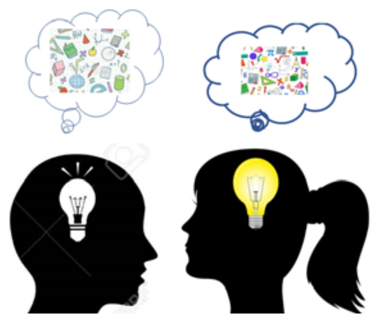
37. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\frac{\ }{5}$ b) $\frac{34}{\ }$ c) $\frac{\ }{2}$

38. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}$ c) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{16}:\frac{3}{10}$

39. Tres náufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada náufrago?



EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

40. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las repartan de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

Expresiones decimales

41. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $1.8\overline{7}$ dé como resultado un número natural.

42. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:

a) 9.235 b) 57.0001 c) $8.\overline{7}$ d) $3.52\overline{87}$ e) $5.99\overline{96}$

43. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:

a) 8.9351 b) $5.19\overline{90}$ c) $83.\overline{74}$ d) 77.992 e) $56.\overline{01}$

44. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.

45. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0.72 euros y cada lapicero 0.57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?

46. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1.53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 · (15 + 3)?

a) 303 b) 360 c) 330 d) 90

2. El resultado de la operación: $\{(-5 + 8) \cdot (-3 - 5) + (-7 + 1) : (+9 - 3)\}$ es:

a) –25/6 b) +24 c) –25 d) –5

3. Un termómetro ha subido 4 °C, luego ha bajado 6 °C, después ha bajado 8 °C y, por último, marca menos 9 °C. La temperatura inicial era:

a) –1 °C b) –19 °C c) +1 °C d) –14 °C

4. Al viajar desde una latitud de 9° Norte hasta otra de 20° Sur, la variación de latitud es:

a) 11° Sur b) 29° Norte c) 11° Norte d) 29° Sur

5. Si estás situada en el punto –15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5 d) +14 +12 – 1

6. Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$:

a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

7. El resultado de la operación $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) \cdot 2 + \frac{51}{10}$ es:

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3

8. Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{3}$

a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$

9. Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$:

a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$

10. Ordena de menor a mayor los números:
5.67; 5.68; 5.6666; 5.63; 5.5; 5.8; 5.6070.

Autores: Eduardo Cuchillo, Ana Lorente y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 3: POTENCIAS Y RAÍCES

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autora: Ana Lorente

Revisora: Irene García Saavedra

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

3. RAÍCES

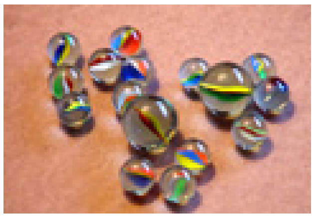
Para trabajar con números muy grandes, para calcular la superficie de una habitación cuadrada o el volumen de un cubo nos va a resultar útil a usar las potencias. En este capítulo repasaremos como operar con ellas.

Si conocemos la superficie de un cuadrado o el volumen de un cubo y queremos saber cuál es su lado utilizaremos las raíces. En este capítulo revisaremos lo que ya conoces para poder usarlas con algo de soltura.

Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6 500 km. Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3. Estima que, por ejemplo, caben 100 granos. ¡Ya sabes calcular cuántos hay! Pero en este capítulo aprenderás a escribir ese número tan grande.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

1. POTENCIAS



Recuerda que:

Ya conoces las potencias. En este apartado vamos a revisar la forma de trabajar con ellas.

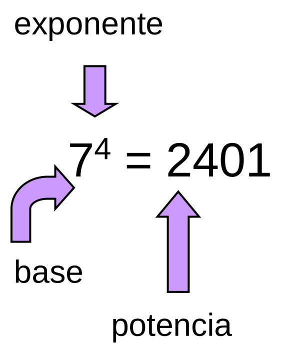
1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo:

- Juan guarda 7 canicas en una bolsa, cada 7 bolsas en una caja y cada 7 cajas en un cajón. Tiene 7 cajones con canicas, ¿cuántas canicas tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar 7 x 7 x 7 x 7 que lo puedes escribir en forma de potencia: 7^4, que se lee 7 elevado a 4.

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 2\,401 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$$



Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots \cdot a \qquad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Actividades propuestas

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) $1\,000^3$

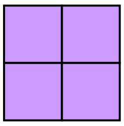
2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

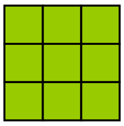
a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.

1.2. Cuadrados y cubos

Ya sabes que:

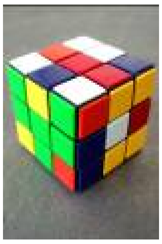
- Si un cuadrado tiene 2 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$. El área de este cuadrado es de 4 unidades. Y si tiene 3 cuadraditos por lado ¿Cuántos cuadraditos contiene ese cuadrado? El número de cuadraditos que caben es $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. El área de este cuadrado es de 9 unidades.





$100 = 2^2 \cdot 5^2$ es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es $2 \cdot 5 = 10$.
$4\,900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ es un cuadrado perfecto y su raíz es $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Son cuadrados perfectos.
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$81 = 3^2 \cdot 3^2$
¿Lo son también 121, 3 600 y 900?

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF



¿De cuántos cubitos está compuesto el cubo grande si hay 3 a lo largo, 3 a lo ancho y 3 a lo alto? El número de cubitos es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$. El volumen de este cubo es 27 unidades.

Recuerda que:

Por esta relación con el área y el volumen de las figuras geométricas, las potencias de exponente 2 y de exponente 3 reciben nombres especiales:

Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados** y las de exponente 3 se llaman **cubos**.

Actividades propuestas

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.

4. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

1.3. Lectura de potencias

Recuerda que:

Las potencias se pueden leer de dos maneras:

Ejemplo:

a) Así 3^2 se puede leer 3 elevado a 2 y también se lee 3 al cuadrado.

b) 11^3 se puede leer 11 elevado a 3 y también se lee 11 al cubo.

c) 6^4 se puede leer 6 elevado a 4 y también se lee 6 a la cuarta.

d) 27^5 se puede leer 27 elevado a 5 y también se lee 27 a la quinta.

1.4. Potencias de uno y de cero

Recuerda que:

Una potencia de cualquier base distinta de cero elevada a cero es igual a 1.

Ejemplo:

$9^0 = 1$ $8725^0 = 1$ $1^0 = 1$.

$5^0 = 1$

Uno, elevado a cualquier exponente, es igual a 1.

Ejemplo:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $1^{35} = 1$ $1^0 = 1$.

$1^{37} = 1$

Cero, elevado a cualquier exponente distinto de cero, es igual a 0.

Ejemplo:

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $0^{35} = 0$.

$0^{54} = 0$

Observación: 0^0 no se sabe cuánto vale, se dice que es una *indeterminación*.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Actividades propuestas

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.

6. Calcula mentalmente:

a) 1^{6562} b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782} e) 1^{1000} f) 9761^0 .

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

1.5. Potencias de 10. Notación científica.

Las potencias de base 10 tienen una propiedad muy particular, son iguales a la unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente:

Ejemplo:

$10^1 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

$$10^8 = 100\,000\,000$$

¿Sabrías hallar 10^7 sin hacer ninguna operación?

La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.

Recuerda que:

Esto nos permite expresar cualquier número en **forma polinómica** usando potencias de 10.

$$8\,735 = 8 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$$

Un número en **notación científica** se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.

$$\boldsymbol{a \cdot 10^n}$$

Ejemplo:

- Observa cómo se utiliza la notación científica en los siguientes ejemplos:

a) En la Torre Eiffel hay 2 500 000 remaches = $25 \cdot 10^5$ remaches

b) La masa de la Tierra es:

$$M_T = 5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ g} = 598 \cdot 10^{25} \text{ g}$$

c) La superficie del globo terrestre es de 500 millones de kilómetros cuadrados, luego es igual a: 500 000 000 km^2 = $5 \cdot 10^8$ km^2.

Actividades propuestas

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

a) $10^{\square} = 100\ 000$ b) $10^{\square} = 100\ 000\ 000$ c) $10^{\square} = 1\ 000$.

9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 82 345 b) 3 591 825 c) 700 098 d) 2 090 190.

10. Calcula:

a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.

11. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación, dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca **8 * * =**, ¿qué obtienes?

b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: **8 * * = = =**...

c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

2.1. Producto de potencias de igual base

Recuerda que:

Para calcular el **producto** de dos o más potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$7^3 \cdot 7^4 = 7^{3+4} = 7^7$$

Ejemplo:

- $6^2 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{2+3} = 6^5$

2.2. Cociente de potencias de igual base

Recuerda que:

El **cociente** de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base y de exponente, la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$8^7 : 8^4 = 8^{7-4} = 8^3$$

Ejemplo:

- $3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^{5-3} = 3^2$

2.3. Elevar una potencia a otra potencia

Recuerda que:

Para elevar una **potencia** a otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(9^3)^4 = 9^{3 \cdot 4} = 9^{12}$$

Ejemplo:

- $(5^5)^3 = (5^5) \cdot (5^5) \cdot (5^5) = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{15}$

Actividades propuestas

12. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $8^{10} \cdot 8^2$	b) $5^{23} \cdot 5^3$	c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$	d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$
e) $(6^3)^2$	f) $(4^2)^4$	g) $(3^0)^6$	h) $(7^3)^2$
i) $9^{10} : 9^2$	j) $3^{23} : 3^3$	k) $11^8 : 11^3$	l) $5^{30} : 5^9$
m) $14^4 : 14^4$	n) $1^{35} : 1^{35}$	o) $7^3 : 7^0$	p) $8^4 \cdot 8^0$

13. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \text{ y también } \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

2.4. Potencia de un producto

Recuerda que:

La potencia de un **producto** es igual al producto de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo:

- $(6 \cdot 7)^3 = 6^3 \cdot 7^3$.

2.5. Potencia de un cociente

Recuerda que:

La potencia de un **cociente** es igual al cociente de cada uno de los factores elevados al mismo exponente.

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Ejemplo:

- $(7 : 9)^3 = 7^3 : 9^3$

2.6. Potencias de números enteros

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo:

- $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base positiva** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$(+2)^4 = +16$ $(-2)^4 = +16$

$(-2)^5 = -32$

Ejemplo:

- $(-4)^2 = +16$
- $(-4)^3 = -64$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Actividades propuestas

14. Calcula:

a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.

15. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

16. Escribe en forma de una única potencia

a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

17. Calcula **mentalmente**

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

18. Calcula **mentalmente**

a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

19. Escribe en forma de una única potencia y calcula:

a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.

20. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\dfrac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\dfrac{1.6^6 \cdot 1.6^{20} \cdot 1.6^1}{1.6^{15} \cdot 1.6^9}$ c) $\dfrac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$

21. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\dfrac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\dfrac{(-1.6)^6 \cdot (-1.6)^{20} \cdot (-1.6)^1}{(-1.6)^{15} \cdot (-1.6)^9}$ c) $\dfrac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$

22. Calcula utilizando la calculadora

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5.2^2 \cdot 5.2$ d) $27^3 \cdot 27$.

23. Calcula utilizando la **calculadora**

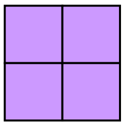
a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $23^4 \cdot 23^2$ c) $0.6^3 \cdot 0.6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.

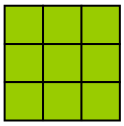
24. Calcula utilizando la **calculadora**

a) $7.4^2 \cdot 7.4^3 \cdot 7.4$ b) $0.82^4 \cdot 0.82^2$ c) $7.35^3 \cdot 7.35^5$ d) $0.002^2 \cdot 0.002$.

3. RAÍCES

3.1. Cuadrados perfectos





- Si se quiere construir un cuadrado de lado 2, ¿cuántos cuadrados pequeños se necesitan?

Necesitamos 4. El 4 es un **cuadrado perfecto**. Observa que $2^2 = 4$.

- Si queremos construir ahora un cuadrado de lado 3, ¿cuántos cuadrados pequeños necesitamos? Necesitamos 9. El 9 es también un cuadrado perfecto. Observa que $3^2 = 9$.

Ejemplo:

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de 7 metros de lado?

Su área vale $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ metros cuadrados.

3.2. Raíz cuadrada. Interpretación geométrica

Recuerda que:

La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:

$$\sqrt{4} = 2.$$

Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

- Por tanto, como $3^2 = 9$ entonces $\sqrt{9} = 3$.
- Al escribir $\sqrt{64} = 8$ se dice que la *raíz cuadrada* de 64 es 8.

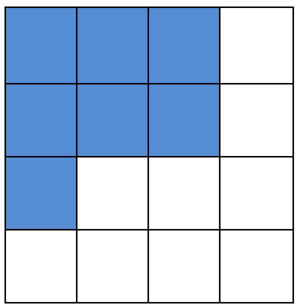
Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 64 y se dice que el **valor de la raíz** es 8.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 81, ¿cuánto vale su lado?

Su lado valdrá la raíz cuadrada de 81. Como $9^2 = 81$, entonces la raíz cuadrada de 81 es 9. El lado del cuadrado es 9.

Ejemplo:



- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?

Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.

El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto y $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrados perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Con más dificultad se puede aproximar esos valores, así $2.6 < \sqrt{7} < 2.7$, o podemos obtener más cifras decimales: $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$, o bien $2.64575131 < \sqrt{7} < 2.64575132$. Podemos encontrar un valor aproximado de la raíz.

Para calcular raíces cuadradas puedes utilizar la calculadora, con la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

Observa que:

El cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo. Luego no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

video

ESTO ES UN NÚMERO NATURAL. ¿Cuál? Cómo simplificar fracciones. Esta fracción en donde aparecen números irracionales se trata realmente de un número natural. Tenemos que encontrar ese número. Ejercicio de aritmética básica. Matemáticas con Juan.

https://www.youtube.com/watch?v=lTwpjb2wAlk

Actividades propuestas

25. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

26. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

27. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$

28. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3.3. Raíz *n*-ésima de un número

Recuerda que:

- Como $2^3 = 8$ se dice que $\sqrt[3]{8} = 2$ y se lee: *la raíz cúbica* de 8 es 2. El **radicando** es 8, el valor de la **raíz** es 2 y 3 es el **índice**.

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

La ***raíz enésima*** de un número *a*, es otro número *b*, cuya potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Ejemplo:

- Por ser $27 = 3^3$, se dice que 3 es la *raíz cúbica* de 27, es decir $\sqrt[3]{27} = 3$.
- Por ser $16 = 2^4$, se dice que 2 es la *raíz cuarta* de 16, es decir $\sqrt[4]{16} = 2$.

Observa que:

Si *n* es un número par, la potencia *n*-ésima de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo, luego no existe la raíz *n*-ésima de un número negativo.

Pero si *n* es un número impar, la potencia *n*-ésima de un número, si puede ser negativa.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$.
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$.
- $\sqrt[4]{-16}$ no existe ya que ningún número, elevado a 4, da –16.

3.4. Introducir factores en el radical

Recuerda que:

Para introducir un número dentro del radical se eleva el número al índice de la raíz y se multiplica por el radicando.

Ejemplo:

- $10\sqrt{3} = \sqrt{10^2 \cdot 3} = \sqrt{300}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

3.5. Extraer factores del radical

Recuerda que:

Para extraer números de un radical es preciso descomponer el radicando en factores:

Ejemplo:

- $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5}$

3.6. Suma y resta de radicales

Recuerda que:

Decimos que dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar y restar radicales, estos deben ser semejantes; en ese caso, se operan los coeficientes y se deja el mismo radical.

Cuidado, un error muy común: la raíz de una suma (o una resta) **NO** es igual a la suma (o la resta) de las raíces:

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$$

Ejemplo:

- $3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $4\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Actividades propuestas

29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.

30. Introducir los siguientes factores en el radical:

a) $2 \cdot \sqrt[4]{5}$ b) $10 \cdot \sqrt[3]{3}$ c) $2 \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $5 \cdot \sqrt[5]{4}$ e) $3 \cdot \sqrt[3]{7}$.

31. Extraer los factores que se pueda del radical:

a) $\sqrt[3]{10\,000x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.

32. Calcula:

a) $3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Historia del ajedrez

Cuenta la leyenda que un súbdito enseñó a jugar al ajedrez al príncipe persa Sisso, hijo de Dahir, y le gustó tanto el juego que prometió regalarle lo que pidiera. El súbdito dijo, quiero un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, el doble por la tercera, así hasta llegar a la casilla 64.

A Sisso no le pareció una demanda excesiva, y sin embargo ¡no había trigo suficiente en el reino para pagar eso!

a) ¿Cómo se debe representar el cálculo?

b) ¿Cuántos granos de trigo le dan por la casilla primera? ¿Y por la casilla segunda? ¿Y por la tercera? ¿Y por la suma de las tres primeras casillas?

c) ¿Cuántos granos de trigo corresponden a la casilla 10?

d) ¿Y a la 64? Utiliza la calculadora para intentar calcular ese número, ¿qué ocurre?

El secreto

Al hotel de una pequeña ciudad de unos 1000 habitantes llega un famoso cantante intentando pasar desapercibido.

Cuando va a entrar en su habitación, un empleado cree reconocerle y se apresura a comentarlo con tres compañeros.

Las tres personas al llegar a sus casas (en lo que tardan 10 minutos) hablan con sus vecinos y vecinas, llaman por teléfono a amigos y amigas y cada una cuenta la noticia a otras tres personas.

Éstas a su vez, en los siguientes 10 minutos, cada una de ellas cuenta la noticia a 3 personas.

El rumor pasa de unos a otros, y de esta forma, una hora después la noticia es sabida por ¿cuántas personas?

¿Tiene posibilidades el cantante de pasar desapercibido en alguna parte de la ciudad?

EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

Adivina

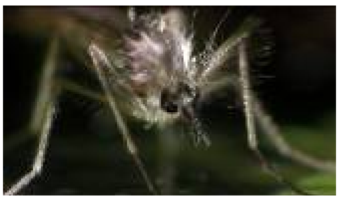
a) ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro unos?

b) ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse utilizando cuatro doses?

c) ¿Y cinco doses?

Otros números enormes

Un mosquito hembra pone al día 200 huevos de los que salen hembras, que al cabo de 3 días ya son nuevas hembras de mosquito capaces de poner huevos. Utiliza tu calculadora para ir obteniendo la población de mosquitos hembras: a) Al cabo de 3 días, 200 nuevas hembras, ¿y al cabo de 6 días? ¿Y a los 9 días? ¿Y en un mes (de 30 días)?



Observa en qué poco tiempo tu calculadora empieza a escribir cosas raras. ¡Ya no le cabe ese número tan grande! Tiene un **crecimiento exponencial**. Si los mosquitos no tuvieran enemigos y no tuvieran competencia por los alimentos, pronto ocuparían todo el espacio.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Potencia	Una potencia a^n de base un número real a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base	$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$. 7 es la base y 3 el exponente
Cuadrados y cubos	Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados y las de exponente 3, cubos	7^2 es 7 al cuadrado y 7^3 es 7 al cubo.
Potencias de 1 y de 0	Cualquier número distinto de cero elevado a 0 es igual a 1. El número 1 elevado a cualquier número es igual a 1. El número 0 elevado a cualquier número distinto de cero es igual a 0.	$145^0 = 1$; $1^{395} = 1$; $0^{7334} = 0$.
Potencias de base 10	Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente. La unidad seguida de ceros es igual a una potencia de 10.	$10^6 = 1\,000\,000$ $10\,000\,000 = 10^7$
Notación científica.	Para escribir un número en notación científica se expresa como un número distinto de cero, multiplicado por una potencia de base 10.	$3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$.
Producto de potencias de igual base	Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.	$9^2 \cdot 9^3 =$ $(9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) =$ $9^{2+3} = 9^5$
Cociente de potencias de igual base	Para dividir potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	$23^8 : 23^7 = 23^{8-7} = 23^1$
Elevar una potencia a otra potencia	Para calcular la potencia de otra potencia, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	$(5^4)^6 = 5^{24}$
Raíz cuadrada	La raíz cuadrada de un número a es otro número b que al elevarlo al cuadrado nos da a.	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
Raíz *n*-ésima	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
Introducir y extraer factores en radicales	$10\sqrt[3]{2} = \sqrt{10^3 \cdot 2} = \sqrt{2000}$	$\sqrt[4]{405} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

1. Escribe en forma de potencias de 10:

a) Un millón b) Un billón c) Una centena de millar

2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 25^0 b) 10^6 c) $5 \cdot 10^4$ d) 2^4 e) 4^2

f) 10^2 g) 10^5 h) 10^{12} i) 10^6 j) 6^3

3. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10.

a) 600 000 000 b) 250 000 000 c) 914 000 000 000

4. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:

a. La distancia de la Tierra al Sol → 150 000 000 km

b. El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno.

37 643 750 000 000 000 000 000 átomos

5. Halla en tu cuaderno:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$

d) $(9 : 3)^5$ e) $(15 : 5)^3$ f) $(21 : 7)^3$

g) $(75 : 5)^4$ h) $(4 : 2)^5$ i) $8^2 : 2^5$

6. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$ ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?

7. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:

a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

8. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:

a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

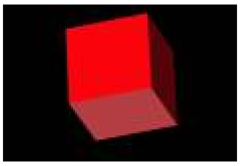
9. Calcula:

a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales?

b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6 + 8)^2$ ¿Son iguales?

10. Calcula en tu cuaderno:

a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 - 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$



11. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

12. Calcula en tu cuaderno:

a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

13. Calcula 5^3 y 3^5 ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$ ¿Son iguales?

14. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1 000; 144.

15. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3.7^5 \cdot 3.7^2$ f) $(2.5^5 \cdot 2.5^2) : 2.5$

16. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

17. Un campo cuadrado mide 3 600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?

18. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4? ¿Y para obtener 8^8?

19. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.

Autora: Ana Lorente
Revisora: Irene García Saavedra
Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Raíces

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$

21. La superficie de un cuadrado es de 1 000 000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

22. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1\,000}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1\,000\,000}$

23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

24. Introduce los siguientes factores en el radical:

a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{100}$ c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$

25. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.

26. Escribe el signo = o ≠ en el hueco:

a) $\sqrt{64+36} \;\square\; \sqrt{64}+\sqrt{36}$. b) $\sqrt{9+16} \;\square\; \sqrt{9}+\sqrt{16}$.

27. Halla en tu cuaderno:

a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$

28. Calcula en tu cuaderno:

a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$ b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2$ d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Problemas

29. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 7 225 m^2 de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

30. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?

EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

31. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8.25 minutos en llegar a la Tierra.

32. Halla el volumen de un cubo de 1.5 m de arista.

33. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es 8 100 m^2. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.

34. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

35. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

36. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

37. Arquímedes, en su tratado *El arenario* contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6 500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.

a) Calcula el volumen de la Tierra en km^3, y escribe ese volumen en notación exponencial.
b) Pasa el volumen a mm^3, en notación exponencial.
c) Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3. Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.
d) Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm^3 por 100.
e) ¿Has obtenido $1.15 \cdot 10^{32}$ granos de arena?

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4$, $(-4)^3$ y $(-5)^2$

a) –16, –12, 25 b) 16, –64, 25 c) 32, –64, 10 d) –64, –32, –26

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4\cdot10^2 + 5\cdot10^2$?

a) 900 b) $9\cdot10^4$ c) $20\cdot10^2$ d) 500

3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:

a) 3^3 □ 27 b) 1^{35} □ 35 c) 732^0 □ 732 d) 10^5 □ 50

4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?

a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683

5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $0.7^6 : 0.7^4$?

a) 0.7^2 b) 0.7^3 c) 0.7^{10} d) 6/4

6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$

a) –1000 b) –30 c) 100 d) 60

7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0.2)^2)^4$

a) $(0.2)^8$ b) $(-0.2)^6$ c) 0.032 d) –0.0016

8. ¿La raíz cuadrada de 81 vale?

a) 18 b) 8.7 c) 9 d) 3

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e) 700

10. El lado de una superficie cuadrada de 196 centímetros cuadrados mide:

a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: “El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer”. ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos…

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. DIVISIBILIDAD

1.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 3 y la del 6.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 3 y de 6.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 3 que has escrito antes está formada por los valores:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,….

Todos ellos son múltiplos de 3.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{3}$

Es decir: $\dot{3} = \{0,\ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$.

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 3 que hubieras podido escribir antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Múltiplos y divisores. Múltiplos y divisores son diferentes conceptos. Para encontrar múltiplos de un número, hay que multiplicar ese número por otros. Los divisores en cambio, son números que caben en otro número mayor una cantidad exacta de veces.

https://www.youtube.com/watch?v=YW_04Esg4QQ

Actividades propuestas

1. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.

2. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

3. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 3 es **divisor** de 9 porque al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 100 porque al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 7 es **divisor** de 49 porque al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

d) 1 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 1, el resto es 0.

e) 47 es **divisor** de 47 porque al dividir 47 entre 47, el resto es 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 9 es **divisible** por 3 porque 3 es divisor de 9, es decir, al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 100 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 100, es decir al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 49 es **divisible** por 7 porque 7 es divisor de 49, es decir, al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser ***múltiplo*** y ser ***divisor*** son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: $3 \cdot 7 = 21$, podemos deducir lo siguiente:
    - 3 y 7 son divisores de 21.
    - 21 es múltiplo de 3 y de 7.
    - 21 es divisible por 3 y por 7.

Actividades propuestas

4. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

5. Escribe frases usando las expresiones: "*ser múltiplo de*", "*ser divisor de*" y "*ser divisible por*" y los números 27, 3 y 9.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 492, 70, 376, 900, 564, 298 son divisibles por 2, ya que terminan en 2, 0, 6, 0, 4, y 8.

¿Sabrías explicar por qué?

Recuerda que un número cualquiera lo podemos escribir con las potencias de 10:

$$4\,652\,031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en todos los sumandos, excepto el último, aparece el 10, y 10 = 2 · 5, luego todos los sumandos son múltiplos de 2. Si el último lo es, el número es múltiplo de 2, si, como en el ejemplo, termina en 1, aunque el resto de los sumandos sea divisible entre 2, el último no lo es, luego el número no es divisible entre 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 531 es divisible por 3 ya que 5 + 3 + 1 = 9 que es múltiplo de 3.
- El número 4002 es divisible por 3 ya que 4 + 0 + 0 + 2 = 6 que es múltiplo de 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 99 es divisible por 3 ya que 9 + 9 = 18, y 18 es divisible por 3, pues 1 + 8 = 9 que es múltiplo de 3. Por tanto, 9, 18 y 99 son múltiplos de 3.
- El número 48 593 778 396 es divisible por 3 ya que 4 + 8 + 5 + 9 + 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 = 69, y 69 es divisible por 3 pues 6 + 9 = 15, y 15 lo es pues 1 + 5 = 6, que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 5 728 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4, pues 7 · 4 = 28.
- El número 5 718 **no** es divisible por 4 ya que termina en 18, que no es múltiplo de 4, pues 4 · 4 = 16 y 5 · 4 = 20.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 3 925 y 78 216 570 son divisibles por 5, pues terminan en 5 y en 0.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 5 532 es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 porque termina en 2.
  - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.
- El número 2 456 **no** es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 porque termina en 6.
  - No lo es por 3, ya que sus cifras suman 2 + 4 + 5 + 6 = 17, y 1 + 7 = 8 que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9

Ejemplo:

- El número 5 022 es divisible por 9 ya que: 5 + 0 + 2 + 2 = 9.
- El número 3 313 **no** es divisible por 9 ya que: 3 + 3 + 1 + 3 = 10 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0

Ejemplo:

- El número 825160 es divisible por 10 porque termina en 0.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa, si un número es divisible por 2 y por 5, lo es por 10.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 71 335 es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 15 – 4 = 11.
- El número 71 345 **no** es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 4) = 15 – 5 = 10, que no es múltiplo de 11.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

6. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4 520, 3 411, 46 095, 16 392, 385 500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?

7. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.

8. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 15 *A*72 sea múltiplo de 3.

b) 22 05*A* sea múltiplo de 6.

c) 6*A* 438 sea múltiplo de 11.

9. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

10. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

11. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
984 486 728	Divisible por 2	
984 486 725	Divisible por 5	
984 486 720	Divisible por 3	
783 376 500	Divisible por 6	
984 486 728	Divisible por 4	
23 009 845	Divisible por 11	

12. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.

13. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.

14. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que 10 = 9 + 1. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.

15. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que 10 = 11 – 1. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero *N*, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., *N*. De esta manera, los divisores de *N* serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 54 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 54 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que ***N*** sea divisible.
Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.
Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 48.
-

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 48.
Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 48 : 2 = 24 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 24.
Es divisible por 3. (4 + 8 = 12, múltiplo de 3) → 48 : 3 = 16 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 16.
Es divisible por 4. → 48 : 4 = 12 → Ya tenemos dos divisores: 4 y 12.
Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 48 : 6 = 8 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 8.
Como 48 : 8 = 6, y el cociente 6 es menor que el divisor 8, ya hemos terminado. 8 y 6 (Repetidos).
Por tanto, los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.

Actividades propuestas

16. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
  a) 50 es múltiplo de 10.
  b) 2 es divisor de 30.
  c) 4 es múltiplo de 16.
  d) 66 es divisible por 11.
  e) 80 es divisor de 8.
  f) 3 es divisible por 12.

18. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 3 72*x* 54*y*.

19. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

20. Calcula todos los divisores de los siguientes números:
  a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. NÚMEROS PRIMOS

2.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores del 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 33, 48, 54, 70, 785 o 43 215 678 940 son compuestos.

Actividades propuestas

21. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

22. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

2.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100, en este caso, ordenados de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una lista así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5, algunos de los cuales ya estaban tachados, todos los que terminan en 0.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- ¿Hasta qué número debemos seguir tachando? ¡Piensa! ¡Piensa! Observa que 100 es igual a 10 · 10, por tanto al dividir un número menor que 100 por uno mayor que 11 el cociente es menor que 11.

Hemos llegado a una lista de la forma:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "*filtro*" (criba) por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "*primos*".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Actividades propuestas

23. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

24. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?

Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.

25. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

2.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número. Por ejemplo, si quiero expresar 11 como producto de dos números, sería:

11 = 1 · 11 o también 11 = 11 · 1

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

- Para descomponer el número 18 podríamos hacer: $18 = 9 \cdot 2$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 9 no es un número primo.

  Su descomposición es $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, que se expresa como $18 = 3^2 \cdot 2$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, un número primo no se puede descomponer, no podemos decir $11 = 11 \cdot 1$, pues 1 no es primo) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.

2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.

3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

- Por ejemplo: $80 = 40 \cdot 2$. Como $40 = 4 \cdot 10$ y $10 = 2 \cdot 5$, tenemos que: $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ y por tanto, su descomposición es: $80 = 2^4 \cdot 5$.

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 231:

Como 231 no es múltiplo de 2, pero sí de 3, lo dividimos: $231 : 3 = 77$.

Como 77 es múltiplo de 7, que es el menor primo posible por el que se pueda dividir: $77 : 7 = 11$.

Por tanto: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Esto se suele realizar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

2. Vamos a realizar otra factorización para el número 5 148:

$$\begin{array}{r|l} 5\,148 & 2 \\ 2\,574 & 2 \\ 1\,287 & 3 \\ 429 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Por tanto: $5\,148 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

27. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

28. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1 240 b) 2 550 c) 4 520 d) 5 342

29. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10 000 y 100 000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

30. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

2.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 60 y 84:

Divisores de 60 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisores de 84 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

¿Cuáles son los divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

El mayor de los divisores comunes es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 60 y de 84.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

- En el ejemplo anterior, escribimos: M.C.D (60, 84) = 12

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 60, 72 y 84.

1. Factorizamos cada número:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números (2 y 3) elevados el menor exponente: 2^2 y 3.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D } (60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

31. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80

32. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

2.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

- Vamos a calcular m.c.m.(20, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 20 $\rightarrow$ 20, 40, 60, 80, 100, 120, …

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 60, 120, … pero el menor de ellos es el 60. Por tanto:

m.c.m.(20, 15) = 60.

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 60, 72 y 84 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. En nuestro caso: 2^3, 3^2, 5 y 7.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m. } (60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520.$$

Actividades propuestas

33. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

34. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de cinta roja de 15 m y uno azul de 10 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y quiere cortar la cinta en trozos de la misma longitud para tenerlo preparado para empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima en que puede cortar cada rollo?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 10 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D:

$$\text{M.C.D. } (15, 10) = 5.$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de cinta en que cortará ambos rollos será de 5 m.

- Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "*El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer*". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Estamos buscando un número de días que será múltiplo de 2, 4 y 7 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

m.c.m. (2, 4, 7) = 28

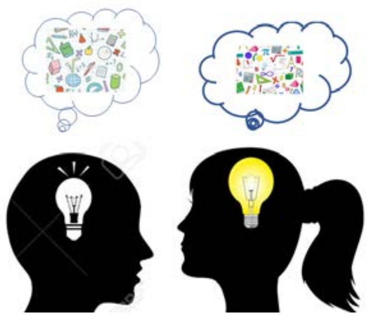
Por tanto, dentro de 28 días volverán a coincidir y la abuela les hará el pastel.

Actividades propuestas

35. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?



MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS

36. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

37. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

38. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

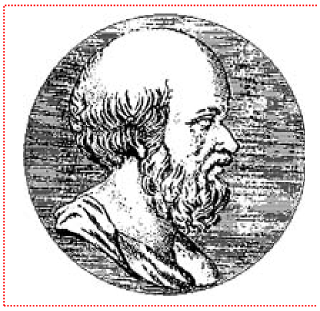
a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?

b) ¿A qué hora ocurrirá?

39. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



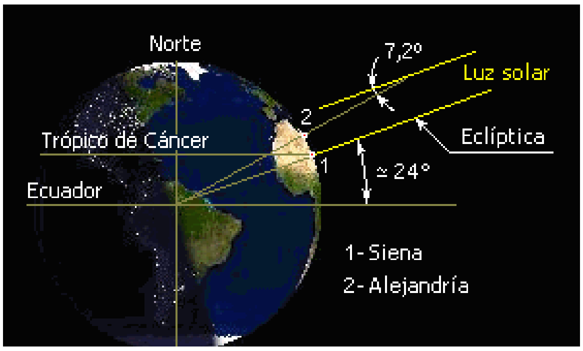
¿Quién era Eratóstenes el de la famosa criba que estudiamos antes?

Eratóstenes nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de Africa. Vivió entre los años 275 a C y 195 antes de Cristo.

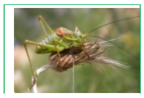
Por varias décadas, fue el director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue amigo de Arquímedes.

Aún así, Eratóstenes se hizo famoso por tres descubrimientos:

- Por la **medición increíblemente precisa que hizo del diámetro de la Tierra**
- Por haber fabricado una **criba**, o un filtro, para descubrir todos los números primos.
- La invención de la esfera armilar.



¿QUÉ RELACIÓN TIENEN EL ESPIONAJE CON LA EVOLUCIÓN DE ALGUNOS INSECTOS?

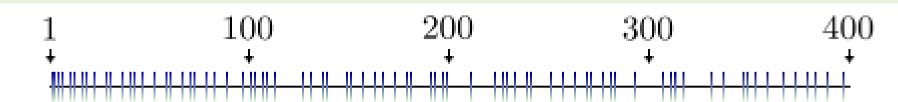


La relación entre ambos son los **números primos**.

La teoría de los números primos tiene aplicación en la **criptografía**, ciencia que estudia formas de cifrar mensajes secretos que solo puedan ser descifrados por el receptor, pero por nadie más. El proceso de cifrado requiere el uso de una clave secreta y para descifrar el mensaje, normalmente, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés.

Pero lo ideal sería tener una clave para un cifrado fácil y descifrado difícil. Esto se logra **utilizando números primos muy grandes**, de 80 cifras o más.

Hoy en día la **criptografía** tiene gran importancia para las comunicaciones entre los gobiernos, compras por Internet o llamadas por teléfono móvil. Esto se debe a su extraña distribución:



Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

LOS PRIMOS GERMAIN

Primos de Germain

En Teoría de Números se dice que un número natural es un **número primo de Germain**, si el número n es primo y $2n + 1$ también lo es. Los números primos de Sophie Germain inferiores a 200, son: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113, 131, 173, 179, 191.

Sophie Germain (1776-1831)

Sophie Germain fue una matemática autodidacta. Nació en París en las últimas décadas del Siglo de las Luces. Sus primeros trabajos en Teoría de Números, entre 1804 y 1809, los conocemos a través de su correspondencia con C. F. Gauss, en la que mantenía oculta su identidad bajo el pseudónimo de Monsieur Le Blanc.

En noviembre de 1804 está fechada la primera carta, Gauss, en su respuesta, admira la elegancia de una de sus demostraciones. En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento en Teoría de Números. Demostraba que si x, y, z son números enteros, tales que $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ entonces, al menos uno de los números x, y o z debe ser divisible por 5. *Reanudó la correspondencia, ya con su nombre en 1819. Posteriormente, hacia 1819, Sophie retomó sus trabajos en Teoría de Números. De esta época es otro de los resultados de Sophie. Utilizando adecuadamente su teorema conseguía demostrar que para todo número primo n menor que 100 (y por lo tanto para todo número menor que 100) no existe solución a la ecuación de Fermat, cuando los números x, y, z no son divisibles por n.*

Los Primos Germain y el teorema que lleva su nombre fue el resultado más importante, desde 1738 hasta 1840, para demostrar el último teorema de Fermat, además permitió demostrar la conjetura para n igual a 5. La demostración se dividió en dos casos: el primero consistía en probarlo cuando ninguno de los números x, y, z es divisible por n, y el segundo cuando uno sólo de los tres números es divisible por n. Además, con esta clasificación el primer caso del Teorema de Fermat para n = 5 quedaba probado. En 1825 Legendre y Dirichlet completaron la demostración para n = 5 en el segundo caso.

El teorema de Sophie Germain demuestra que si n es un número primo tal que 2n + 1 es primo, entonces el primer caso del teorema de Fermat es verdadero. El trabajo se había simplificado a la mitad. El teorema de Germain será el resultado más importante relacionado con la conjetura de Fermat desde 1738 hasta la obra de Kummer en 1840.

Posteriormente sus investigaciones se orientaron a la teoría de la elasticidad y en 1816 consiguió el Gran Premio de las Ciencias Matemáticas que la Academia de Ciencias de París

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Conjetura de Fermat

Hace más de 350 años el matemático francés Pierre Fermat, en el siglo XVII, en 1637, escribió en el margen de un libro, en la *Arithmética* de *Diofanto*, un pequeño problema, dijo que lo había demostrado, pero no anotó la demostración porque no le cabía en dicho margen.

El último teorema de Fermat es una afirmación sobre los números naturales que dice que: Si *n* es un número natural mayor o igual a 3, la ecuación *x* elevado a *n* más *y* elevado a *n* es igual a *z* elevado a *n*, $x^n + y^n = z^n$, no tiene ninguna solución cuando *x, y* y *z* no son 0.

"Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla."

Observa que para $n = 2$, es el *Teorema de Pitágoras,* que sabemos que tiene solución, las ternas pitagóricas.

Muchos matemáticos intentaron demostrarlo sin éxito. Parece algo sencillo y sin embargo se ha necesitado utilizar matemáticas que entonces no se conocían para demostrarlo. *Andrew Wiles* utilizó en 1995 que las curvas elípticas semiestables son racionales o son modulares.

Fermat

Criptografía y números primos

La Teoría de Números se aplica generalmente a la criptografía. Hoy en día, el sistema criptográfico más común se llama RSA. Se utiliza mucho para mantener la seguridad en internet y en las finanzas.

Se usan números muy grandes que sean producto de dos números primos, también muy grandes.
Tú sabes encontrar los factores primos de un número, pero si es muy grande, ni siquiera lo saben hacer los ordenadores. Ahora se está queriendo utilizar la computación cuántica.

Conjeturas matemáticas

Una **conjetura matemática** es una afirmación que no ha podido ser demostrada ni refutada. Si se logra demostrar, como la de *Fermat*, deja de ser una conjetura y pasa a ser un teorema. Así ha ocurrido con:

Teorema de los cuatro colores, probado en 1976, dice que todo mapa se puede colorear con sólo cuatro colores sin que dos zonas adyacentes tengan el mismo color. Fue demostrado con ayuda del ordenador.

Conjetura de *Poincaré* que trata sobre la esfera en cuatro dimensiones. *G. Perelman* lo demostró en 2004.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	-*a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. -*a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	**2:** Acaba en 0 o cifra par. **3:** La suma de sus cifras es múltiplo de 3. **5:** Acaba en 0 o 5. **11:** La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	• 7 892 es divisible por 2. • 4 510 es divisible por 2 y por 5. • 2 957 es divisible por 3. • 2 057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m. (18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D. (18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Divisibilidad

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

3. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 24 *A*75 sea múltiplo de 5.

b) 11 07*A* sea múltiplo de 3.

c) 5*A* 439 sea múltiplo de 6.

4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

5. Busca todos los divisores de 210.

6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
30 087	Divisible por 3	
78 344	Divisible por 6	
87 300	Múltiplo de 11	
2 985 644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Números primos

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de *m* y *n* sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

b) $m = 3 \cdot 5$ $\quad n = 2 \cdot 7$

c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $\quad n = 22 \cdot 32$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $\quad n = 2 \cdot 52 \cdot 7$

8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:

a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ………

b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ………

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

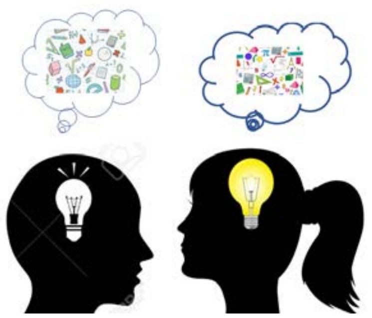
a) 4 y 8	d) 7 y 10	g) 10 y 15	j) 2 y 2	m) 2, 3 y 4
b) 2 y 3	e) 6 y 12	h) 2 y 5	k) 4 y 1	n) 3,6, y 12
c) 3 y 12	f) 6 y 9	i) 4 y 6	l) 3 y 7	o) 3, 4 y 6

10. Calcula:

a) m.c.m. (8, 40) M.C.D. (8, 40)

b) m.c.m. (15, 35) M.C.D. (15, 35)

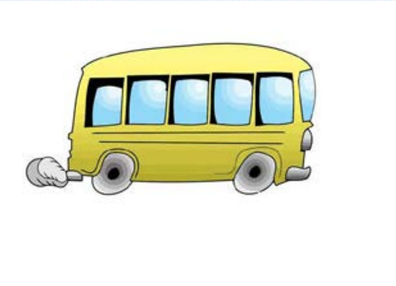
c) m.c.m. (84, 360) M.C.D. (84, 360)



ESTIMA EL RESULTADO

11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes

12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:



a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.

b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas maquinas durante ese periodo?

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hoja de cálculo para determinar si un número es primo

18. Comprueba *si* 2 047 *es primo usando la hoja de cálculo*

La criptografía es la ciencia de alterar un mensaje para que sólo lo conozcan el emisor y el receptor, muchos métodos de criptografía moderna funcionan utilizando números primos muy grandes. Se basan en la dificultad que existe para factorizar un número como producto de dos primos. Es fácil, con los ordenadores de hoy en día, multiplicar dos números primos muy grandes para conseguir un número compuesto, pero es muy difícil la operación inversa.

En la actualidad, con el desarrollo de la informática, es menos complicado determinar que un número muy grande es primo, los mayores encontrados son de la forma $2^p - 1$, con p primo.

Comenzamos con $2\,047 = 2^{11} - 1$.

Para determinar que un número es primo es suficiente comprobar que no tiene por divisores, números primos, menores que su raíz cuadrada.

	Número: N	**Raíz de N**	
	2047	45,2437841	
d	Cociente	Parte entera	¿Es primo?
3	682,333333	682	0
5	409,4	409	0
7	292,428571	292	0
9	227,444444	227	0
11	186,090909	186	0
13	157,461538	157	0
15	136,466667	136	0
17	120,411765	120	0
19	107,736842	107	0
21	97,4761905	97	0
23	89	89	1
25	81,88	81	0
27	75,8148148	75	0
29	70,5862069	70	0
31	66,0322581	66	0
33	62,030303	62	0
35	58,4857143	58	0
37	55,3243243	55	0
39	52,4871795	52	0
41	49,9268293	49	0
43	47,6046512	47	0

- En la fila 4 escribe el número 2047 y en la misma fila y en la columna de la derecha una fórmula que utilizando la función **Raíz** calcula la raíz cuadrada de este número.
- En la primera columna de la tabla introduce posibles divisores del número, aunque basta con introducir los números primos es más rápido comprobar los números impares comenzando con 3 y **rellenando en serie** con incremento 2 hasta 45 (o hasta 43 que es primo).
- En la siguiente columna introduce una fórmula para calcular el cociente entre el número 2 047, identificado por su celda con referencias absolutas, y la celda que ocupa el divisor 3 y copia la fórmula con el controlador de relleno hasta el divisor 43.
- Calcula la parte entera de los cocientes de la columna anterior con una fórmula que utilice la función **Entero**.
- En la cuarta columna de la tabla se introduce una fórmula con la función lógica **SI** que devuelve 1 si los valores de las dos columnas anteriores de la misma fila son iguales y 0 en caso contrario. Esta fórmula permite encontrar, si existen, los divisores del número 2 047 que en este caso son 23 y 89.

El número $2\,047 = 2^{11} - 1$ no es primo.

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.

b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.

c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.

d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.

2. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?

a) D(63) = $\{1, 3, 7, 21, 63\}$ c) D(63) = $\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

b) D(63) = $\{1, 2, 9, 21, 63\}$ d) D(63) = $\{0, 1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

3. La descomposición de 81000 en factores primos es:

a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

4. De los números:183, 143 y 1973,

a) Todos son primos b) Ninguno es primo c) 143 es primo d) 1 973 es primo

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?

a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.

b) 11 es múltiplo de 121.

c) 33 es divisor de 11.

d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.

6. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ es:

a) La propiedad conmutativa.
b) La propiedad distributiva.
c) La propiedad asociativa.
d) Esa igualdad no es cierta.

7. El M.C.D.(650, 700) es:

a) 10 b) 30 c) 20 d) 50

8. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?

a) El 17 de septiembre b) El 1 de septiembre c) El 17 de agosto d) Ese año no vuelven a coincidir

9. Queremos alicatar una pared de 615 x 225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?

a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible

Autora: Fernanda Ramos
Revisores: Sergio Hernández, Milagros Latasa y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Capítulo 5: Sistemas de medida

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola Serrano

Revisor: Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF más Wikipedia y producción propia

Índice

Resumen

Un accidente inter espacial, la búsqueda infructuosa de un tesoro sumergido… todo debido a la confusión entre las unidades de medida. Por eso es importante saber si estamos usando nuestro Sistema Internacional de Unidades (SI), o si se emplean unidades anglosajonas.

En este capítulo vamos a revisar tus conocimientos del curso anterior sobre las unidades de medida del Sistema Internacional de Unidades (SI), (antiguamente Sistema Métrico Decimal), a hacer cambios entre unas unidades y otras. También revisaremos las llamadas unidades agrarias: área, hectárea…

Ampliaremos este conocimiento con la medida de ángulos y las unidades de tiempo, tan útiles, que usan un sistema distinto al decimal, el sistema sexagesimal.

Añadiremos las unidades monetarias que nos van a servir entre otras cosas para el cambio de divisas.

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Recuerda que:

En este apartado vamos a revisar tus conocimientos del curso anterior sobre el Sistema Internacional de Medidas.

Magnitud

Una **magnitud** es una característica de un cuerpo, sustancia o fenómeno físico que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número.

Una magnitud se mide comparándola con un patrón que tenga bien definida esa magnitud y observando el número de veces que lo contiene. A ese patrón le llamamos **unidad de medida**.

Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

Ejemplo:

- La longitud es una magnitud y se puede expresar en kilómetros, metros, centímetros, millas, pulgadas... Puedo decir que alguien mide 1.52 metros, 152 centímetros, 4.98 pies, 59.76 pulgadas... la altura es la misma, pero está expresada en distintas unidades.

Observa que no se puede decir que *alguien mide 1 longitud, 2 longitudes*,... pues la longitud es la magnitud, no la unidad, que podría ser el centímetro. Igual no se dice que *alguien pesa 1 masa, 2 masas*,... ya que masa es la magnitud, que se mide en kilogramos.

1.1. Sistema Internacional de Unidades (SI)

Para poder **comparar** el valor de varias magnitudes debemos utilizar una misma unidad de medida.

Ejemplo:

- Si quiero comparar las medidas de una mesa que uso en clase con una mesa de mi casa, debo utilizar la misma unidad. Si una la mido en centímetros y la otra en pulgadas, no puedo compararlas.

Para facilitar el intercambio científico, cultural y comercial, en casi todos los países se ha adoptado el **Sistema Internacional de Unidades** (SI) como sistema de medidas.

Es el heredero del antiguo **Sistema Métrico Decimal** y por ello también se le conoce como **Sistema Métrico** o simplemente como **Sistema Internacional** (SI).

Algunas de las unidades básicas que utiliza para las distintas magnitudes son:

Longitud	Superficie	Volumen	Masa	Tiempo
El metro	El metro cuadrado	El metro cúbico	El kilogramo	El segundo

Observa que:

El segundo, que es una medida fundamental del Sistema Internacional de Unidades, como bien sabes, no es decimal, 100 segundos no son una hora ni un minuto. Sin embargo en el resto de los casos, para pasar de una unidad a otra que sea múltiplo o submúltiplo, hay que multiplicar por una potencia de diez. Por ello, en ocasiones, se habla del Sistema Métrico *Decimal*.

En general, los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal se nombran añadiendo prefijos (kilo, centi...). Lo estudiaremos con más detenimiento más adelante.

Recuerda: Existen unidades, como por ejemplo los pies, que usan en múltiplos y submúltiplos un sistema decimal, pero no forman parte del Sistema Internacional de Unidades. Mientras que otras, como el segundo, que si forman parte del Sistema Internacional de Unidades no usan un sistema decimal.

Nota curiosa:

Según la Física Clásica las magnitudes fundamentales de masa, tiempo y longitud son propiedades de los objetos, pero según la Teoría de la Relatividad ya NO son propiedades "reales" de los objetos. Al observar un objeto desde fuera, cuanta más velocidad lleve ese objeto más se achata la longitud, más se acelera el tiempo y más aumenta la masa del objeto. El tiempo es relativo, así como la longitud o la masa.

Las magnitudes fundamentales que usaremos son tres: masa (kg), tiempo (s) y longitud (m). Otras son magnitudes derivadas, como de superficie (metro cuadrado), de volumen (metro cúbico) o por ejemplo, la velocidad que se puede medir en kilómetros por hora (km/h).

Actividades propuestas

1. Clasifica como magnitudes o unidades de medida. Indica cuáles de las unidades de medida pertenecen al SI:

a) Centímetro cúbico b) Tiempo c) Hora d) Memoria de un ordenador

e) Gramo f) Masa g) Longitud h) Kilómetros por hora

2. Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:

a) Área b) Herzio c) Yuan d) Grado Fahrenheit e) Año luz

3. Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:

a) La edad de la Tierra b) El tamaño de un jardín

c) La capacidad de un bidón d) La distancia entre Madrid y Valencia

f) La masa de un armario e) Lo que tardas en hacer un problema

4. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

12 °C — 2 km — 33 m^2 — 5 L — 0.55 g

masa — longitud — capacidad — superficie — temperatura

Autor: Pedro Luis Suberviola
lustraciones: Banco de Imágenes de INTEF más Wikipedia y producción propia

Sistema Internacional de Unidades -Vamos a revisar a detalle el Sistema Internacional de Unidades, veremos porqué es el más utilizado a nivel mundial. Resolveremos problemas de conversión de unidades, pasando del Sistema Internacional de Unidades al sistema inglés o anglosajón y también al revés. Veremos dos métodos diferentes para realizar las conversiones. Puedes usar el método de la regla de tres, que es muy sencillo de aprender. También puedes utilizar el método del factor de conversión, que es más rápido, aunque a algunos les pueda parecer complicado. Este método del factor de conversión, lo veremos más adelante en muchos otros temas del curso de física.

https://www.youtube.com/watch?v=wGhZ5p9_sOE

1.2. El metro

Recuerda que:

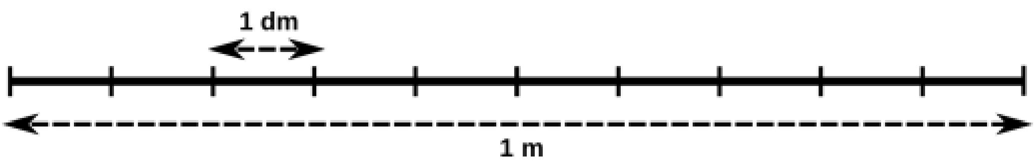
Unidades de longitud

El **metro** es una unidad de medida de longitud y se representa por **m**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			**Unidad**	**Submúltiplos**		
Kilómetro	**Hectó**metro	**Decá**metro	**Metro**	**Decí**metro	**Centí**metro	**Milí**metro
km	**h**m	**da**m	**m**	**d**m	**c**m	**m**m
1 000 m	**100** m	**10** m	1 m	**0.1** m	**0.01** m	**0.001** m



Un metro está dividido en 10 decímetros

Existen otros submúltiplos:

Micrómetro (**µ**m). 1 µm = 0.001 mm = 0.000 001 m.

Nanómetro o micra (**n**m). 1 nm = 0.001 µm = 0.000 000 001 m.

Ångström (**Å**). 1 Å = 0.1 nm = 0.000 000 000 1 m.

Otras unidades de longitud, que no son múltiplos o submúltiplos del metro son:

Unidad astronómica (UA): Es la distancia media entre la Tierra y el Sol, y es igual a 150 millones de km.

Año luz: Es la distancia recorrida por un rayo de luz en un año y es igual a:

1 año luz = 63 240 UA = 9 460 000 000 000 km.

Ejemplos:

- El átomo más pequeño, el de hidrógeno, tiene aproximadamente 1 Å de diámetro.
- Los chips electrónicos están compuestos de transistores de 22 nm de tamaño.
- La Vía Láctea tiene de radio 50 000 años luz.
- El diámetro de un cabello es de aproximadamente 0.1 mm.
- Un espermatozoide mide 53 µm, un hematíe 7 µm.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de longitud debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{km} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{m} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{mm}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Actividades resueltas

- Expresa en metros:

a) 8.25 km = 82.5 hm = 825 dam = 8 250 m — 8,25 km = [3 posiciones] = 8 250 m

b) 712 mm = 71.2 cm = 7.12 dm = 0.712 m — 712 mm = [3 posiciones] = 0.712 m

c) 6.32 hm = 632 m

d) 34 cm = 0.34 m

e) 0.063 km = 63 m

f) 25 km 3 hm 7 m = 25 307 m

g) 9 dam 6 m 8 dm 5 mm = 96.805 m.

Actividades propuestas

5. Si Ramón mide 1.65 metros y Jesús mide 164 centímetros: ¿Quién es más alto?

6. Contesta con una regla graduada:

a) Mide la longitud de tu cuaderno. ¿Cuánto mide?

b) Mide un lápiz. ¿Cuánto mide?

7. Averigua cuánto mide de largo tu habitación.

8. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:

a) 54 dm b) 21.08 m c) 8.7 hm d) 327 mm.

9. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:

a) 8 m 1 mm en centímetros b) 3.5 km 27 dam en centímetros c) 13 km 21 mm en milímetros

d) 7 hm 15 cm en centímetros e) 2 dam 5 dm en metros f) 0.6 m 340 mm en decímetros.

Unidades de superficie

Recuerda que:

El **metro cuadrado** es la unidad de medida de superficie y se representa por m^2.

Es una unidad derivada del metro. No es una unidad fundamental.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

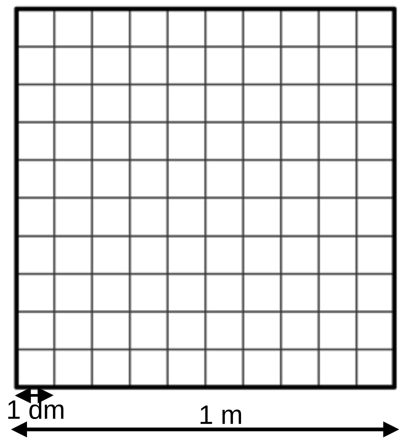
Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cuadrado	**Hectó**metro cuadrado	**Decá**metro cuadrado	**Metro cuadrado**	**Decí**metro cuadrado	**Centí**metro cuadrado	**Milí**metro cuadrado
km^2	**h**m^2	**da**m^2	$\mathbf{m^2}$	**d**m^2	**c**m^2	**m**m^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0.01 m^2	0.000 1 m^2	0.000 001 m^2

Comprobemos que en 1 m^2 hay 100 dm^2:

Un metro cuadrado es la superficie que tiene un cuadrado de 1 m de lado.

Dividimos cada uno de sus lados en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Unimos los extremos de los segmentos formando cuadrados. Obtenemos 100 cuadrados de 1 dm de lado. Es decir, en el metro cuadrado hay 100 de estos cuadrados, es decir, 100 dm^2.



Ejemplos:

- Un piso suele medir entre 60 m^2 y 110 m^2.
- Un campo de fútbol para partidos internacionales mide entre 64 dam^2 y 82.5 dam^2.
- La ciudad de Valladolid tiene una superficie de 197.91 km^2, la de Madrid 605.8 km^2.
- La provincia del estado español con mayor superficie es Badajoz, con 21 766 km^2, la menor Guipúzcoa con 1 980 km^2.
- La provincia de Madrid tiene 8 027 km^2 de superficie. Imagina un rectángulo de 100 km de ancho y 80 km de largo.
- El estado de la Unión Europea con mayor superficie es Francia, con 547 030 km^2.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **superficie** debemos multiplicar o dividir por **cien** tantas veces como sea necesario.

$$km^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} m^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de dos en dos cifras.

Actividades resueltas

- Expresa en metros cuadrados:

a) 0.743 km^2 = 743 000 m^2 — 0.743 km^2= [6 posiciones a la derecha] = 743 000 m^2

b) 95 400 mm^2 = 0.0954 m^2 — 95.400 mm^2 = [6 posiciones a la izquierda]= 0.0954 m^2

c) 5.32 hm^2 = 53.200 m^2

d) 37 cm^2 = 0.0037 m^2

e) 82 km^2 = 82 000 000 m^2

f) 4 km^2 53 hm^2 2 m^2 = 4 530 002 m^2

g) 3 dam^2 15 m^2 23 dm^2 = 315.23 m^2

Actividades propuestas

10. Observa la tabla anterior y calcula:

a) 35 dam^2= ____ m^2 b) 67 m^2 = ____mm^2 c) 5 km^2 = ____ m^2 d) 7 m^2 = ____ hm^2

11. Pasa 98 hm^2 37 dam^2 a centímetros cuadrados.

Unidades agrarias

Son unidades que no pertenecen al Sistema Internacional, pero se utilizan para medir superficies rurales, bosques, plantaciones...

La **hectárea**	1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2
El **área**	1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2
La **centiárea**	1 **ca** = 0.01 a = 1 m^2

Es decir, para hacer la conversión entre unidades agrarias y su conversión con el Sistema Internacional podemos utilizar la siguiente regla:

$$\underset{\text{ha}}{\text{hm}^2} \; \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \; \underset{\text{a}}{\text{dam}^2} \; \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} \; \underset{\text{ca}}{\text{m}^2}$$

Ejemplos:

- Una **hectárea** es un cuadrado de 100 m de lado. Un campo de fútbol mide 62 áreas, aproximadamente media hectárea. Para hacernos una imagen mental, podemos pensar que dos campos de fútbol son más o menos una hectárea.
- La superficie incendiada en España cada año es, en promedio, unas 125 000 ha. La provincia más pequeña es Guipúzcoa, con 1 980 km^2, es decir, 198 000 ha. Por lo tanto, el área incendiada cada año es aproximadamente el de esa provincia.

Actividades resueltas

- Expresa en hectáreas:

a) 5.7 km² = 570 hm² = 570 ha b) 340 000 ca = 34 ha

c) 200 000 dm² = 0.2 hm² = 0.2 ha d) 930 dam² = 9.3 hm² = 9.3 ha.

Actividades propuestas

12. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 1 678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28 100 ca.

13. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados b) Decámetros cuadrados c) Hectáreas d) Áreas.

Unidades de volumen

El **metro cúbico** es la unidad de medida de **volumen** y se representa por **m³**.

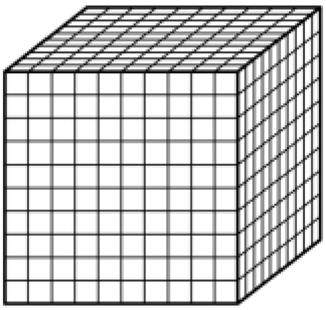
Es una unidad derivada del metro.

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cúbico	**Hectó**metro cúbico	**Decá**metro cúbico	**Metro cúbico**	**Decí**metro cúbico	**Centí**metro cúbico	**Milí**metro cúbico
km³	**hm**³	**dam**³	**m³**	**dm**³	**cm**³	**mm**³
1 000 000 000 m³	1 000 000 m³	1 000 m³	1 m³	0.001 m³	0.000 001 m³	0.000 000 001 m³

Comprobemos que en 1 m³ hay 1000 dm³:

Un metro cúbico es el volumen que tiene un cubo de 1 m de arista.



Dividimos cada uno de sus aristas en 10 segmentos iguales, que medirán por lo tanto 1 dm cada uno.

Cortamos el cubo paralelamente a las caras. Obtenemos 1 000 cubos de 1 dm de arista. En el metro cúbico hay 1 000 de estos cúbicos, es decir, 1 000 dm³.

Ejemplo:

- El consumo de agua y de gas en las facturas se mide en m³. Una persona consume de media 4.5 m³ de agua al mes.
- El tamaño de un embalse pueden ser 50 hm³ de capacidad.
- Uno de los embalses de mayor capacidad en España es el de la Almendra, con 2.6 km³ de capacidad.
- La capacidad total de los embalses de España es de 55 km³.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **volumen** debemos multiplicar o dividir por **mil** tantas veces como sea necesario.

$$km^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de tres en tres cifras.

Actividades resueltas

- Expresa en metros cúbicos:

a) 0.743 km^3 = 743 000 000 m^3

b) 95 400 mm^3 = 0.000 095 4 m^3

c) 5.32 hm^3 = 5 320 000 m^3

d) 457 cm^3 = 0.000 457 m^3

e) 61 km^3 = 61 000 000 000 m^3

f) 3 km^3 52 hm^3 8 m^3 = 3 052 000 008 m^3

g) 9 dam^3 6 m^3 34 dm^3 = 9 006.034 m^3

Actividades propuestas

14. Expresa en metros cúbicos 3.2 dam^3 5 600 dm^3.

15. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) 0.38 m^3 b) 81 dm^3 c) 1.23 hm^3 d) 52 m^3

1.3. El litro

Recuerda que:

La "*capacidad*" es la misma magnitud que el "*volumen*", por tanto se mide la capacidad de un recipiente, (cuánto volumen le cabe) con el metro cúbico y sus derivados. El *litro* se utiliza por razones históricas, y no pertenece al Sistema Internacional de Unidades. Aunque nos conviene conocerlo si lo consideramos como una unidad de volumen "coloquial" utilizada normalmente para medir la capacidad de los recipientes. Un litro corresponde con un dm^3, y se utilizan múltiplos de litro como si fuera una unidad más del SI, con múltiplos y divisores decimales.

El **volumen** es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y **capacidad** es lo que cabe dentro de un recipiente.
Su unidad de medida es el **litro** y se representa por **L**.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilolitro	**Hectó**litro	**Deca**litro	**Litro**	**Deci**litro	**Centi**litro	**Mili**litro
kL	**h**L	**da**L	**L**	**d**L	**c**L	**m**L
1 000 L	**100** L	**10** L	1 L	**0.1** L	**0.01** L	**0.001** L

Ejemplos:

- Una botella de agua grande tiene una capacidad de 1.5 L.
- Un depósito de gasóleo para una casa puede tener una capacidad de 4 hL.
- Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cL.
- Una dosis típica de jarabe suele ser de 5 mL.
- En una ducha de cinco minutos se utilizan unos 90 L de agua.
- Como hemos visto, cuando medimos capacidades de agua grandes se utilizan unidades de volumen (m^3, hm^3, ...).

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de capacidad debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario. Igual que con metros, pues la unidad no está elevada ni al cuadrado ni al cubo.

$$\text{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{mL}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplo:

- Expresa en litros:

a) 5.7 hL = 570 L   b) 200 mL = 0.2 L   c) 9.5 kL = 9 500 L

d) 0.0345 kL = 34.5 L   e) 710 cL = 7.1 L   f) 9.2 mL = 0.0092 L

Actividades propuestas

16. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?

17. Expresa en hectolitros:

a) 34 L   b) 1 232 cL   c) 57 daL   d) 107 hL

Relación entre litros y m^3

Los litros se relacionan con las unidades de volumen porque 1 L equivale a 1 dm^3. Por lo tanto:

1 L = 1 dm^3

1 mL = 1 cm^3

1 kL = 1 m^3

Si lo añadimos al esquema de cambios de unidades de capacidad:

kL $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ hL $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ daL $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ L $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ dL $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ cL $\underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}}$ mL

m^3 $\underset{:1\,000}{\overset{\cdot 1\,000}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1\,000}{\overset{\cdot 1\,000}{\rightleftarrows}}$ cm^3

Ejemplos:

- Un depósito de agua de 1 m^3 tiene 1 kL de capacidad, es decir, 1 000 L, mil litros.
- En los botellines de agua, dependiendo de la marca, se expresan la cantidad de agua en mL, cm^3, cL o L. Por ejemplo: 50 cL, 1/3 L, 500 mL, 33 cL, 250 mL.
- Un litro de leche ocupa un volumen de 1 dm^3.

Actividades resueltas

- Expresa en litros:

  a) 7.2 dm^3 = 7.2 L b) 52 m^3 = 52 kL = 52 000 L c) 33 cm^3 = 33 mL = 0.033 L

- Expresa en decímetros cúbicos:

  a) 0.635 hL = 63.5 dm^3 = 63.5 dm^3 b) 23 cL = 0.23 L = 0.23 dm^3

  c) 73.5 kL = 73.500 L = 73 500 dm^3 d) 0.5 dL = 0.05 L = 0.05 dm^3

Actividades propuestas

18. Ordena de menor a mayor estas medidas:

a) 7.0001 hm^3 b) 23 000 L c) 8 mL d) 4 mm^3

19. Calcula el volumen (en litros y en cm^3) de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

1.4. Unidades de masa

Recuerda que:

El **kilogramo** es la unidad de medida de masa y se representa por **kg**.

Pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sus múltiplos y submúltiplos principales son:

Unidad	**Submúltiplos**					
Kilogramo	**Hecto**gramo	**Deca**gramo	**Gramo**	**Deci**gramo	**Centi**gramo	**Mili**gramo
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
1 000 g	**100** g	**10** g	1 g	**0.1** g	**0.01** g	**0.001** g

Múltiplos			**Unidad**
Tonelada métrica	**Quintal métrico**	**Miriagramo**	**Kilo**gramo
tm	**qm**	**mag**	**kg**
1 000 kg	100 kg	10 kg	1 kg

La **tonelada** y el **quintal** no son múltiplos del gramo ni pertenecen al SI. En origen una tonelada eran 960 kg y corresponde a 20 quintales de 46 kg o 100 libras, pero cuando se impuso el SI continuaron usándose, aunque "redondeados" a 1 000 kg y 100 kg. Estas nuevas unidades son la **tonelada métrica** (tm) y el **quintal métrico** (qm), que sí pertenecen al Sistema Universal de Unidades.

Nota:

¡La masa no es lo mismo que el peso!

Una bola de acero peso mucho en la Tierra, pero no pesa nada en el espacio, y aún así, si te la tiran con fuerza te sigue dando un buen golpe. La fuerza de ese golpe te dice que tiene mucha masa (gramos). La masa se conserva en el espacio porque es una verdadera magnitud, pero el peso es una fuerza debida a la gravedad de la Tierra. Solo en la Tierra la masa y el peso de una persona coinciden como cantidad, por eso es normal decir que alguien "*pesa tantos kg*" aunque no sea del todo correcto, se debería decir que "tiene una masa de 70 kg y, en la Tierra, pesa 70 kgf (kilo gramos fuerza)".

En los ejemplos siguientes usaremos kg como peso por seguir con la forma *coloquial* de hablar, pero deberíamos usar kgf o decir que "tiene una masa de 70 kg".

Cuando pedimos en la tienda *un kilo de patatas,* estrictamente, desde el punto de vista matemático, estamos diciendo *mil patatas*, puesto que el prefijo *kilo* significa *mil*.

No significa que esté mal decirlo, debemos distinguir distintos contextos y situaciones.

En la tienda podemos comprar *un kilo de patatas*, mientras que en clase de matemáticas diremos un *kilogramo fuerza de patatas*.

Ejemplos:

- Una persona adulta puede pesar 70 kg (bueno, deberíamos decir "tiene una masa de 70 kg" como ya comentamos antes).
- En un bocadillo se suelen poner unos 40 g de embutido.
- Para plantar trigo, se utilizan entre 60 kg y 250 kg de semilla por hectárea y se cosechan varias toneladas por hectárea.
- El peso de un coche vacío es de unos 1 200 kg.
- El peso máximo autorizado de un vehículo con dos ejes es de 18 t.
- Un elefante africano puede pesar hasta 7.5 t. Una ballena azul, 120 t.

Actividad resuelta

- ¿Pesa más un kilogramo de hierro que uno de paja?

La masa es igual, pero ambas están en la Tierra rodeadas de aire, e igual que ocurre si están rodeadas de agua, el hierro irá hacia abajo con más fuerza que la paja que "flota más" tanto en el agua como en el aire. Piénsalo así: ¿Que pesa más, un trozo de hierro de 100 kg o un globo aerostático de 100 kg que está flotando? Si el globo vuela, ¿es que no pesa?

Volvemos a la misma idea de antes. No debemos confundir el peso (que es una fuerza) con la masa.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de masa debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{kg} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{hg} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{dag} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{g} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{dg} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{cg} \underset{:10}{\overset{\cdot 1}{\rightleftarrows}} \text{mg}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Un **litro** de agua tiene de masa, casi de forma exacta **1 kg**. Esta aproximación se puede realizar, de forma menos precisa, para otros líquidos.

Actividades resueltas

- Expresa en gramos:
  a) 0.45 kg = 450 g b) 712 mg = 0.712 g c) 9.32 hg = 932 g
  d) 8.57 cg = 0.0857 g e) 0.031 kg = 31 g f) 56 kg 3 hg 7 g = 56 307 g
  g) 7 dag 2 g 3 dg 5 mg = 72.305 g.
- Expresa en kilogramos:
  h) 8.2 tm = 8 200 kg i) 340 g = 0.34 kg j) 2.4 qm = 240 kg
  k) 92 mag = 920 kg l) 678 hg = 67.8 kg m) 8 900 dag = 89 kg.
- Supongamos que hemos comprado 1 kg de alubias, 2.5 kg de fruta, 2 L de leche y dos botellas de 1.5 L de agua. Si queremos calcular el peso de la compra de forma aproximada, podemos cambiar los litros por kilogramos.

  $$1 \text{ kg} + 2.5 \text{ kg} + 2 \text{ kg} + 2 \cdot 1.5 \text{ kg} = 8.5 \text{ kg}.$$

  Nuestra compra pesa aproximadamente 8.5 kg.

Actividades propuestas

20. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:

a) 17 g b) 59 dag c) 73.5 kg d) 350 g.

21. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 3.6 dag b) 59 kg c) 740.5 kg 8.5 dag d) 3 dag 15.10 dg.

22. Expresa en kilogramos:

a) 5 tm 5 qm 2.5 mag b) 9.35 tm 750 dag c) 712 qm 459 hg d) 22 tm 3 mag 8 kg.

23. Estima la masa de:

a) tu cuaderno b) tu bolígrafo c) tu cartera d) tu mesa.

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo **°** y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1 ° = 1 / 360 parte de un ángulo completo

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/ 60 parte de un grado

Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1 / 60 parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma **compleja***. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360°

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1° = 60 minutos = 3 600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Ejemplo:

- Forma compleja: A = 12º 40 ´ 32´´ B = 13´ 54´´ C = 120º 23´´
- Forma incompleja: D = 35 000´´ E = 23º F = 34´

Ejemplo:

- **A = 12 º 23´ 10´´ = 12· 3 600´´ + 23·60´´ + 10´´ = 44 590´´**

Ejemplo:

- Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35 000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 º**
200			
20´´			

D = 35 000´´ = 583´ 20´´= 9 º 43´ 20´´

Actividades propuestas

24. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12 500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17 600´´

25. Pasa de forma incompleja a forma compleja

a) 12º 34´ 40´´ b) 13º 23´ 7´´ c) 49º 56´ 32´´ d) 1º 25´ 27´´

26. Completa la tabla:

Expresión en segundos	Expresión en minutos y segundos	Expresión en grados, minutos y segundos
8 465”		
	245´ 32´´	
		31º 3´ 55´´

Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal.

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

24º 43´ 29´´	77´´	60		73´	60	
+45º 29´ 48´´	**17´´**	1´		**13´**	1º	
69º 72´ 77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´			Nº de grados = 69º + 1º = 70º		

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65º 48´ 50´´ –45º 29´ 48´´ **20º 19´ 2´´**	65º 48´ 50´´ – 45º 29´ 48´´ = **20º 19´ 2´´**

Ejemplo: 38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´

38º 12´ 14´´	37º 72´ 14´´	37º 71´ 74´´
–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´
		22º 56´ 59´´

38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´ – 15º 15´ 15´´= **22º 56´ 59´´**

Actividades propuestas

27. Utiliza una hoja de cálculo, y calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´
b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´
c) 16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´
d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´
e) 35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35''
f) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''

3. MEDIDA DEL TIEMPO

¿Qué es un **día**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.

¿Y un **año**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol.

Para conocer su duración hay que estudiar el movimiento del Sol. Los primeros pueblos que se ocuparon de la Astronomía fueron los babilonios y asirios.

Ellos usaban un sistema de numeración que no era decimal, sino sexagesimal. De ellos aún nos quedan las siguientes medidas del tiempo:

Un **día** tiene 24 horas.

Una **hora** tiene 60 minutos.

Un **minuto** tiene 60 segundos.

La unidad utilizada para medir la magnitud “tiempo” es el **segundo**, que se representa por la letra s, en minúscula y sin punto. Es una unidad del Sistema Internacional de Unidades (SI) pero ***no** es decimal*, es *sexagesimal*.

Pasar segundos a horas y minutos, o viceversa se hace de forma muy similar a como se pasan en las medidas de ángulos de segundos a grados y minutos que, para no repetir aprenderás en el capítulo 8 de “Figuras Planas” en el apartado 1.4.

Otras medidas del tiempo que conoces son:

La semana que tiene 7 días.

El mes, que tiene 30 días, o 31 días o 28 días el mes de febrero, salvo los años bisiestos que tiene 29.

Un año que tiene 12 meses.

Un año tiene 365 días excepto los años bisiestos que tienen 366 días.

La cronología permite datar los acontecimientos representándolos en una línea de tiempo.

Para medir el tiempo, en un principio, se empezó midiendo los movimientos de los astros, el movimiento aparente del Sol y de la Luna. Luego se utilizaron relojes como el reloj de sol, de arena o la clepsidra o reloj de agua. Ahora existen relojes y cronómetros muy perfeccionados.

Nuestro año comienza el 1 de enero, pero otros países utilizan otros calendarios, como el chino, el judío, o el musulmán. Al escribir esto estábamos en el año 2013, pero otros pueblos están en otros años muy diferentes. Infórmate sobre ese particular.

Actividades propuestas

28. ¿Cuántos segundos tiene una hora?

29. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos?

30. ¿Cuántas semanas tiene un año no bisiesto?

4. UNIDADES MONETARIAS

Las unidades monetarias diferentes a la que nosotros utilizamos se denominan **divisas**. Entre distintas monedas se establecen tipos de cambio que varían constantemente.

En la Unión Europea la unidad monetaria es el **euro**, se representa por **€**.

Para realizar los cambios, utilizaremos *factores de* conversión, redondeando el resultado si hiciera falta.

Actividades resueltas

- Con la siguiente equivalencia de divisas:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
1	0.86	1.3	3.6	9	131	8	11.1

- Cambia 600 € a Libras y a Soles

1 € es equivalente a 0.86 £. Multiplicando por $\frac{0{,}86\,£}{1\,€}$ se eliminan los € y queda arriba £

$$600\,€ \cdot \frac{0{,}86\,£}{1\,€} = \frac{600 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{€ \cdot £}{€} = 516\,£$$

Equivalentemente para soles:

$$600\,€ \cdot \frac{3{,}6\,S/}{1\,€} = \frac{600 \cdot 3{,}6}{1} \cdot \frac{€ \cdot S/}{€} = 2.160\,S/$$

- b) Cambia 715 $ y 16.000 ¥ (yuanes) a euros.

En este caso debo dividir entre $ y ¥ respectivamente y el € debe quedar en el numerador

$$715\$ \frac{1€}{1.3\$} = \frac{715 \cdot 1}{1.3} \cdot \frac{\$ \cdot €}{\$} \approx 550€$$

$$16.000\,¥ \cdot \frac{1\,€}{8\,¥} = \frac{16.000 \cdot 1}{8} \cdot \frac{¥ \cdot €}{¥} = 2.000\,€$$

Actividades propuestas

31. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, bolivianos, yenes y Dirhams.

32. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 $ b) 4051.5درهم c) 104 800 ¥ (yenes) d) 5 103 Bs

33. Jessica se quiere comprar una *tablet*. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la *tablet*?

34. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

CURIOSIDADES. REVISTA

Curiosidad respecto del metro:

¿Sabes que existe una longitud mínima en la naturaleza y que nada puede medir menos que ella?

Se llama la **longitud de Planck** y es muy pequeña, del orden de 1.6 · 10^–35 m, es decir, ¡0 coma y luego 34 ceros y después 16 metros!

La primera *definición* de **kilogramo** se decidió durante la Revolución Francesa y especificaba que era la masa de un dm^3 (un litro) de agua destilada al nivel del mar y 3.98 grados centígrados.

Hoy se define como la masa que tiene el prototipo internacional, compuesto de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Otra cosa respecto del tiempo y los segundos:

Por razones históricas, para tiempos de un segundo o más, se usan minutos y horas, pero para menos de un segundo, como históricamente nunca se han podido medir, no existían unidades y se usó el sistema decimal, por eso se habla de décimas o milésimas de segundo, pero nunca de un "kilosegundo".

Tirando millas

La **milla náutica** (1 852 metros) es distinta de la **milla terrestre** (1 609 metros), porque la *velocidad* en los barcos se mide en "**nudos**". Para medir la velocidad se tiraba una cuerda especial con muchos nudos por detrás del barco, y se miraba cuántos se quedaban flotando: el número de nudos que flotan indica la velocidad. Una milla náutica se definió como la distancia que navega un barco a una velocidad de un nudo durante una hora, por eso no coincide con la milla terrestre.

Más y más unidades

Además de los que ya conoces hay otros prefijos para nuevas unidades que se incluyen en el SI (Sistema Internacional de Unidades): zetta, yotta, zepto, yocto, ronna, ronto, quetta y quecto.

Han sido necesarios por los grandes avances de la Ciencia que requieren medidas más grandes y más pequeñas.

Como norma general los prefijos añadidos que terminan en "a" son medidas muy grandes, y los terminados en "o", muy pequeñas. Antes no era así, kilómetro era más grande que metro, y termina en "o", y decímetro es menor que el metro y termina en "i".

Así:

Tera: 1 000 000 000 000

Peta: 1 000 000 000 000 000

Exa: 1 000 000 000 000 000 000

Zetta: 1 000 000 000 000 000 000 000

Yotta: 1 000 000 000 000 000 000 000 000

Ronna: 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Quetta: 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Pasamos de una a otra, multiplicando por 1 000.

Queta, por tanto, equivale a un uno seguido de 30 ceros.

Y para las más pequeñas:

Pico: 0.000 000 000 001

Femto: 0.000 000 000 000 001

Atto: 0.000 000 000 000 000 001

Zepto: 0.000 000 000 000 000 000 001

Yocto: 0.000 000 000 000 000 000 000 001

Ronto: 0.000 000 000 000 000 000 000 000 001

Quecto: 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 001

Pasamos de una a otra, dividiendo por 1 000.

Así un quecto es una fracción de uno dividido por 10 elevado a 30.

Estos prefijos se aplican a unidades de longitud, masa, volumen…

Ejemplos:

Júpiter tiene una masa de 2 quettagramos = 2 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 g, y la Tierra tiene una masa de 6 ronnagramos = 6 000 000 000 000 000 000 000 000 000 g.

Un electrón tiene una masa de aproximadamente:
un rontogramo = 0.000 000 000 000 000 000 000 000 001 g.

RESUMEN

<table>
<tr><td>Magnitud</td><td>Una magnitud se puede medir en distintas unidades de medida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros.... (distintas unidades de medida)</td></tr>
<tr><td>Longitud: metro</td><td>km $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dam $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ m $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mm</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.32 km = 320 m = 32 000 cm   3 400 mm = 34 dm = 0.34 dam</td></tr>
<tr><td>Superficie: metro cuadrado</td><td>km^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ hm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dam^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ m^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ cm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ mm^2</td></tr>
<tr><td colspan="2">0.0014 km^2 = 0.14 hm^2 = 14 dam^2 23 000 mm^2 = 230 cm^2 = 2.3 dm^2</td></tr>
<tr><td>U. agrarias</td><td>1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha   13 000 m^2 = 13 000 ca= 1.3 ha</td></tr>
<tr><td>Volumen: metro cúbico</td><td>km^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 mm^3</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.2 hm^3 = 3 200 dam^3 = 3 200 000 m^3 2 800 mm^3 = 28 cm^3 = 0.002 8 dm^3</td></tr>
<tr><td>El litro</td><td>kL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ daL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ L $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mL</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.7 kL = 37 hL = 370 daL = 3 700 L   85 mL = 8.5 cL = 0.85 dL = 0.085 L</td></tr>
<tr><td>Litros y m^3</td><td>1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.5 cL = 45 mL = 45 cm^3 3 hL = 0.3 kL = 0.3 m^3 3 hL = 300 L = 300 dm^3</td></tr>
<tr><td>Masa: kilogramo</td><td>kg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dag $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ g $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mg</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 300 kg = 2.3 t   0.23 dag = 2.3 g = 2 300 mg   5.3 hg = 53 000 cg</td></tr>
<tr><td>Medida de ángulos</td><td>Un grado = 1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo. Minuto: 1 minuto = 1´ = 1/60 parte de un grado. Segundo: 1 segundo = 1´´ = 1/60 parte de un minuto</td></tr>
<tr><td>Unidades de tiempo</td><td>Un día es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.
Un año es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol.
Un día tiene 24 horas.   Una hora tiene 60 minutos.   Un minuto tiene 60 segundos</td></tr>
<tr><td>Unidades monetarias</td><td>1 € = 0.86 £ = 9 Bs = … (varía constantemente)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$200\,\text{€} = 200\,\text{€} \cdot \frac{0{,}86\,\text{£}}{1\,\text{€}} = \frac{200 \cdot 0{,}86}{1} \cdot \frac{\text{€} \cdot \text{£}}{\text{€}} = 172\,\text{£}$ 1 800 Bs =200 €</td></tr>
</table>

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de longitud

1. Descompón en sus distintas unidades:

a) 3 945.67 cm b) 415.95 mm c) 5 148 m d) 67.914 km e) 0.82 dam

2. Completa con el número o unidad correspondiente:

a) 50 m = _______ hm = 5 000 _______ b) 300 hm = 30 _____ = ___________ m

c) _____ dm = _______ m = 2 300 mm d) 40 km = 4000 ____ = ___________ dm

3. Ordena de menor a mayor: 2.7 m; 30 cm; 0.005 km; 2 600 mm; 0.024 hm; 26 dm.

4. Calcula la longitud que falta o sobra para tener a 1 m:

a) 27 cm b) 300 mm + 25 cm c) 0.00034 km + 0.22 dam d) 0.3 m + 27 cm + 120 mm

5. Unos amigos están planeando hacer el Camino de Santiago andando desde Frómista (Palencia). La distancia a recorrer es de unos 400 km. Ellos calculan que a un paso cómodo pueden andar 5 km en cada hora. Si piensan andar 6 horas al día, ¿cuántos días tardarán en hacer el camino?

6. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?

7. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 5 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?

8. Expresa en UA:

a) 38 000 km b) 8 000 m c) un millón de micras d) dos millones de metros

Unidades de superficie

9. Completa las siguientes igualdades:

a) 3.5 dam^2 = ______ m^2 = ______ dm^2 b) 0.08 km^2 = _______ m^2 = _____ cm^2

c) 32 cm^2 = _____ dm^2 = ______ dam^2 d) 6 075 m^2 = _____ dm^2 = ______ hm^2

10. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:

a) 3 m^2 2 cm^2 5 mm^2 en decímetros cuadrados b) 6 dam^2 2 dm^2 en metros cuadrados

c) 9.3 hm^2 5 m^2 6 cm^2 en decámetros cuadrados d) 7 dm^2 5 dam^2 en milímetros cuadrados

11. Dibuja en tu cuaderno el contorno de tu mano.

a) Recorta después un cuadrado de 1 cm de lado y estima, en centímetros cuadrados, la superficie de tu mano.

b) Si utilizas un papel normal de 60 g/m^2, y dibujas tu mano como en el ejercicio anterior y lo recortas, al pesar el papel con un peso muy preciso, obtienes de nuevo la superficie de la mano. (¡Antes de los ordenadores se calculaban así, con papel y tijeras, algunas superficies!). ¿Cuánto mide en cm^2?

12. La superficie de China es de 9 560 000 km^2. ¿Cuántas ha tiene?

13. Expresa en hectáreas:

a) 3.2 km^2 b) 1 000 ca c) 600 000 dam^2 d) 824 m^2 e) 67 a f) 200 mm^2.

14. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca d) 37 m^2.

15. El padre de Juan quiere comprar un terreno de 7.3 ha a 3.2 € cada m^2. ¿Cuánto le va a costar?

Unidades de volumen y de capacidad

16. Piensa en un cubo de lado una unidad. Piensa ahora en un cubo del doble de lado. ¿Cuántos cubitos de los primeros son necesarios para obtener ese cubo?

17. Expresa en metros cúbicos: 28.7 hm^3 5 m^3 2 800 dam^3 45 dm^3.

18. Expresa en litros:

a) 8.1 hL b) 451 mL c) 2.3 kL d) 0.528 kL e) 6.25 cL f) 7.2 mL

19. Completa las siguientes igualdades:

a) 2 m^3 = _______ L b) 33 cL = _______ dm^3 c) 500 mm^3 = ________ mL

d) 230 mL = ______ dm^3 e) 0.02 hm^3 = ______ L f) 0.016 hL = ________ m^3

g) 0.35 dm^3 = _____ mL h) 230 cL = _______ cm^3 i) 0.25 hm^3 = _______ kL

20. En una urbanización se recoge cada semana 27 m^3 de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?

Unidades de masa

21. ¿Qué tiene más masa, un kg de papel o un kg de plomo?

22. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 2.7 dag b) 51.3 kg c) 35.7 kg 8.6 dag d) 3 dag 5 g 26.29 dg

23. Copia en tu cuaderno y completa:

a) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg = ... dag b) 1 kg = ... hg = ... dag = ... g = ... cg = ... mg
c) 1 tm = ... kg = ... g = ... hg = ... dag d) 1 qm = ... kg = ... g = ... tm = ... hg = ... cg

24. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0.943 hg							
75 282.9 dg							
64.92 kg							
4 375 dag							
369 266 cg							

25. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro tiene una densidad de 19.3 y la plata de 10.5. Dos pulseras de igual masa, una de plata y otra de oro, ¿Cuál tendrá mayor volumen?

Medida de ángulos

26. Un ángulo mide la quinta parte de un recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.

27. Calcula :

a) 36º 57´ 37´´ + 45º 18´ 54´´

b) 46º 37´ 35´´+ 82º 32´ 41´´ + 43º 5´´

c) 26º 34' + 84º 21'' + 81º 39´ 49´´

d) 56º 54´ 56´´ – 23º 59´ 96´´

e) 78 º 5´ 34´´ – 26º 5´ 47''

f) 44º 43´ 2 ´´ – 26º 47´ 31''

28. La suma de dos ángulos es 236º 57' 46''. Si uno de ellos mide 68º 57' 58'', ¿cuánto mide el otro?

Unidades de tiempo

29. Joaquín va cada día a la escuela y tarda 15 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 50 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tú utilizas.

30. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en una semana? ¿Y en un año? Esas horas, ¿cuántos días son?

31. Enrique va cada día a la escuela y tarda 20 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 30 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuántos segundos gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas en horas.

32. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántos minutos has dormido en una semana?, ¿y cuántos segundos? ¿Cuántos minutos en un año? ¿Y segundos?

33. Siete guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos

Unidades monetarias

34. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia dos mil euros a dólares, libras, yuanes y soles.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0.86	1.3	3.6	9	131	8	11.1

35. Confecciona una hoja de cálculo con la siguiente tabla de equivalencias, para hacer los cambios de moneda.

36. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón? B) ¿Y al de Marruecos? C) ¿Y al del Reino Unido? Realiza los cálculos.

37. Con las equivalencias del cuadro adjunto, cambia a euros las siguientes cantidades:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (درهم)
1	0.86	1.3	3.6	9	131	8	11.1

a) 4 025 Dólares b) 5 162 Libras c) 215.925 ¥ (yenes) d) 6 214 Bs

38. Pedro se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 3 900 ¥ y 150 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil?

AUTOEVALUACIÓN

1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 9 cm^3 b) 0.27 dm^3 c) 0.003 m^3 d) 27 cm^3.

2. De las siguientes medidas, ¿cuál es la mayor?

a) 5.78 daL b) 578 L c) 5.78 kL d) 0.578 hL.

3. El resultado de sumar 0.07 kg + 0.62 dag + 9.3 hg es:

a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1 006.2 g.

4. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es:

a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2 000 mL

5. Gladys ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros y éstos los cambiará a soles en un nuevo viaje a Perú. ¿Cuántos soles tendrá?

a) 3 042 S/ b) 1 800 S/ c) 235 S/ d) 140 S/

6. Una jarra de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las 3/4 partes de la jarra, ¿cuánto pesa?

a) 1 500 g b) 1.7 kg c) 16 hg d) 10.7 kg

7. El número de segundos de una semana es:

a) 25 200 s b) 604 800 s c) 602 520 s d) 10 080 s

8. El número de segundos de un día es:

a) 1 440 s b) 85 931 s c) 86 400 s d) 10 080 s

9. Transforma a segundos: 2 grados, 45 minutos y 3 segundos.

a) 9 903 s b) 2 070 s c) 99 030 s d) 10 303 s

10. Juan ha cambiado mil euros a dólares, estando el cambio a 1.31 dólar el euro, ¿cuántos dólares le han dado?

a) 131 $ b) 1 310 $ c) 763 $ d) 1 257 $

CAPÍTULO 6: LONGITUDES Y ÁREAS. SEMEJANZA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

Revisores: Javier Rodrigo y Raquel Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

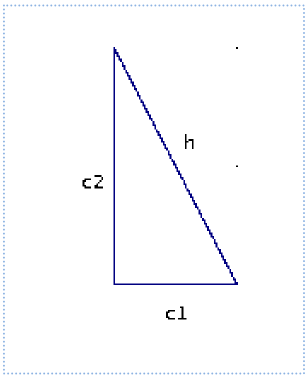
En este capítulo estudiaremos el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, que nos ayudará en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.
Estudiaremos el teorema de Tales y la semejanza, con los criterios para reconocer cuando dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza (escala) en mapas y en áreas y volúmenes.
Repasaremos las longitudes y áreas en polígonos y en figuras circulares, que utilizaremos en el próximo capítulo para obtener longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos en el espacio.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 *cm* y 4 *cm*, su hipotenusa vale 5 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ cm.$$

Actividades resueltas

- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 *dm* y uno de sus catetos mide 12 *dm*, halla la medida del otro cateto:

Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

video

Pitágoras es uno de los matemáticos más populares gracias a su teorema. Pero no sólo ha aportado este teorema, ya que los pitagóricos pusieron las primeras piedras científicas no sólo en la Geometría sino también en la Aritmética, la Astronomía y la Música.

[Universo matémático - Pitágoras, mucho más (rtve.es)]

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Interpretación del teorema de Pitágoras

Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2, c_2^2. Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

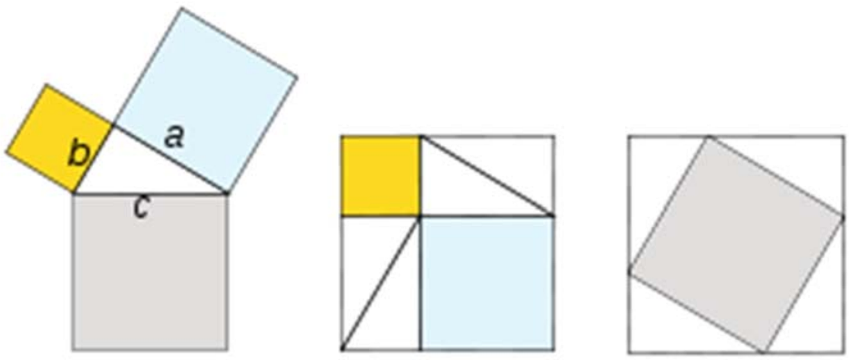
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Actividades propuestas

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 8 *cm* y 6 *cm* b) 12 *m* y 9 *m*

c) 6 *dm* y 14 *dm* d) 22.9 *km* y 36.1 *km*.

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 27 *cm* y 12 *cm* b) 32 *m* y 21 *m*

c) 28 *dm* y 12 *dm* d) 79.2 *km* y 35.6 *km*

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

6. Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 *dm*.

7. Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.

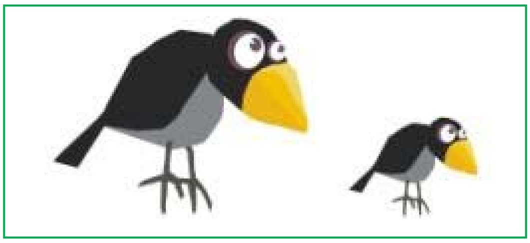
8. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.

9. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

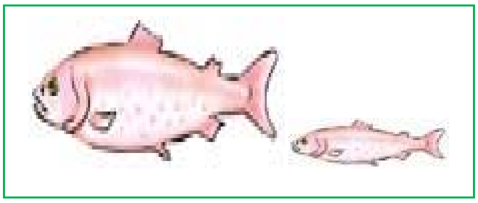


Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*.

Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible.

La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

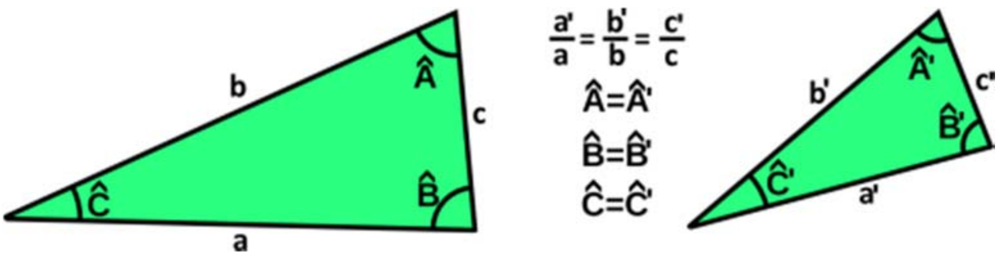


Ejemplo:

- *Las figuras del margen **no** son semejantes*

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

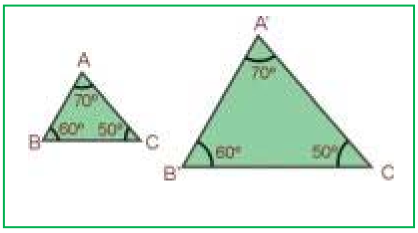
Dos triángulos son semejantes sí:

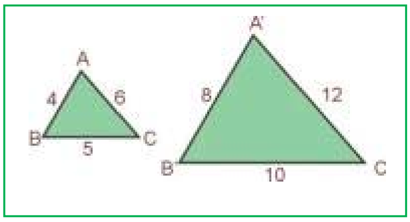
- **Primero:** Tienen dos ángulos iguales.
- **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales.
- **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

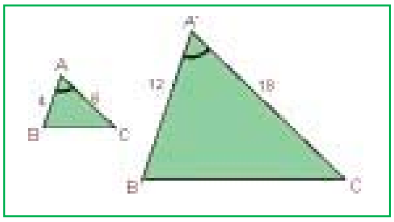
La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta, por ejemplo, que tengan un lado y dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual, y necesariamente los lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, entonces los tres ángulos son iguales. Con más cuidado es preciso mirar el tercer criterio, y en otro curso se demostrará con más rigor.

Ejemplo







Actividades propuestas

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) *A* = 30°, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'* = 30°, *b'* = 14 cm, *c'* = 18 cm
d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 20 cm, *b'* = 25 cm, *c'* = 35 cm

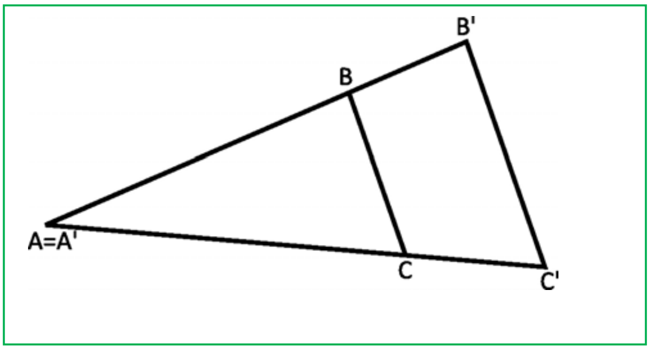
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 18 cm, *b* = 12 cm, *c* = 24 cm. *a*' = 6 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

b) *A* = 45°, *b* = 16 cm, c = 8 cm. *A'* = 45°, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

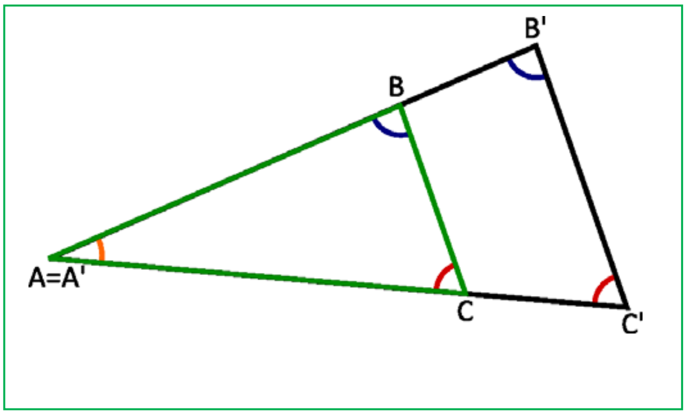
2.3. Triángulos en posición de Tales



Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

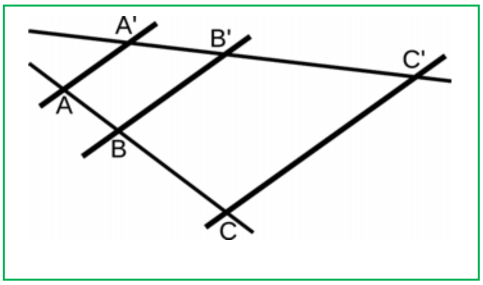
Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros, por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Teorema de Tales



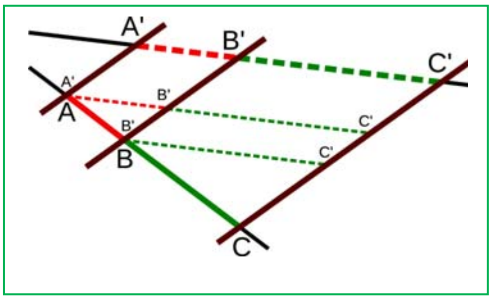
El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

Dadas dos rectas, y varias rectas paralelas entre sí, que las cortan respectivamente en los puntos *A, B, C* y *A', B', C'*. Entonces el **Teorema de Tales** afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes en posición Tales, y que por lo tanto se puede deducir que sus lados son proporcionales:

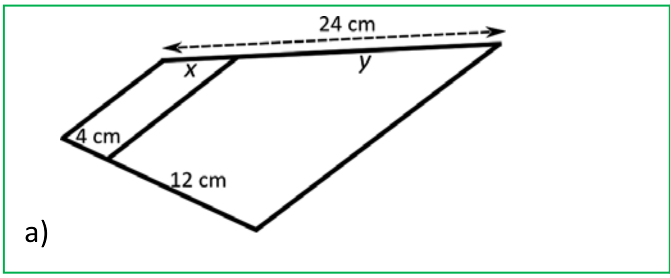
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

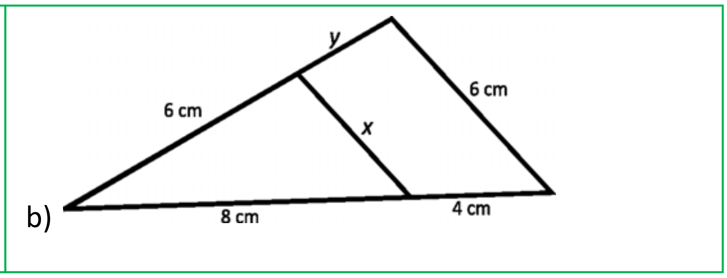


Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

13. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.

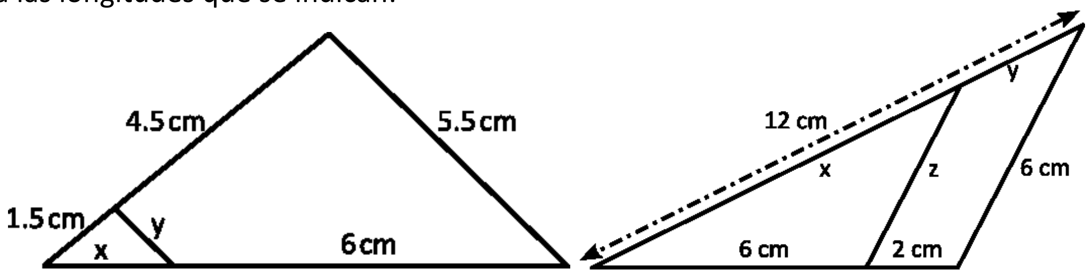




14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

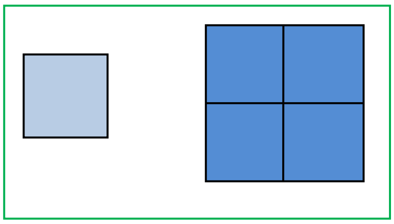
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se le llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

Ejemplo:



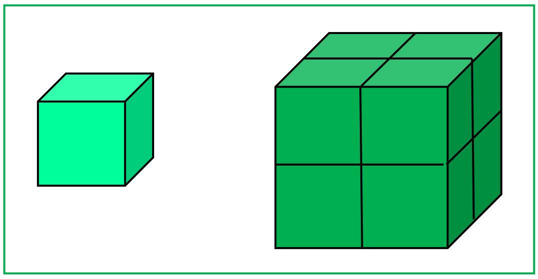
- *Observa la figura del margen.*

Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



- Observa la figura del margen.

Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material, que pese 1 kilo. Por tanto, $k^3 = 8\,000\,000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1.5$ *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 25 *cm* y 40 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

19. Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?

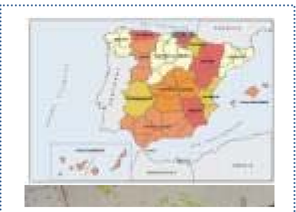
2.6. Escalas: planos y mapas

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:



En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50 000 m, es decir a 50 km.

Ejemplo:

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

1 : 600.

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3.5 cm. La altura real de las torres será:

$$3.5 \cdot 600 = 2\,100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1 : 70 000

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1 000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0.05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1.4 cm	700 m	
7 cm	0.7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2.7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de polígonos que ya conoces del curso anterior. Si las recuerdas, puedes saltarlo.

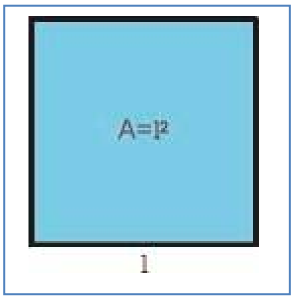
3.1. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2$$

El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$



Ejemplo:

- Si tenemos un cuadrado de 15 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 225 dm^2 ya que:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 15^2 = 225 \text{ dm}^2.$$

Actividades resueltas

- Calcula el área y el perímetro de la baldosa de la figura de 9 *cm* de lado

Baldosa cuadrada

Solución: La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\text{Perímetro} = 4(\text{lado}) = 4(9) = 36\ cm.$$

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 9^2 = 81\ cm^2.$$

- Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de 8 cm de base y 3 cm de altura

Solución: Por tratarse de un rectángulo:

$$\text{Perímetro} = 2(\text{base}) + 2(\text{altura}) = 2(8) + 2(3) = 22\ cm.$$

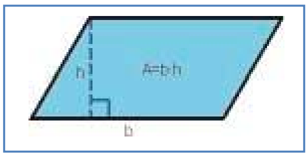
$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 8 \cdot 3 = 24 \text{ cm}^2.$$

3.2. Área de paralelogramo y del triángulo

Ya sabes que:

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

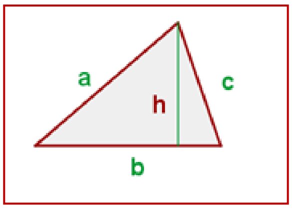
$$\textbf{Área}_{\textbf{Paralelogramo}} = \textbf{base} \cdot \textbf{altura}$$



Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$

Ejemplo:

- El área de un triángulo de base b = 7 cm y altura h = 5 cm es 17.5 cm^2 ya que: $Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17.5\ cm^2$.

Actividades resueltas

- La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 5 metros y su altura mide 4 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?

Solución: Como la vela tiene forma triangular:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\ m^2.$$

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

a) Un cuadrado de 5 metros de lado:

Perímetro: La suma de sus cuatro lados: 5 + 5 + 5 + 5 = 20 m.

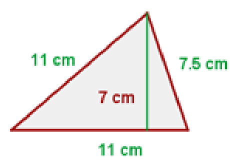
Área: lado · lado = 5 · 5 = 25 m^2.

b) Un rectángulo de 7 metros de ancho y 6 m de largo

Perímetro: Suma de sus lados: 7 + 7 + 6 + 6 = 26 m.

Área: Largo por ancho = 7 · 6 = 42 m^2.

c) Triángulo de base 11 cm y altura 7 cm, y cuyos otros dos lados miden 11 cm y 7.5 cm:



Área: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5\ cm^2$

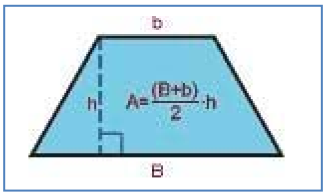
Perímetro: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5\ cm$

Actividades propuestas

25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Área del trapecio, rombo y romboide



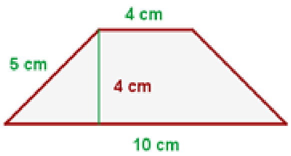
Imagina un trapecio. Gíralo 180°. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

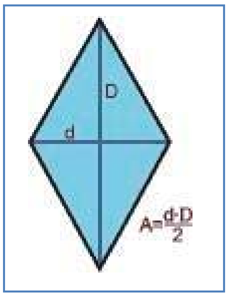
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Ejemplo:

- Tenemos el siguiente trapecio cuya base *B* = 10 *cm*, *b* = 4 *cm*, h = *4 cm*, su área es:



$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

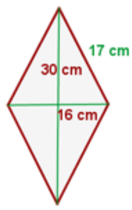
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

Ejemplo:

- Si tenemos un rombo cuyas diagonales son D = 30 *cm* y d = 16 *cm* respectivamente y un lado 17 *cm*, el área será

$$A = \frac{30\cdot 16}{2} = 240 \text{ cm}^2$$



Y el perímetro 17 · 4 *cm* al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados: 15 *cm*, (la mitad de la diagonal D), 8 *cm* (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 *cm*, el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

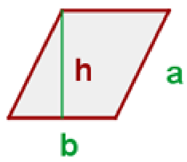
$$A = (8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240 \; cm^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$\acute{A}rea_{\,romboide} = base \cdot altura = b \cdot h$$



Ejemplo:

Si tenemos un romboide de 5 *cm* de base y 4 *cm* de altura su área es 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el lado vale 4, el perímetro es 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Actividades resueltas

- Calcula el área de las siguientes figuras planas:

  a) Un trapecio de bases 12 y 8 cm y de altura 5 cm

  b) Un rombo de diagonales 27 y 8 cm

$$\acute{A}rea_{\,trapecio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(12+8)\cdot 5}{2} = 50\ cm^2.$$

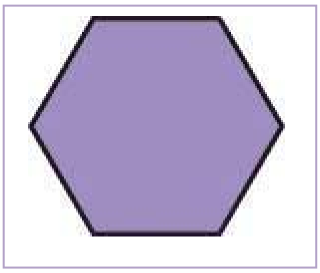
$$\acute{A}rea_{\,rombo} = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{27\cdot 8}{2} = 108\ cm^2.$$

3.4. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área: (base · altura)/2. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, la apotema del polígono.

Ejemplo

- El hexágono regular de lado 4 *cm* y apotema 3.5 *cm* lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 *cm* y altura 3.5 *cm*, por lo que el área de cada uno es:



$$\acute{A}rea_{\,tri\acute{a}ngulo} = \frac{4\cdot 3.5}{2} = 7\ cm^2.$$

El área del hexágono es por tanto:

$$\acute{A}rea_{\,hex\acute{a}gono} = \frac{6\cdot 4\cdot 3.5}{2} = \left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)\cdot 3.5 = 42\ cm^2.$$

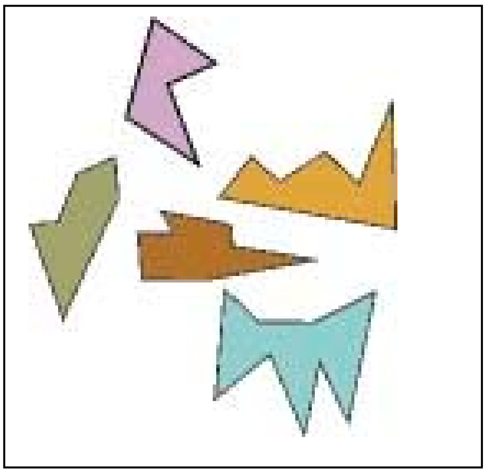
Al ser $\left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)$ el semi perímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

El **área de un polígono regular** es igual al semi perímetro por la apotema.

$$\acute{A}rea = semi\ per\acute{\imath}metro \cdot apotema$$

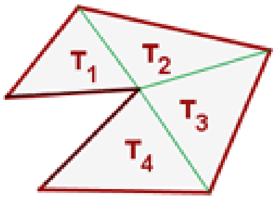
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.

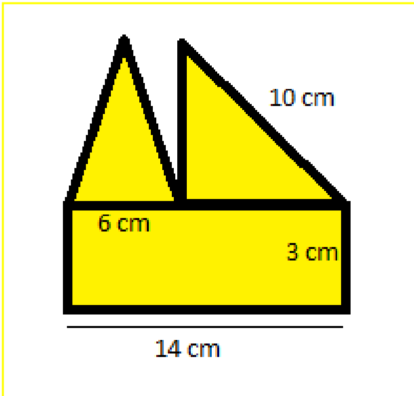


$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Ejemplo:

- El área de esta figura irregular es 84 cm^2. ¿Qué hemos hecho para calcularla?

Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide 6 *cm*.



$$Área_{triángulo\ 1} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2.$$

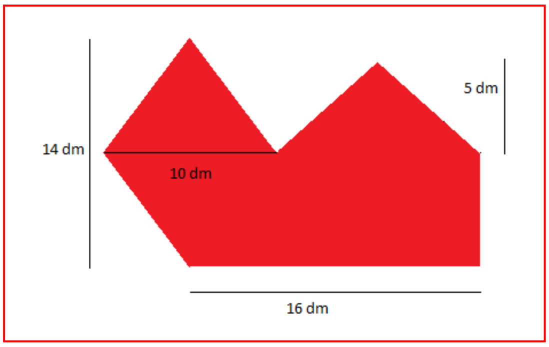
$Área_{triángulo\ 2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$. $Área_{\ rectángulo} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42\ cm^2$.

Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas:

$A_{\ total} = 18 + 24 + 42 = 84\ cm^2$.

Actividades resueltas

- Para calcular el área del polígono de la derecha, lo dividimos primero en cuadriláteros conocidos.



Tenemos un rombo cuyas diagonales miden 14 *dm* y 10 *dm*, un trapecio de altura 7 dm y bases 16 y 11 *dm* y un triángulo de altura 5 dm y base, la base menor del trapecio.

Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

$$Área_{\ rombo} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70\ dm^2.$$

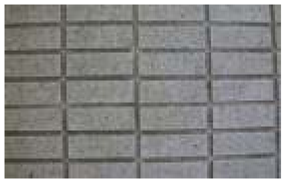
El trapecio tiene de base mayor 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, y de altura 7 dm, luego:

$$Área_{\ trapecio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(16+11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2}\ dm^2.$$

La base del triángulo mide 11 *dm* y su altura 5 *dm*, luego su área mide: $Área_{\ triángulo} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2}\ dm^2$.

Sumando todas las áreas obtenidas: $Área_{\ TOTAL} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192\ dm^2$.

Actividades propuestas

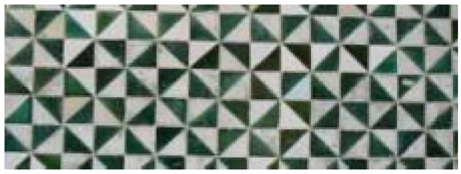


Baldosas rectangulares

26. Las baldosas de la figura miden 24 *cm* de largo y 9 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?

28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?



29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 *mm* y una altura de 12 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 *cm*. Si su hipotenusa mide 14 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?

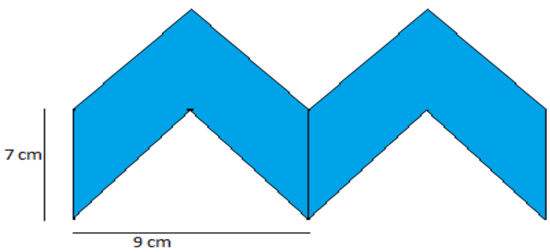
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 2.3 y 1.7 *m* y altura 1.4 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

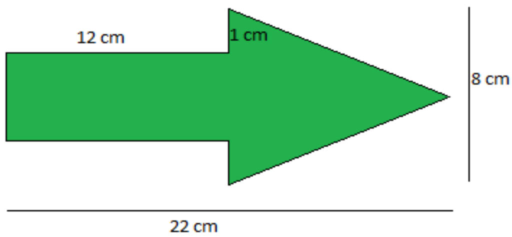
33. Calcula el área de un romboide de 24 *cm* de base y 21 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

34. Dado un hexágono regular de lado 4 *cm*, calcula la longitud del apotema y determina su área.

35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 *cm*, calcula la longitud del apotema y determina su área.

36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:





37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

En este apartado vamos a repasar las áreas y perímetros de las figuras circulares que ya conoces del curso anterior. Si lo recuerdas bien, puedes saltarlo.

4.1. Longitud de una circunferencia

El **número π** (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3.14, otra 3.1416, y otra 3.141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio *r*, entonces su diámetro mide 2*r*, y su longitud, por la definición de π, mide $2\cdot\pi\cdot r$.

Longitud de la circunferencia = $2\cdot\pi\cdot r$.

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 7 *cm* tiene una longitud $L = 2\cdot\pi\cdot r = 2\cdot\pi\cdot 7 = 14\cdot\pi \approx 43.98$.

4.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°. Por tanto:

$L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360$.

Actividades resueltas

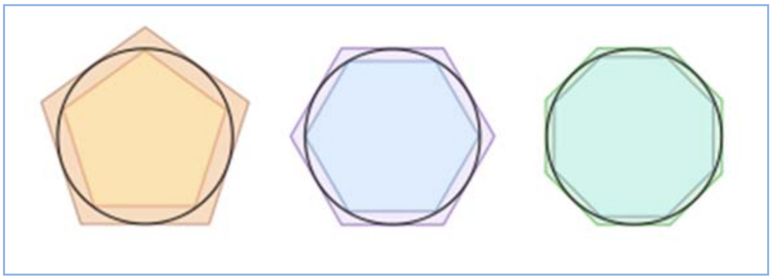
- Las ruedas de un carro miden 50 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. El ángulo α mide 360/16. Por tanto la longitud del arco entre cada radio es

  $L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360 = 50\cdot\pi\cdot(360/16)/360 = 50\cdot\pi\cdot/16 \approx 9.8$ *cm*.

4.3. Área del círculo

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$A = \pi\cdot r^2$.



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio *r*, con cada vez más lados. Entonces:

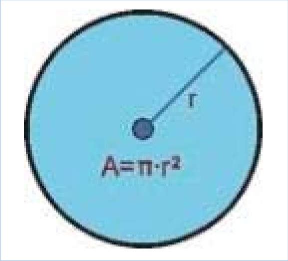
i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semi perímetro por la apotema, se aproxima a:

$(2\cdot\pi\cdot r/2)\cdot r = \pi\cdot r^2$.

Actividades resueltas



- El área de un círculo de radio 5 *cm* es A = 25 π ≈ 78.54 *cm*^{2}. Y el de un círculo de 1 *m* de radio es A = π ≈ 3.14 *m*^{2}.
- El área de un círculo de diámetro 8 *m* es A = 4^2 π = 16 π ≈ 50.3 *m*^{2}. Y el de un círculo de 2 *cm* de diámetro es A = 1^2π = π ≈ 3.14 *cm*^{2}.

4.4. Uso de Geogebra para comprender la longitud de la circunferencia y el área del círculo

Vamos a utilizar *Geogebra* para mejorar la comprensión sobre el número π comprobando cómo el cociente entre la longitud de la circunferencia y su radio es constante, aunque se modifique el radio, siendo igual a 2π. Del mismo modo vamos a trabajar con *Geogebra* con el área de un círculo y comprobar que el cociente entre el área y el cuadrado del radio permanece constante.

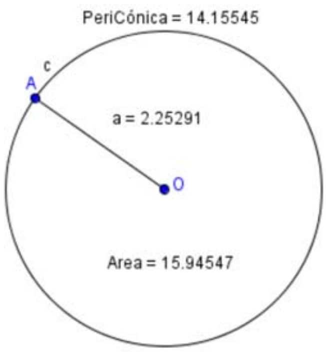
Si nunca has utilizado *Geogebra* busca en la web el archivo sobre *Geogebra* de Marea Verde y comienza por los primeros pasos.

Actividades resueltas

- *Comprueba, utilizando Geogebra, la relación entre la longitud de la circunferencia y su radio.*

Abre una ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula**.

- Define un **Nuevo punto** *A* y otro que, con el menú contextual, llamarás *O* y dibuja la **circunferencia**, c, con centro en *O* que pasa por *A* y el **segmento** *OA*.
- Utiliza la herramienta **Distancia** para medir la longitud de la circunferencia, *PeriCónica*; y el segmento *OA*, que es su radio y se denomina *a*.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente *PeriCónica[c]/a*, que aparece en la ventana algebraica como *b* = 6.28.
- Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**. El cociente *b* aparece como *b* = 6.28319, una aproximación del número 2π.
- **Desplaza** el punto *A* y observa que aunque cambian las medidas de la longitud de la circunferencia y del radio el cociente *b* permanece constante.

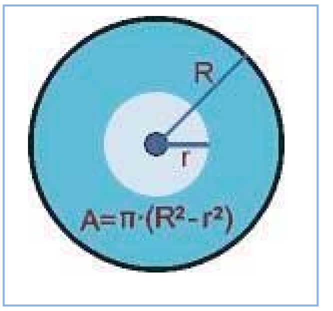


- *Comprueba, utilizando Geogebra, la relación entre el área del círculo y su radio.*

- Activa la herramienta **Área** para calcular la medida de la superficie del círculo.
- Calcula en la línea de **Entrada** el cociente *Area[c]/a^2*, que aparece en la ventana algebraica como *d* = 3.14159, una aproximación del número π.
- **Desplaza** el punto *A* y observa que aunque cambian las medidas del área del círculo y del radio el cociente *d* permanece constante.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.5. Área de la corona circular



El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

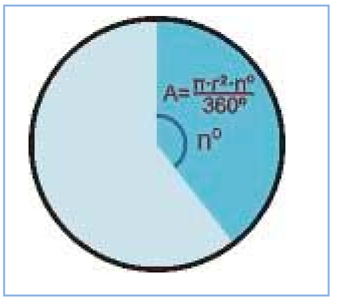
$$\mathbf{A = \pi \cdot \mathit{R}^2 - \pi \cdot \mathit{r}^2 = \pi \cdot (\mathit{R}^2 - \mathit{r}^2)}$$

Actividades resueltas

- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* y 5 *cm* es igual a:

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (9^2 - 5^2) = \pi \cdot (81 - 25) = \pi \cdot 56 \approx 175.9\ cm^2$.

4.6. Área del sector circular



El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot \mathit{r}^2 \cdot \mathit{n}/360.}$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.

Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* circular de radio 4 m que abarca un ángulo de 90°, calculamos el área del círculo completo: $\pi \cdot 4^2 = 16\ \pi$, y hallamos la proporción:

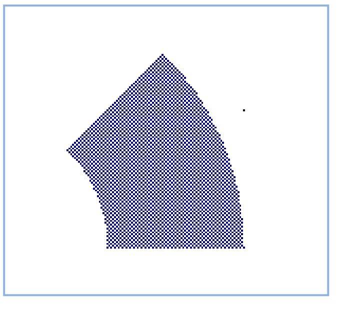
$$A_S = 16\pi \cdot 90/360 = 4\pi \approx 12.57\ m^2.$$

- Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 4 *m* y altura 4 *m*, $A_T = 4 \cdot 4/2 = 8\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 12.57 - 8 = 4.57\ m^2.$$

4.7. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.



El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios *r* y *R* que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot \mathit{R}^2 \cdot (\mathit{n}/360) - \pi \cdot \mathit{r}^2 \cdot (\mathit{n}/360) = \pi \cdot (\mathit{R}^2 - \mathit{r}^2) \cdot \mathit{n}/360.}$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de 90°, calculamos el área de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_C = 15\pi \cdot 90/360 = 3.75\pi \approx 11.78\ m^2.$$

También se puede hallar con la fórmula anterior:

$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11.78\ m^2.$$

Actividades propuestas

38. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.

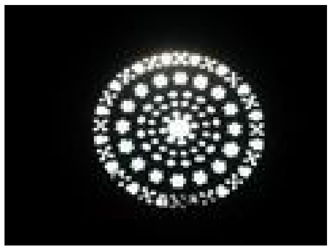
39. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6 379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

40. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

41. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 5.3 *m*. ¿Cuál es la longitud del arco?

42. Un faro gira describiendo un arco de 160°. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

43. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 *m*, y la de la siguiente figura es de 3 *m*.



a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.

b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas

c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 *m*.

d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

44. Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 *cm*.

45. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 *cm* y que forma un ángulo de 60°. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

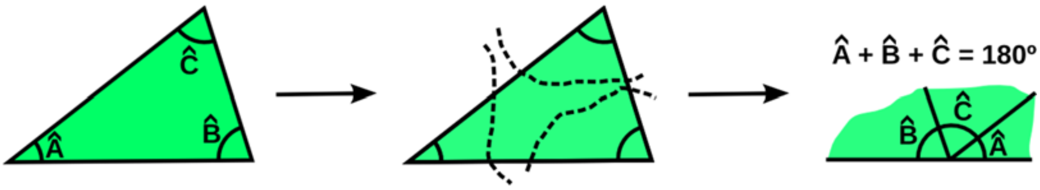
46. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 *cm* y 12 *cm* y que forma un ángulo de 60°.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. ÁNGULOS

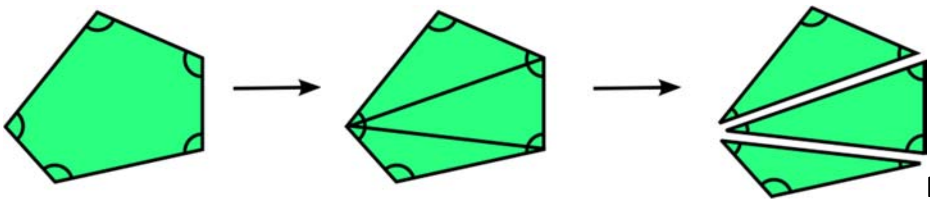
5.1. Ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° · *n*.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es ($n - 2$) · 180°.

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

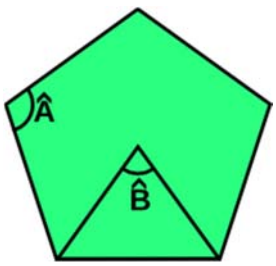


Por lo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	180° · 2 = 360°
Pentágono	180° · 3 = 540°	Hexágono	180° · 4 = 720°

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos interiores es* 180 · 3 = 540°.

Por lo tanto, el **ángulo interior:** $\hat{A} = \frac{540º}{5} = 108º$

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360º}{5} = 72º$

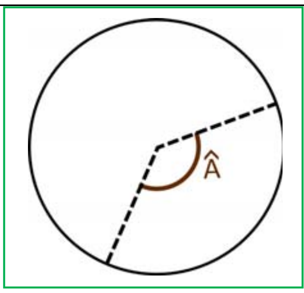
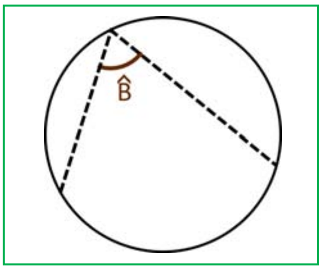
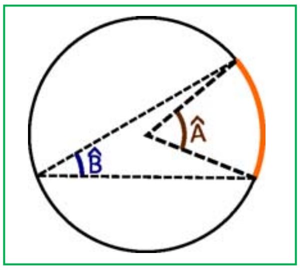
El ángulo **exterior** de un polígono se forma por un lado y la prolongando del lado contiguo.

Es por tanto, suplementario del ángulo interior adyacente. Es decir, suman 180 grados.
Para cada vértice existen dos ángulos exteriores en cualquier polígono

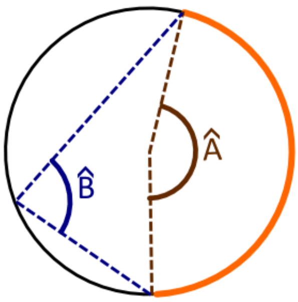
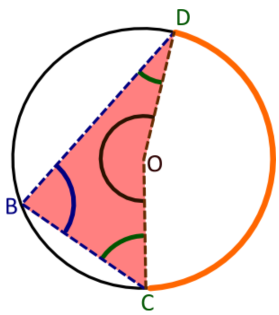
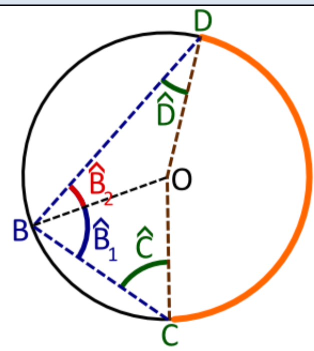
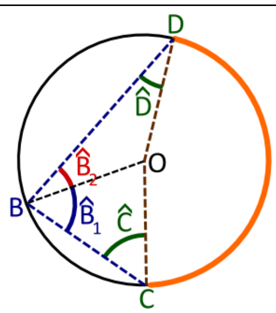
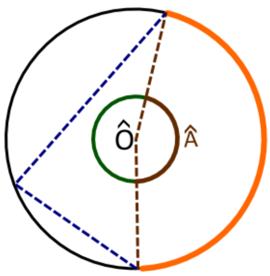
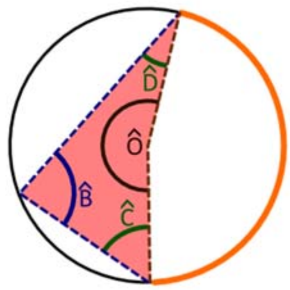
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5.2. Ángulos de la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

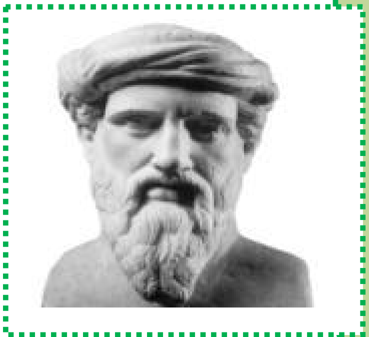
		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración de la propiedad		
		
Debemos comprobar que el ángulo $\hat{B}$ es la mitad de $\hat{A}$. $2\hat{B} = \hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero *BCOD* y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360°.	*BO* y *OD* son radios de la circunferencia. Por lo tanto *BDO* es isósceles y $\hat{B}_2$ y $\hat{D}$ son iguales.
		
Lo mismo para $\hat{B}_1$ y $\hat{C}$ Entonces $\hat{C} + \hat{D} = \hat{B}_2 + \hat{B}_2 = \hat{B}$	Además, el ángulo Ô del cuadrilátero mide 360° – $\hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C} + \hat{D}) + \hat{O} = 360°$. $\hat{B} + (\hat{B}) + 360° - \hat{A} = 360°$. $2\hat{B} = \hat{A}$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



Biografía de Pitágoras

Pitágoras de Samos nació aproximadamente en el año 580 a. C. y falleció aproximadamente en el 495 a. C. Destacó por sus contribuciones en Matemáticas, Filosofía y Música. Se le conoce por el teorema de Pitágoras, que lleva su nombre, aunque es probable que dicho teorema ya se conociera en Mesopotamia y Egipto, países que visitó. Pitágoras fundó la Escuela Pitagórica, en la que todos los descubrimientos eran de la comunidad, que mantenía entre otras normas muy estrictas, la de ser vegetariano, y que hombres y mujeres eran iguales, ¡era una comunidad feminista! El lema de los pitagóricos era: "*Todo es número*". Cuando Pitágoras murió quedó su mujer, Teano, dirigiendo la Escuela. Curiosidad: Los pitagóricos mostraban odio a las judías. No se conoce el origen de esa aversión. ¿Preferirían contar con lentejas?

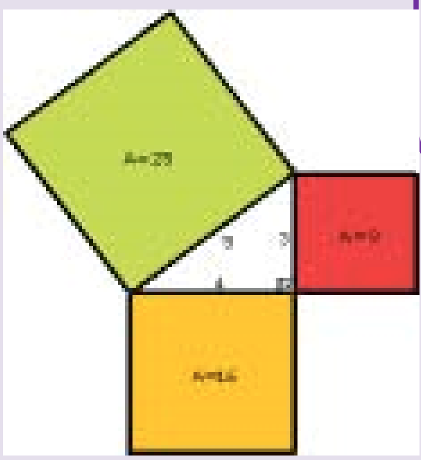
Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes tesoros de la Geometría.

Se habla de las 370 demostraciones del Teorema de Pitágoras: chinos, hindúes, árabes... tienen la suya.

Teorema de Pitágoras y los egipcios

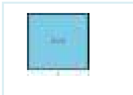
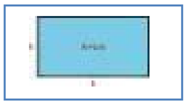
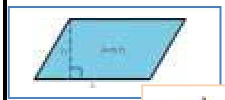
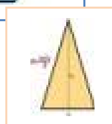
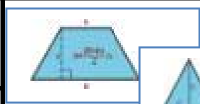
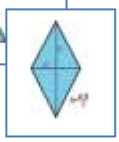
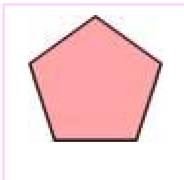
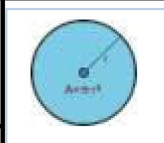
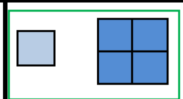
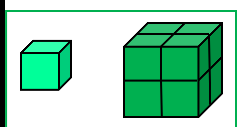
Dos mil años antes de Cristo, en las orillas del Nilo, los egipcios utilizaban una cuerda con trece nudos para trazar ángulos rectos. Sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 era un triángulo rectángulo.



Incluso hoy algunos albañiles verifican la perpendicularidad de los marcos de las puertas y de las ventanas mediante la regla que llaman: *6, 8 y 10*.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

DEFINICIÓN	***CONCEPTO***		***EJEMPLOS***
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	A = lado^2 = l^2 		Si $l = 4$ *cm* $\Rightarrow$ A = 16 cm^2
Área del rectángulo	A = base por altura = $a \cdot b$		Si $a = 3$ *cm*, $b = 5$ *cm* $\Rightarrow$ A = 15 cm^2.
Área del paralelogramo	A = base por altura = $a \cdot b$		a = 7 *m*, b = 9 *m* $\Rightarrow$ A = 63 m^2
Área del triángulo	A = (base por altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m $\Rightarrow$ A = 15 m^2
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		B = 7; b = 3; h = 5 $\Rightarrow$ A = 25
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		D = 4, D = 9 $\Rightarrow$ A = 36/2 = 18
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		Lado = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, número de lados = 5 $\Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5$ = 30 *cm*; Área = $15 \cdot 5$ = 75 cm^2.
Área de un polígono regular	Área es igual al semi perímetro por la apotema		
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r la longitud es igual a $2\pi r$. Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		Radio = 3 *cm* $\Rightarrow$ Longitud = $6\pi \approx 18.84$ *cm*. Área = $9\pi \approx 28.26$ cm^2. Si $\alpha = 30°$ y $r = 3$ *cm* $\Rightarrow$Longitud del arco = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0.5\pi \approx 1.57$ *cm*
Área del círculo	Si el radio es r, el área es igual a $\pi \cdot r^2$.		R = 7, $r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125.6$ u^2
Área de la corona circular. **Área del sector circular**	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor. Si abarca un arco α grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$.		R = 4 *cm*, $\alpha = 60° \Rightarrow$ A = $\pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8.373$ cm^2
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales		Si el lado del cuadrado mide 5 *m*, otro semejante de lado 15 m, k = 3, tiene un área multiplicada por 9, y el volumen del cubo multiplicado por 27.
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k, la razón entre las áreas es k^2, y entre los volúmenes k^3.		

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de Pitágoras

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta

2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.

3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.

4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8.2 *cm* y 6.9 *cm*?

5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 16 *cm* y 12 *cm* b) 40 *m* y 30 *m*

c) 5 *dm* y 9.4 *dm* d) 2.9 *km* y 6.3 *km*.

6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 25 *cm* y 15 *cm* b) 35 *m* y 21 *m*

c) 42 *dm* y 25 *dm* d) 6.1 *km* y 4.2 *km*

7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.

8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm

9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 30° y otro de 20°. Un ángulo de 120° y otro de 20°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50°.

c) A = 40°, b = 8 cm, c = 12 cm. A'= 40°, b' = 4 cm, c' = 6 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 12 cm, b' = 16 cm, c' = 24 cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

b) A = 50°, b = 3 cm, c = 7 cm. A' = 50°, b' = 18 cm, ¿a'?

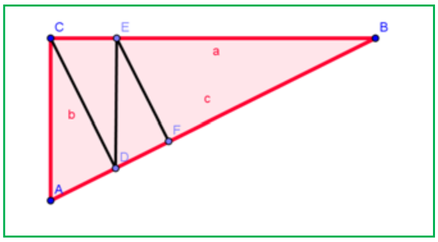
12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

18. El mapa a escala 1:5 000 000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Áreas y perímetros

21. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

22. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3.4 cm de radio.

23. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

24. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

25. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.

26. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.

27. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?

28. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?

29. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.

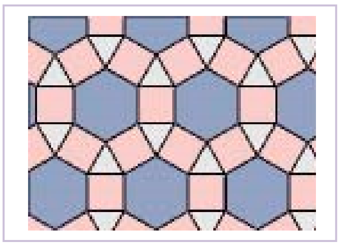
30. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 *cm* y su perímetro mide 20 *cm*.

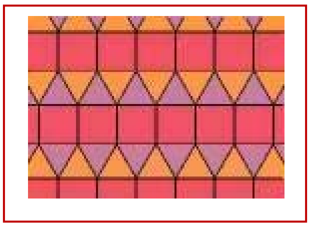
31. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?

32. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

Problemas

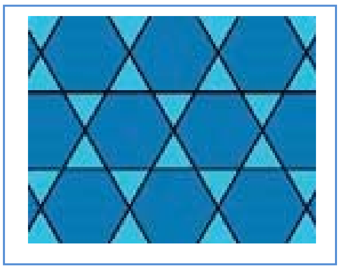
33. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.





34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.

35. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?



36. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 *m*, y se separa de la pared una distancia de 2 *m*, ¿cuál es su longitud?

37. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 *m* de largo y 60 *m* de ancho. Calcula:

a) La diagonal del terreno cuadrado.
b) La diagonal del rectángulo
c) El área de cada terreno.
d) ¿Cuál tiene mayor superficie?

38. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.

39. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1.2 m de ancho y 1.5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?

40. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

41. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.

42. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

a) Longitud de una arista.
b) Altura del triángulo de la base.
c) Perímetro de la base
d) Altura de una cara
e) Perímetro de una cara

43. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?

44. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de un cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris…. Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?

45. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro: a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor. b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza. c) calcula la superficie de cada abanico.

46. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1.2 m. a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas. b) La superficie de dicha estrella. c) La superficie de la cruz,

AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:

a) 6.32 *cm* b) 7 *cm* c) 0.05 *m* d) 627 *mm*

2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:

a) 714 *cm* b) 7.4 *m* c) 8 *m* d) 8 925.1 *mm*

3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:

a) 4.3 dam^2 b) 21 m^2 c) 40 m^2 d) 1 273 057 cm^2

4. El área de un rectángulo de 10 cm de diagonal y 8 cm de base es:

a) 53 cm^2 b) 80 cm^2 c) 48 cm^2 d) 62 cm^2

5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:

a) 45 *dm* b) 181 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*

6. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:

a) 49 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 48.37 cm^2

7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 *m* mide aproximadamente:

a) 3.14 *m* b) 1.4 *m* c) 1.26 *m* d) 1.7 *m*

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* mide:

a) 6.32 *cm* b) 5 *cm* c) 0.052 *m* d) 62 *mm*

9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 6 *m*, el otro cateto mide:

a) 87 *cm* b) 4 *m* c) 8 *m* d) 5.1 *mm*

10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm es:

a) 34 cm b) 70 cm c) 40 cm d) 62 cm

2º ESO

CAPÍTULO 7: CUERPOS GEOMÉTRICO. VOLÚMENES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos.

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF. Wikipedia Commons

Índice

Resumen

En nuestro día a día, en la vida real, casi nunca encontramos figuras planas, sino que utilizamos objetos tridimensionales.

Una caja de zapatos, una goma de borrar o un paquete de tizas son ejemplos de prismas. El dado del parchís (cubo) o el dado de un juego de rol (icosaedro) son poliedros regulares. De las pirámides no hablamos: las que hay en Egipto son de todos conocidas. Las latas de conservas vegetales y las tizas de colores suelen ser cilíndricas, hay muchos helados con forma de cono y tanto las pelotas como las pompas de jabón tienen forma de esfera.

Nos interesará calcular el volumen de estos cuerpos (para saber cuánto cabe en su interior) y su área (lo que nos permitirá, por ejemplo, estimar la cantidad de pintura necesaria para recubrirlos).

Autor: Fernando Blasco

Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. EL ESPACIO

1.1. El entorno en que nos movemos

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos "planos", como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

A pesar de que en nuestro día a día nos encontramos objetos tridimensionales, es más difícil estudiarlos porque no caben en un libro, a no ser que sea un libro especial con páginas desplegables (acabamos de decir que las páginas son bidimensionales). Por eso se recurre a fabricar modelos (en plastilina, cartulina, arcilla u otro material) o a utilizar representaciones planas de estos objetos.

Una técnica muy utilizada en matemáticas consiste en aprovechar lo que ya sabemos para aprender los nuevos conceptos. Por ello en este tema nos centraremos fundamentalmente en cuerpos geométricos que se obtienen a partir de figuras planas. Vamos a familiarizarnos con esos objetos.

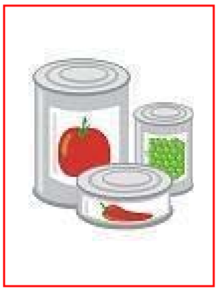
Actividades resueltas

- *Observa un dado. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen sus caras? Mira ahora un paquete de tizas blancas. ¿Cuántas caras tiene? ¿Qué forma tienen? ¿En qué se parecen el dado y la caja? ¿En qué se diferencian?*

El dado tiene 6 caras. Cada cara tiene la forma de un cuadrado.

El paquete de tizas también tiene 6 caras. Pero las caras tienen forma rectangular.

El dado y la caja se parecen en la forma (si la caja fuera de goma y pudiésemos comprimirla tanto como quisiéramos, podríamos obtener un dado a partir de ella). Se parecen en que tienen ambos 6 caras. Se diferencian en que en un caso las caras son cuadradas y en el otro rectangulares.



Actividades propuestas

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un 0rollo de papel higiénico.

a) ¿Qué forma tienen las bases de la lata?

b) ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?

c) Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?

d) Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Dimensiones

El espacio involucra tres **dimensiones: ancho, alto y largo,** mientras que el plano involucra solo a dos.

Ejemplo:

- Una hoja de tamaño A4 mide 21 cm x 29.7 cm. Damos 2 números para hablar de su tamaño.

La caja donde vienen los paquetes de 2500 hojas A4 mide 21 cm x 29.7 cm x ??? cm. Necesitamos tres números para referirnos a su tamaño. El número que hemos añadido es la altura de la caja.

Ejemplo:

- Si has visto dibujos hechos por los egipcios te habrá llamado la atención que están dibujados con unas poses muy extrañas. Se debe a que representar en un plano un cuerpo del espacio es muy complejo. Las figuras pierden su volumen.

Leonardo Da Vinci, un genio en todos los campos y que colaboró en muchas actividades matemáticas con Luca Paccioli (que era su profesor) fue uno de los pioneros en conseguir representar lo tridimensional en un cuadro. Esas representaciones utilizan matemáticas.

Actividades propuestas

2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.

3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).

4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

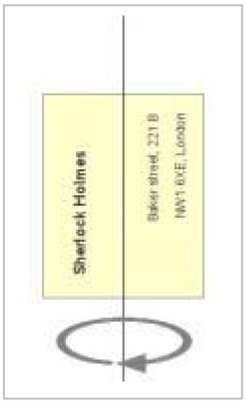
1.3. Poliedros, cuerpos redondos y otras figuras

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos.
Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.

Un tipo particular de poliedros son los poliedros regulares, que estudiaremos en otra sección de este capítulo. Los prismas y pirámides también son poliedros.

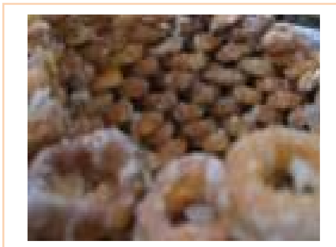
Los principales cuerpos redondos que estudiaremos son las esferas, conos y cilindros. Un tipo particular de cuerpos redondos es el de los cuerpos de revolución, que se obtienen al girar una figura plana en torno a un eje.

Actividades resueltas



- Si cogemos una tarjeta de visita (rectangular), la atravesamos por un hilo siguiendo su eje de simetría y la hacemos girar, ¿qué figura obtenemos?

La figura que se obtiene es un cilindro. Puedes comprobarlo.



- ¿Qué forma tiene una rosquilla?

La rosquilla no es ni una esfera ni un cilindro ni un cono. Su forma, igual que la de un neumático es otra figura matemática, muy utilizada, denominada toro (no te asustes, es un toro inofensivo, sin cuernos).

Actividades propuestas

5. Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?

6. Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:

a) esfera   b) cilindro   c) poliedro regular   d) prisma   e) pirámide   f) cono

7. Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Elementos del espacio

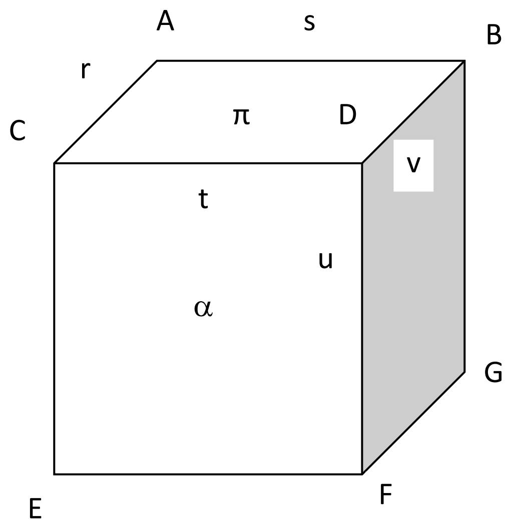
Puntos, rectas y planos

Mira a tu alrededor. Estás en una habitación. Las paredes, el suelo y el techo son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. Y la intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto.

Actividades resueltas

- En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: $A, B, C, D, E, F, G\ldots$; a las rectas con letras minúsculas: $r, s, t, u\ldots$; y a los planos con letras griegas: π, α…

  También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos A y B, o plano que contiene a los puntos A, B y C.



Actividades propuestas

8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F.

9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E.

10. Indica el plano que contiene a la recta t y al punto B.

11. Indica el plano que contiene a las rectas s y t.

Posiciones relativas de dos planos

En tu habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son **paralelos** si no tienen ningún punto en común, y son **secantes** si tienen una recta en común.

Actividades resueltas

- Observamos las seis caras del cubo y comprobamos que o son paralelas o son secantes. Las que son secantes también son en este caso perpendiculares.
- El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta t.
- El plano π y el del suelo son paralelos.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.

13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Sigue mirando tu aula. Fíjate en una recta del techo. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son **paralelas** o se **cortan** o se **cruzan**.

Actividades resueltas

- Nos fijamos en el cubo anterior en la recta r. La recta s la corta (es secante) en el punto A.
- La recta t la corta en el punto C. Las tres rectas r, s y t están en el plano π.
- Las rectas r y v son paralelas y también están en el plano π.
- Pero las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas r y u se cruzan.

Actividades propuestas

14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:

a) Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran

b) Tres pares de rectas que se crucen.

c) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar **contenida** en un plano o ser **paralela** al plano o ser **secante**.

Actividades resueltas

- Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r, s, t y v. La recta u corta al plano π en el punto D. La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π.

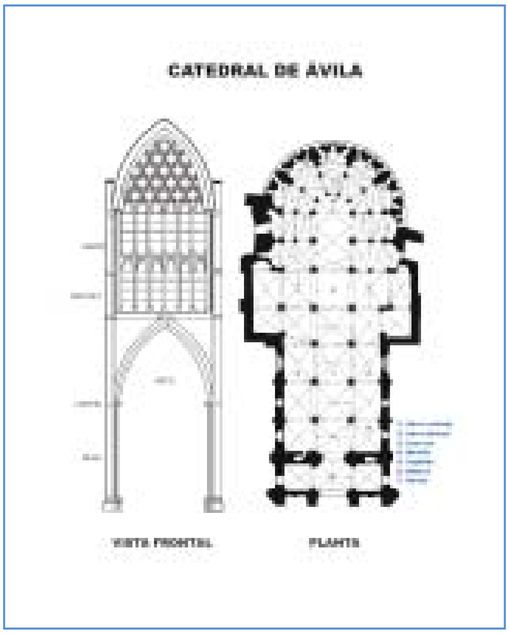
Actividades propuestas

15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α. Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.

1.5. Representación de cuerpos geométricos

Del espacio al plano

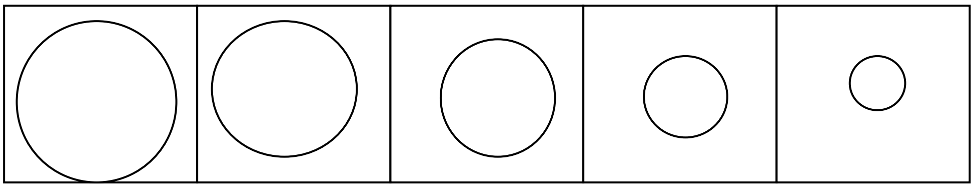
Los arquitectos, ingenieros y en otras muchas profesiones, necesitan dibujar en papel los edificios y las piezas que diseñan. Una forma de hacerlo es representarlos desde tres puntos de vista: **planta, perfil y alzado**.



Otros profesionales, como los médicos, utilizan otras técnicas, como la **tomografía**, en la que se representan los cortes mediante varios planos paralelos.

Actividades resueltas

- La siguiente tomografía corresponde a un cono con cortes paralelos a su base:



Actividades propuestas

16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:

a) un cubo b) un cilindro c) un cono d) una esfera e) una pirámide

17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:

a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador

b) Un cilindro con cortes paralelos a su base

c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista

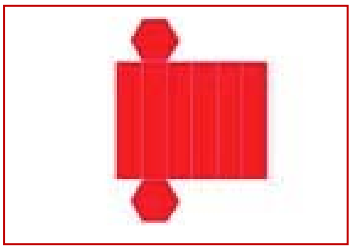
d) Un cubo con cortes paralelos a una cara

e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Del plano al espacio

Muchos cuerpos geométricos podemos construirlos haciendo su desarrollo en un plano. Por ejemplo podemos construir un prisma hexagonal con el desarrollo del margen:



Si quieres construirlo, piensa ¿Dónde pondrías las pestañas para poder pegarlo?

Actividades propuestas

18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.

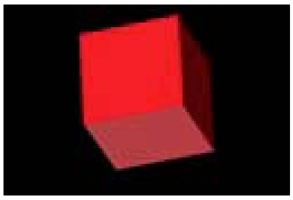
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.

20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.

Formas de representación

Hemos visto formas de representar los cuerpos geométricos: tomografías, desarrollo, perfil, planta y alzado… pero existen otras como describirlo con palabras, como por ejemplo: Posee 8 vértices, 12 aristas, 6 caras todas iguales a cuadrados. ¿Sabes ya qué estamos describiendo?

Antes vimos la diferencia entre la forma de dibujar en el Egipto antiguo y la de Leonardo da Vinci. Leonardo ya conocía la perspectiva. Los artistas de Renacimiento consiguieron un gran dominio de la perspectiva.



Cubo en perspectiva caballera

Una forma de perspectiva es la perspectiva caballera, que consiste en suponer que el ojo que mira la figura está infinitamente lejos. Se tiene entonces, entre otras, las siguientes reglas:

a) Las rectas paralelas en la realidad se mantienen paralelas en el dibujo.

b) Los segmentos iguales sobre rectas paralelos mantienen igual longitud.

Actividades propuestas

21. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.

22. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.

23. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.

24. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.

25. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.

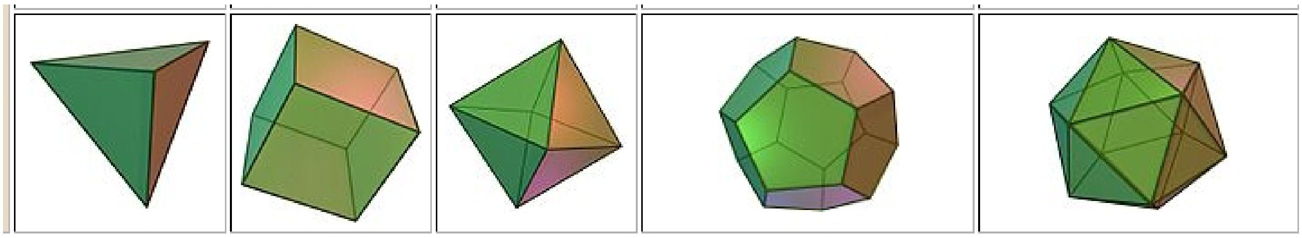
Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. POLIEDROS

2.1. Poliedros regulares

Un **poliedro** es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO DODECAEDRO ICOSAEDRO

Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste.
Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

Actividades resueltas

- *Cuenta el número de caras, de aristas y de vértices de cada uno de los 5 poliedros regulares.*

	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

video

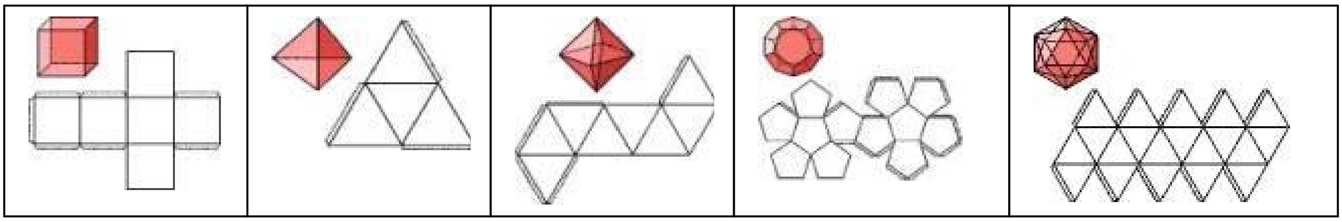
¿Qué es un Poliedro? Video educativo donde se explica: ¿Qué es un poliedro? ¿Qué es un poliedro regular? ¿Qué es un poliedro convexo? ¿Qué son las caras de un poliedro? ¿Cuántas caras tiene un poliedro? ¿Qué es una arista? ¿Qué es un vértice? y muchas cuestiones más explicada con un vocabulario divertido y claro.

https://www.youtube.com/watch?v=jQS6b6RinZs

Actividades propuestas

26. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

27. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.

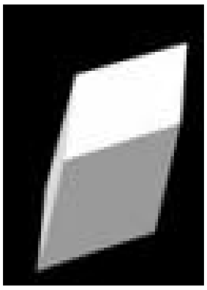


Para cada uno de los cinco poliedros regulares calcula el valor de:

Número de caras + número de vértices – número de aristas.

¿Observas alguna pauta?

28. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?



29. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:

Poliedros. Geometría.

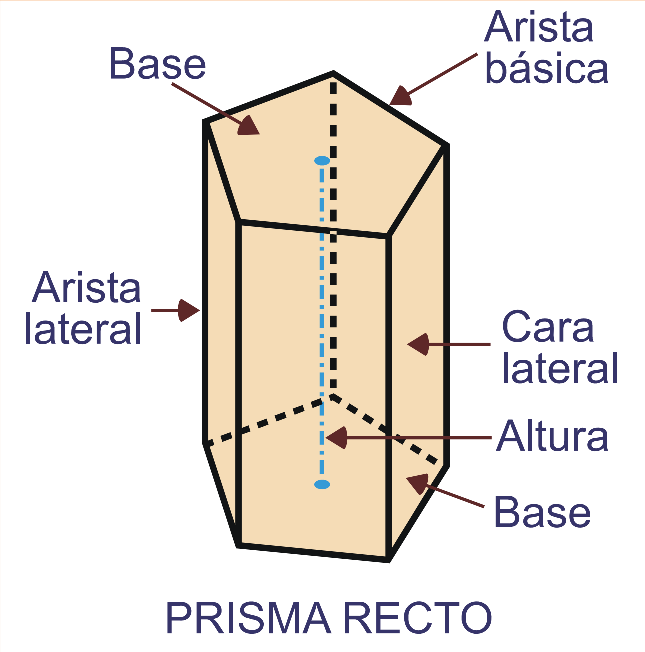
video

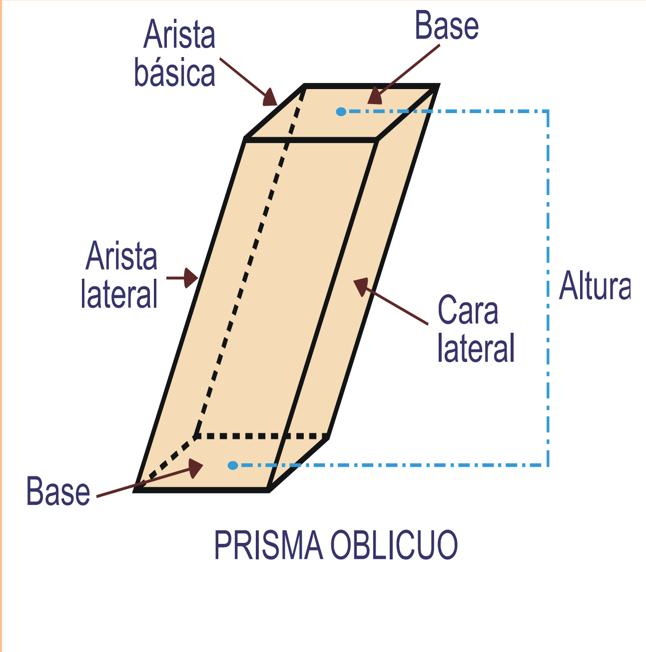
[JGF-PITÁGORAS 2.0 - Poliedros (google.com)]

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Prismas

Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (**bases**) y tantos paralelogramos (**caras laterales**) como lados tienen las bases.

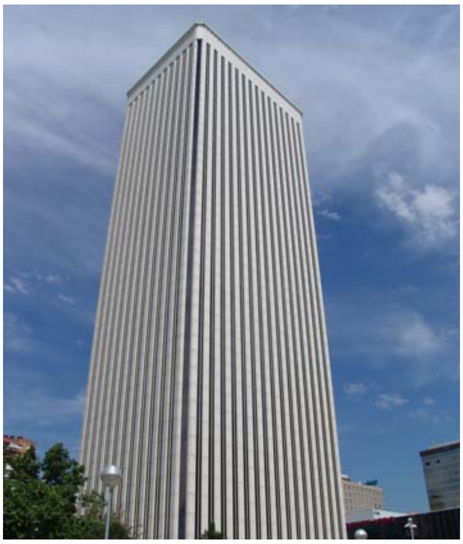




La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.
Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto.**
Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.

Ejemplo:

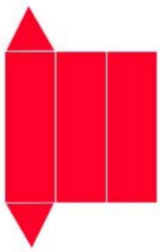
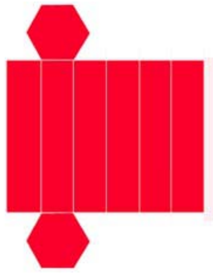
- *Casi todos los rascacielos tienen una forma que recuerda a un prisma recto.*



Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Aunque algunos arquitectos tienen ideas más originales y se atreven con prismas oblicuos.

Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases dos polígonos regulares.

		
PRISMA TRIANGULAR	PRISMA RÓMBICO	PRISMA HEXAGONAL

Aun cuando no sea regular, al prisma se le nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un **prisma triangular**, si es un cuadrilátero el prisma se llamará **cuadrangular**, si es un rombo, **prisma rómbico** y cuando la base sea un hexágono, el prisma será **hexagonal**.

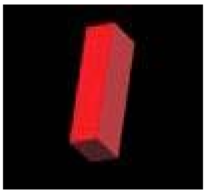
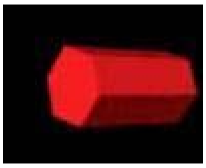
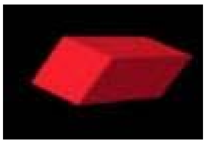
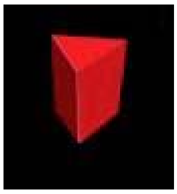
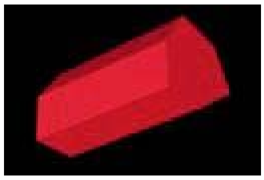
La Calzada de los Gigantes, en Irlanda del Norte, presenta rocas de Basalto que han cristalizado en forma de prismas hexagonales. Las figuras geométricas aparecen también en la naturaleza.

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como paralelepípedo, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; ortoedro si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular. Además de los que ya conoces como cubo, prisma rómbico…

Actividades propuestas

30. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.

31. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.

32. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!

33. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?

34. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.

Llamaremos **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.

Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**...

Ejemplo:

- Hay unas pirámides muy famosas: las pirámides de Giza, cerca de El Cairo, en Egipto. Son pirámides regulares con base cuadrada.

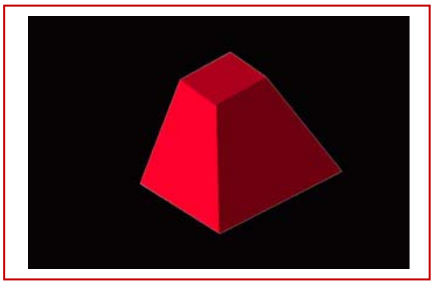
Ejemplo:

- Un tetraedro regular puede pensarse como una pirámide triangular regular.

Ejemplo:

- Un octaedro regular se puede cortar con un corte plano, formando dos pirámides cuadrangulares regulares. Por ese motivo se le denomina "bipirámide".

Llamamos **tronco de pirámide** al poliedro que se obtiene al cortar una pirámide por un plano paralelo a su base.

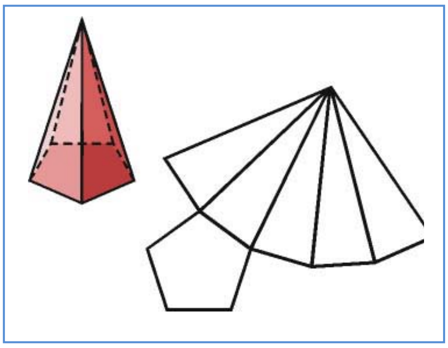


<u>Observación</u>: Al cortar la pirámide por el plano paralelo a su base en realidad quedan dos cuerpos: una pirámide más pequeña, proporcional a la que teníamos originalmente y el tronco de pirámide.

El tronco de pirámide conserva la base de la pirámide original y, en el plano del corte, aparece un nuevo polígono, que es semejante a la base (y que actúa a modo de "tapa" del poliedro). Esta es la llamada **base superior**.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

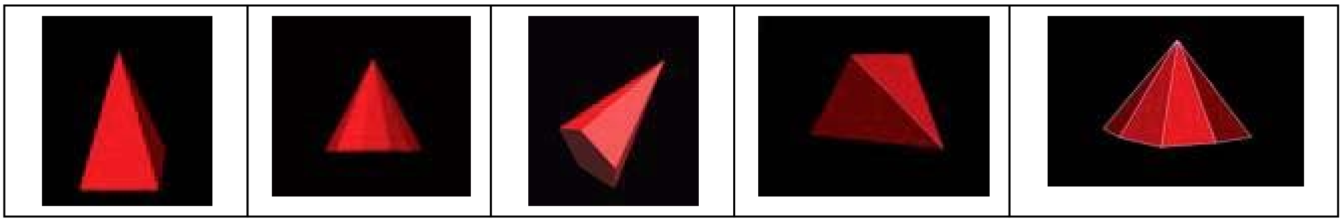
Actividades propuestas



35. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.

36. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.

37. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas u oblicuas y del número de lados de su base.



38. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

2.4. Superficie de poliedros

La **superficie de un poliedro** es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

Ejemplos:

- Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

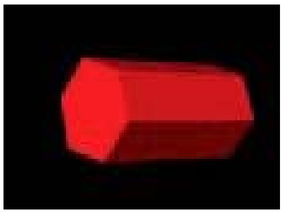
El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2, el del cubo será 6 · 9 = 54 *cm*^{2}.

- Superficie de un icosaedro regular de 3 cm de arista:

El icosaedro regular consta de 20 triángulos iguales. Como el área del triángulo es la mitad del producto de la base (3) por la altura ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$), el área de cada uno de los triángulos es 1/2 ·3 · ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$). Así, el área del icosaedro es $45\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 *cm* y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 *cm*.



Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 *cm*, el perímetro mide 24 *cm*. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$.

Así el área de una base es 24 · $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ = $24\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura: 4 · 10 = 40 cm^2.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: 6 · 40 + 2 · $24\sqrt{3}$ = 240 + $48\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Actividades propuestas

39. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.

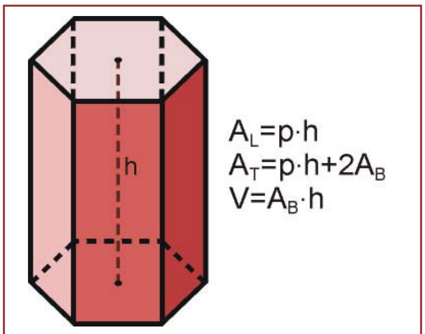
40. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.

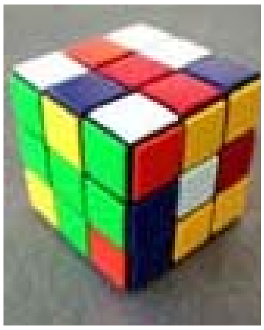
41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?

42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?

2.5. Volumen de prismas y pirámides

El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las “paredes” del cuerpo se suponen sin grosor.





Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortoedro**) es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto.

Si pensamos un poco en qué significa largo x ancho, veremos que esto es precisamente el área de la base, con lo que el volumen del ortoedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:

El **volumen de un prisma** es igual al producto del área de su base por su altura.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Calcula el volumen de un prisma recto cuya base es un pentágono regular de 10 cm^2 de área y su altura es de 15 cm.

Como nos dan el área de la base no necesitamos calcularla.

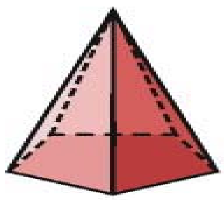
Volumen = Área de la base x altura = 10 · 15 = 150 cm^3

- Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es 1/2 · 6 · 8 = 24 cm^2.

Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm, igual a la diagonal mayor.

Volumen = Área de la base x altura = 24 · 8 = 192 cm^3



Volumen = (Área de la base x altura)/3

El **volumen de una pirámide** es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base que la pirámide y la misma altura que ella.

Probar esa propiedad relativa al volumen de una pirámide es complicado: requiere intuición geométrica, aunque te puedes hacer una idea de por qué ese resultado es cierto utilizando papiroflexia para construir un prisma a partir de tres pirámides del mismo volumen (consulta la revista al final del tema).

Actividades propuestas

43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.

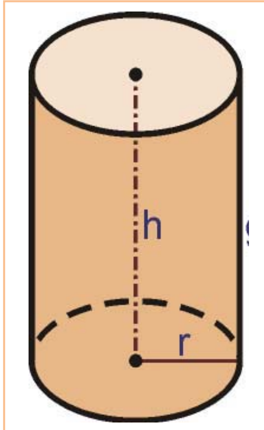
44. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación*: puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

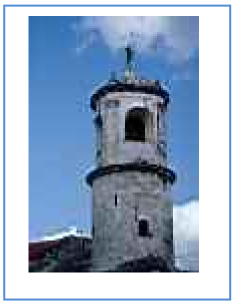
3. CUERPOS REDONDOS

3.1. Cilindros

Del mismo modo que un prisma recto se levanta a partir de una base poligonal, un **cilindro** se construye a partir de una base circular.



Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las **bases** del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cilindro.

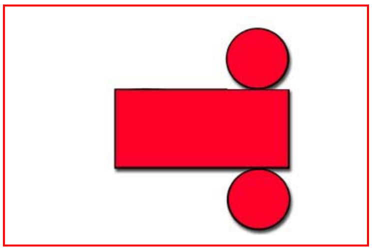


Ejemplo:

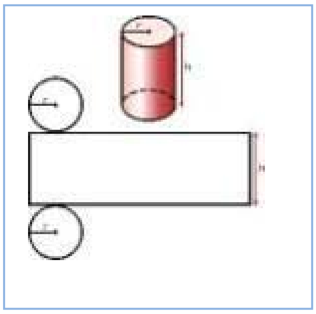
Antes nos hemos referido a rascacielos con forma de prisma, pero también los hay con forma de cilindro. Incluso hay cilindros en torres de iglesias.

Ejemplo:

Las latas de conservas son cilindros. Los rollos de papel higiénico tienen forma cilíndrica (de hecho, el nombre cilindro proviene de una palabra griega que se refiere a su forma enrollada). Hay envases de patatas fritas con forma cilíndrica. Las latas de refresco también tienen forma de cilindro. Muchos objetos cotidianos tienen forma de cilindro.



El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.

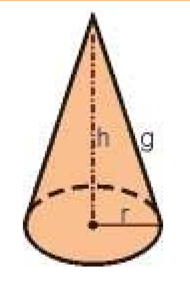


Actividades propuestas

45. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Conos

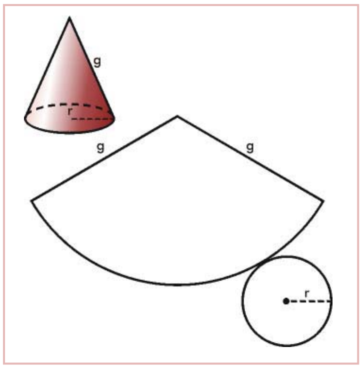


Si para hablar del cilindro poníamos como ejemplo a los prismas, para hablar del cono ponemos como ejemplo a las pirámides.

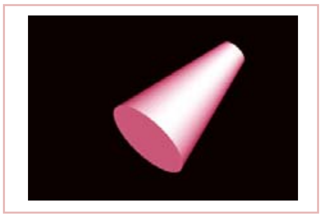
Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la **base** del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la **altura** del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la **generatriz** del cono.

Ejemplo:

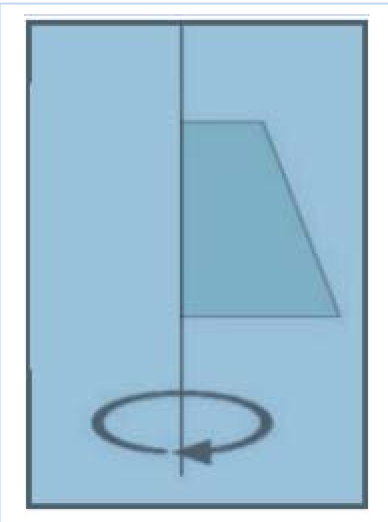
No conocemos rascacielos con forma cónica, pero las tiendas de los indios que estamos acostumbrados a ver en las películas del oeste tienen esa forma.



El **desarrollo** de un cono consta de un sector circular y un círculo. Nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.



Al igual que hacíamos con las pirámides, podemos cortar un cono por un plano paralelo a su base, resultando un cono más pequeño (la parte superior del corte) y otro cuerpo. Ese otro cuerpo, que tiene **dos bases** circulares se denomina **tronco de cono**. Su **altura** es la distancia entre sus dos bases y llamaremos **generatriz** del tronco de cono al segmento que hay de la generatriz del cono original que ha quedado tras cortar la parte superior.



Un tronco de cono se puede obtener haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor de su altura.

Ejemplo:

- En los circos, los domadores suelen subir a las fieras en “taburetes” con forma de tronco de cono. Una flanera tiene forma de tronco de cono. Los envases de queso fresco también tienen forma de cono. ¿Has pensado por qué?

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

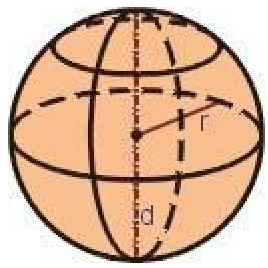
3.3. Esferas

Madrid: Al otro lado del muro

Es más complicado definir una esfera que poner ejemplos de objetos con forma esférica: una sandía, una pelota, una canica… La esfera es la generalización natural del círculo (plano) al espacio.

Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro.
El radio del semicírculo es el **radio** de la esfera.

Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.



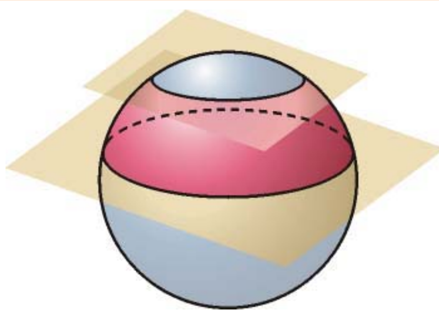
Ejemplo:

- En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

Actividades resueltas

- Una esfera de 10 *cm* de radio se corta por un plano de modo que el círculo resultante tiene 6 *cm* de radio. ¿Cuál es la distancia del centro de la esfera a ese plano?

Debemos tener en cuenta que el radio de la esfera (R) es la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por uno de sus catetos al radio del círculo resultante del corte con el plano (r) y por el otro cateto a un trozo del radio de la esfera perpendicular al plano, cuya longitud es la distancia pedida (d).



Así, como conocemos dos de los datos, solo tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el tercero (la distancia pedida d).

Así $r^2 + d^2 = R^2$ y, despejando obtenemos

$d^2 = R^2 – r^2 = 100 – 36 = 64$. Por lo que $d = \sqrt{64} = 8$ *cm*.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El procedimiento para hallar la superficie de un cilindro o un cono nos recuerda el modo con el que calculábamos la superficie de un prisma o de una pirámide: no tenemos más que ver qué figuras intervienen en su desarrollo, calcular el área de cada una de ellas y sumarlas.

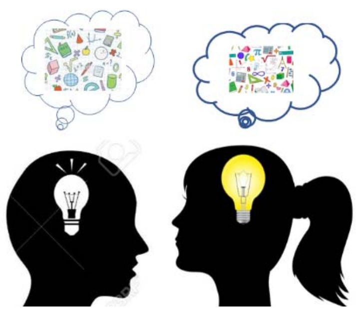
En algunos textos se utiliza el concepto de **área lateral** tanto para prismas como para cilindros. Con él se refieren al área "de las paredes" de la figura, sin tener en cuenta el de la o las bases. **Este concepto no es necesario si en cada momento sabes qué estás haciendo**. Las fórmulas se deben comprender, pero las matemáticas no son una ristra de fórmulas que se deben aprender de memoria. Entender lo que se debe hacer en cada momento te facilitará el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo del cilindro consta de 2 círculos y un rectángulo. La altura del rectángulo (h) es la altura del cilindro y como el rectángulo se tiene que enrollar alrededor de la base del cilindro, su base tiene que medir lo mismo que la correspondiente circunferencia y ese valor es, siendo r el radio de la base del cilindro. Así, el área del rectángulo es $2\pi rh$.

Por otra parte cada una de las bases tiene área πr^2, y tiene dos bases. Así:

Superficie del cilindro = $2\cdot\pi\cdot r\cdot h + 2\,\pi\cdot r^2$

Actividades propuestas



46. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.

47. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

Superficie del cono

Siguiendo la misma idea anterior, para calcular la superficie de un cono, sumaremos las áreas de las dos piezas que componen su desarrollo: un círculo y un sector circular. (Mira la figura del desarrollo del cono que está en la sección 3.2).

Si la base del cono es un círculo de radio r, la longitud de la correspondiente circunferencia es $2\pi r$ y la parte curva del sector circular en el desarrollo del cono debe enrollarse sobre esa circunferencia, luego la medida de esa línea curva es $2\pi r$.

Para calcular el área del sector circular haremos una regla de tres, teniendo en cuenta que el radio de ese sector circular es la generatriz del cono: si a una longitud de $2\pi g$ (circunferencia completa) le corresponde un área de πg^2, a una longitud de $2\pi r$ le corresponderá $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi\cdot r\cdot g$.

La base del cono es un círculo de radio r, cuya área es de sobra conocido. Así tenemos que

Superficie del cono = Área del sector circular + Área del círculo = $\pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para calcular la superficie del tronco de cono debemos calcular las áreas de sus bases, que son círculos (y, por tanto, fáciles de calcular) y la de su pared lateral. El área de esta pared lateral se puede calcular restando el área de la pared del cono original menos el de la pared del cono pequeño que hemos cortado.

Superficie lateral del tronco de cono = Superficie lateral del cono original – Superficie lateral del cono que cortamos

Para calcular la superficie total hay que sumar al área lateral el de las dos bases.

También se puede calcular esto mediante una fórmula, cuya prueba utiliza dos teoremas importantes de la geometría plana: el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.

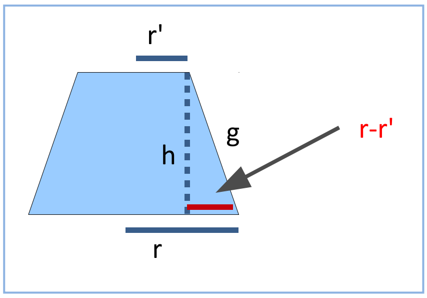
Supondremos que el radio de la base mayor del tronco de cono es *r*, el de la base menor *r'* y la generatriz *g*. Entonces

Superficie del tronco de cono = $\pi \cdot (r+r') \cdot g + \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r'^2$

Actividades resueltas

- Queremos construir un taburete para elefantes con forma de tronco de cono, con 75 *cm* de altura y bases de 1.50 y 2.50 metros. Posteriormente forraremos con tela todo el taburete. Si el metro cuadrado de la tela elegida cuesta 3 euros (y se supone no se desperdicia nada en la elaboración) ¿cuánto cuesta forrar el taburete?

Lo primero que debemos hacer es expresar todos los datos con las mismas unidades. Lo expresaremos en metros.



Como nos dan la altura y los radios, calcularemos la generatriz usando el teorema de Pitágoras:

Así $h^2 + (r - r')^2 = g^2$ y, retomando los datos tenemos:

$r' = 1.5\ m$; $r = 2.5\ m$; $g = \sqrt{0.75^2 + 1^2} = 1.25\ m$.

Con ello calculamos el área: $\pi \cdot (2.5 + 1.5) \cdot 1.25 + \pi \cdot 2.5^2 + \pi \cdot 1.5^2 = 42.39\ \text{m}^2$

y, por tanto, forrar el taburete nos cuesta $42.39 \cdot 3 = 127.17$ euros.

Superficie de la esfera

No podemos calcular la superficie de la esfera mediante su desarrollo, ya que solo se podría obtener de forma aproximada. Sin embargo, hay diferentes métodos (más avanzados) que permiten calcularlo. Aunque no somos partidarios de dar fórmulas, esta vez tenemos que avanzar que

Superficie de la esfera de radio *r* es igual a $4\pi r^2$

Ese valor coincide con el del área lateral del cilindro de radio *r* y altura 2*r* (que es el que se ajusta por completo a la esfera). Como sabemos deducir el área lateral del cilindro, recordar esto nos evitará tener que recordar la fórmula anterior.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

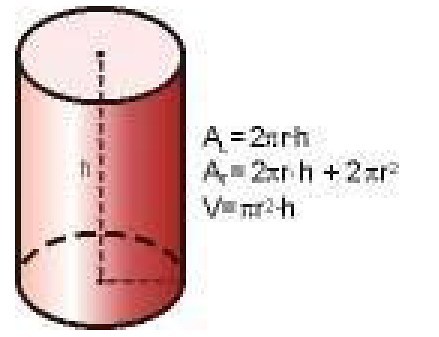
3.5. Volumen de cilindros, conos y esferas

Con el cálculo de volúmenes ocurre algo parecido a lo que ocurre con las áreas: el cálculo del volumen de un cilindro es similar al del volumen de un prisma, mientras que el cálculo del volumen del cono nos recuerda al del volumen de la pirámide. La esfera merece un capítulo aparte.

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es *r* y la altura es *h* nos queda

Volumen cilindro = $\pi r^2 h$



Ejemplo:

- Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 *cm* y una altura de 12 *cm*. Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 *cm*, la mitad del diámetro.

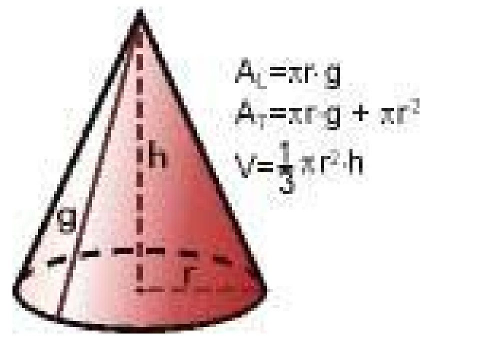
Así el volumen viene dado por

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339.12\ cm^3$$

Volumen del cono

El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura (¿te recuerda eso a algo?). Así, para un cono cuyo radio de la base es *r* y su altura es *h* se tiene que

Volumen cono = 1/3 $\pi r^2 h$



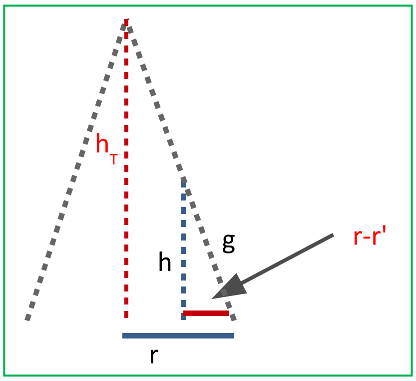
Para calcular el volumen de un **tronco de cono** calcularemos el volumen del cono original y le restaremos la parte superior que hemos cortado.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Vamos a calcular el volumen del taburete para elefantes que hemos forrado de tela en una actividad anterior: tiene forma de tronco de cono, con 75 *cm* de altura y bases de 1.50 y 2.50 metros.

Lo primero que haremos es determinar el volumen del cono completo. Para ello necesitamos calcular su altura.



Utilizando semejanza de triángulos y llamando a la altura del cono total h_T tenemos que

$$h_T/h = r\ /\ (r - r')$$

de ahí que la altura del cono total sea $h_T = h \cdot r\ /\ (r - r') = 0.75 \cdot 2.5 / 1 = 1.875$ *m.*

y por ello el volumen del cono total será de $V = (1/3)(h_T \pi r^2) = (1/3)(36.8) = 12.27\ m^3$.

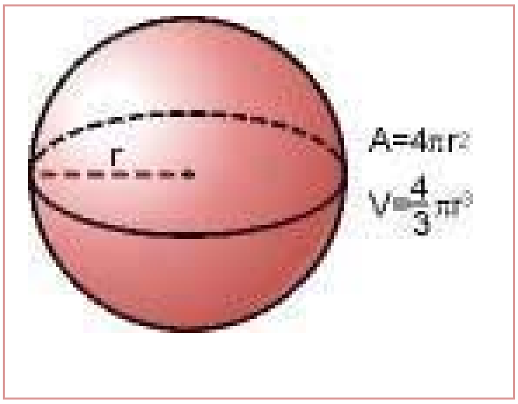
Ahora debemos calcular el volumen del "cono pequeño" (el que hemos eliminado para conseguir el tronco de cono). Su altura es la diferencia entre la altura del cono grande y la del tronco de cono. Su radio es el de la base superior del tronco de cono.

Por ello su volumen viene dado por $(1/3)\ (h_T - h)\ \pi r'^2 = (1/3)(7.95) = 2.65\ m^3$.

Consecuentemente, el volumen del tronco de cono es

$$12.27 - 2.65 = 9.62 \text{ m}^3.$$

Volumen de la esfera



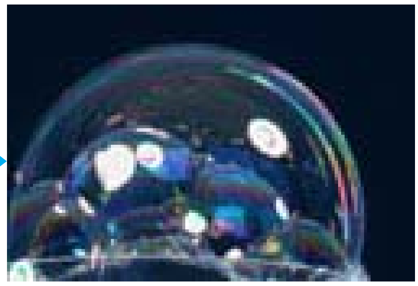
Al no tener un desarrollo plano, trabajar con la esfera es más difícil y requiere técnicas matemáticas que estudiarás en otros cursos. Simplemente por completar lo expuesto en este tema, damos la fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio *r*.

Volumen de la esfera = $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

CURIOSIDADES. REVISTA

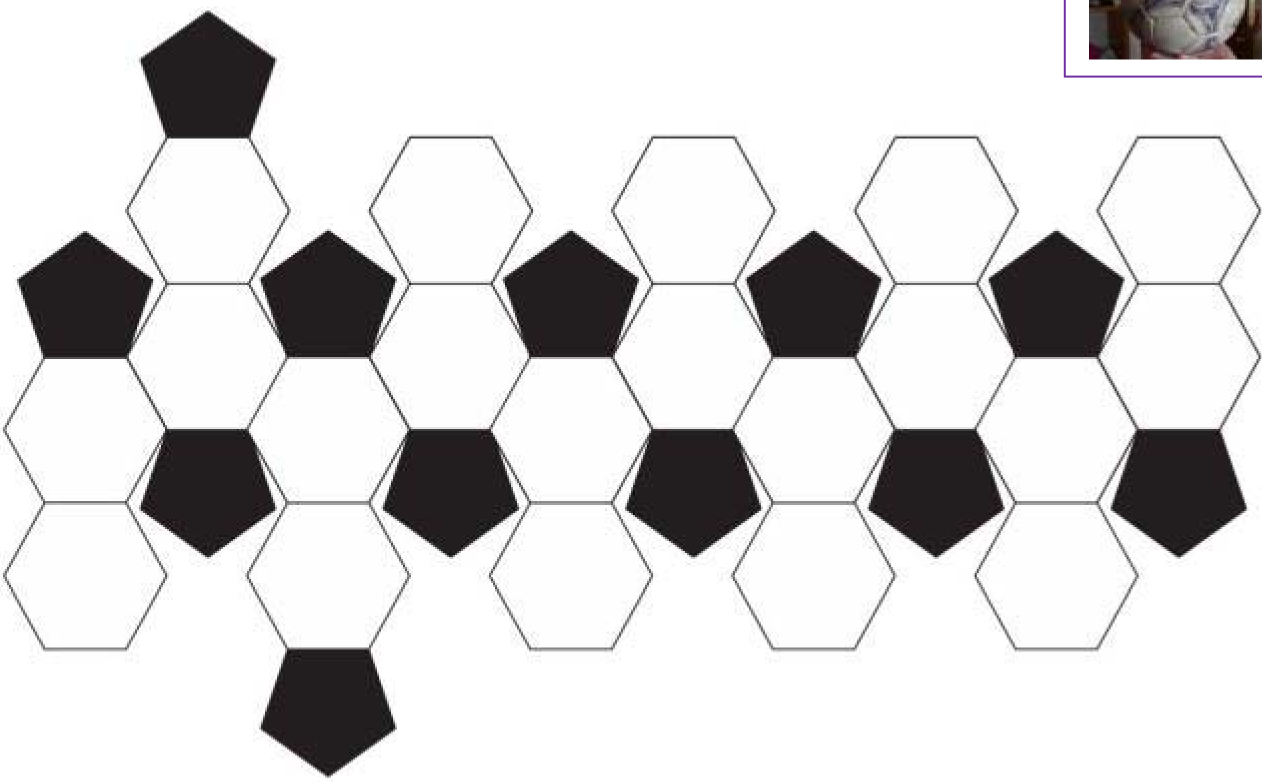
Esferas

De todos los cuerpos geométricos que tienen la misma superficie total, el que encierra un mayor volumen es la esfera. Por eso las **pompas de jabón** son esféricas: contienen la mayor cantidad de aire que se puede encerrar con esa lámina de jabón. En dos dimensiones es el círculo el que encierra la mayor superficie; por eso si echas aceite encima del agua se forman círculos.



Balones de fútbol

Hay poliedros más complicados que los que hemos descrito en este capítulo. Por ejemplo, si a un icosaedro le cortamos las esquinas obtenemos un "**icosaedro truncado**". Esa es la forma real de los **balones de fútbol** (los clásicos que tienen pentágonos negros y hexágonos blancos). Lo que ocurre es que al inflar la cámara que hay en su interior se comban los polígonos, dando sensación de esfericidad. ¿Quieres comprobarlo? Simplemente recorta en cartulina este modelo y pega las uniones con cinta adhesiva.



Latas de conservas

Muchas latas y botes de conservas tienen forma cilíndrica porque sería muy costoso fabricarlas de forma esférica. Aun así, debido a que sus bases son circulares, la relación área total / volumen es bastante satisfactoria.

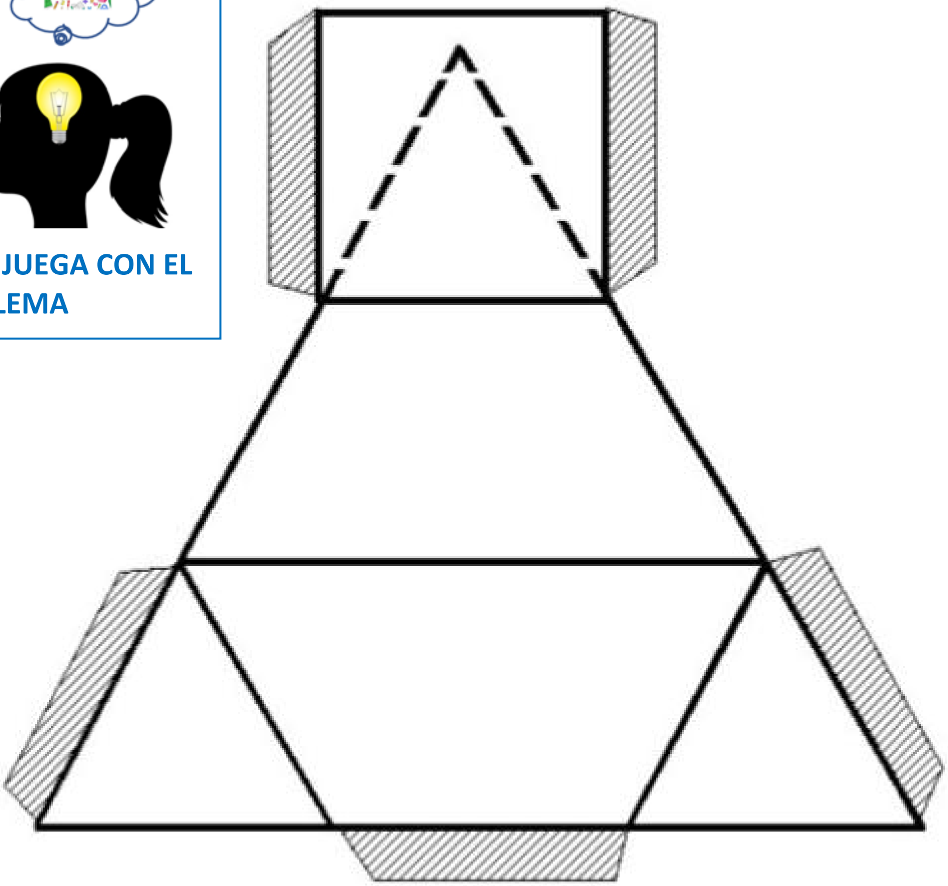
Puzzles de dos piezas

¿Te parece que un puzle de dos piezas es sencillo?

Te proponemos un reto: recorta en cartulina dos copias de esta figura, para armar con cada una de ellas un poliedro (cuyas caras son dos triángulos, dos trapecios y un cuadrado).

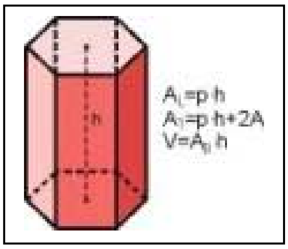
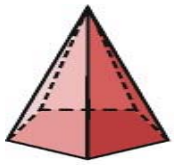
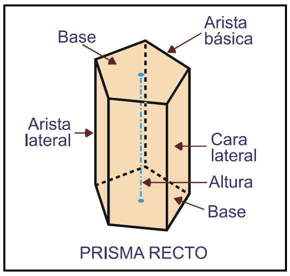
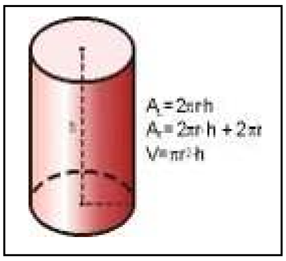
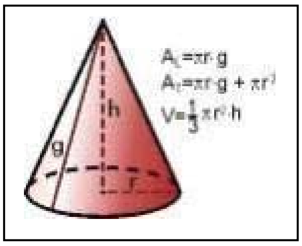
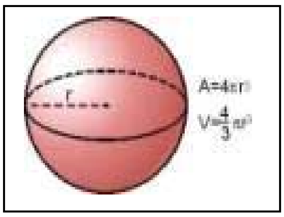
- Ahora, juntando esos dos poliedros forma un tetraedro.

EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA



Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Elementos del espacio	Puntos, rectas y planos	
Sistemas de representación	Planta, perfil y alzado. Tomografía. Perspectiva caballera.	
Posiciones relativas	Dos planos: o se cortan o son paralelos. Dos rectas en el espacio: o se cortan o son paralelas o se cruzan. Una recta y un plano: o la recta está contenida en el plano, o lo corta o es paralela.	
Poliedro	Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos	
Poliedros regulares	Poliedro, con todas las caras, polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.	Tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, e icosaedro.
Prisma. Volumen **Pirámide. Volumen**	  Volumen = (Área de la base x altura)/3	
Cilindro. Volumen	 	Un cilindro de radio 3 m y altura 5 m tiene un volumen de 45π m³, y una superficie lateral de 30π m².
Cono. Volumen		Un cono de radio 3 m y altura 5 m, tiene un volumen de 15 m³.
Esfera. Superficie. Volumen		Una esfera de radio 3 tiene un volumen de 36π m³, y una superficie de 36π m².

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El espacio

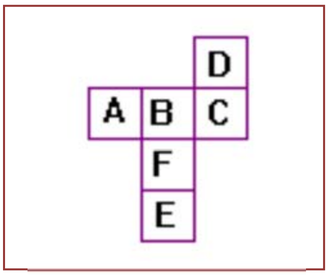
1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.

2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:

a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
b) Un cono con cortes paralelos a su base
c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
d) Un prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara

3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.

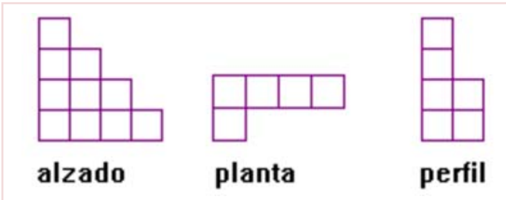
4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.



5. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería….

EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

6. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?



7. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:

a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.

b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

c) ¿Existen rectas paralelas?

8. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Poliedros

9. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120 º, ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?

10. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60º y 120 º. Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.

11. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.

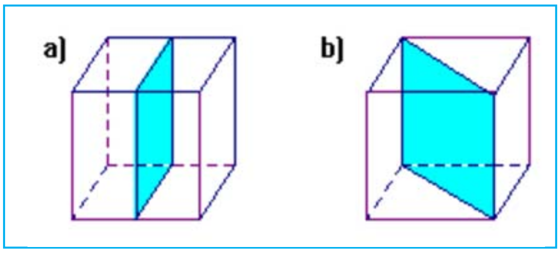
12. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a Aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.

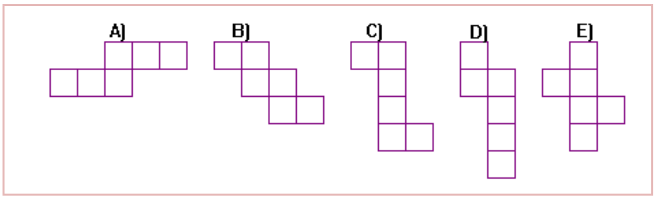
13. Un balón de futbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.

14. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina… ¡Seguro que se te ocurren otras formas!

15. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?

16. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.





17. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.

18. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.

19. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (*Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina*).

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

20. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.

21. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.

22. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm.

23. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?

24. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.

25. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?

26. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?

27. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.

28. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.

29. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?

30. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?

31. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.

32. Construye una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.

33. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?

34. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?

35. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.

36. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm.

37. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.

38. Calcula la superficie total de un tronco de cono de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.

39. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de 67π cm^2. ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cuerpos redondos

40. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:

a) un lado, un rectángulo
b) un cateto, un triángulo rectángulo
c) la hipotenusa, un triángulo rectángulo
d) su diámetro, un círculo.

41. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.

42. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.

43. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.

44. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.

45. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.

46. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.

47. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.

48. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.

49. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.

50. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.

51. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (Ayuda: La apotema del pentágono mide 5.4 cm).

52. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?

53. Calcula la superficie y el volumen de una esfera cuya circunferencia máxima mide 10π m.

54. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.

55. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si R = 6 cm.

56. Un cono tiene de altura h = 7 cm, y radio de la base r = 2 cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.

57. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.

58. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.

59. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Calcúlalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.

60. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

61. Utiliza una hoja de cálculo (o la calculadora) para calcular el volumen de una esfera de radio 7 u, tomando para π diferentes aproximaciones.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?

a) el cilindro b) la esfera c) el icosaedro d) el dodecaedro

2. La definición correcta de poliedro regular es:

a) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares

b) Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales

c) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales

d) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Un prisma oblicuo puede ser regular

b) El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura

c) Las caras de un dodecaedro son hexágonos

d) El volumen de una pirámide es área de la base por la altura

4. Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:

a) $2\pi rh$ b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) $2\pi r(h + r)$ d) $2/3\pi rh$

5. El número de vértices de un icosaedro es:

a) 20 b) 12 c) 30 d) 10

6. El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:

a) 83.1 cm^3; 96 cm^2 b) 35.7 cm^3; 48 cm^2 c) 0.1 L; 0.9 ha d) 106 m^3; 95 m^2

7. El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente:

a) 62 cm^3; 24 cm^2 b) 7 000 L; 0.48 ha c) 7 cm^3; 8 cm^2 d) 27.6 m^3; 48 m^2

8. El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:

a) 0.12π L b) 36π cm^3 c) 12 π cm^3; d) 36π cm^3

9. El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:

a) 100π m^3; 40π m^2 b) 100π cm^3; 40π cm^2 c) 31.4 cm^3; 12.56 cm^2 d) 33π cm^3; 7π cm^2

10. El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:

a) 288π cm^3; 144π cm^2 b) 144π cm^3; 288π cm^2 c) 452 m^3; 904 m^2 d) 96π cm^3; 48π cm^2

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Eduardo Cuchillo y José Gallegos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2º ESO

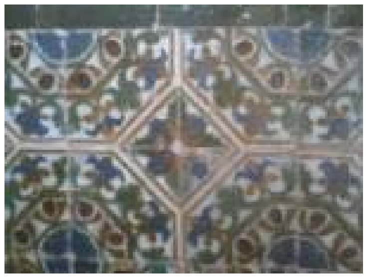
CAPÍTULO 8: MOVIMIENTOS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora y autor: María Molero y Álvaro Garmendia

Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Índice



Resumen

Todo se mueve en el Universo, la Tierra gira alrededor de su eje y se desplaza alrededor del Sol. El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, y la galaxia también se mueve. ¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo! Observa que ni el tamaño ni la forma de los objetos varían con estos movimientos. Estas transformaciones que mantienen la forma y el tamaño son los movimientos o isometrías que estudiaremos en este capítulo.

Analizar lo que nos rodea con ojos matemáticos nos ayuda a comprender más y más cosas. Aprender a mirar las torres, ese reflejo sobre el agua de un palacio de la Alhambra, los mosaicos… o los tapacubos de los coches, los animales y los objetos cotidianos. Todos ellos encierran muchas matemáticas: muchas transformaciones geométricas. Estudiaremos las simetrías, los giros y las traslaciones y las analizaremos en nuestro entorno.

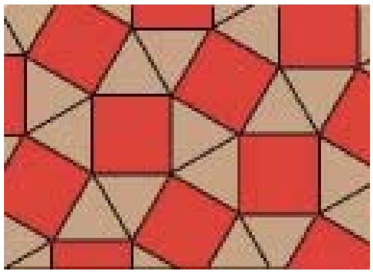
1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Muchas decoraciones se hacen repitiendo un motivo. En los mosaicos de la Alhambra, en las rejas, en las puntillas y las grecas, en los rosetones de las iglesias… en todas partes puedes ver diseños hechos mediante otro más sencillo. Al observar un edificio puedes ver que en ocasiones está compuesto por algún trozo que se ha ido desplazando, o girando, o hallando el simétrico.

Imagina que estás manipulando un mapa en un móvil con los dos dedos: Puedes desplazarte, girar el mapa, ampliarlo, reducirlo... pero el mapa siempre es básicamente el mismo. Estas manipulaciones son "transformaciones geométricas", porque mantienen las propiedades geométricas más básicas de los objetos: longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, o la proporción entre las longitudes, la forma…

1.1. Isometrías

En el mosaico del margen todos los cuadrados son iguales y también son iguales todos los triángulos.


Isometrías

A las transformaciones geométricas que nos llevan de un cuadrado a otro (o de un triángulo a otro) que mantienen la forma y el tamaño las llamamos isometrías o movimientos.

La palabra *isometría* proviene del griego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa por tanto: *Igual medida*.

En el ejemplo del mapa, siempre que no hagas zoom, estarás usando una isometría.

Las **isometrías,** (**movimientos** o **congruencias**) son transformaciones geométricas que conservan ángulos y distancias (aunque no tienen por qué conservar la orientación de los ángulos).

Isometrías en el plano son las **traslaciones**, los **giros** y las **simetrías**.

video

Movimientos en el plano. Desde la aparición del ser humano sobre la faz del planeta todas las culturas han utilizado figuras geométricas como elementos ornamentales, no sólo en sus manifestaciones arquitectónicas y artísticas, sino también en sus útiles domésticos. Este capítulo nos muestra, entre otros temas, los movimientos de las figuras geométricas: Traslación, giro y simetría. La aventura del saber. Antonio Pérez.

Más por menos: Movimientos en el plano | RTVE Play

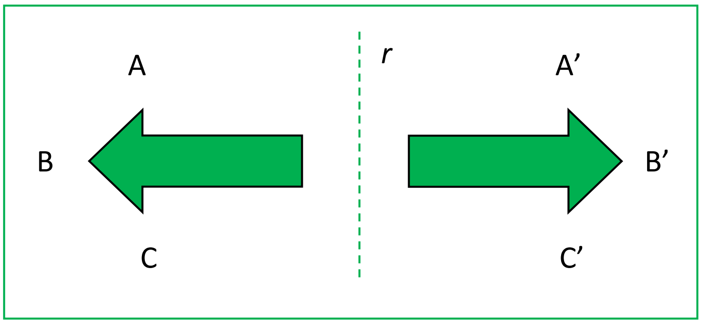
Actividades propuestas

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?
2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

1.2. Isometrías directas e inversas

Actividades resueltas

- En la figura del margen observa que una flecha se transforma en la otra mediante la simetría de eje *r*. El ángulo *ABC*, ¿es igual al ángulo *A'B'C'*? Tienen la misma amplitud, que en ambos es de 90°, pero su orientación es distinta. Mientras que *ABC* gira en el sentido de las agujas del reloj, es decir, tiene sentido negativo, mide –90°, *A'B'C'* gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que su sentido es positivo y mide +90°.



Entre las isometrías hay dos tipos de transformaciones, las que conservan los ángulos (su amplitud y su sentido) que se llaman isometrías **directas**, y las que conservan la amplitud de los ángulos pero cambian su sentido, que se llaman isometrías **inversas**.

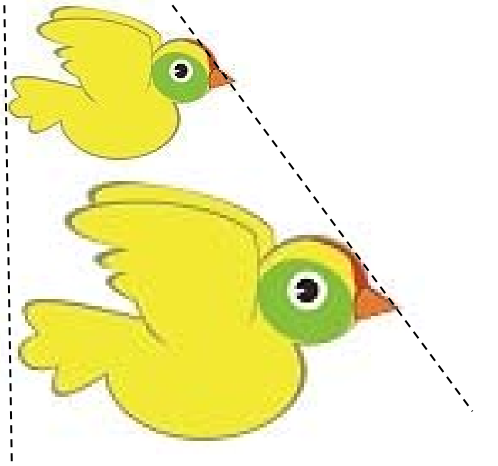
- Las traslaciones y los giros en el plano son isometrías directas. Las simetrías son isometrías inversas.
- Tus manos son simétricas. Son iguales. Pero, ¿las puedes superponer? ¿Y tus pies? La simetría es una isometría inversa.
- Imagina el mapa hecho sobre plástico transparente: Si volteas el mapa sobre la mesa, las longitudes y ángulos se mantienen (es una isometría) pero ahora no podrías colocar la ciudad de Valencia de este nuevo mapa, sobre la ciudad de Valencia del mapa original, por más que lo movieras nunca te podrían coincidir. Es una isometría inversa.

Observación:

Unos autores denominan movimientos a las isometrías, y otros estiman que si moviendo las manos nunca vamos a poder superponerlas, las isometrías inversas no deben llamarse movimientos.

1.3. Semejanzas

Si haces zoom en el móvil con los dos dedos en el mapa, las longitudes cambian, así que no es una isometría, pero el mapa sigue siendo el mismo: los ángulos y sus sentidos sí que se conservan, y las proporciones entre las medidas también (la calle que era el doble de larga que otra lo sigue siéndolo). Estos cambios de escala se denominan "semejanzas".



Semejanza. Homotecia

Las figuras del margen son **semejantes**. Es la misma imagen sólo que ampliada. Se mantiene la misma proporción en todas las direcciones. Se mantiene la forma, pero no el mismo tamaño. A estas transformaciones las llamamos **semejanzas**, o si tienen una determinada posición: **homotecias**.

En una semejanza las figuras homólogas tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Ejemplo

- Cuando haces zoom en una foto con el móvil estás haciendo una homotecia. Al poner los dos dedos sobre la pantalla defines dos puntos: el origen *O* sería el punto justo entre tus dos dedos y no se moverá al hacer zoom, y el punto *P* estaría en tu primer dedo. Al mover ese dedo estas definiendo el tercer y último punto *P'* y el móvil amplia la foto para que el punto *O* quede fijo y *P* se estire hasta *P'*. Es una homotecia directa.

Las homotecias tienen un centro de homotecia, *O*, y un punto *P* se transforma por una homotecia en el punto *P'* que está en la recta *OP*, si se verifica que: ***OP'*** = *r* · ***OP*** donde *r* es un número llamado **razón de homotecia**.

Actividades propuestas

3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?
4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?

1.4. Composición de transformaciones geométricas

Ejemplo:

- Observa cómo se ha construido este bello mosaico de la Alhambra:

Se ha analizado buscando la celda unidad, (un cuadrado formado por cuatro cuadrados) y el motivo mínimo (la mitad de uno de esos cuadrados). En el motivo mínimo, un triángulo rectángulo isósceles, se ha dibujado una sencilla poligonal. Se le han aplicado distintas isometrías: Una simetría de eje la hipotenusa. Al motivo formado por el inicial y su simétrico se le han aplicado cuatro giros de 90°. Se ha vuelto a girar el conjunto. Se ha dado color. Se ha trasladado horizontal y verticalmente.

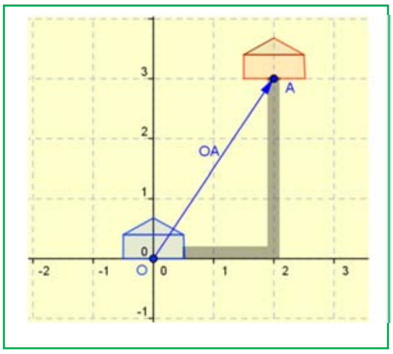
Cuando aplicamos varias transformaciones, estamos componiendo transformaciones geométricas.

Actividades propuestas

5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

2. TRASLACIONES

2.1. Vectores



Si Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris.

Llamamos "*O*" a la posición de la casa de Susana, y "*A*" a la posición de la casa de Nadia. Si Susana tuviera un helicóptero podría ir directamente en línea recta y seguiría la dirección *OA*. Lo representamos con una flecha y se denomina vector fijo.

Un vector fijo ***OA*** es un segmento orientado con origen en el punto *O* y extremo en el punto *A*. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde *O* hasta *A*, y una longitud, a la que llamamos módulo.

Un **vector fijo *OA***, de **origen** en *O* y **extremo** en el punto *A*, se caracteriza por:

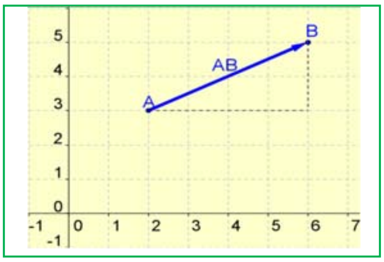
Su **módulo**, que es la longitud del segmento *OA* y que se escribe $|OA|$.

Su **dirección**, que es la recta que contiene al segmento.

Su **sentido** que va desde el origen *O* hasta el extremo *A*.

Las coordenadas o componentes de un vector vienen determinadas por su origen y su extremo.

Ejemplo:



- Si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto final podemos calcular las coordenadas del vector. Observa el dibujo del margen y comprueba que si *A* (2, 3) y *B* (6, 5) las coordenadas del vector fijo ***AB*** son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a*, *b*) y *B* (*c*, *d*) entonces ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) tiene de módulo: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

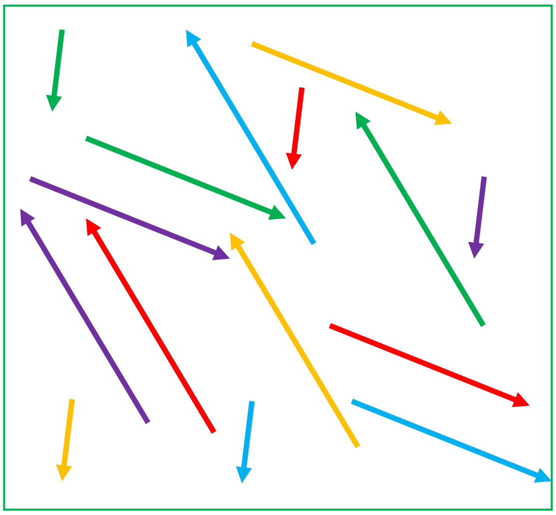
Actividades propuestas

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** y ***CB***. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.
7. El vector fijo ***AB*** tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.
8. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo ***AB*** son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.

Todos los segmentos orientados o vectores fijos que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, tienen las mismas coordenadas, entonces se dice que son el mismo vector libre, y podemos usarlo en diferentes puntos origen.

Dos vectores fijos son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido, y por lo tanto tienen las mismas coordenadas.

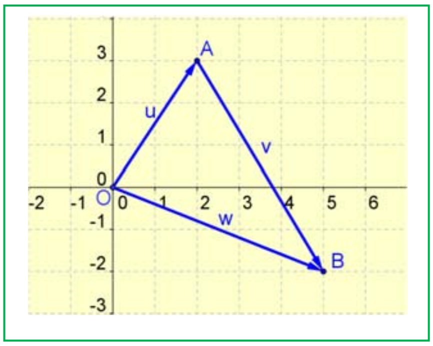
Todos los vectores que son equipolentes se dicen que son un **vector libre**, y cada uno de sus vectores fijos, un **representante** del vector. Al vector libre lo identificamos por sus coordenadas.



Actividades propuestas

9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.
10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) y *F* (–2, –5).
11. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.
12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos ***DE*** y ***FG***. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

Actividades resueltas



El vector fijo ***OA*** = ***u*** que indica el trayecto de Susana tiene de coordenadas (2, 3). Si luego Susana quiere desplazarse a casa de otra amiga que está a 3 calles al Este y 5 calles al Sur hará un desplazamiento de vector: ***v*** = (3, –5). En conjunto Susana ha hecho un desplazamiento que es la suma de los dos desplazamientos anteriores. Finalmente está en el punto:

$$(2, 3) + (3, -5) = (5, -2).$$

Se encuentra 5 calles al Este y dos calles al Sur de su casa.

Se **suman** dos vectores, sumando sus componentes: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *c*, *b* + *d*)**

Se multiplica un vector por un número, multiplicando sus componentes: ***r*·(*a*, *b*) = (*r*·*a*, *r*·*b*)**

Actividades propuestas

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama **u** al vector fijo ***AB*** e indica sus componentes. b) Llama **v** al vector fijo ***BC*** e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector **w** = **u** + **v**. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres **u** y **v** con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma **w**. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre **u** y **v**.

14. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector **u** = (2, 3) con origen en *A*, y el vector **v** = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma **u** + **v**, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre **u** y **v**.

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)] d) 9.3·(2, 6) + (3.7, 5.2)

16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) y ***w*** = (3, 4):

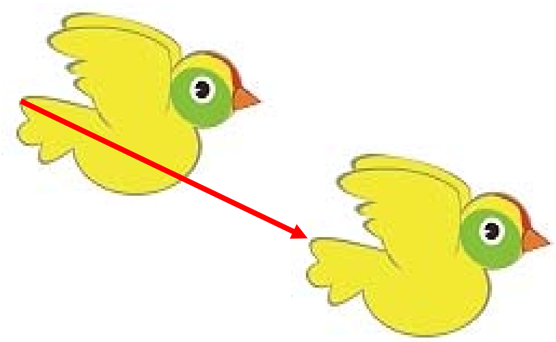
a) 2***u*** – (***v*** + ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Traslaciones en el plano

Un coche se mueve por la ciudad desde el domicilio del dueño hasta su trabajo, y se ha trasladado 4 calles hacia el norte y 3 calles hacia el este.

Es posible conocer una **traslación** si sabemos el punto de origen *A* y el de destino *B*. Estos dos puntos, *A* y *B*, determinan el **vector de traslación *AB***. ***AB*** es un vector fijo, representante del vector libre ***u*** de iguales coordenadas.

Una figura y su trasladada.

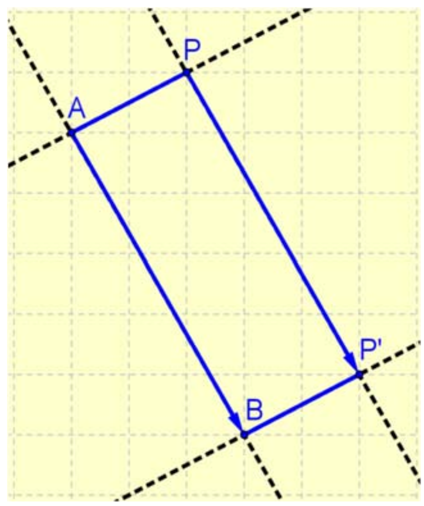


Para definir una **traslación** basta conocer su **vector de traslación**.

Si la traslación de vector libre ***u = AB*** transforma un punto del plano *P* en otro *P'*, entonces ***AB*** y ***PP'*** tienen igual módulo, dirección y sentido. Son el mismo vector libre. Tienen las mismas coordenadas.

Si con la traslación de vector ***AB*** trasladamos el punto *P* hasta el punto *P'* entonces *ABP'P* es un **paralelogramo**, y ***AB*** = ***PP'***

Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan. Como en una traslación todos los puntos se mueven sobre rectas paralelas y una misma distancia, se puede usar la escuadra y el cartabón para trazar las rectas paralelas y trasladar sobre ella algunos puntos de la figura, para lo que se debe medir siempre la misma distancia sobre la recta.



Propiedades de las traslaciones

Los paralelogramos tienen, como sabes, sus lados iguales dos a dos y paralelos dos a dos.

La recta *AB* es paralela a la recta *PP'*, y la recta *AP* es paralela a la recta *BP'*. Los segmentos *AB* y *PP'* son iguales, lo mismo que *AP* y *BP'*.

Por este motivo, entre una figura y su trasladada **se conservan todas las distancias y todos los ángulos**.

La traslación es una **isometría**, un **movimiento directo**.

Identidad

La traslación de vector de traslación nulo, **0** = (0, 0) deja todos los puntos invariantes, es decir, no traslada nada, y se denomina también traslación identidad o simplemente: **identidad**.

Puntos invariantes

Un **punto invariante** es el que se transforma en sí mismo. Una **recta invariante** es la que se transforma en ella misma, aunque sus puntos no sean invariantes. Una **recta invariante de puntos invariantes** es un caso particular de recta invariante en la que cada uno de sus puntos es un punto invariante.

¿Qué puntos deja invariantes una traslación? Observa que salvo la traslación identidad, (que deja todo el plano invariante), una traslación no deja a ningún punto invariante.

Actividades propuestas

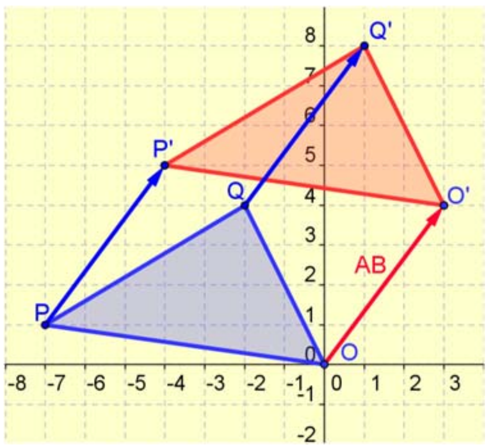
17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Un friso en Camboya

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

2.3. Coordenadas

Para trabajar con traslaciones puedes utilizar las coordenadas:



Actividades resueltas

- A los puntos *P* (–7, 1), *Q* (–2, 4) y *O* (0, 0) se les aplica una traslación de 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba de modo que su vector de traslación es:

  AB = (3, 4)

  Entonces las **coordenadas de los puntos trasladados** se obtienen sumando a la abscisa del punto que queremos trasladar la abscisa del vector de traslación, y a la ordenada del punto, la ordenada del vector de traslación:

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Para trasladar *P* (–7, 1) según el vector ***AB*** = (3, 4) se calcula –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, por lo que su punto trasladado es: *P'* (–4, 5).

Al trasladar *Q* (–2, 4) se obtiene *Q'* (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

Al trasladar *O* (0, 0) según el vector ***AB*** = (3, 4) se obtiene *O'* (3, 4).

Actividades propuestas

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).

22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?

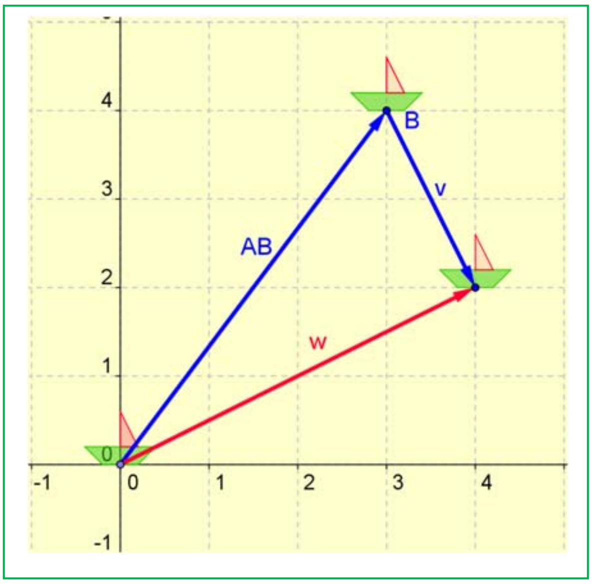
2.4. Composición de traslaciones

Si trasladas una figura mediante una traslación de vector **u**, y luego vuelves a trasladarla mediante otra de vector **v**, puedes comprobar que puedes ir de la primera figura a la última mediante una única traslación. El vector de traslación de esta última traslación puedes obtenerlo sumando los vectores de traslación de las dos primeras: **u** + **v**.

Actividades resueltas

- Trasladamos mediante el vector de traslación ***AB*** = (3, 4), y luego mediante el vector de traslación **v** = (1, –2). La composición de ambas traslaciones es otra traslación de vector de traslación **w**:

  w = ***AB*** + **v** = (3 + 1, 4 – 2) = (4, 2)



Actividades propuestas

23. Las puntillas de la imagen se han diseñado a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo parecido a alguno de la figura, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Traslación inversa

Actividades resueltas

- Si hemos trasladado una figura 4 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba, ¿cómo debemos trasladarla para que ocupe la posición inicial? Hay que trasladarla con el vector: (–4, –3).

Decimos que estas traslaciones son la una inversa de la otra.

En general, la **traslación inversa** de la de vector de traslación **v** = (*a*, *b*) es la traslación de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Actividades propuestas

24. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.

2.5. Traslaciones en el espacio

Las traslaciones en el espacio tienen las mismas propiedades que las traslaciones en el plano.

Imagina un avión que se mueve. El avión se traslada.

Una traslación en el espacio, igual que una traslación en el plano, es el movimiento que consiste en deslizar un objeto según una dirección. La traslación está determinada por la distancia que se traslada, la dirección de la recta sobre la que se traslada, y por su sentido. Por tanto:

Para determinar una traslación en el espacio basta conocer su **vector de traslación**.

La única diferencia es que ahora el vector de traslación tiene tres componentes: ***AB*** = (*a*, *b*, *c*).

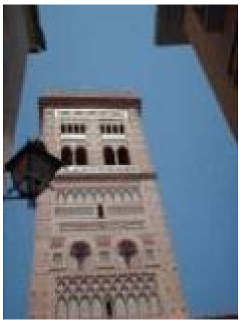
Ejemplo:

- Para trasladar el punto *P* (2, 4, –1) mediante la traslación de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplemente sumamos las coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La traslación en el espacio no deja ningún punto invariante.

Actividades propuestas



26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

3. GIROS O ROTACIONES

3.1. Giros en el plano

Son las 4 en punto. Si retrasamos el reloj 15 minutos, la manecilla de los minutos ha girado un ángulo de 90° en sentido positivo.

Para determinar un **giro** o **rotación** es necesario conocer un punto, *O*, el **centro de giro**; un **ángulo** α y el **sentido** de giro de ese ángulo.

Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

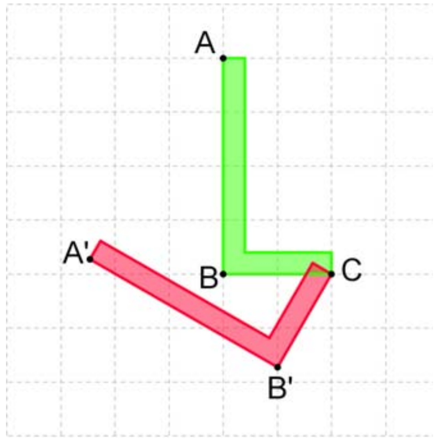
Si *A'* es el punto girado de *A*, con centro *O* y ángulo α, entonces: $|OA| = |OA'|$ y el segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*.

Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplo:

- Si han pasado 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90° (90° en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180°, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60°.

Actividades resueltas

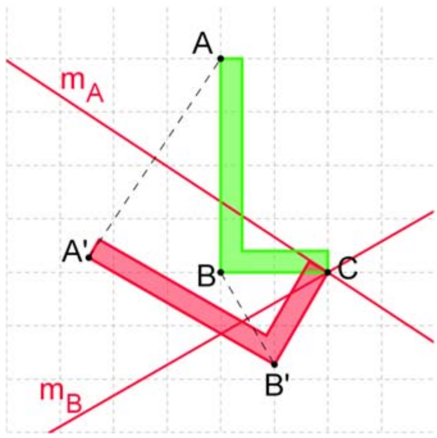


Para dibujar rotaciones en el cuaderno puedes utilizar un transportador de ángulos y un compás.

- Para girar la letra L según un giro de centro *C* y ángulo 60°, tomamos varios puntos de la figura, en este caso los puntos *A*, *B* y *C*. Con el compás haciendo centro en *C* trazamos arcos, y sobre ellos, utilizando el transportador, medimos 60°. Obtenemos los puntos *B'* y *A'*.

La nueva letra L mantiene las distancias: *BC* = *B'C* y *AB* = *A'B'*. También mantiene los ángulos: el ángulo *ABC* es recto, y el nuevo ángulo *A'B'C* también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. En general:

Los giros mantienen las distancias, por lo que son **isometrías** o movimientos. Mantienen los ángulos y el sentido de los ángulos, por lo que son **movimientos directos**.



Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el trasportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.

Actividades resueltas

- Trazamos el segmento *BB'* y su mediatriz. Trazamos el segmento *AA'* y su mediatriz. Ambas mediatrices se cortan en el punto *C*, que es el centro de giro. El ángulo que forman las mediatrices es de 60°.

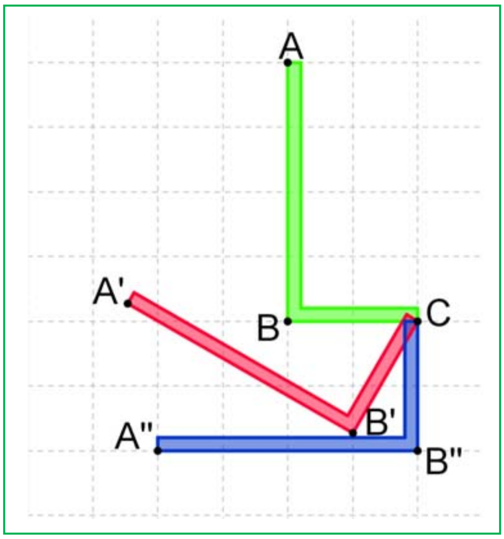
Actividades propuestas

28. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.
29. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60°.
30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?
31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

3.2. Composición de giros. Elementos invariantes

Ejemplo:

- Si giramos la letra L con centro *C*, 60° en sentido positivo y luego, también con centro *C*, 30° en sentido positivo, la figura obtenida está girada respecto a la primera 90° con el mismo centro de giro. En general:



La **composición** de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro y de ángulo, la suma de los ángulos de giro.

- Si una vez girada nuestra letra L 30° en sentido positivo, la giramos, con el mismo centro de giro, 30° en sentido negativo, ¿qué ocurre? En efecto, hemos vuelto a la posición inicial. Se dicen que son giros inversos y que al componerlos tenemos la identidad, ya que no nos movemos.

Un giro de centro *O* y ángulo α es el **giro inverso** al giro del mismo centro *O* y ángulo $-\alpha$.

Observa que la composición de giros de distinto centro no es conmutativa, pues depende del orden en que hagamos los giros.

Actividades resueltas

- Pensemos ahora en qué elementos deja invariantes un giro de centro *O* y ángulo de giro que no sea 0° ni 180°. ¿Deja alguna recta invariante? ¿Hay alguna recta del plano que no se mueva? No, todas giran. No hay rectas invariantes. ¿Y puntos? ¿Algún punto del plano no se mueve al girar? Si, el centro de giro queda invariante. El centro de giro se transforma en sí mismo.

En un giro de centro *O* y ángulo distinto de 0° y de 180°, el único elemento **invariante** es un punto, el **centro de giro.**

Centro de giro: Centro de giro es un punto de una figura plana tal que al girar un cierto ángulo, la figura coincide consigo misma.

- Observa que el rosetón del centro de este mosaico tiene un **centro de giro** de 60°. Si lo giramos 60°, vuelve a coincidir. También si lo giramos 120° o 180° o 240° o 300°.

3.3. Simetría central en el plano. Centro de simetría

La simetría central de centro *O* en el plano es un giro de ese centro *O* y ángulo 180°. En el plano, la simetría central es, por tanto, un movimiento que ya conocemos. Observa que la simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro de simetría *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

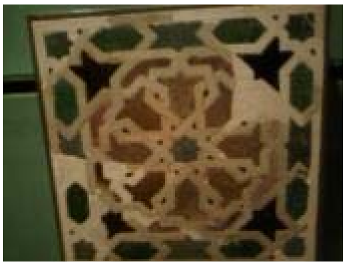
Actividades resueltas

- Dos puntos *P* y *P'* son **simétricos respecto del origen de coordenadas** si tanto sus abscisas como sus ordenadas son opuestas. Así, el simétrico respecto del origen del punto (–2, 4) es el punto (2, –4).
- Construye el simétrico, respecto a una simetría central de centro (2, 3), de un polígono:

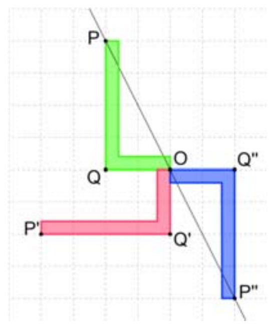
  El simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Has visto que se ha trazado la recta *OA*. Con centro en *O* y radio *OA* se traza una arco de circunferencia que corta a la recta *OA* en *A'*. Lo mismo para obtener el simétrico de los otros vértices del polígono. Si los otros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6), ¿cuáles son sus simétricos respecto a la simetría central de centro (2, 3)?
- ¿Qué elementos deja invariantes una simetría central? Deja invariante el centro de simetría y todas las rectas que pasan por el centro de giro.

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura. La simetría central transforma la figura en ella misma.

Ejemplo:



- El mosaico de la Alhambra del margen tiene simetría central.
- El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.
- Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.
- El pentágono regular, no lo tiene.



Actividades resueltas

- Aplicamos a la letra L un giro de 90° y luego otro giro también de 90°. La composición de un giro de 90°°, con otro del mismo centro y 90°, es un giro de 180°. El punto *P* primero se transforma en *P'* y luego en P''. Si unimos cada punto de la figura con su transformado por la composición de los dos giros, la recta *OP* se transforma en la *OP''*, que es la misma recta. Los puntos *Q*, O y *Q''* también están alineados. Las rectas que pasan por el centro de simetría son invariantes.

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Actividades propuestas

32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.
33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?
34. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?
35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

3.4. Giros en el espacio

Al abrir o cerrar una puerta, ésta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio necesitas, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. Recuerda, en el plano teníamos un centro de giro, un punto, ahora un eje de giro, una recta.

Piensa en otros ejemplos cotidianos de giros en el espacio.

Cuando giras una puerta, ¿cambia el sentido de sus ángulos? Naturalmente que no. Los giros en el espacio son movimientos directos.

- ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Eje de giro: Eje de giro de una figura, en el espacio, es una recta imaginaria tal, que al girar la figura un cierto ángulo, coincide consigo misma.

3.5. Simetría central en el espacio. Centro de simetría

Una figura tiene simetría central si al unir cada uno de sus puntos con el centro se obtiene otro punto de la figura.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro (no una recta)

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura.

Ejemplos:

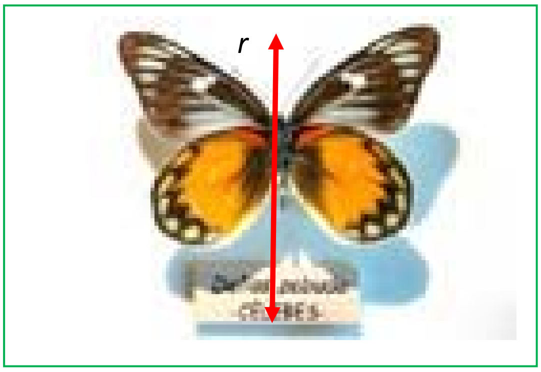
- La esfera, el cubo tienen centro de simetría, el tetraedro, no.
- El cilindro tiene centro de simetría. El cono no tiene centro de simetría.
- Un prisma regular tiene centro de simetría. Una pirámide, no.

Actividades propuestas

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.
37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

4. SIMETRÍAS

4.1. Simetrías axiales. Eje de simetría



La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.

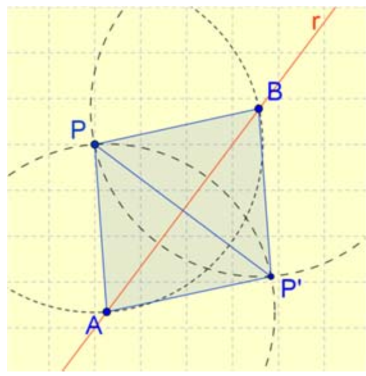
Para determinar una simetría (simetría axial) es necesario conocer el **eje de simetría**.

Si *P'* es el simétrico de *P* respecto de la **simetría axial** de eje *r*, entonces *r* es la **mediatriz** del segmento *PP'*.

La simetría axial conserva todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambia el sentido de estos. Por eso no es posible hacer coincidir una figura con su simétrica (a no ser que las propias figuras sean simétricas).

La simetría es por tanto un movimiento inverso.

Actividades resueltas



- Para hallar el simétrico del punto *P* respecto del eje de simetría *r*, utiliza un compás y haciendo centro en *P* con radio suficientemente grande traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dos puntos, *A* y *B*. Sin variar de radio y con centro en *A* y en *B* traza otros dos arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* es un rombo pues sus cuatro lados son iguales, por lo que sabemos que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.

- Observa cómo se dibuja el punto simétrico de otro utilizando regla y escuadra:

  Tenemos el eje de simetría y queremos encontrar el simétrico del punto *P* (4, 1). Dibujamos el punto *P* (4, 1) en un sistema de coordenadas y tomamos la escuadra. Apoyamos la escuadra sobre el eje de simetría y hasta que toque al punto. Trazamos una recta auxiliar, perpendicular al eje y que pase por el punto *P*. Medimos la distancia del punto al eje y llevamos esa longitud sobre la recta auxiliar, y ya tenemos el punto simétrico.

  - También puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.
  - Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.

Si dibujamos en papel cuadriculado el triángulo de vértices *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) y *C* (–4, 7) y hallamos el simétrico respecto al eje de ordenadas, las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico son: *A'*(3, 2), *B'* (5, 4) y *C'* (4, 7). En general, el simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de ordenadas es *P'* (–*x*, *y*).
Si dibujas el triángulo simétrico de *ABC* respecto al eje de abscisas, observa que las coordenadas de sus vértices son: A' (–3, –2), B' (–5, –4) y C' (–4, –7). En general, el punto simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de abscisas es *P'* (*x*, –*y*).

Dos puntos **simétricos respecto del eje de ordenadas** tienen la misma ordenada y sus abscisas son opuestas. Dos puntos **simétricos respecto del eje de abscisas** tienen la misma abscisa y sus ordenadas son opuestas.

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Puntos invariantes

En una simetría, los puntos del eje de simetría se transforman en sí mismos.

La simetría axial deja invariantes los puntos del eje de simetría. El eje de simetría es una recta invariante de puntos invariantes.

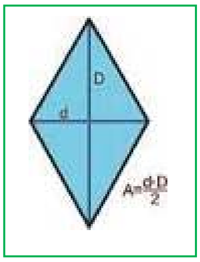
- ¿Qué otros elementos deja invariantes? ¿Hay más puntos? ¿Hay otras rectas? Observa que las rectas perpendiculares al eje de simetría se transforman en sí mismas.

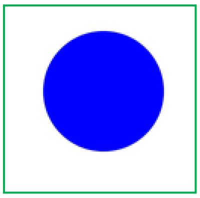
Actividades propuestas

38. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto P’ simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP’.* (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).
39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P’*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.
40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.

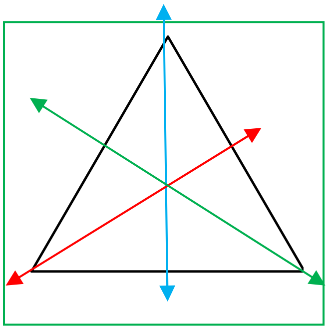
41. Reproduce en tu cuaderno la figura del margen. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.
42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

Eje de simetría de una figura





Si la recta *r* es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje *r* a otro punto de dicha figura.



Ejemplos:

- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Actividades propuestas

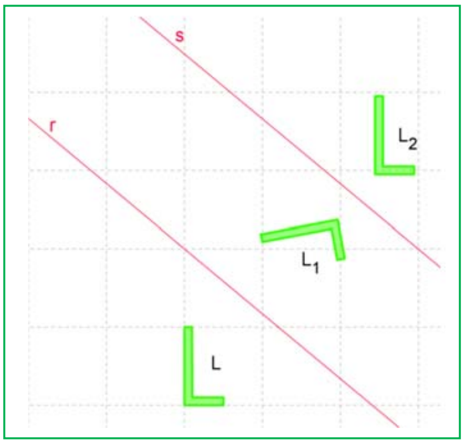
43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.
45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.
46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.
47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

4.2. Composición de simetrías

Vamos a estudiar ahora la composición de simetrías. Ya sabes que una simetría es un movimiento inverso. Si cambias el sentido de un ángulo y luego lo vuelves a cambiar, te queda el sentido original. Por tanto la composición de dos simetrías no va a ser un movimiento inverso sino uno directo.

Veámoslo primero en un caso particular.

Actividades resueltas

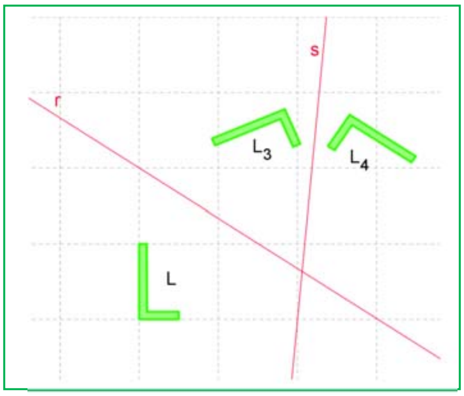


- Trazamos dos ejes de simetría, *r* y *s*, paralelos. Dibujamos una letra L, y dibujamos la letra L_1 simétrica de L con respecto de la recta *r*, y después la letra L_2 simétrica de L_1 respecto de la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_2? ¿Puede ser una simetría? (Observa que sí se pueden superponer L y L_2, luego es un movimiento directo). ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Si, es una traslación, ¿de qué vector?

La composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación. Es la traslación de vector de dirección la recta ortogonal a los ejes de simetría, de módulo el doble de la distancia entre ambos ejes, y de sentido el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos una traslación, pero el vector de traslación es el opuesto al del caso anterior.

- Trazamos ahora dos ejes de simetría secantes, *r* y *s*, y una letra L. Dibujamos la letra L_3 simétrica de L con respecto a la recta *r*, y dibujamos la letra L_4 simétrica de L_3 respecto a la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_4? ¿Puede ser una simetría? (Observa que se pueden superponer L y L_4, luego es un movimiento directo). ¿Es una traslación? ¿Es un giro? Si, es un giro, ¿de qué centro y de qué ángulo?



La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro. Es el giro de centro el punto de intersección de los ejes de simetría, de ángulo doble al que forman ambos ejes y de sentido del ángulo, el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos un giro, pero el ángulo de giro es el opuesto al del caso anterior.

Actividades propuestas

48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

b) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

c) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?

d) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

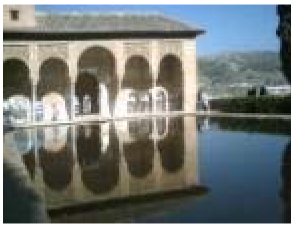
49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 ° (o una simetría central)?

4.3. Simetría especular en el espacio. Plano de simetría



Muchos muebles son simétricos: muchas mesas, muchas sillas… Muchos animales son casi simétricos. Los coches, los aviones, los trenes son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Muchos edificios son casi simétricos o tienen elementos de simetría.

Para determinar una simetría en el espacio es necesario conocer un plano, el **plano de simetría**.

Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría. Deja invariante las rectas ortogonales al plano de simetría, y deja invariante al plano de simetría.

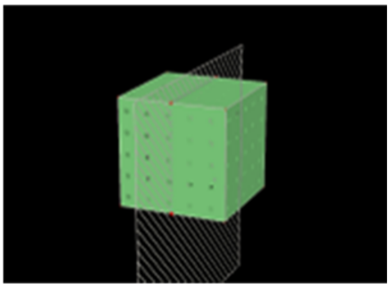
Plano de simetría: El plano de simetría de una figura es un plano imaginario tal, que todo punto de la figura se transforma por la simetría respecto de ese plano en otro punto de dicha figura.

La torre con la puerta del margen tiene un plano de simetría.

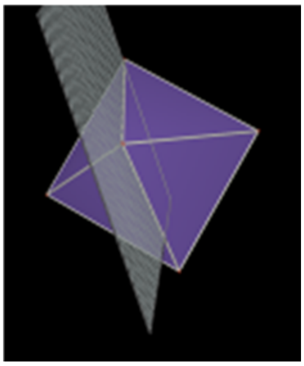
Un plano de simetría es como un espejo que refleja exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

Actividades resueltas

- Construye poliedros regulares, con cartulina, con pajitas, con …, para comprobar lo que sigue:



- Analizamos el plano de simetría del cubo de la ilustración del margen. Vemos que pasa por los puntos medios de las aristas. ¿Cuántos planos de simetría hay similares a este? Como el cubo tiene 12 aristas y cada plano pasa por 4 hay 3 de este tipo. Otro plano de simetría pasa por una diagonal de una cara, una arista, otra diagonal y otra arista. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas y tomamos 2, hay 6 de ese tipo.
- Busca un eje de giro del cubo. Observa que tiene un eje de giro de 90° que va de centro de cara a centro de cara. ¿Cuántos ejes de giro tiene de ese tipo? Comprueba que hay 3 (6 caras: 2 = 3). Observa que también hay un eje de giro de 120° que va de vértice a vértice opuesto. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 8 vértices hay 4 de este tipo. Observa que también hay un eje de giro de 180° que va de centro de arista a centro de arista opuesta. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas, hay 6 de ese tipo. ¿Hay simetría central? Observa que sí.



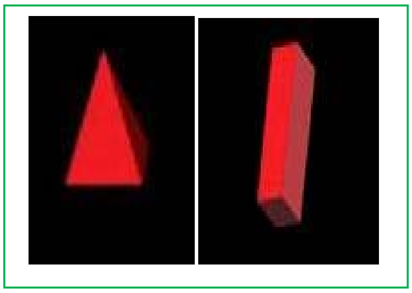
- Vamos a analizar ahora las isometrías de un octaedro. Observa que tiene centro de simetría, igual que el cubo. Planos de simetría: Hay planos, como el de la figura, que pasan por cuatro aristas. Como tiene 12 aristas hay 3 de este tipo. También hay planos que pasan por el eje de simetría de las caras. ¿Cuántos hay? ¿Tenemos el mismo número de planos de simetría que en el cubo? Sí. El cubo y el octaedro son duales. Si en el cubo fijamos los centros de las caras y los unimos, tenemos un octaedro. Y si en el octaedro unimos los centros de las caras, tenemos un cubo. Observa que el número de caras de un cubo, 6, coincide con el número de vértices de un octaedro, y que el número de caras de un octaedro, 8, coincide con el número de vértices del cubo. Y ambos tienen el mismo número de aristas, 12.
- Buscamos ahora ejes de giro en un octaedro. ¿Tiene ejes de giro de 90°? Si, van de vértice a vértice opuesto. Hay 6 vértices, luego hay 3 ejes de giro de este tipo. ¿Hay ejes de giro de 120°, como en el cubo? Naturalmente, van de centro de cara a centro de cara, y como tiene 8 caras, hay 4 de este tipo. ¿Y los ejes de giro de 180°? Van, como en el cubo, de centro de arista a centro de arista, y hay 6.
- El estudio del tetraedro es más sencillo. Comprueba que NO tiene centro de simetría. Los planos de simetría pasan por una arista, el eje de simetría de una cara y el eje de simetría de otra. Hay 6 aristas, luego hay 6 de este tipo. Tiene ejes de giro de 120°. Pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta. Como tiene 4 caras hay 4 de este tipo.

- El estudio del dodecaedro y del icosaedro es más complicado. Observa que también son duales. Si unimos los centros de las caras de un dodecaedro se obtiene un icosaedro, y si unimos los centros de las caras de un icosaedro, se obtiene un dodecaedro. El dodecaedro tiene 12 caras y el icosaedro 12 vértices. El icosaedro tiene 20 caras y el dodecaedro 20 vértices. Ambos tienen 30 aristas. Vamos a describir el plano de simetría del dodecaedro de la figura del margen: Vemos que pasa por los dos ejes de simetría de dos caras, por una arista. ¿Y luego? ¿Ya no lo vemos? Observa que vuelve a pasar por dos ejes de simetría de caras y por otra arista. Como el dodecaedro tiene 20 aristas, hay 10 planos de simetría de este tipo.

Actividades propuestas

53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

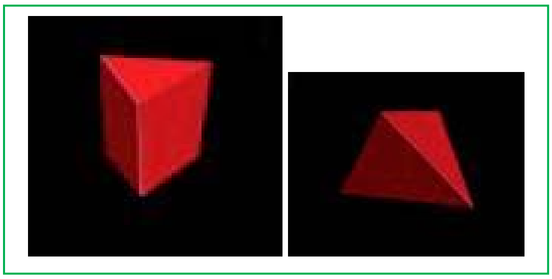
54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:



a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?

b) Una pirámide recta de base cuadrada.

c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?



55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:

a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.

b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?

c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

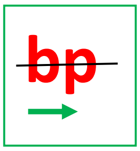
4.4. Isometrías en el plano

Las **isometrías** son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

En el plano hemos estudiado las traslaciones, los giros y las simetrías (axiales) que son isometrías.

Ya sabemos que la simetría central en el plano coincide con un caso particular de giro, el giro de 180°.

Los giros y las traslaciones son isometrías directas, pues no cambian el sentido de los ángulos. Las simetrías son isometrías inversas pues sí los cambian.



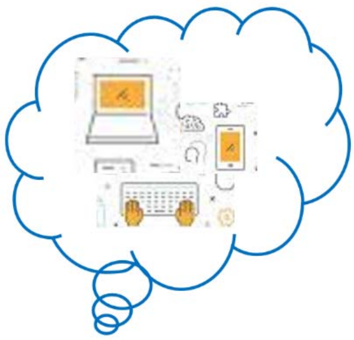
Hemos visto que la composición de dos traslaciones es siempre otra traslación, que la composición de dos giros del mismo centro es otro giro de igual centro, que la composición de dos simetrías es un giro o una traslación. Podríamos seguir estudiando qué ocurre si componemos giros de distinto centro, giros con traslaciones, traslaciones con simetrías y simetrías con giros. Veríamos que casi siempre obteníamos una simetría, una traslación o un giro. Salvo cuando componemos una traslación con una simetría. Obtenemos una isometría nueva que llamaremos **simetría con deslizamiento**. Pasamos de la letra b del margen a la letra p por una simetría de eje horizontal (en negro) y una traslación (de vector de traslación en verde).

Puntos invariantes: La traslación no deja ningún punto invariante. Los giros dejan uno, el centro de giro, y la simetría axial deja una recta, el eje de simetría. La simetría con deslizamiento tampoco deja ningún punto invariante.

Si en un plano una isometría deja tres puntos invariantes no alineados, entonces deja invariante todo el plano, luego es la identidad.

En el plano			
	Puntos invariantes	**Rectas de puntos invariantes**	**Rectas invariantes**
Traslación	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual a la del vector de traslación
Giros (de ángulo de giro distinto a 180° y 0°)	Centro de giro	Ninguna	Ninguna
Simetría (axial)	Los del eje de simetría	El eje de simetría	El eje de simetría y las rectas ortogonales al eje de simetría.
Identidad	Todo el plano	Todas	Todas
Simetría con deslizamiento	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual al vector de traslación y del eje de simetría.

4.5. Uso de Geogebra para analizar las isometrías en el plano



Vamos a utilizar el programa **Geogebra** para estudiar los movimientos en el plano. Estudiaremos las traslaciones y la simetría axial.

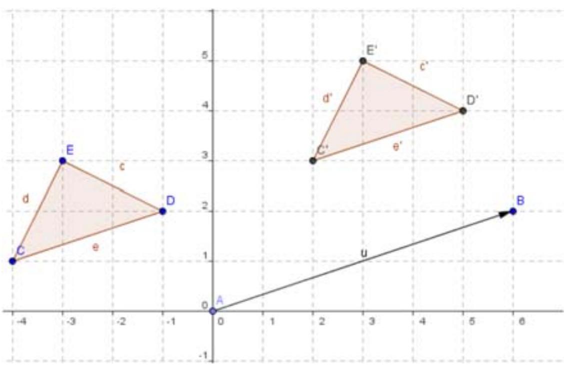
Actividades resueltas

Traslación

- *Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.*

• En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.

• Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).



• Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.

➢ Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.

• Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.

57. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?

58. Comprueba en la ventana algebraica que:

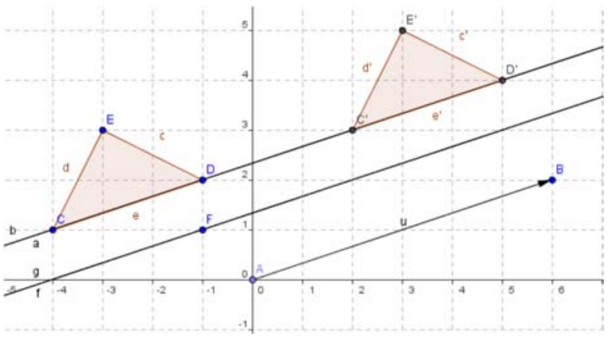
a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden.

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.

- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.

  ¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.

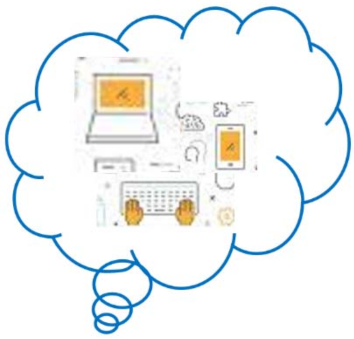


- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.

- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.

- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.

59. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

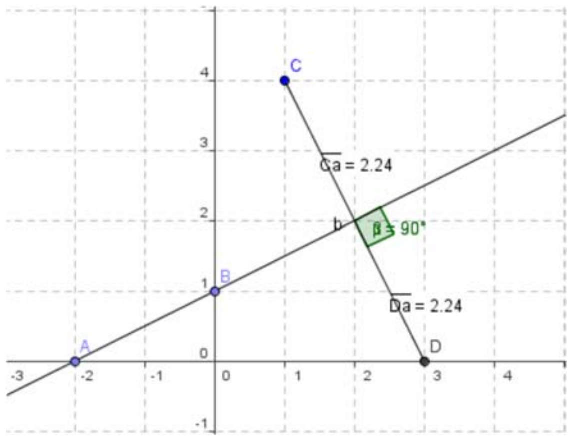


Simetría axial

Utiliza Geogebra para estudiar las propiedades de la simetría axial.

- Abre una nueva ventana de *Geogebra* y visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.

- Con la herramienta **Nuevo Punto** define *A* (-2, 0) y *B* (0, 1) y con **Recta que pasa por 2 puntos**, dibuja la recta *a* que pasa por *A* y *B*, que será el eje de simetría.



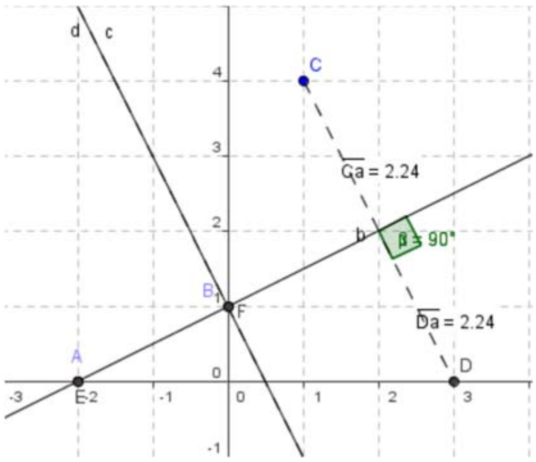
- Determina el punto *C* (1, 4) y con la herramienta **Refleja objeto en recta**, su simétrico con respecto a la recta *a*, que es el punto *D* (3, 0).

- Con la herramienta **Distancia** comprueba que la distancia del punto *C* a la recta *a* coincide con la del punto *D* a dicha recta.
- Dibuja con **Segmento entre dos puntos** el que une los puntos *C* y *D*.
- Con la herramienta **Angulo** calcula la medida del ángulo que forman el segmento *CD* y la recta *a* para verificar que son perpendiculares.

Las siguientes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan la simetría axial:

1ª: Las distancias de un punto y de su simétrico al eje de simetría coinciden.

2ª: El segmento que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.



- Con la herramienta **Refleja objeto en recta** halla el simétrico de los puntos *A* y *B* con respecto al eje *a* y comprueba que *A* y su simétrico de *E* coinciden lo mismo que *B* y *F*. Prueba con otros puntos de la recta *a* para verificar que todos los puntos del eje resultan invariantes mediante una simetría axial con respecto a este eje. Verifica, también, que el eje, la recta *a*, y su simétrica la recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar la recta *c*, perpendicular al eje *a* que pasa por el punto *B*.
- Calcula la recta simétrica de la recta *c* con respecto al eje *a*, se obtiene la recta *d* que coincide con *c*.
- Mejora el aspecto de la construcción dibujando el segmento CD y las rectas *c* y *d* con trazo discontinuo. Haz clic con el botón derecho del ratón sobre el elemento o su ecuación y en **Propiedades**, **Estilo**, elige un trazo discontinuo.

60. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Actividades propuestas

61. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45°.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.

b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

62. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.

b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.

c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

4.6. Isometrías en el espacio

En el espacio hemos estudiado las traslaciones, los giros, las simetrías centrales y las simetrías (especulares). La simetría central es un movimiento nuevo diferente de los giros.

En el espacio, traslaciones y giros son isometrías directas, y simetrías especulares y simetrías centrales son isometrías inversas.

No hemos estudiado su composición, pero no nos costaría nada ver que la composición de dos traslaciones es otra traslación, de vector, la suma de los vectores de traslación. La composición de dos giros del mismo eje es otro giro del mismo eje y de ángulo, la suma de los ángulos. La composición de dos simetrías de planos paralelos es una traslación, y la composición de dos simetrías de planos secantes es un giro de eje, la recta de intersección de los planos. La composición de dos simetrías centrales del mismo centro es la identidad. El comportamiento de estas composiciones es similar a lo que ocurre en el plano.

Más complicado es estudiar en el espacio la composición de giros de distinto eje, giros con simetrías, simetrías con traslaciones y traslaciones con giros en el espacio. Igual que en el plano aparecieron nuevas isometrías, la simetría con deslizamiento, ahora también nos aparecen nuevas isometrías: simetría rotativa, simetría con deslizamiento…

Puntos invariantes: La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja **un** punto invariante, el centro. Los **giros** dejan una **recta**, el eje de giro. La **simetría** especular deja un **plano** de puntos invariantes, el plano de simetría. Y si una isometría en el espacio deja cuatro puntos invariantes no coplanarios, es la identidad.

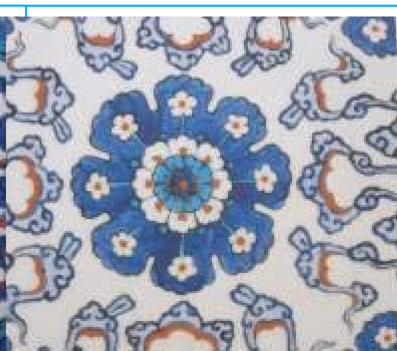
5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

Al pasear por una ciudad o por el campo puedes ver montones de transformaciones geométricas: verás simetrías, giros y traslaciones por doquier, formando mosaicos, frisos o rosetones; o bien en las formas de las flores

5.1. Mosaicos

63. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

Realiza la misma observación con los otros dos azulejos de Estambul siguientes:



64. **Análisis de mosaicos de la Alhambra**: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60°? ¿Y de 180°? ¿Y de 30°?

Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60°, de 180° y de 30°. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

65. Genera un mosaico mediante giros y traslaciones:

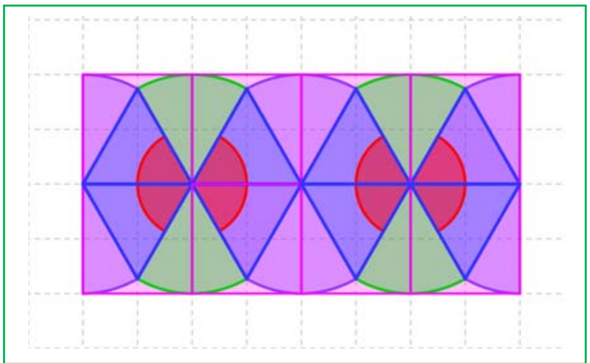
Primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego aplica isometrías a ese motivo: giros de 90°, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

66. Observa cómo se realiza un estudio del **mosaico** del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90° y 180°) y sus ejes de simetría.

Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90° y de 180°. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

5.2. Frisos

Las puntillas, las grecas de los bordados, las telas estampadas, las rejas... utilizan muy a menudo las traslaciones en sus diseños. Son los frisos.



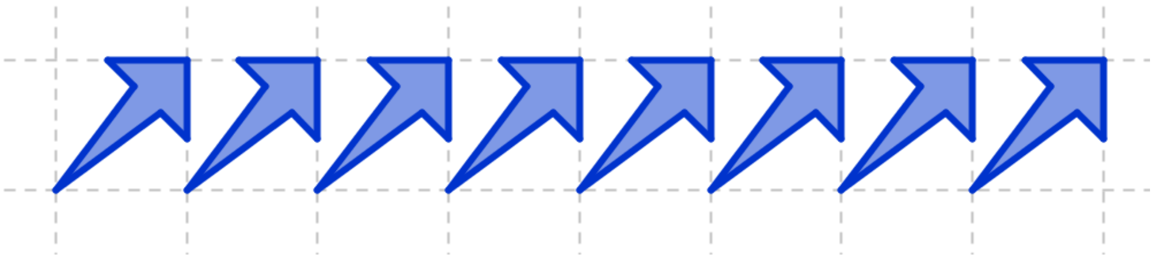
Observa el friso del margen. Como todos los frisos se obtiene trasladando un motivo. Pero pueden tener otras isometrías además de la traslación. La combinación de traslación, simetrías y giros permiten obtener siete tipos de frisos diferentes.

67. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal? B) ¿En cuáles hay giros de 180°. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

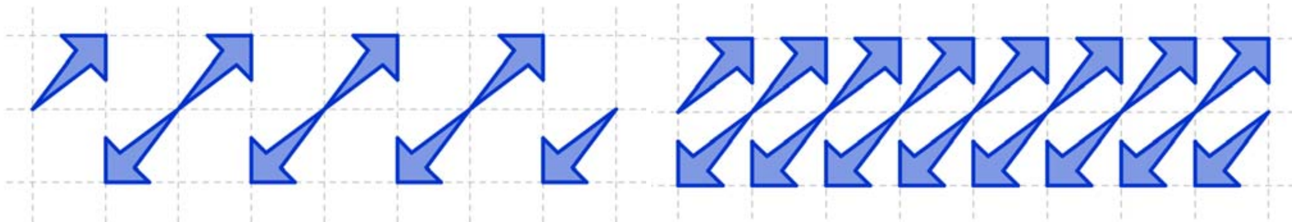
L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

68. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

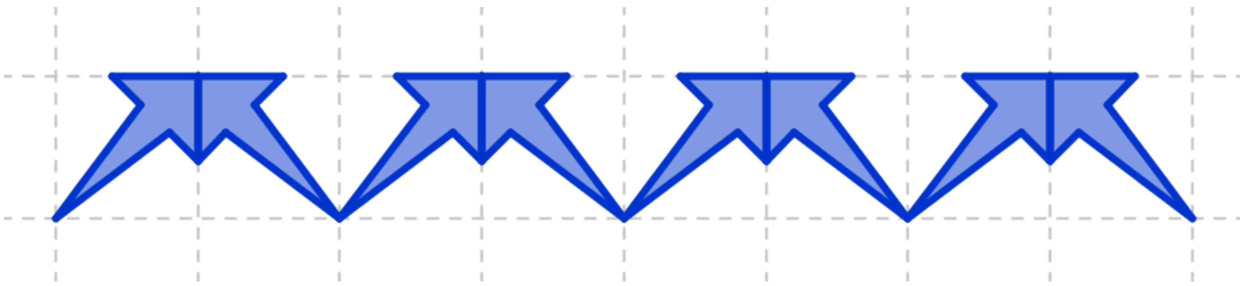
69. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).



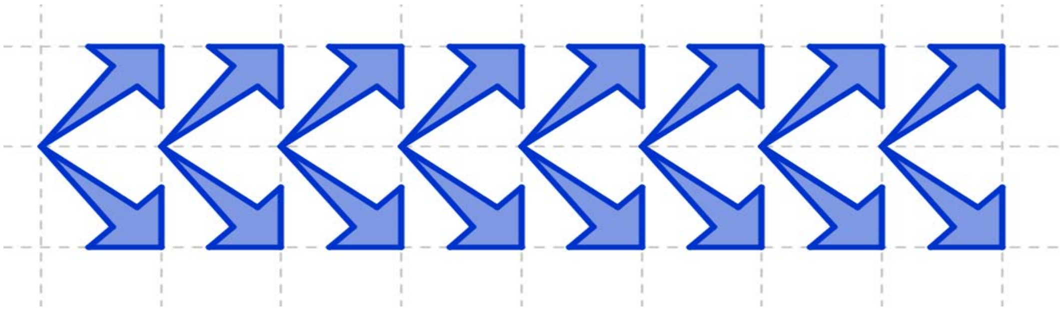
Friso L1: Sólo traslación



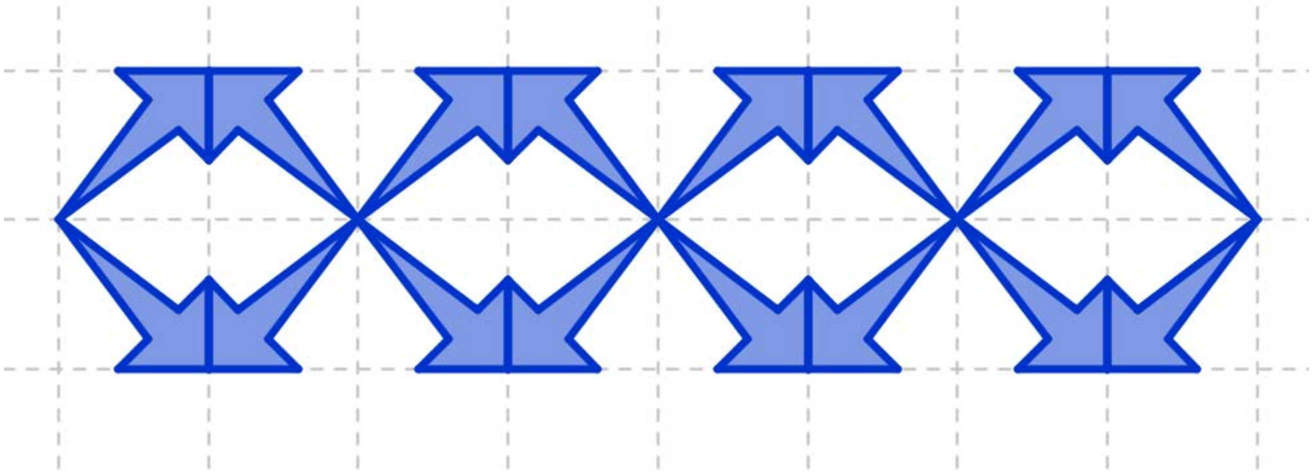
Frisos L2: Giros de 180º



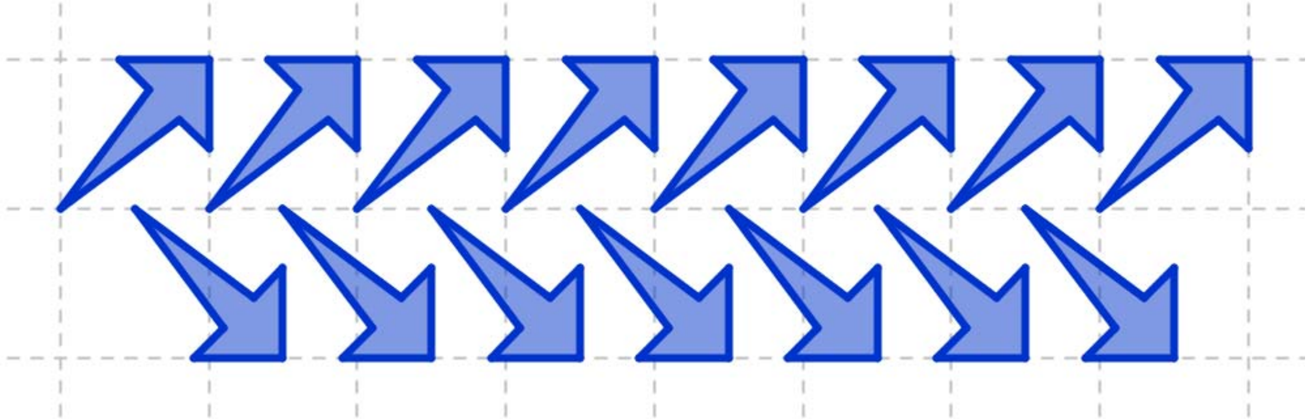
Friso L3: Simetría vertical



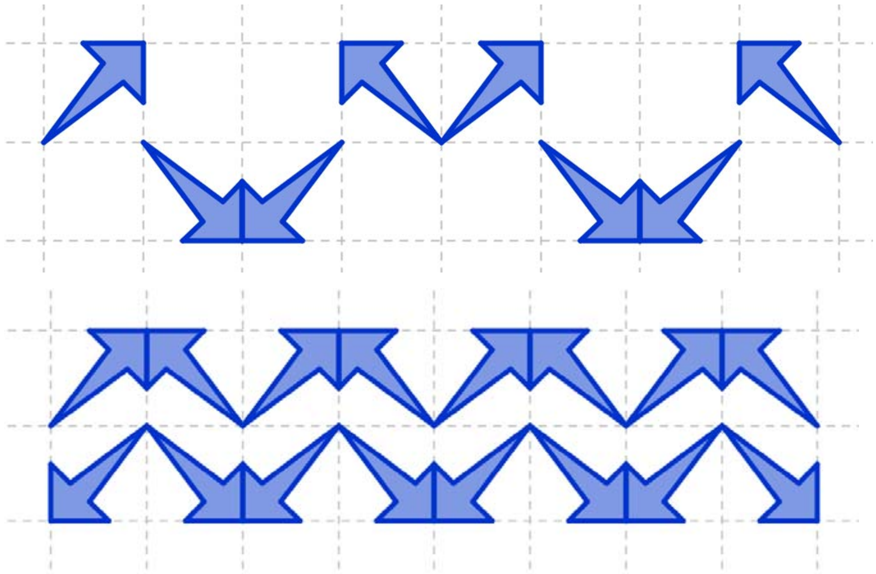
Friso L4: Simetría horizontal



Friso L5: Giros, simetrías verticales y simetrías horizontales



Friso L6: Simetría con deslizamiento



Frisos L7: Simetría con deslizamiento y simetría vertical.

5.3. Rosetones

Los rosetones de las catedrales son espectaculares, pero también se pueden ver en situaciones más cotidianas, como los tapacubos de los coches.

Se denominan grupos de Leonardo a los grupos de isometrías de estos rosetones. Pueden tener simetrías o únicamente giros. Este rosetón de una catedral tiene ejes de simetría y divide la circunferencia en 12 trozos iguales. Decimos que es un D12. Si no hay simetrías, sólo giros decimos que es un C5, o un C6… según divida a la circunferencia en 5 o en 6… partes iguales.

Por ejemplo, ¿te has fijado en los tapacubos de los coches? En ocasiones tienen diseños interesantes. Hemos recogido fotografías de algunos tapacubos para que los estudies.

70. **Análisis de tapacubos:** Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

			
1	2	3	4
			
5	6	7	8
			
9	10	11	12

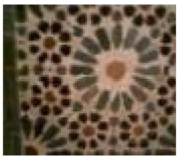
a) Tiene simetría central.

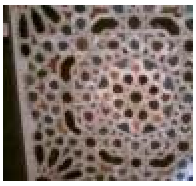
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?

c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?

d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

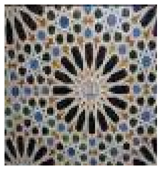
CURIOSIDADES. REVISTA

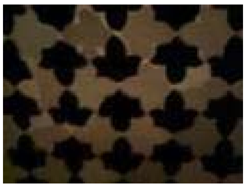


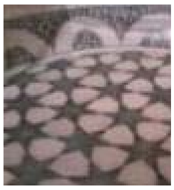


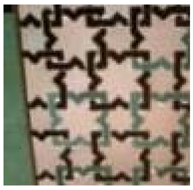
Mosaicos de la Alhambra

Como sabes los árabes de España eran grandes matemáticos y en los mosaicos de la Alhambra demuestran, además de su sentido artístico, sus conocimientos de Matemáticas. Se ha demostrado que, partiendo de un motivo mínimo, y aplicándole giros, simetrías, traslaciones... sólo hay 17 formas distintas de completar el plano haciendo un mosaico. Es sorprendente que esas 17 formas ya se encuentren en los mosaicos de la Alhambra.





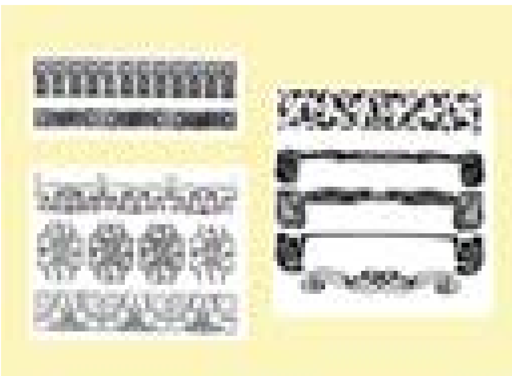


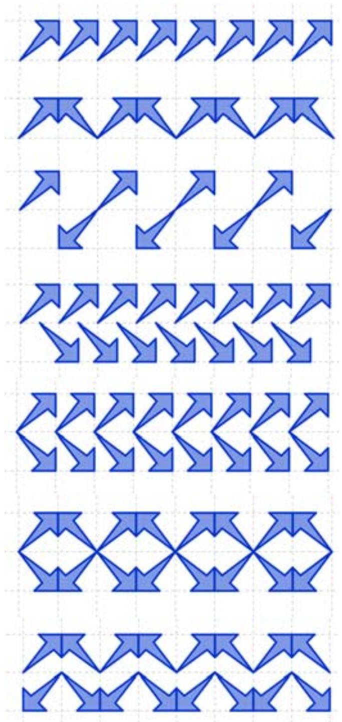


Busca “mosaicos” en Internet, y sabrás más sobre la generación de mosaicos.

Frisos

Las cenefas, puntillas..., en las rejas, en... podemos ver diseños que se repiten a lo largo de una línea por traslación. Se ha demostrado que sólo hay 7 formas distintas de hacer esos diseños utilizando, además de las traslaciones, giros y simetrías.





Autores: María Molero y Álvaro Garmendia

Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

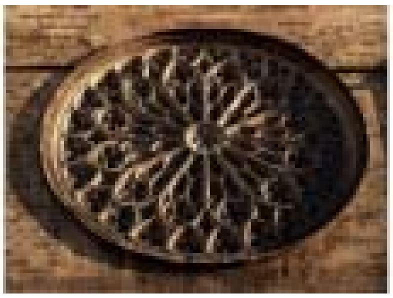
Cristales

Igual que en el plano sólo existen 17 posibles diseños de mosaicos, en el espacio existen 230 posibles tipos de diseños cristalográficos que compacten el espacio.

Para ser matemático hay que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*

Rosetones

Giros y simetrías pasando todos por un centro. Así se diseñan los rosetones. Si sólo hay giros se llaman C_n, siendo C_2 si sólo tiene un giro de 180°, C_3 si lo tiene de 120°… El tapacubos de abajo es, por tanto, un C_5. Y si tiene simetrías, se llaman D_n como los rosetones que vemos que son D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grupos de Leonardo" y verás más cosas sobre ellos



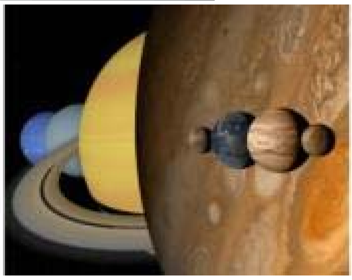
Autores: María Molero y Álvaro Garmendia

Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

Todo se mueve

Te mueves no sólo cuando andas o vas en coche. Cuando estás quieto también te mueves. Todo se mueve en el Universo. La Tierra gira alrededor de su eje. El radio de la Tierra es de 6 400 km, por lo que la longitud del Ecuador terrestre es de $2\pi r = 40\,192$ km. Tarda 24 horas en dar una vuelta, luego $40\,192/24 = 1\,674.67$, por lo que si estuvieras en el Ecuador estarías moviéndote a una velocidad aproximada de 1 675 km/h.

La Tierra gira alrededor del Sol. Tarda aproximadamente 365 días en dar una vuelta completa. Ahora viajamos a 107 000 km/h girando alrededor del Sol.



Planetas del Sistema Solar

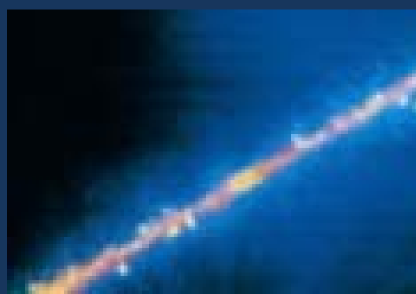


Imagen en infrarrojos del centro de la Vía Láctea

El Sol se mueve dentro de nuestra galaxia, donde también gira a una velocidad de 810 000 km/h alrededor el centro de la galaxia. El Sol está a 27 000 años luz del centro de nuestra galaxia y tarda 200 millones de años en dar una vuelta.

Galaxia Andrómeda

Nuestra galaxia, la Vía Láctea, también se mueve. Se aproxima a la Galaxia Andrómeda a una velocidad de 230 000 km/h.

¡Mareo me da el pensar a qué velocidad me estoy moviendo!

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Semejanza	Transformación geométrica que conserva los ángulos y las distancias son proporcionales.	Un fotocopia reducida
Traslación	Viene determinada por su vector de traslación. Son isometrías directas. La composición de dos traslaciones es una traslación.	El trasladado del punto *P* (1, 2) por la traslación de vector **v** = (4, 5) es *P'* (5, 7).
Giro o rotación en el plano **Giro en el espacio**	Viene determinado por el centro de giro y el ángulo de giro. Viene determinado por el eje de giro y el ángulo	El girado del punto *P* (1, 2) por el giro de centro el origen y ángulo 90° es *P'* (2, –1)
Simetría axial **Simetría especular**	Se conoce por su eje de simetría Se conoce por su plano de simetría	El simétrico del punto *P* (1, 2) por la simetría de eje el eje de ordenadas es *P'* (–1, 2)
Isometrías	Son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.	Traslaciones, giros y simetrías
Composición de isometrías	La composición de dos isometrías directas es una isometría directa. La composición de dos isometrías inversas es una isometría directa. La composición de una isometría directa con una inversa es una isometría inversa.	
Composición de isometrías en el plano	La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro. La composición de dos simetrías es un giro o una traslación.	
Elementos invariantes en el plano	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. El **giro** deja invariante **un** punto, el centro de giro. La **simetría** deja invariante una **recta**, el eje de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el plano.	
Elementos invariantes en el espacio	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja invariante **un** único punto, el centro de simetría. El **giro** deja invariante una **recta**, el eje de giro. La **simetría** deja invariante el **plano** de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el espacio.	

Un buen resumen de este capítulo lo tienes en esta presentación en Power Point:

./3B/Mosaicosyfrisos.pdf

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia

Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

MATERIALES PARA EL AULA

Presentaciones:

- Un buen resumen de este capítulo lo tienes en esta presentación en Power Point: ./3B/Mosaicosyfrisos.pdf
- Algunas presentaciones de Power Point:
  - Sobre frisos y mosaicos
    ./3B/Movimientosenelplano.pdf
  - Frisos y mosaicos en la web: En Pensamiento Matemático:
    http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf
- Trabajos realizados por estudiantes que pueden servir de modelo para que, ahora ellos, realicen otros similares:

- Frisos y rejas unidos por las Matemáticas.
  ./3B/rejas.pdf

Presentación confeccionado por dos alumnas de 2º de bachillerato del Instituto Salvador Victoria de Monreal del Campo de Teruel: Pilar Lorente Lorente y Paloma Plumed Martín. Es un trabajo interesante sobre frisos y rejas, aunque, opinamos, que algún friso no está correctamente clasificado. Sin embargo es un magnífico modelo para inspirar otros trabajos de salir a la calle y fotografiar o dibujar rejas, (o mosaicos, o otros tipos de frisos) que se vayan viendo.

- Power Point que recoge trabajos sobre mosaicos de diferentes alumnos de la Universidad Politécnica de Madrid. Puede también servir de inspiración para proponer al alumnado que confeccione sus propios mosaicos.
  ./3B/Mosaico.pdf

Internet

- Buscando en internet hemos encontrado, bajo el título de los 17 grupos de simetría en el plano, la siguiente entrada: http://www.acorral.es/index3.htm. Son prácticas con Geogebra sobre mosaicos, frisos y celosías. Están diseñados, con diseños vistosos y originales mosaicos con los 17 grupos. Al final hay una tabla, a modo de resumen, que permite identificar y clasificar cada grupo de simetría. También hay una hoja de trabajo para el alumnado.
- También en Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia y en particular en:
  http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html

  un trabajo sobre los grupos de autosimetría de los cristales sumamente interesante y de un nivel muy alto. Existe 32 clases de redes cristalinas: triclínico, monoclínico, tetragonal, cúbico, hexagonal… Estudia que sólo 11 tienen centro de simetría. Al analizar cuáles son compatibles con la traslación se obtienen las redes (o redes de Bravais) de las que hay 11 redes. Combinando los 32 grupos cristalográficos con las 11 redes encuentra que hay 230 formas posibles de repetir un objeto finito (motivo mínimo) en el espacio de dimensión tres.

Libros:

La Alhambra. Trabajo monográfico editado por la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, en 1987, que recoge trabajos de diversos autores, que permite aprender mucho más sobre transformaciones geométricas y los grupos de autosimetría en el plano. Editado por la revista "Epsilón".

Autores: María Molero y Álvaro Garmendia
Ilustraciones: María Molero; Milagros Latasa; Banco de Imágenes de INTEF y Adela Salvador

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?

2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, –2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A′* (1, 5).

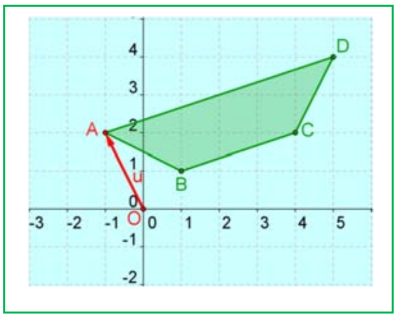
4. Por la traslación de vector **u** = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A′*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A′*?

5. Por la traslación de vector **u** = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A′* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?

6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector **u** = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C′* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?

8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?



9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.

10. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.

a) Trasládalo con la traslación de vector **u** = (3, 0).

b) Trasládalo después mediante la traslación de vector **v** = (0, 4).

c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.

d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector **u** = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector **v** = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.

13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector **u** = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.

b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.

c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?

15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.

b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?

c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.

17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Giros

18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180° y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A''* obtenido al girar *A'* 90° con el mismo centro de giro.

19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.

20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30° con centro de giro su punto más inferior.

21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45° en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45°, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° y 315°. Habrás hecho la composición de giros de 45° varias veces.

23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

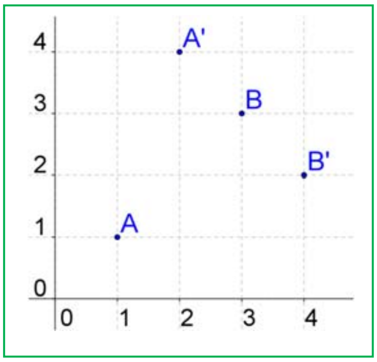
24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?

25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180°. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?

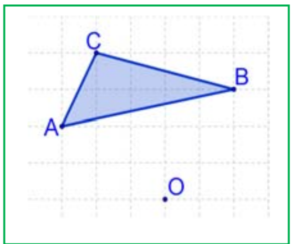
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P'*?

27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60°. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?

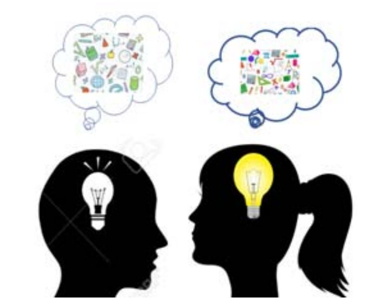


29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.



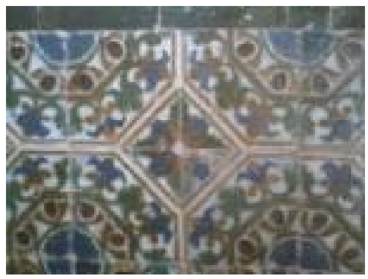
30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.

31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60° respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?



EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

32. **Juego para dos jugadores**: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (***Ayuda***: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

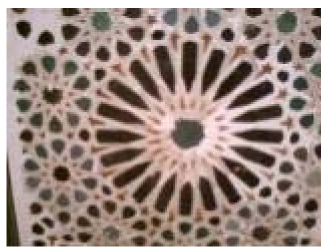


33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45°? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

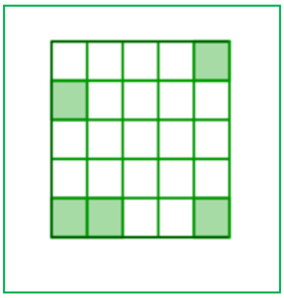
a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

35. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).



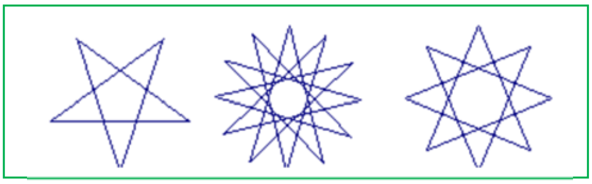
36. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?

37. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



38. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

39. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

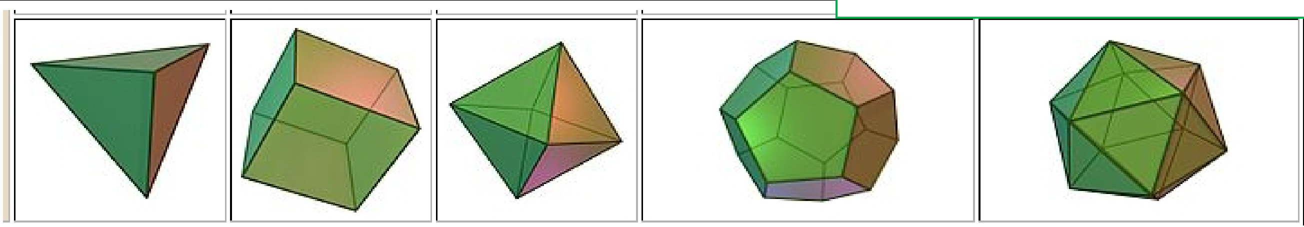


40. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

41. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

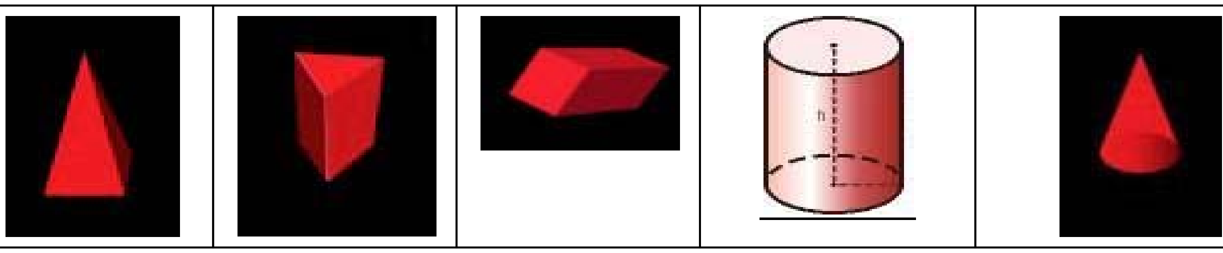
42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO DODECAEDRO ICOSAEDRO

44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



Simetrías

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.

46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

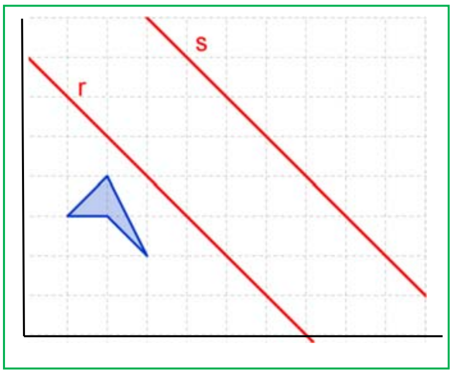
a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.

e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.

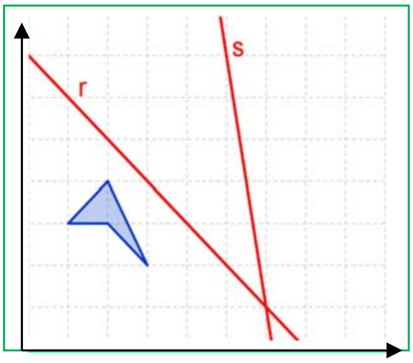


a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:

b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*; *c)* ¿Qué elementos la definen? ; d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



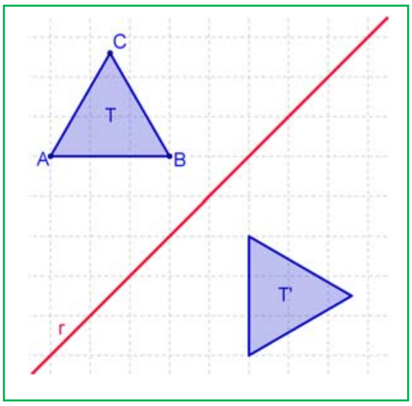
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

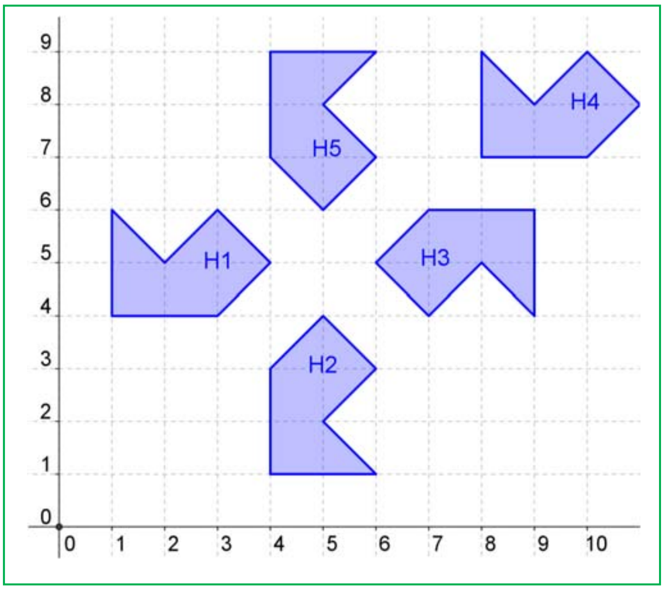
51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?



52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*?

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Problemas



54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos: a) Una traslación según el vector (1, 3); b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas; c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?; b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?; c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?; d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)

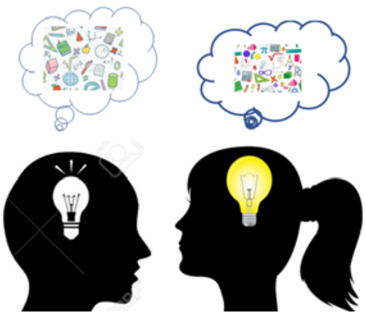
a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270° respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.



EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

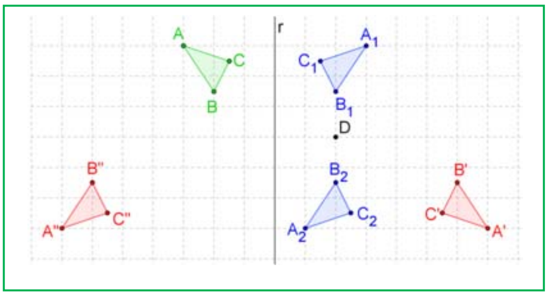
61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

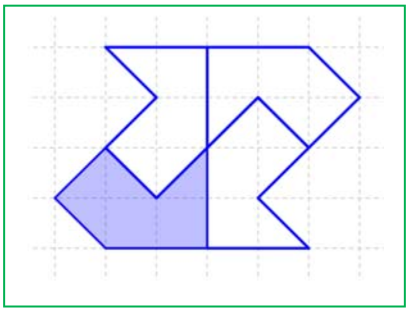
62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.

c) ¿Qué conclusión obtienes?

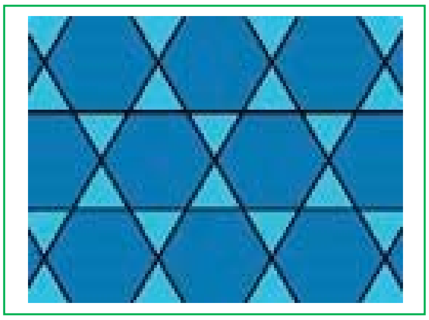




63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del **abecedario** en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

65. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.



a) ¿Hay giros de 60°? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

b) ¿Hay giros de 180°? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.

66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

67. Diseña un mosaico en una trama de cuadrados, y analízalo. Indica que simetrías has utilizado, qué giros y qué traslaciones.

68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = x^4$ *d)* $y = x$

69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

74. Describe las **isometrías** que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada

d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

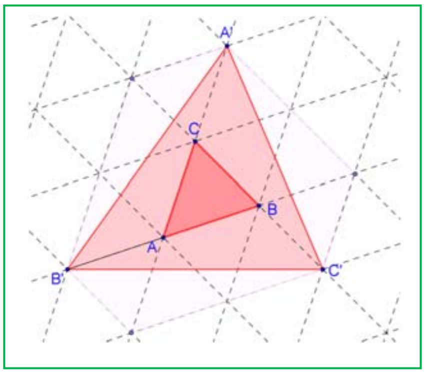
77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?

b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?

c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?

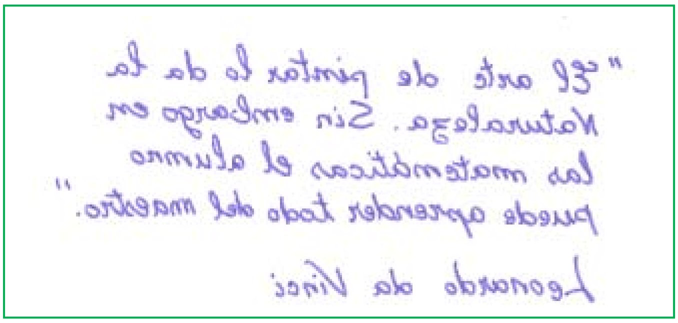
d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?



78. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.

79. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

80. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60° y de 30°. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.



81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.

82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240°, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240°? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90°?
- ¿Hay giros de 45°?
- ¿Hay traslaciones?

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90°, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30° y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:

a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60°.

b) La simetría de eje *n*

c) La simetría de eje *m*

d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*

e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3).

2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14).

3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) **no** puede ser:

a) Un giro de centro el origen y ángulo 90°.

b) Una traslación de vector **u** = (2, 2).

c) Un giro de centro el origen y ángulo 270°.

d) Una simetría de eje $y = x$.

4. La transformación identidad también se llama:

a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180° d) Traslación de vector nulo (0, 0)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?

a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles.

6. La simetría central en el plano es un giro de:

a) 360° b) 180° c) 90° d) 0°

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:

a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central.

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:

a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:

a) O b) H c) S d) D

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:

a) Dos giros de distinto centro.

b) Dos simetrías de ejes secantes.

c) Un giro y una simetría.

d) Dos simetrías de ejes paralelos.

Capítulo 9: Magnitudes proporcionales. Porcentajes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

En este capítulo revisaremos los conocimientos que tienes del curso anterior sobre razones, porcentajes, proporcionalidad directa, regla de tres simple… y aprenderemos a utilizar instrumentos que nos permitan establecer comparaciones entre magnitudes.

Estudiaremos las diferencias entre proporcionalidad directa e inversa, aplicando métodos de resolución de problemas. Utilizaremos también la regla de tres compuesta.

Aprenderemos a aplicar e interpretar todo lo relacionado con la proporcionalidad y su aplicación en la vida cotidiana.

Aplicaremos los conocimientos sobre proporcionalidad en la interpretación de escalas y mapas, utilizando la idea de semejanza, figuras semejantes, ampliación y reducción de figuras, razón de semejanza y escalas. Estudiaremos la razón entre las superficies de figuras semejantes.

Interpretación de mapas

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1.1. Razón

Ya sabes que:

Razón, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.

Se expresa en forma de cociente, de forma similar a una fracción y se lee **"A es a B"**

Ejemplo:

- Compramos 5 kg de naranjas por 4 €. Podemos establecer la relación entre el precio (4 €) y la cantidad (5 kg)

$$4 : 5 = 0.8 \text{ € el kilo}$$

$\frac{4}{5}$ es **la razón** entre euros y peso de naranjas**.**

De esta manera si compramos otras cantidades de naranjas podremos calcular el precio a pagar.

Observa:

Una fracción expresa una parte de un todo de **una única magnitud**, mediante sus términos, numerador (las partes que se toman) y denominador (el total de las partes en las que se ha dividido ese todo)

Sin embargo, los términos de **una razón** se refieren a cantidades de **dos magnitudes**, el primero se llama "antecedente" y el segundo "consecuente"

Ejemplo:

- La razón que relaciona el gasto de 10 personas y los 500 litros de agua que gastan en un día, puede escribirse:

$$\frac{10 \text{ personas}}{500 \text{ litros}} \text{ o bien } \frac{500 \text{ litros}}{10 \text{ personas}}$$

En cualquiera de los casos estamos expresando que la razón entre litros de agua y personas es:

500 : 10 = 50 litros por persona.

Si fueran 5 personas de una misma familia la cantidad de agua gastada será de 250 litros. Si son 400 personas de una urbanización la cantidad de agua será 20000 litros, es decir:

$$\frac{10}{500} = \frac{400}{20\,000} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50} \text{ o bien } \frac{500}{10} = \frac{20\,000}{400} = \frac{250}{5} = \frac{50}{1}$$

Ideas claras

Una **razón** es un cociente. Se expresa en forma de **fracción** pero sus términos no expresan una parte de una misma magnitud sino la **relación** entre dos magnitudes.
Los términos de la razón pueden ser números enteros o decimales.

Actividades propuestas

1. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente.
¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

2. Medio kilo de cerezas costó 1.90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Proporción

Ya sabes que:

Una **proporción** es la **igualdad** entre dos razones.

Los términos primero y cuarto son los **extremos** y el segundo y tercero son los **medios.**

$$\frac{extremo}{medio} = \frac{medio}{extremo}$$

Se llama "***razón de proporcionalidad***" al cociente entre dos variables. Y su valor constante nos permite obtener razones semejantes.

Cuando manejamos una serie de datos de dos pares de magnitudes que presentan una misma razón, se pueden ordenar en un cuadro de proporcionalidad.

Ejemplo:

- En el cuadro de abajo se observa que cada árbol da $\frac{200}{5}$ = 40 kg de fruta. Es la **razón de proporcionalidad.**

  Con ese dato podemos completar el cuadro para los siguientes casos.

kg de fruta	**200**	400	80	40	400	120	3000	800
nº de árboles	**5**	10	2	1	10	3	75	20

Propiedad fundamental de las proporciones:

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo:

- $\frac{3000}{75} = \frac{800}{20} \Rightarrow 3000 \cdot 20 = 75 \cdot 800$

Ideas claras

Observa que la razón de proporcionalidad nos sirve para establecer una relación entre las dos variables para cualquiera de los valores que puedan adoptar.

Actividades propuestas

4. Completa las siguientes proporciones:

a) $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$ **b)** $\frac{0,3}{x} = \frac{7}{14}$ **c)** $\frac{x}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$ **d)** $\frac{0,05}{100} = \frac{x}{400}$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0.36; 0.06; 0.3; 1.8

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2.5:

0.5	**9**	**6**		**20**			**2.5**
			50		**8**	**25**	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Ya sabes que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

El número de vacas y la cantidad de pienso que se necesita. Por ejemplo si el número de vacas fuese el triple habrá que tener triple cantidad de pienso.

Sin embargo, hay relaciones entre magnitudes que no son de proporcionalidad porque cuando una se multiplica o se divide por un número, la otra no queda multiplicada o dividida de la misma forma.

Ejemplo:

El peso y el tamaño del pie de una persona no son magnitudes proporcionales: El doble de la edad no significa el doble de número de zapato.

Ideas claras

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, el doble, triple… de la primera supone el doble, triple... de la segunda.

Hay magnitudes que no se relacionan proporcionalmente.

Actividades propuestas

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

- La cantidad de filetes que debo comprar y el número de personas que vienen a comer.
- El peso de una persona y su altura.
- El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él.
- El precio de una tela y lo que necesito para hacer un vestido.
- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado.
- El peso de una persona y su sueldo.

8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$ c) $\frac{7.5}{56.9}=\frac{x}{2}$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3.9; 0.3; 1.3; 0.1 b) 5, 12, 6, 10 c) 0.18 4 0.4 18

¿Hay más de una solución?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.1. Regla de tres directa

Ya sabes que

Para resolver problemas de proporcionalidad directa, podemos utilizar el **método de reducción a la unidad.**

Ejemplo:

- Cinco viajes a Méjico costaron 6 500 €. ¿Cuánto pagaremos por 14 viajes de un grupo de amigos idénticos?

Primero calculamos el precio de un viaje, 6 500 : 5 = 1 300 €.

Después calculamos el coste de los 14 billetes: 1 300 · 14 = 18 200 €

La **regla de tres** es otro procedimiento para calcular el cuarto término de una proporción

Ejemplo:

- Con tres kilos de maíz mis gallinas comen durante 7 días. ¿Cuántos kilos necesitaré para darles de comer 30 días?

Formamos la proporción ordenando los datos: $\frac{3\ kg}{x\ kg} = \frac{7\ días}{30\ días} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12.86\ kg$

Otra forma habitual de plantear la regla de tres es situando los datos de esta forma:

3 kg ———— 7días $\qquad x = \frac{3 \cdot 30}{7} = 12.86\ kg$

x kg ———— 30 días

Ideas claras

Reducir a la unidad significa calcular el valor de uno para poder calcular cualquier otra cantidad.

En la **regla de tres directa** ordenamos los datos de forma que el valor desconocido se obtiene multiplicando en cruz y dividiendo por el tercer término.

Actividades propuestas

10. El coche de Juan gasta 5.5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?

11. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?

12. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?

13. Cuatro camisetas nos costaron 25.5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Porcentajes

Ya sabes que

El porcentaje o **tanto por ciento** es la proporción directa más utilizada en nuestra vida cotidiana.

En los comercios, informaciones periodísticas, o en los análisis de resultados de cualquier actividad aparecen porcentajes.

Un porcentaje es una razón con denominador 100.

Su símbolo es **%**.

Su aplicación se realiza mediante un sencillo procedimiento:

"Para calcular el % de una cantidad se multiplica por el tanto y se divide entre 100"

Ejemplo:

- Calcula el 41 % de 900 El 41 % de 900 = $\frac{41 \cdot 900}{100} = 369$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente al tratarse de un cálculo sencillo:

- El 50 % equivale a la mitad de la cantidad.
- El 25 % es la cuarta parte de la cantidad.
- El 75 % son las tres cuartas partes de la cantidad.
- El 10 % es la décima parte de la cantidad.
- El 200 % es el doble de la cantidad.

¡¡GRANDES REBAJAS!!

40 % DE DESCUENTO

EN TODOS LOS ARTÍCULOS

Ejemplo:

- El 25 % de 800 es la cuarta parte de 800, por tanto es 800 : 4 = 200.

Ideas claras

Si cualquier cantidad la divides en 100 partes, el 40 % son cuarenta partes de esas cien.
El total de una cantidad se expresa como el 100 %

Actividades propuestas

14. Calcula mentalmente:

a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

16. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Descuento porcentual

En muchos comercios aparecen los precios antes de la rebaja y los precios rebajados. Con esos dos datos podemos calcular el % de descuento.

Ejemplo:

- Una camisa costaba 34 € y en temporada de rebajas se vende a 24 €, ¿qué % de descuento se ha aplicado sobre el precio anterior?

Calculamos el importe de la rebaja 34 – 24 = 10 €.

Establecemos la proporción: $\frac{34}{10} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{10 \cdot 100}{34} = 29.41\ \%$

Ejemplo:

- Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

El precio inicial equivale al 100 %. Al aplicar el descuento, sólo pagaremos: 100 – 12 = 88 %.

Por tanto, debemos calcular el 100 %: $\frac{528 \cdot 100}{88} = 600\ €$

Ideas claras

El **descuento** es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final. Con estos datos podremos calcular el % de descuento aplicado.

Al descontarnos un *x* % de una cantidad, sólo pagaremos el (100 – *x*) %.

Actividades propuestas

17. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?

18. ¿Cuál de estas dos oferta ofrece un mayor % de descuento:

Antes 44.99 €
Ahora 31.99 €

Antes 11.99
Ahora 9.99

19. Completa:

a) De una factura de 540 € he pagado 459 €. Me han aplicado un ……… % de descuento.

b) Me han descontado el 16 % de una factura de ……………. € y he pagado 546 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Incremento porcentual

En los **incrementos porcentuales**, la cantidad inicial es menor que la final ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Ejemplo:

- Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo.

Puedo calcular el 12 % de 150 y sumarlo a 150: $\frac{12 \cdot 150}{100} = 18$ €.

En total pagaré 150 + 18 = 168 €.

Ejemplo:

- Otra forma de aplicar el incremento porcentual puede ser calcular el % final a pagar:

En el caso anterior: 100 + 12 = 112 %

Calculamos el 112 % de 150 €: $\frac{112 \cdot 150}{100} = 168$ €.

Ejemplo:

- En un negocio he obtenido un 36 % de ganancias sobre el capital que invertí. Ahora mi capital asciende a 21 760 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

El incremento porcentual del 36 % indica que los 21 760 € son el 136 % del capital inicial.

Debemos calcular el 100 %: $\frac{21\,760 \cdot 100}{136} = 16\,000$ €.

2.5. Impuesto sobre el valor añadido IVA

Los artículos de consumo y las actividades económicas llevan asociadas un impuesto IVA que supone un incremento sobre su precio de coste. En España el IVA general que se aplica es el 21 %.

Es importante que, en la publicidad, observemos si el precio que se indica de un artículo o servicio es con IVA incluido.

Ideas claras

En los **incrementos** porcentuales, la cantidad inicial aumenta porque se le aplica un tanto por ciento mayor que el 100 %.

El **IVA** es un impuesto que supone un incremento sobre el precio inicial

Actividades propuestas

20. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.

21. Una persona invierte 3 570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3 659.25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.

22. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?

23. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 $	105 $	90.4 $	100.20 $	12 $
Precio final					

24. El precio de un televisor es 650€ + 21% IVA. Lo pagaremos en seis meses sin recargo. Calcula la cuota mensual.

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:

- En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50000 m, es decir a 50 km.

Ejemplo:

- Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

1 : 600.

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3.5 cm. La altura real de las torres será:

$$3.5 \cdot 600 = 2\ 100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La escala utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.
Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

25. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

26. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 3.7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

27. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
36 cm	
	7.7 km
0.005 m	

28. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1.5 cm	900 m	
7 cm	7.7 hm	
4 cm	12 km	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

4.1. Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- Un coche va a 90 km/h y tarda 3 horas en llegar a su destino. Si una moto va a 45 km/h, tardará 6 horas en recorrer la misma distancia.

Se comprueba que si la velocidad es el doble, el tiempo será la mitad, y ambos han recorrido los mismos kilómetros: $90 \cdot 3 = 270$ km $45 \cdot 6 = 270$ km

En la proporcionalidad inversa, **la razón de proporcionalidad** es el producto de ambas magnitudes

Hay muchas situaciones en las que encontramos una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes.

Ejemplos:

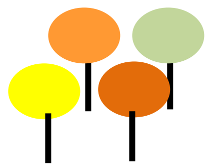
- El número de invitados a un cumpleaños y el trozo de tarta que le toca a cada uno.
- Las personas que colaboran en una mudanza y el tiempo que tardan.

Cuando conocemos la razón entre dos magnitudes inversamente proporcionales, podemos elaborar una tabla para diferentes valores:

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 60 caramelos. Podemos repartirlos de varias maneras según el número de niños: 60 es la razón de proporcionalidad.

Número de niños	6	12	30	15	20
Número de caramelos para cada uno	10	5	2	4	3



Observa que cuando el número de niños aumenta, los caramelos que recibe cada uno disminuyen.

Ideas claras

Para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales, cuando una crece la otra decrece en la misma proporción.

La razón de proporcionalidad inversa se calcula multiplicando las dos magnitudes.

Actividades propuestas

29. Cinco trabajadores terminan su tarea en 8 días. El número de trabajadores y el número de días que tardan, ¿son magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

30. Completa la tabla de proporcionalidad inversa y señala el coeficiente de proporcionalidad.

Velocidad en km/h	100	120			75
Tiempo en horas	6		20	4	

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Regla de tres inversa

Una proporción entre dos pares de magnitudes inversamente proporcionales en la que se desconoce uno de sus términos se puede resolver utilizando la **regla de tres inversa**.

Ejemplo:

- Seis personas realizan un trabajo en 12 días, ¿cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 8 personas?

El coeficiente de proporcionalidad inversa es el mismo para las dos situaciones: 12 · 6 = 72

Planteamos al regla de tres:

6 personas tardan 12 días $\qquad 12 \cdot 6 = 8 \cdot x \qquad x = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9$ días

8 personas tardan X días

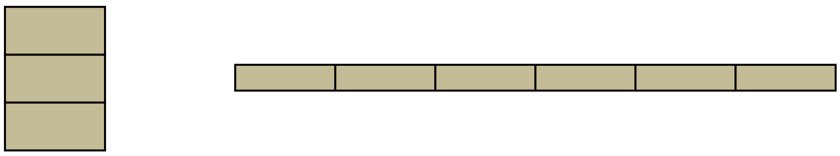
Las aventuras de Troncho y Poncho: Proporcionalidad. La aventura más Manga de Troncho y Poncho (a lo japonés). Es como si los Pokemon explicasen las magnitudes directa e inversamente proporcionales.

https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4

En geometría encontramos ejemplos de proporcionalidad inversa

Ejemplo:

- Estas dos superficies tienen distinta forma pero la misma área:



Observa que la primera tiene tres unidades de altura y una de base y la segunda, una altura de media unidad y seis unidades de base.

3 · 1 = 0.5 · 6 = 3

Ejemplo:

- Observa estos vasos. Su capacidad depende tanto de su altura como de su base. Si dos vasos distintos tienen la misma capacidad pero distinta forma a mayor base menor altura y viceversa.

Ideas claras

Para resolver la regla de tres inversa se tiene en cuenta que el producto de cada par de magnitudes ha de ser el mismo, su coeficiente de proporcionalidad inversa.

Actividades propuestas

31. Hemos cortado una pieza de tela en 24 paños de 0,80 cm de largo cada uno. ¿Cuántos paños de 1,20 m de largo podremos cortar?

32. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 €. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo, ¿cuántos euros debe poner ahora cada uno?

33. Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. REGLA DE TRES COMPUESTA

En algunos problemas de proporcionalidad aparecen más de dos magnitudes relacionadas entre sí, estableciendo lo que llamamos una proporcionalidad compuesta.

Las relaciones entre las magnitudes pueden ser todas directas, todas inversas o directas e inversas. Por ello, debemos aplicar los métodos de resolución tanto de regla de tres directa o inversa, una vez analizado el enunciado.

Ejemplo:

- Seis máquinas realizan 750 piezas durante 4 días. ¿Cuántas piezas realizarán ocho máquinas iguales durante 10 días?

Planteamos los datos:

6 máquinas ………………… 750 piezas …………………… 4 días

8 máquinas ………………… x piezas ……………………10 días

La relación entre las tres magnitudes es directamente proporcional ya que al aumentar o disminuir cada una de ellas, las otras dos aumentan o disminuyen.

Para calcular el resultado, aplicamos la proporcionalidad directa en dos pasos:

a) Máquinas y piezas: $x = \frac{8 \cdot 750}{6}$ ahora hay que tener en cuenta los días

b) Al ser una proporción directa $x = \frac{8 \cdot 750 \cdot 10}{6 \cdot 4} = 2500$ piezas

Ejemplo:

- Cinco fuentes abiertas durante 8 horas y manando 12 litros cada minuto llenan completamente un estanque. ¿Cuántas fuentes debemos abrir para llenar el mismo estanque en 6 horas y manando 20 litros por minuto?

Planteamos los datos:

5 fuentes ………………… 8 horas ……………… 12 L/min

x fuentes …………………..6 horas ……………… 20 L/min

La relación entre estas tres magnitudes es inversamente proporcional, ya que con mayor caudal, tardarán menos tiempo en llenar el depósito.

El producto de las tres variables 5 · 8 · 12 debe ser igual al producto de x · 6 · 20, por tanto

$$x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 12}{6 \cdot 20} = 4 \text{ fuentes}$$

Actividades propuestas

34. Seis personas gastan 2 100 € durante 4 meses en gastos de transporte. Si el gasto durante 10 meses ha sido de 3 600 €, ¿a cuántas personas corresponde?

34. Con una jornada de 8 horas diarias, un equipo de 20 personas tarda 9 días en concluir un trabajo. ¿Cuántas personas se necesitan para realizar el mismo trabajo, trabajando 9 horas diarias para realizar el trabajo en 5 días?

CURIOSIDADES. REVISTA

La divina proporción

La proporción armónica

La proporción áurea

¡Imaginas que existe una proporción con esos nombres! Además, ¡Está en **TODAS** partes!

¿Qué es?

Como su nombre indica es una proporción. Una longitud se divide en dos, $a + b$, de forma que se verifique:

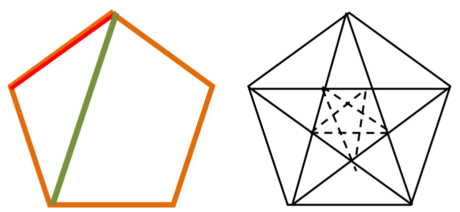
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Ese cociente da un número, un valor, al que se llama **número de oro** y es aproximadamente igual a 1.618…

Teano fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos **la proporción áurea**. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas.

Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la Escuela Pitágórica, y su relación con la divina proporción.

Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva



La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro:

$$\frac{\text{Segmento verde}}{\text{Segmento rojo}} = \frac{\text{Diagonal}}{\text{Lado}} = \mathbf{1.618....}$$

Se llama "La Divina Proporción" porque los objetos con esta proporción son armoniosos a la vista.

Muchas flores son pentagonales

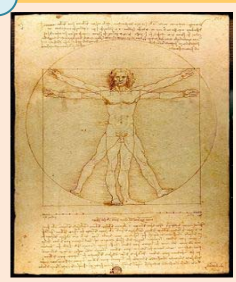
La relación entre la distancia entre las espiras del interior de algunos caracoles es la proporción áurea.

Si quieres saber si tú eres armónica debes medir tu altura y también la distancia desde tu ombligo al suelo. Si esa razón es próxima al número de oro, ¡lo eres!

La relación entre las falanges de los dedos es la divina proporción.

En el Hombre de Vitruvio, Leonardo da Vinci estudió la Divina Proporción.

Busca en Internet para saber más.

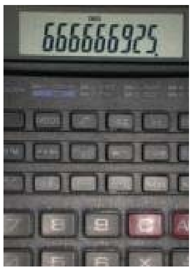


Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLO*
Razón	Comparación entre los valores de dos variables	Precio y cantidad
Proporción	Igualdad entre dos razones	A es a B como C es a D
Magnitudes directamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número	24 es a 10 como 240 es a 100
Razón de Proporcionalidad directa	Cociente entre los valores de dos magnitudes	$\frac{300}{25}$
Porcentajes	Razón con denominador 100	$\frac{23}{100}$
Escalas y planos	Comparación entre tamaño real y tamaño representado	1 : 20 000
Magnitudes inversamente proporcionales	Si se multiplica o divide una de las magnitudes por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número	A por B es igual a C por D
Razón de proporcionalidad inversa	Producto de ambas magnitudes	45 · 70

PORCENTAJE CON CALCULADORA



En la calculadora puedes encontrar una función que te permite calcular el % de manera directa.

Para ello debes seguir los siguientes pasos:

1. **Escribe la cantidad**
2. **Multiplica por el tanto**
3. **Pulsa SHIFT y %. El resultado que aparece en la pantalla es la solución.**

Ejemplo:

650	*	16	SHIF	%	=	104

Una forma fácil de añadir o restar el importe del tanto por ciento a la cantidad final puede hacerse de la siguiente forma:

- **Sigue los pasos 1, 2 y 3 anteriores**
- **Pulsa la tecla + si lo que quieres es un aumento porcentual**
- **Pulsa la tecla – para una disminución porcentual**

Ejemplo:

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	+	1534.4

1370	*	12	SHIFT	%	164.4	–	1205.6

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos.
2. ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental:

   a) 6, 24, 12, 3 b) 35 0.5 1.25 7
3. Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?
4. Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11.36		56.8		25.56

5. En España muchos productos llevan en el precio un impuesto llamado IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), del 21 %. En los tickets de los establecimientos suelen marcar el precio final, sumando el 21 % de IVA. Calcula el precio final de una batidora que vale 110 € + IVA
6. Con 48 € puedo comprar 20 piezas de madera. Si las piezas costaran 1.50 € cada una, ¿cuántas podría comprar con el mismo dinero?
7. ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

MASA DE ROSQUILLAS	**MASA DE ROSQUILLAS**	
2 kg de harina 6 huevos 1 kg y medio de azúcar	Medio kilo de harina 4 huevos 400 g de azúcar	

8. Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso, ¿cuántos días podremos dar de comer a las restantes?
9. Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

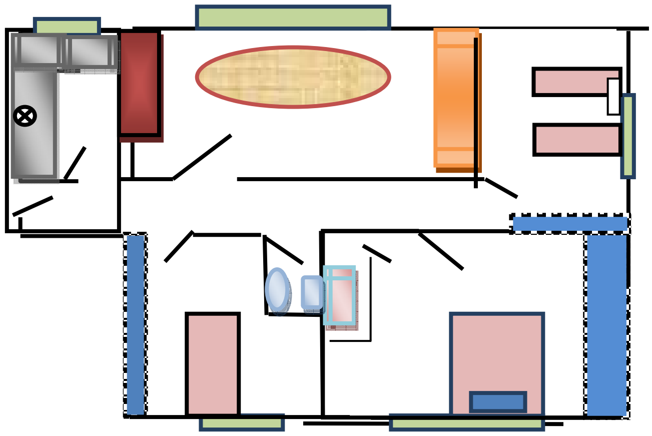
Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4.5		10		3

10. Cada gominola cuesta 5 céntimos y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?

11. Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿Cuánto tiempo tardarán el llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Observa el plano de esta vivienda dibujado a una escala 1 : 400. ¿Cuáles son las dimensiones reales del salón? ¿Y de la cocina?



13. Expresa en euros el cambio de 1 400 $, si cada euro cotiza a 1.26 $

14. El agua al congelarse aumenta un 10 % su volumen. ¿Cuántos litros de agua necesitamos para conseguir una barra de hielo de 75 dm^3?

15. Un pantalón costaba 36 € pero en las rebajas se vende a 28 €. ¿Qué % han rebajado?

16. El precio de una televisión es 847 €, IVA incluido. Calcula el precio sin IVA.

17. Señala en cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales:

a) La cantidad de árboles talados y los kilos de leña almacenados.

b) La velocidad del tren y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

c) El tamaño de la bolsa y la cantidad de bolsas necesarias para guardar la compra.

d) La distancia que recorre un automóvil y la gasolina que gasta.

e) Las personas que asisten al cumpleaños y el tamaño del trozo de tarta que toca a cada uno.

f) El radio de una circunferencia y su longitud.

g) Las bombillas que iluminan una sala y el gasto en electricidad.

18. Para vaciar un depósito hemos empleado 17 cubos de 22 litros cada uno. Si la siguiente vez los cubos tienen una capacidad de 34 litros ¿cuántos necesitaremos?

19. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado

Antes	**Después**
23.95	**15.95**

20. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21.6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12.20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?

21. Un empleado público que gana 1 154 € netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5 % a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

22. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.

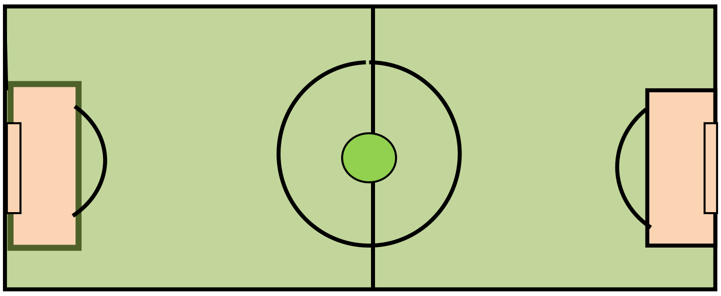
A la vista de este cuadro de precios ¿Cuánto cuesta estacionar un coche en zona azul y en zona verde durante 80 minutos? ¿Y durante 45 minutos?

Zona azul	Tarifa		Zona verde	Tarifa
Hasta veinte minutos	0.25 €		Hasta veinte minutos	0.55 €
Media hora	0.45 €		Media hora	1.05 €
Una hora	1.20 €		Una hora	2.25 €
Hora y media	1.90 €		Hora y media (estancia máxima autorizada)	3.50 €
Dos horas	2.50 €			

23. El precio de un ordenador portátil es 899 € IVA (21%) incluido. Calcula su precio sin IVA.

24. El juego cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324 € + IVA (21%). Calcula el precio de cada rueda.

25. En un dibujo, el campo de fútbol mide 24 cm por 16 cm. El campo mide 90 m de largo ¿Cuánto mide de ancho? ¿A qué escala está dibujado?



MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS

26. En un mapa dibujado a escala 1 : 250 000, la distancia entre dos puntos es de 0.15 m. Calcula la distancia real en km

27. La base y la altura de un rectángulo miden 14 cm y 32 cm. ¿A qué escala hemos dibujado otro rectángulo semejante al anterior, de 49 cm de base? Calcula su altura.

28. Con 840 kg de pienso alimentamos a 12 animales durante 8 días. ¿Cuántos animales similares podrían alimentarse con 2 130 kg durante 15 días?

29. Para almacenar 2 580 kg de mercancía en 4 días contratamos a 6 personas. Si sólo podemos contar con 5 personas y la carga es de 3 000 kg ¿Cuántos días se tardará en el almacenaje?

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación

   a) Proporcional directa   b) proporcional inversa   c) no es proporcional

2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:

   a) 22.4 €   b) 30.6 €   c) 26.4 €   d) 24.2 €

3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699.20€. El importe total de la factura sin descuento era:

   a) 920 €   b) 1 220 €   c) 880 €

4. De Jaén a Cádiz se tardan 4h y 15 minutos por carretera a una media de 86 km/h. Si subimos la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto se tardará en hacer el recorrido?

   a) 3h 39 minutos   b) 3h 6 minutos   c) 3h 56 minutos

5. La distancia entre dos ciudades es 108 km. En el mapa se representa con una distancia de 6 cm. La escala del mapa es:

   a) 1 : 180 000   b) 1 : 18 000   c) 1 : 1 600 000   d) 1 : 1 800 000

6. Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:

   a) 3 227 €   b) 2 998 €   c) 3 028 €

7. Los datos que completan esta tabla de proporcionalidad inversa son:

Personas que realizan un trabajo	30		10	9	
Días que tardan en realizarlo	15	6			25

   a) 12; 5; 4,5; 50   b) 75; 45; 30; 18   c) 75; 45; 50; 18

8. Cuatro personas han pagado 1 540 € por siete noches de hotel. ¿Cuánto pagarán 6 personas si desean pasar 12 noches en el mismo hotel?

   a) 3 690 €   b) 3 960 €   c) 3 820 €

9. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios, empleando 3 horas al día?

   a) 40 días   b) 30 días   c) 50 días

10. 48 estudiantes necesitan 12 450 € para organizar un viaje de estudios de 10 días. ¿Cuántos días durará el viaje si disponen de un 15 % más de dinero y acuden 8 estudiantes menos?

   a) 12 días   b) 18 días   c) 15 días

Autora: Nieves Zuasti Soravilla
Revisoras: Milagros Latasa y Fernanda Ramos
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisor: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En la época de *El Quijote*, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: *"ALGEBRISTA Y SANGRADOR"* ¿Y eso, por qué?

La palabra *"Álgebra"* es una palabra árabe que utilizó el matemático *Al-Khwarizmi*. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "*algoritmo*".

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w'almuqabalah* La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1.1. Letras y números

Ya sabes que:

A nuestro alrededor nos encontramos con multitud de símbolos cuyo significado conocemos, como las señales de tráfico o algunos logotipos.

El **lenguaje algebraico** consigue que podamos expresar mensajes en los que las letras representan variables de valor desconocido. Utiliza letras, números y operaciones para representar una información.

Ejemplo:

- Ya has utilizado el lenguaje algebraico para indicar el área de un rectángulo de base b y altura h: A = $b \cdot h$; la longitud de una circunferencia de radio r: $L = 2\pi r$, por ejemplo.

Para cada situación podemos utilizar la letra que queramos, aunque, cuando hablamos de algo desconocido, la letra más utilizada es la ***x***.

Ejemplo:

- La mitad de la edad de una persona $x/2$
- El doble de un número menos 7 $2x - 7$.

El propio *Al-Khwarizmi* usó originariamente la palabra "*cosa*", (por ejemplo, en lugar de $2x$ decía "*el doble de una cosa*"), que en árabe suena como "*šay*" y que se tradujo al español como "*xei*". De aquí procede la x actual.

Las expresiones que nos permiten reflejar mediante letras y números una situación se llaman **expresiones algebraicas.**

Actividades resueltas

- Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

El triple de un número	$3x$
El producto de dos números consecutivos	$x \cdot (x + 1)$
La edad de Pedro hace 3 años	$x - 3$
La diferencia de dos números	$a - b$

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
   a) El triple de un número más su mitad.
   b) La edad de una persona dentro de 10 años.
   c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.
   d) La diferencia entre dos números consecutivos.

2. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.

3. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Coeficiente y parte literal

Ya sabes que:

Una **expresión algebraica** puede estar formada por uno o varios sumandos que se denominan **términos** o **monomios**. Una suma de monomios es un **polinomio**. En un monomio la **parte literal** son las letras y se llama **coeficiente** al número por el que van multiplicadas.

Ejemplo:

- En la expresión $7x$, el coeficiente es 7 y la parte literal x. En $9xy^2$ el coeficiente es 9 y la parte literal xy^2.

Para poder sumar o restar dos monomios deben ser **semejantes**, es decir, tener igual parte literal.

Ejemplo:

- Suma $9xy^2 + 7xy^2 = 16xy^2$. En cambio no se puede sumar $5x + 3y$ pues no son semejantes

Actividades resueltas

- Señala los coeficientes, las partes literales y el número de monomios de la expresión algebraica:

$$6a - 3b + c + 8$$

Esta expresión algebraica tiene 4 términos o 4 monomios: $6a$, $-3b$, c y 8. Los coeficientes son +6, –3, + 1 y +8 respectivamente. Las partes literales son a, b y c. El último término no tiene parte literal.

- Señala en el polinomio y calcula su suma $8x + 5x - 2x$ cuáles son los coeficientes. Los coeficientes son 8, 5 y –2; su suma es $11x$.

1.3. Valor numérico de una expresión algebraica

Si a las letras de una expresión algebraica se les da un valor concreto, se puede calcular el **valor numérico** de dicha expresión.

Actividades resueltas

- Calcula el valor numérico de la expresión $7x + 3$ cuando x vale 2.

Hay que sustituir en la expresión, x por su valor, 2.
Por tanto: $7 \cdot 2 + 3 = 14 + 3 = 17$, que es el valor numérico cuando x vale 2.

1.4. Equivalencia y simplificación de expresiones algebraicas

La expresión algebraica $5x + 4x$ es equivalente a la expresión $9x$, que es su expresión más simplificada.

Actividades propuestas

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Polinomios. Suma y producto

Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3 \cdot x$, es un monomio con una única variable, *x*, y coeficiente 3.
- El área del círculo, πr^2, es un monomio con indeterminada, r y coeficiente π. Su parte literal es r^2.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable *x*.
- πr^2 es un monomio de grado 2 en la indeterminada r.
- $7a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en *a* y *b*.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5} \cdot x^2 - 7 \cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $4 \cdot x^2 \cdot y^3 - 7 + 3 \cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2 \cdot y + 6 \cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, cuyo término independiente es 2.

Actividades propuestas

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

Actividades propuestas

7. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$

$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & -2x^3 & & +x & +4 \\ \times & & & x^2 & -3x & +1 \\ \hline & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\ -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\ \hline -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4 \end{array}$$

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$

b) $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$ b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$ d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Subervila y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

2.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $2x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propuestas

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -5 - 9$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

- Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x: $6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3$,

2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3$; $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen por qué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, −1, −3		$a^2 - 6 = -2$	−2, −6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, −2, −3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

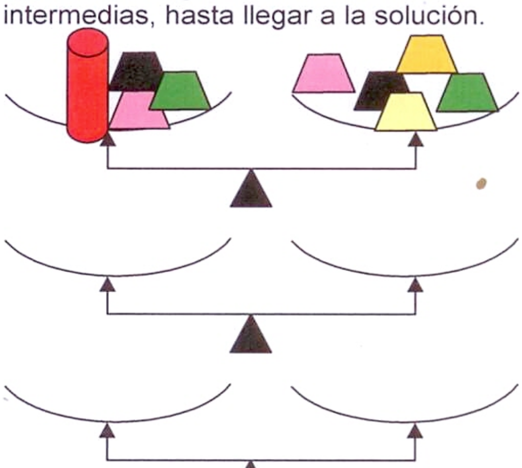
a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

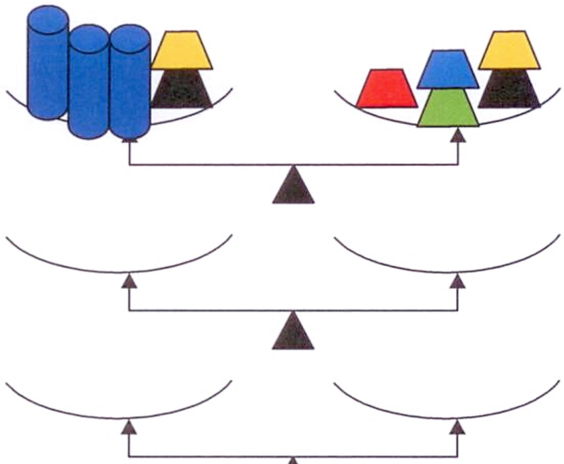
Material didáctico fotocopiable: Balanzas

a) Todas las pesas son iguales a 1. Las balanzas están equilibradas. Mantén siempre equilibradas las balanzas siguientes, hasta conseguir conocer cuanto pesa el objeto cilíndrico.

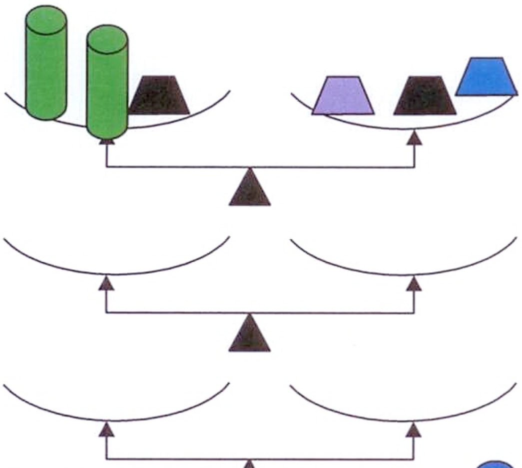
b) Escribe algebraicamente la situación actual de cada balanza, y todas las situaciones intermedias, hasta llegar a la solución.



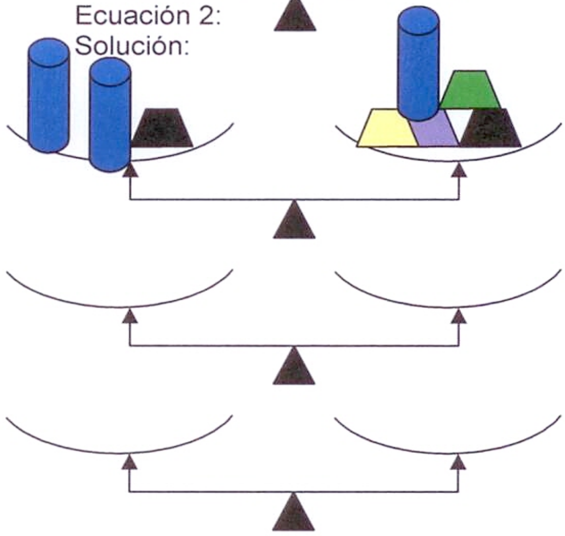
Ecuación 1:
Solución:



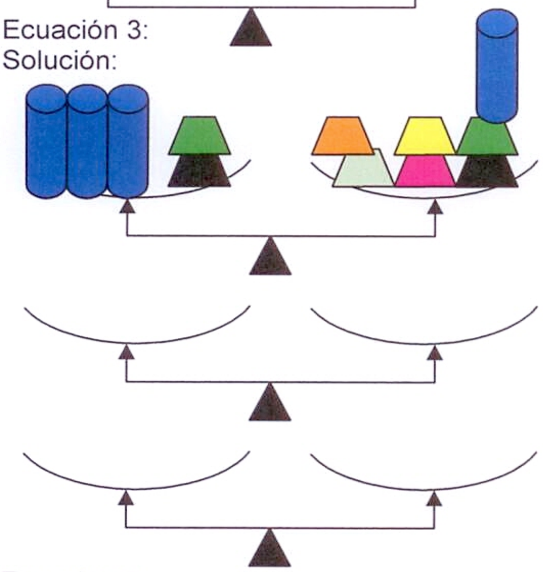
Ecuación 2:
Solución:



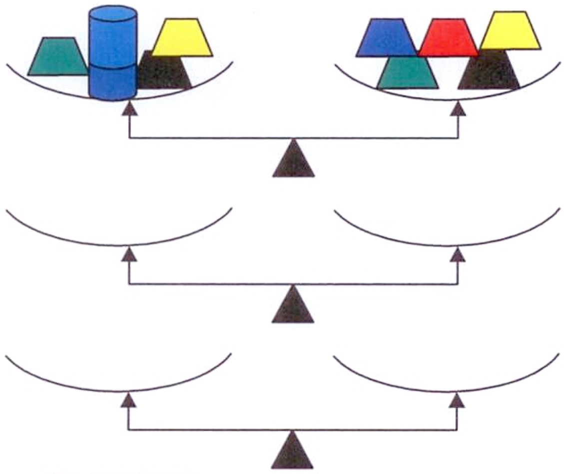
Ecuación 3:
Solución:



Ecuación 4:
Solución:



Ecuación 5:
Solución:

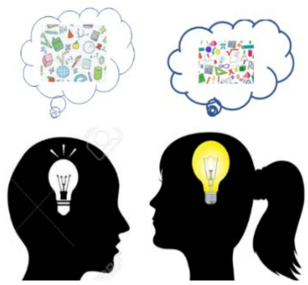


Ecuación 6:
Solución:

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Subervíola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

3.1. Procedimiento



Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 – 1= 9 – 1$, luego $x + x = 9 – 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 – x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 – x) = 54.$$

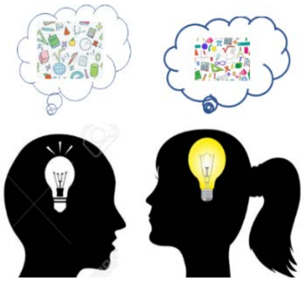
Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 – 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 – 2x – 68 = 54 – 68.$$



Opera:

$$– x = – 14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por –1:

$$x = – 14/– 1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay 34 – 14 = 20 habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2·20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 – x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 – x)$ patas.

Autora: Raquel Caro

Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por -2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Actividades propuestas

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x - 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x - 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, 10 + 20 + 25 = 55, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 - 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 - 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

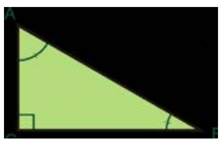
Resuelve la ecuación: $2x + 3 - 2 - x - 3 + 2 = x - x - 3 + 2 + 5$; $2x - x = 4$; $x = 4$

Solución: x = 4 cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, 4 + 5 = 9, y a la base le restamos 2, 11 – 2 = 9, se obtiene un cuadrado.

Actividades propuestas



23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10\,(21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: $5x - 10x + 210 - 210 = -210 + 170$

Haz operaciones: $-5x = -40$

Despeja la incógnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y 21 – 8 = 13 es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, 40 + 130 = 70 €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

Actividades propuestas

26. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

27. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

28. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

29. Si un bolígrafo vale 1.5 euros que es el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5.50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

30. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

31. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

32. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

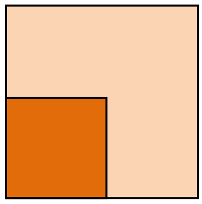
Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. El curso próximo estudiarás como resolverlas todas. Pero en este curso vamos a aprender a resolver algunas. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 9 *cm* y su área ha quedado multiplicada por 16, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 9)^2 = 16x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 9 = 4x \rightarrow 9 = 3x$, luego el lado es de 3 *cm*.

Hay otra solución, $x + 9 = -4x \rightarrow 9 = 5x = -9 \rightarrow x = -9/5$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

4.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- *Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo*

$$5x^2 - 8x + 3 = 0; \qquad -6x^2 + 2x + -9 = 0; \qquad x^2 - 25x - 1.1 = 0.$$

Ejemplo 2:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0\,; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0\,; \quad -2.7x^2 + 3.5x - 0.2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0\,.$$

Actividades propuestas

33. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

34. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

Autora: Raquel Caro

Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo:

- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.
- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente b = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente c = 0: Sacamos x factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto, $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Ejemplos:

- En la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta la b. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 5 y –5. En efecto, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, y $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

- En la ecuación $3x^2 - 21x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos x factor común:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x(x - 7) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 7$.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 72 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita: $2x^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 72/2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$. Las raíces son 6 y –6.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$ y obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Actividades propuestas

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

4.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución: Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c*: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5\cdot3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

- ***No** es un sistema lineal* $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ *porque tiene términos en xy.*

- Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

video

Problemas de encuentro de coches. Resolución de un problema de sistemas de ecuaciones lineales basado en encuentro de dos móviles en mismo sentido y con diferentes velocidades. José Luis Lorente

https://youtu.be/8hh66BiITdo

Actividades propuestas

37. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 7y = 9 \\ 8x - 5y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 5x - 6y = -7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x - 9 = 5y \\ 4x + 7y = 2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *por el método de sustitución:*

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

5.3. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ *por el método de igualación:*

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y - 1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot (1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5.4. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ *por el método de reducción:*

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

38. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

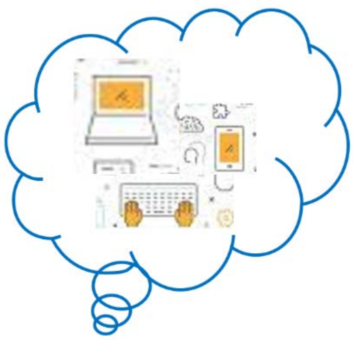
a) $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+7y=10 \end{cases}$

39. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

40. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$



41. Abre una hoja de cálculo y diseña una que te permita resolver sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.

42. Utiliza la hoja [Sistemas y ecuaciones] para comprobar las soluciones de las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de este capítulo

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12

A) Cuadrados mágicos

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

40. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

B) EMMY NOETHER (1882 – 1935)

Emmy Noether

Emmy Noether fue una famosa algebrista. Nació en Alemania, hija de padres judíos. Su padre era catedrático de matemáticas en la Universidad y Emmy heredó de él la pasión por las matemáticas. Sin embargo, por aquella época la Universidad no admitía que las mujeres desarrollasen estudios científicos, así que tuvo que conseguir un permiso especial para que la dejaran asistir a las clases, aunque no tenía derecho a examinarse. Años más tarde, las leyes cambiaron y pudo doctorarse. Trabajó con los matemáticos alemanes más brillantes y desarrolló un teorema esencial para la Teoría de la Relatividad en la que estaba trabajando Albert Einstein. Ante la situación política de Alemania, con la subida al poder de HItler, tuvo que exiliarse a Estados Unidos. Allí coincidió con **Einstein** quien le dedicó estas palabras: *"A juicio de los matemáticos más competentes que todavía viven, desde que las mujeres empezaron a recibir enseñanza superior, Emmy Noether ha tenido el genio creativo más destacado que haya surgido hasta la fecha de hoy en el campo de la matemática"*.

C) DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.

A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.

Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.

Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

41. a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Expresión algebraica	Expresiones que reflejan una situación mediante letras y números	Área de un rectángulo = base por altura: $A = b \cdot a$
Valor numérico de una expresión algebraica	Número que se obtiene al sustituir las letras por números y hacer las operaciones.	El valor numérico de $x + 3x + 5$ para $x = -2$ es: $-2 + 3(-2) + 5 = -2 - 6 + 5 = -3$
Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	**$3x - 1 = 2x + 5$** $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$; $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x.	**$(3x - 1) = 7/2$** 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

1. Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:

a) Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.

b) Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.

c) Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.

d) Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.

2. En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.

3. Escribe en lenguaje algebraico

a) La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años.

b) La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.

4. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:

a) Raquel tiene x cromos.

b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel.

c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe.

d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos.

e) Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.

5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restamos 7 a la mitad de un número	2) $3x + 9$
c) El triple de un número más el doble del siguiente	3) $8x$
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra	4) $x/2 – 7$
e) El perímetro de un octógono regular.	5) $x – 3$
f) La edad de alguien hace 3 años	6) $20 – x$

6. Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x:

a) $y = 0.5 + 3x$ para $x = 3$ b) $y = 1.6x$ para $x = 0.75$ c) $y = 4 + 1.5x$ para $x = 2.1$

7. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3a^2b – 2a^2b + 7a^2b$ b) $5xy + 7xy – 2xy$ c) $6x + 9x – 3x$

d) $2x + 7x – 2y$ e) $3ab + 8ab – 6ab$

8. Realiza las operaciones siguientes

a) $3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y$ b) $(2x – 5x^2) – (3x^2 + 5x)$

c) $3(7x – 3) – 2(2x + 5)$ d) $2a – 5a + 7a – 8a + b$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuaciones de primer grado

9. Encuentra el número que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	*Edad en años*
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

11. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.

a) $x + 10 = 17.5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2.5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h)* $3x = 15$ *j)* $x = 7.5$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

21. Resuelve:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

22. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10= 3/2$

36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x +1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 -2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1)= 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

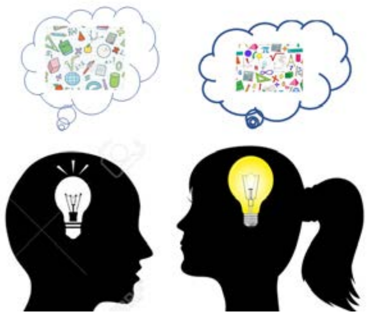
71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Subervila y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Problemas



ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.

27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2.55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

39. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

40. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

41. Cuadrados mágicos: En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

42. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

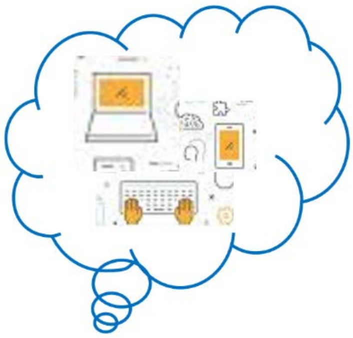
- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado



43. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

44. Diseña una hoja de cálculo para resolver ecuaciones de segundo grado.

Sistemas lineales

45. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Autora: Raquel Caro

Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 8.3x – 2.5 + *y*, son:

a) 8.3, 2.5 y 1 b) +8.3, –2.5 y +1 c) + 8.3 y – 2.5 d) 8.3, 1, 2.5

2. El valor numérico de la expresión algebraica 4 a + 3 b, cuando *a* = 5 y *b* = – 2, es:

a) 14 b) –14 c) 26 d) – 26

3. La solución de la ecuación 3.4 + 5.2*x* – 8.1*x* = 9.4 + 7.3*x* es:

a) –10/17 b) +6/–10.2 c) – 10/1.7 d) 0.58

4. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2

5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x – 8 = 50$ c) $50 + x = 8 – x$ d) x + x – 8 = 50

6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20

7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 – 8$ d) 6x = 136

8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:

a) 9 y 12 b) 10 y 10 c) 12 y 6 d) 8 y 12

9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2 000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:

a) 900 €, 400 € y 650 € b) 450 €, 650 € y 950 € c) 600 €, 400 €, 1000 € d) 650 €, 400 €, 950 €

10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?

a) 340 km y 200 km b) 300 km y 240 km c) 420 km y 120 km d) 320 km y 220 km.

Autora: Raquel Caro
Revisores: Pedro Luis Suberviola y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2º ESO

CAPÍTULO 11: TABLAS Y GRÁFICAS. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

El estudio de las relaciones entre dos magnitudes y su representación mediante **tablas y gráficas** es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos naturales y cotidianos que se relacionan de manera funcional.

En muchas ocasiones necesitaremos que los datos recogidos en una tabla sean representados gráficamente y utilizaremos el **sistema de referencia cartesiano**.

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** que vivió entre los años 1596 y 1650. *Descartes* quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «*punto de partida*» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, *Descartes* también comenzó tomando un "*punto de origen*" para poder representar la geometría plana.

René Descartes

En este tema aprenderemos a utilizar el **lenguaje gráfico** para interpretar y describir situaciones del mundo que nos rodea. También estudiaremos las **funciones** entre dos magnitudes variables, en las que una tiene una relación de dependencia de la otra. *Descartes, Newton* y *Leibniz* ya establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Aunque su definición y comprensión fue posterior, a partir de *Fourier*, llegando al siglo XX.

Así, los contenidos que vamos a tratar nos van a permitir trabajar con las distintas formas de representar algunas situaciones funcionales: numérica, gráfica, verbal o a través de una expresión algebraica (como las que acabamos de estudiar en el capítulo anterior) y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

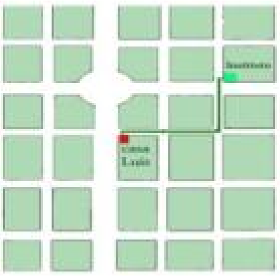
1.1. Sistema de referencia cartesiano

Ya sabes que:

Constantemente nos encontramos con situaciones en las que tenemos que indicar la localización de objetos o lugares respecto de otros conocidos y, en ocasiones, sus posiciones en un plano o mapa. Para entendernos es muy importante que tengamos una referencia común.

Si quieres indicar a unos amigos que no conocen tu barrio, dónde se encuentra una tienda determinada o el Instituto donde estudias, bastará con que les indiques su posición con las referencias que utilicéis todos.

Ejemplo 1:



- Luis vive en la casa marcada en rojo en el plano adjunto y estudia en un Instituto cercano marcado en verde en el plano.

Para indicar a sus amigos franceses donde está su Instituto les da las siguientes indicaciones:

"Al salir de mi casa vais hacia la derecha y cruzáis dos calles,
luego hacia la izquierda cruzáis una calle y ya habéis llegado"

Las referencias izquierda y derecha así como la idea de cruzar una calle son comunes a todos nosotros, además fíjate que en el esquema la línea que indica el camino es muy clara

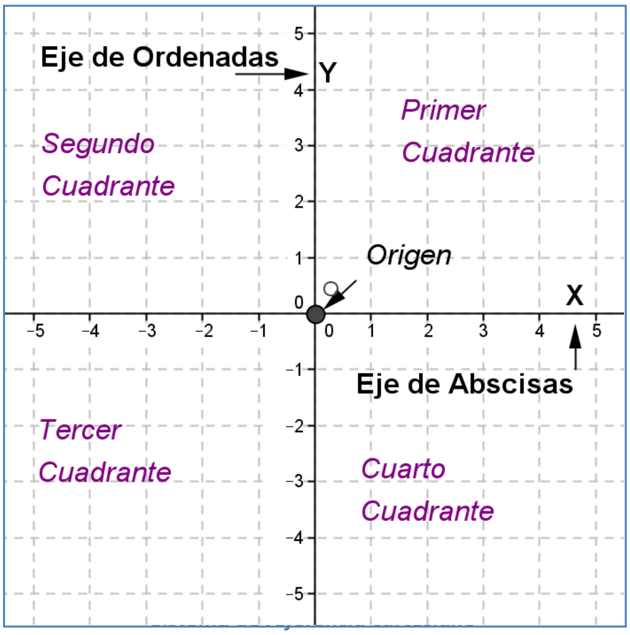
En Matemáticas, en la mayoría de las ocasiones, utilizamos sistemas de referencia cartesianos que también se utilizan en Ciencias Sociales para trabajar los mapas y los planos.

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal le denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha.
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda.
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda.
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.

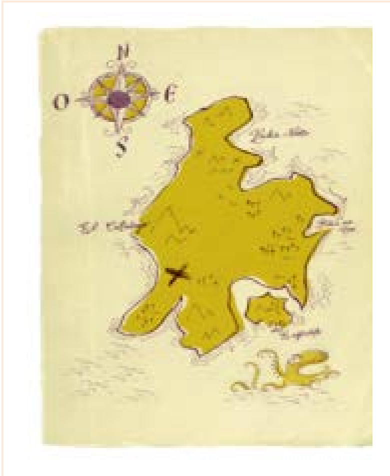


Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo 2:

- "Si estas situado sobre la X que aparece en el mapa, sigue 3 leguas al Este y luego 2 leguas al Norte. Allí está enterrado el tesoro"

Nota: La legua es una antigua unidad de longitud que expresa la distancia que una persona puede andar durante una hora. La legua castellana se fijó originalmente en 5 000 varas castellanas, es decir, 4.19 km



Las referencias Norte, Sur, Este y Oeste nos definen un sistema de referencia cartesiano donde el Origen es el punto marcado con la X.

Actividades resueltas

- Marca en el plano el punto donde se encuentra el tesoro y cómo se llegaría a él desde el punto X

Solución:

Actividades propuestas

1. Describe y marca en el plano adjunto cómo llegarías a:

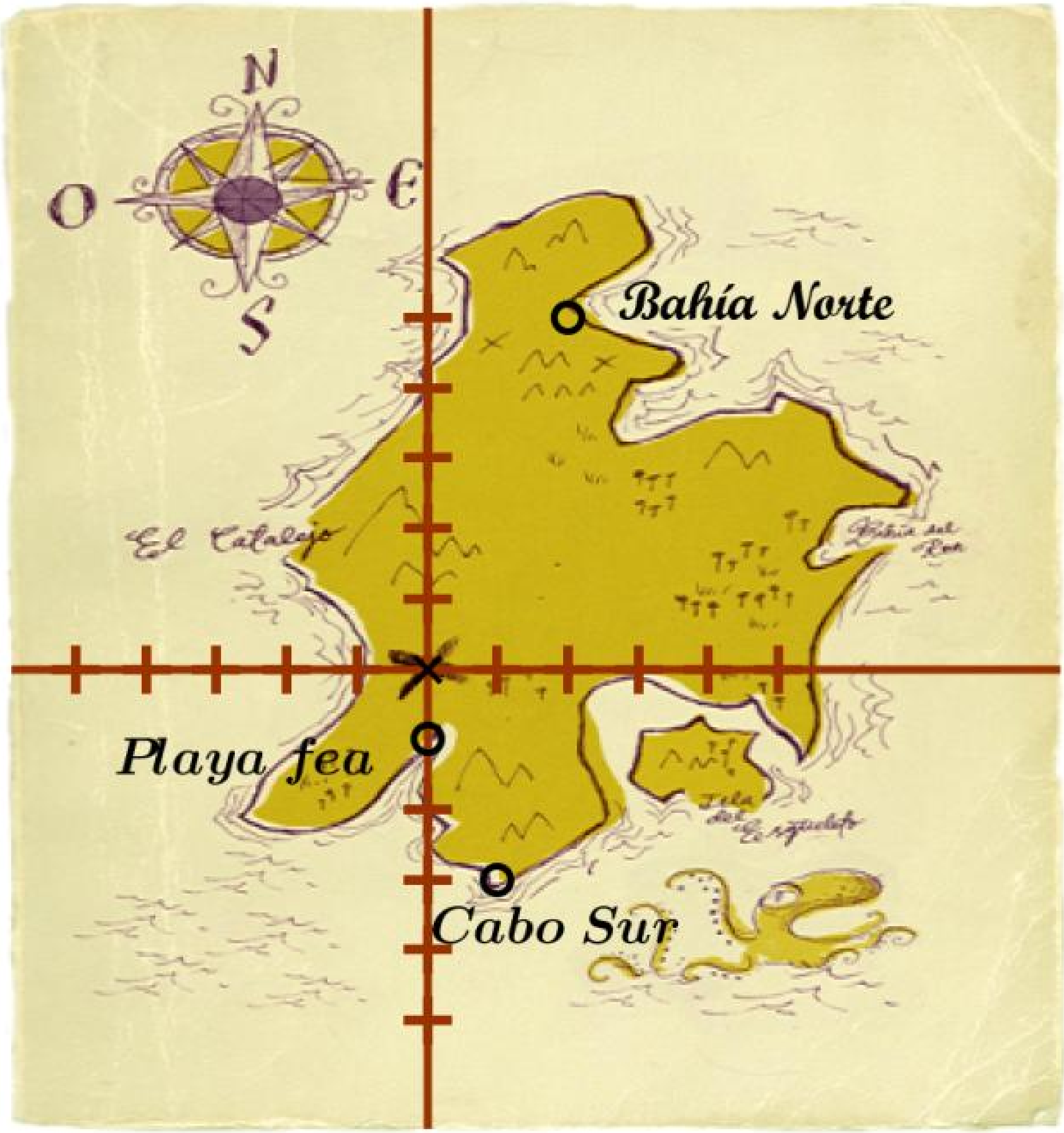
a) Cabo Sur

b) Bahía Norte

c) Playa Fea

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Material fotocopiable



Isla del Tesoro

Fuente: Banco de Imágenes y sonidos del INTEF.
Colecciones: Robert Louis Stevenson: La isla del tesoro. La isla del tesoro: El mapa del tesoro, Ilustrador: Loren

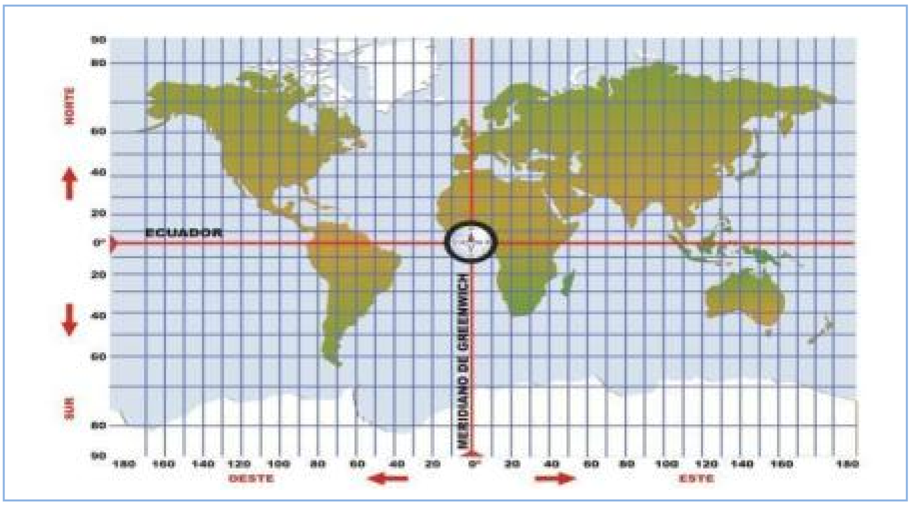
2. En el mapa indica en qué cuadrante se encuentran los siguientes países:

a) Australia

b) España

c) Argentina

d) China

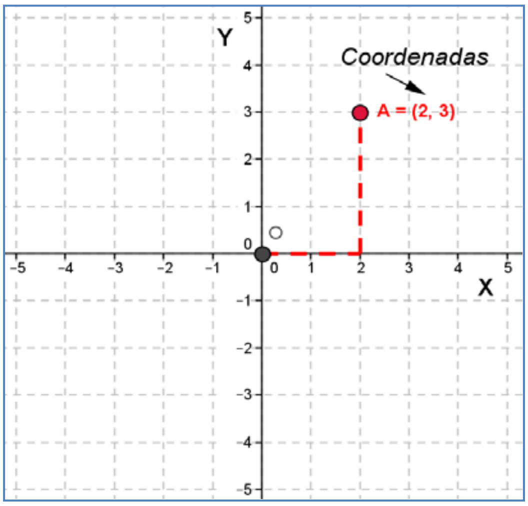


1.2. Coordenadas. Representación e identificación de puntos

En las actividades anteriores hemos descrito cómo llegaríamos a algunos puntos a partir de un sistema de referencia. Para llegar a un punto, partiendo del Origen del sistema de referencia, hemos recorrido una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto quedará determinado por un par de números a los que llamaremos **coordenadas del punto**.

Las **coordenadas de un punto A** son un par ordenado de números **(*x*, *y*)**, siendo ***x*** la primera coordenada que la llamamos **abscisa** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje vertical. La segunda coordenada es la ***y***, llamada **ordenada** y nos indica la cantidad a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.

Cuando esta cantidad sea hacia la izquierda o hacia abajo la indicaremos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha la indicaremos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.



Ejemplo 3:

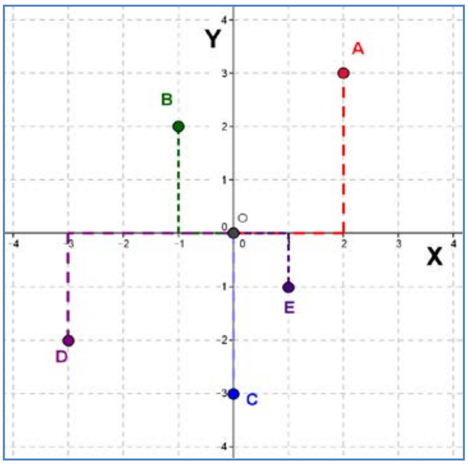
- En el gráfico el punto A tiene coordenadas (2, 3).

Ejemplo 4:

- En la actividad resuelta 1, el TESORO se encuentra en el punto de coordenadas (3, 2).
- En la actividad propuesta 2, el Cabo Sur se encuentra en el punto de coordenadas (1, –3), la Bahía Norte en el punto (2, 5) y Playa fea en el punto (0, –1).

Nota: El cabo Sur se encuentra en el cuarto cuadrante y su ordenada es una cantidad negativa porque desde el origen tiene que ir hacia el Sur, esto es, tiene que bajar. Y la Playa Fea se encuentra en el eje de ordenadas hacía el Sur, por eso su abscisa es 0 *y su ordenada negativa.*

Actividades resueltas



- Indica cuáles son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:

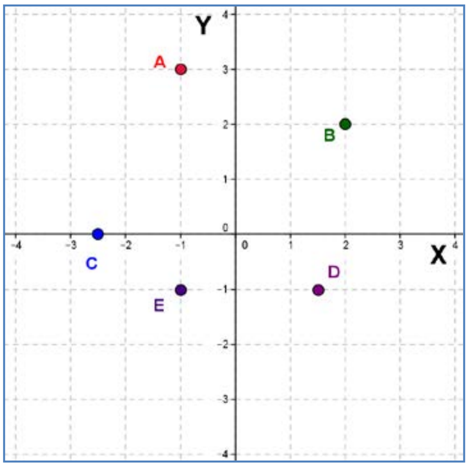
Solución

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) y E = (1, –1)

- Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

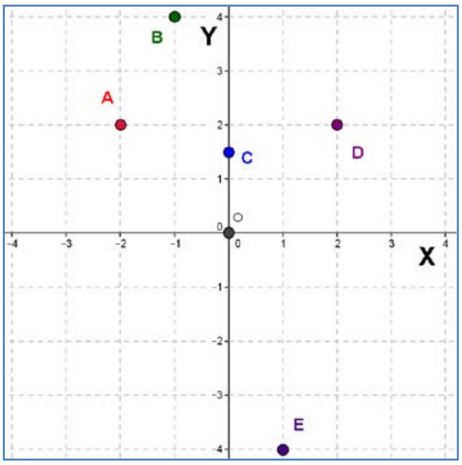
  A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2.5, 0), D = (1.5, –1) y E = (–1, –1)

Solución



Actividades propuestas

3. Indica cuáles son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:



4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1.5, 0.5) y D = (0, –1)

2. TABLAS Y GRÁFICAS

2.1. Relación entre dos magnitudes. Tablas de valores

Ya sabes que:

En muchas ocasiones tenemos una relación entre dos magnitudes que nos viene dada por la correspondencia entre las cantidades de cada una de ellas. Esta relación puede ser de proporcionalidad, como estudiamos en el capítulo 8, también puede estar dada por una expresión verbal o definida por una fórmula o ecuación de las que acabamos de estudiar en el capítulo 9.

De una relación entre dos magnitudes podemos obtener un conjunto de datos, relacionados dos a dos, que si los ordenamos en una tabla nos facilita su interpretación.

Una **tabla de valores** es una tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.

Ejemplo 5:

- Los 100 metros lisos es una carrera en la que se tiene que recorrer 100 metros, libres de todo obstáculo, con la mayor rapidez posible. Se considera, en general, como la competición de carreras de velocidad más importante.

  Los mejores atletas la realizan en un tiempo de alrededor de 10 segundos de duración corriendo cada 10 metros en un promedio de 1 segundo.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Tiempo (s)	1	2	5	7	9	10

Nota: La tabla también se puede poner en sentido vertical

longitud (m)	tiempo (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

En algunas ocasiones la relación entre dos magnitudes nos la pueden indicar directamente mediante su tabla de valores

Ejemplo 6:

- La sopa estaba muy caliente, así que la dejé enfriar durante cinco minutos. La temperatura de la sopa, según se enfriaba, la indica la tabla siguiente:

Tiempo (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Ejemplo 7:

- Las notas de Matemáticas y Tecnología, en la segunda evaluación, de un grupo de 2º de E.S.O. fueron las recogidas en la siguiente tabla:

Matemáticas	3	5	10	3	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnología	4	7	7	5	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

En otras ocasiones desconocemos cuáles son las magnitudes con las que estamos trabajando, tan solo conocemos los valores relacionados, y las solemos indicar con las letras X e Y

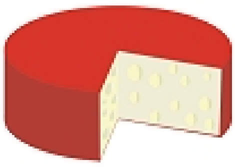
Ejemplo 8:

- En la tabla adjunta tenemos la relación entre la magnitud **X** y la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Actividades resueltas

- El precio de un kilo de queso especial de cabra, de la sierra de Madrid, es de 18 € y se vende al peso. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que relacione el peso del queso con su precio.



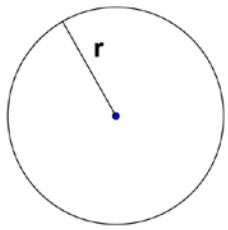
Solución

Como nos piden seis cantidades diferentes vamos a escoger algunas que nos parecen cotidianas hasta un kilo, por ejemplo, 100 g, 250 g *(cuarto de kilo),* 500 g *(medio kilo),* 625 g, 750 g *y* 1000 g.

Como el precio y el peso son magnitudes directamente proporcionales sabemos (capítulo 8*) completar la tabla.*

Peso (g)	100	250	500	625	750	1000
Precio (€)	1.80	4.50	9	11.25	13.50	18

- Como sabes el área de un círculo se puede calcular mediante la fórmula $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo (utilizamos $\pi = 3.14$). Construye una tabla de valores desde un radio de 1 cm a uno de 5 cm, de centímetro en centímetro.



Solución

Nos piden que elaboremos una tabla para los valores del radio 1, 2, 3, 4 y 5.
Para ello sustituimos r *en la fórmula por cada uno de esos valores y obtenemos:*

para $\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3.14 \cdot 1^2 = 3.14$; *para* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3.14 \cdot 2^2 = 12.56$; …

Radio (cm)	1	2	3	4	5
Área (cm^2)	3.14	12.56	28.26	50.24	78.50

Actividades propuestas

5. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.

6. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.

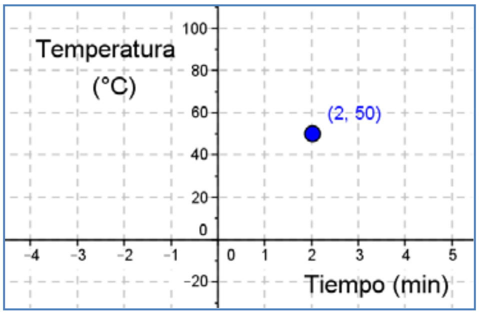
7. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *"Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado"*

2.2. Representando puntos. Las gráficas

Cada par de datos correspondientes de una relación entre dos magnitudes los podemos **representar** en un sistema cartesiano

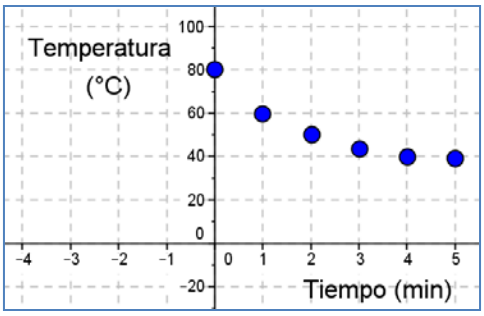
Ejemplo 9:

- En la relación del ejemplo de la temperatura de la sopa veíamos que, a los 2 minutos, la sopa tenía una temperatura de 50 °C.



Este par de números son las coordenadas de un punto (2, 50) en un sistema de referencia cartesiano en el que en el eje de abscisas representamos la magnitud *Tiempo* medida en minutos y en el eje de ordenadas representamos la magnitud *Temperatura* medida en grados centígrados.

Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una **gráfica**.

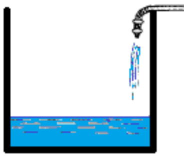


Si representamos todos los pares de datos de la tabla de valores del ejemplo anterior obtenemos la siguiente gráfica:

En ocasiones podríamos haber dado muchos más datos en la tabla de valores y al representarlos nos quedaría casi una línea. En estos casos la **gráfica**, **uniendo los puntos**, estaría constituida por **una línea** que en muchas situaciones sería continua.

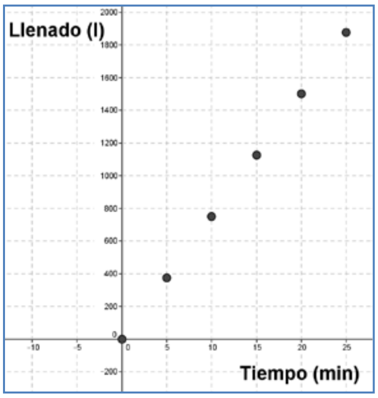
Ejemplo 10:

- Si llenamos un depósito de agua mediante un surtidor que vierte 75 litros de agua por minuto podemos calcular una tabla de valores con la cantidad de agua que va teniendo el depósito (llenado) en relación al tiempo que ha ido pasando.

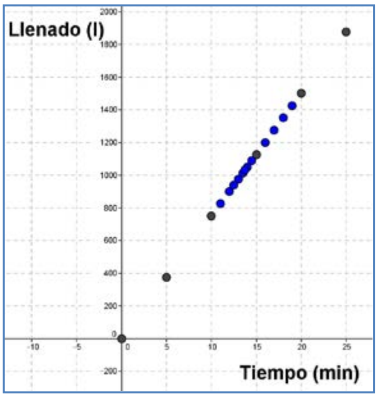


tiempo (min)	0	5	10	15	20	25
llenado (l)	0	375	750	1 125	1 500	1 875

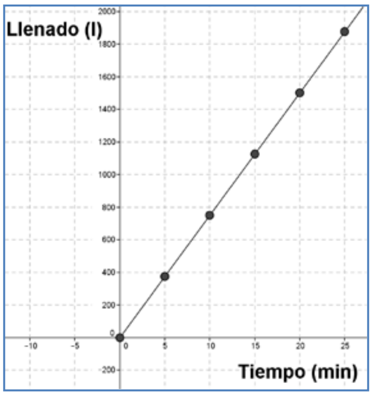
Dibujamos su gráfica a partir de esta tabla de valores



En esta ocasión tendría sentido medir la cantidad de agua que va teniendo el depósito cada menos tiempo. Si lo representamos podría quedar de la siguiente manera:



Si representáramos todos los posibles valores nos quedaría la siguiente gráfica:

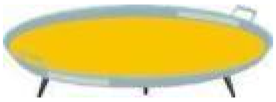


Nota: La gráfica comienza, en el tiempo 0, en el instante en que empezamos a llenar el depósito. No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un tiempo negativo.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

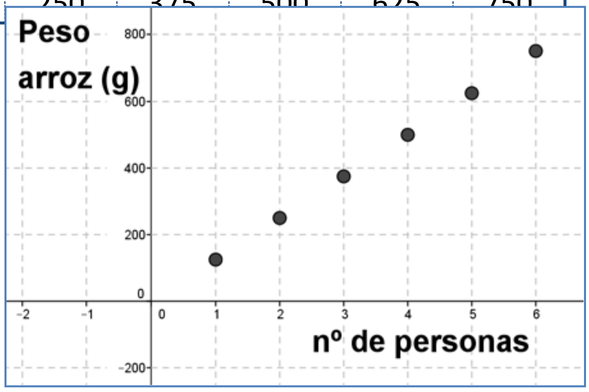
Ejemplo 11:

- En la siguiente situación: *"Una paella para seis personas necesita 750 g de arroz"* podemos construir una tabla de valores en la que se relacionan el número de personas y la cantidad de arroz que se necesita:



Número de personas	1	2	3	4	5	6
Peso arroz (g)	125	250	375	500	625	750

y podemos construir una gráfica de puntos con estos valores:

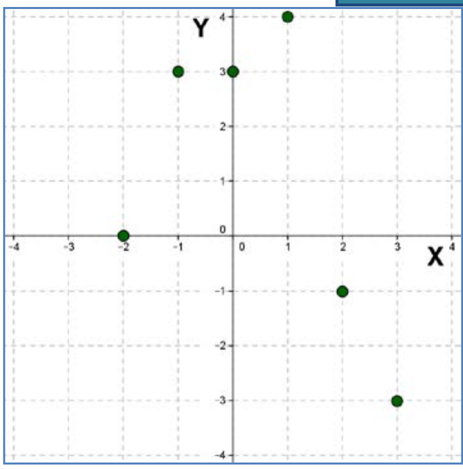


Sin embargo, no podemos calcular valores intermedios (para dos personas y media por ejemplo), pues no podemos dividir a una persona y, por lo tanto, no tiene sentido unir los puntos de la gráfica.

Ejemplo 12:

- También podemos representar la relación entre las magnitudes **X** e **Y** del ejemplo 8 a partir de su tabla de valores:

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3



Nota: En este caso no podemos unir los puntos, pues al no conocer cuáles son las magnitudes ni cuál es la relación entre ellas, salvo en los puntos que vienen determinados por la tabla de valores, no podemos saber, por ejemplo, qué valor tendría la magnitud Y si la magnitud X valiese 1.5.

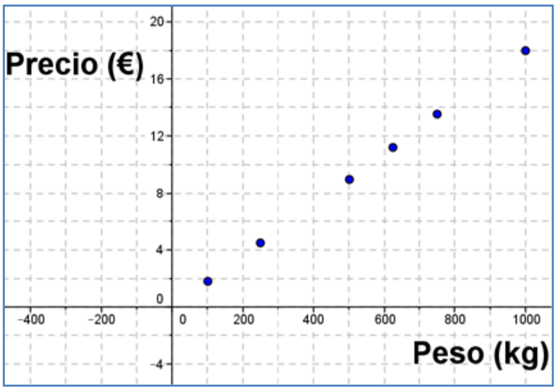
ANÁLISIS DE FUNCIONES El video analiza una función determinando dominio, imagen o rango, crecimiento, decrecimiento, C+, C-, raíz y ordenada. FER-MAT

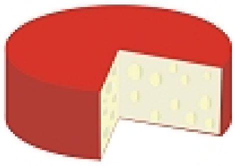
https://www.youtube.com/watch?v=xb_bdonec6I

Actividades resueltas

- Construye una gráfica de puntos a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del precio del queso y, si es posible, une sus puntos:

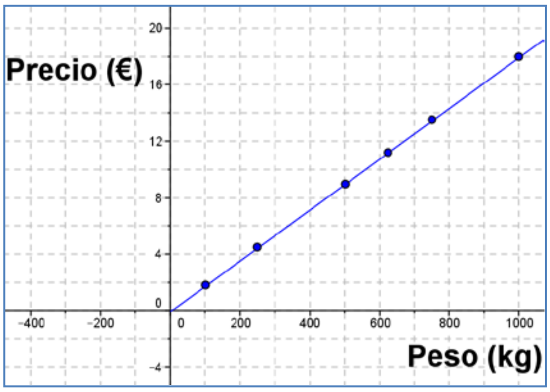
Solución





Sí, en este caso es posible porque podemos calcular el precio para cualquier peso (es una relación proporcional).

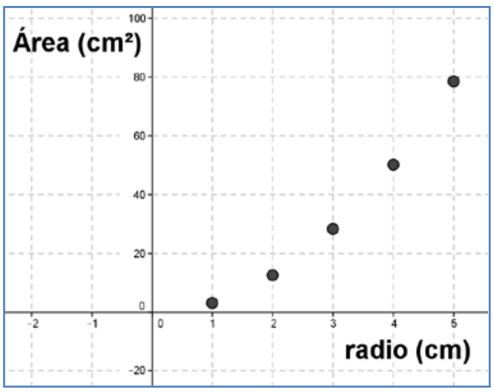
La gráfica quedaría:

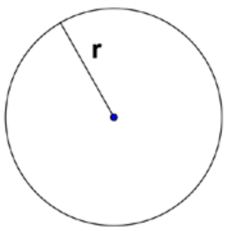


Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un peso negativo

- Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad resuelta del área del círculo y, si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

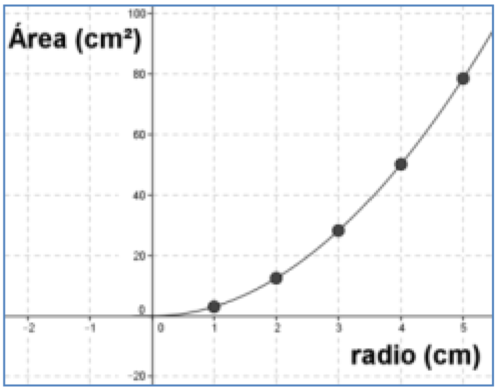
Solución:





Sí, es posible, porque podemos calcular el área para cualquier radio.

La gráfica quedaría:



Nota: No hay gráfica en el tercer cuadrante porque no tiene sentido un radio negativo

Actividades propuestas

8. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

9. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

10. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta de la *compañía de telefonía*. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

11. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

Consumo de gas: ....0.058 € por kwh
Impuesto especial:........0.002 € por kwh
Término fijo: ....4.30 € por mes
Alquiler de contador. 2.55 € por 2 meses

La factura era de dos meses, había consumido 397 kwh y el gasto ascendía a 34.97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26.15 € con un consumo de 250 kwh.

Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

2.3. Gráficas a partir de situaciones

En la mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta ahora, hemos podido calcular los pares de valores relacionados, porque se trataban de relaciones de proporcionalidad o de relaciones dadas por una fórmula que conocíamos.

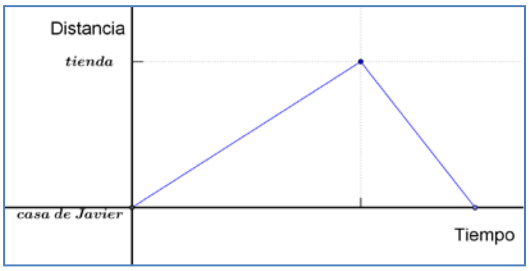
Esto no siempre ocurre. A veces nos encontrarnos con que nos describen una situación en la que nos dan una información entre dos magnitudes sin aportarnos apenas cantidades numéricas.

En muchas ocasiones **una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica** de manera directa.

Ejemplo 13:

- *Javier tiene que ir a comprar a una tienda algo alejada de su casa, como no tiene prisa decide ir dando un paseo. Justo cuando llega a la tienda se da cuenta de que se le ha olvidado la cartera y no tiene dinero para comprar. Corriendo vuelve a su casa a por la cartera.*

A partir de este enunciado podemos elaborar una gráfica como esta:

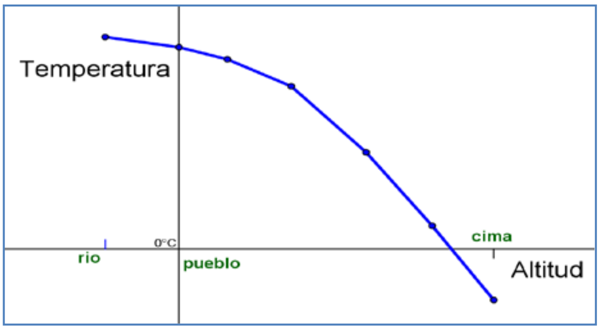


Nota: la distancia entre la casa de Javier y la tienda no la conocemos, pero sabemos que en la vuelta ha tardado menos tiempo que en la ida.

Ejemplo 14:

- *La temperatura en una montaña va descendiendo según ganamos en altitud. En la cima llegamos a temperaturas bajo cero.*

Podemos representar una situación en la que medimos la temperatura según subimos desde un pueblo a la cima de una montaña en una gráfica como la siguiente:



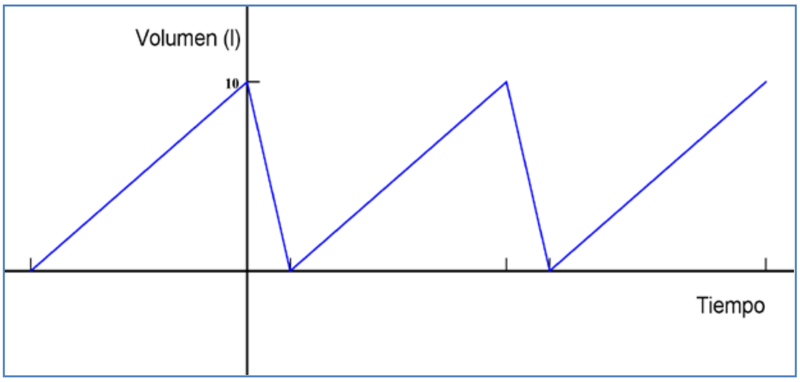
En el sistema de referencia cartesiano que hemos establecido, el origen está en el pueblo y es por ello por lo que el rio tiene abscisa negativa, porque está más bajo. En la cima la temperatura es negativa y por ello su ordenada es negativa.

La temperatura desciende. Su gráfica es **decreciente**.

Ejemplo 15:

- *En un establecimiento comercial, el depósito de agua de los servicios públicos va llenándose poco a poco hasta alcanzar los 10 L de agua y, en ese momento, se vacía regularmente. Cuando está vacío se repite el proceso. En llenarse tarda el quíntuple de tiempo que en vaciarse.*

Podemos hacer una gráfica que refleje la variación de la cantidad de agua (volumen) del depósito en función del tiempo, a partir de un momento en el que el depósito está lleno.



El origen de nuestro sistema de referencia cartesiano esta en un momento con el depósito lleno, el tiempo negativo significa que es anterior a ese momento.

Al vaciarse el depósito se tiene una gráfica **decreciente**. Cuando está vacío, se tiene un **mínimo**. Al llenarse, la gráfica es **creciente**, y cuando está totalmente lleno, se tiene un *máximo*.

Los puntos de corte con los ejes son: Con el eje de ordenadas en el punto (0, 10), con el eje de abscisas cuando el depósito está vacío.

Las **gráficas** nos dan una visión más clara de la situación que estamos estudiando, además de ellas podemos obtener una **tabla de valores** y así hacer una **interpretación** más precisa.

Ejemplo 16:

- En la situación anterior si consideramos que tarda un minuto en vaciarse el depósito, tardará cinco minutos en llenarse y podemos obtener la siguiente tabla de valores:

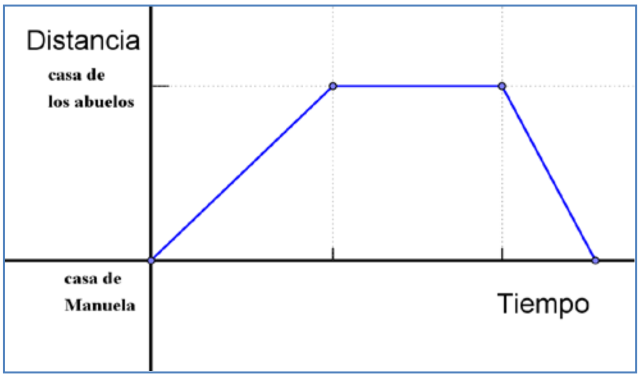
Tiempo (min)	–5	0	1	6	7	12
Volumen (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negativo del tiempo quiere decir que el depósito comenzó a llenarse con anterioridad a la situación inicial (origen) en el que el depósito está lleno.

Actividades resueltas

- *Manuela va algunas tardes a casa de sus abuelos donde pasa un buen rato con ellos. Después vuelve rápidamente a su casa para hacer los deberes antes de cenar. Construye una gráfica de esta situación*

Solución:



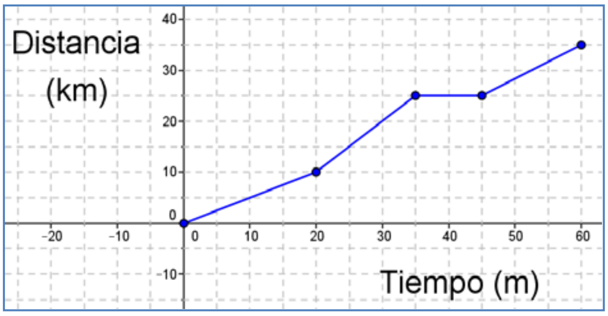
Observa que en la gráfica se tiene un primer tramo que es creciente, el siguiente es constante y el último es decreciente. La gráfica de la función es continua (en ningún momento es preciso levantar el lápiz para dibujarla).

- *Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos.*

Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

Solución

La gráfica sería:



Y la tabla de valores:

Tiempo (min)	0	20	35	45	60
Distancia (km)	0	10	25	25	35

La gráfica es continua y siempre creciente.

Actividades propuestas

12. *La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa. Construye una gráfica de esta situación.*

13. *"María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último, María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos."* Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

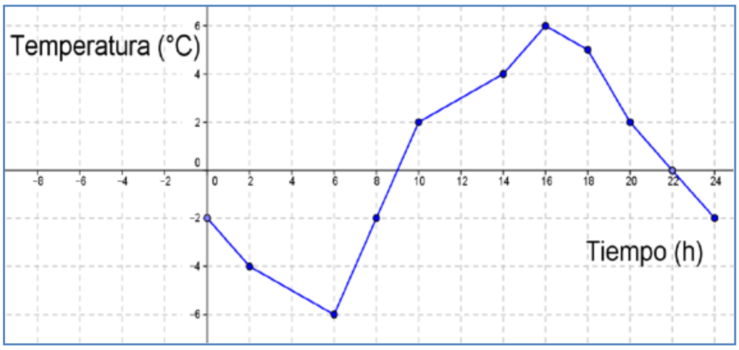
2. 4. Interpretación y lectura de gráficas

Las gráficas resumen de manera eficaz la información sobre la relación entre dos magnitudes, por ello se suelen emplear mucho, tanto en situaciones de carácter científico o social, como en la información que se emplea en los medios de comunicación. Su lectura e interpretación es pues de mucha utilidad.

De las coordenadas de los puntos de una gráfica podemos extraer datos muy interesantes para la comprensión de la situación que nos muestra la gráfica (la ordenada más alta o más baja, como se relacionan las magnitudes…)

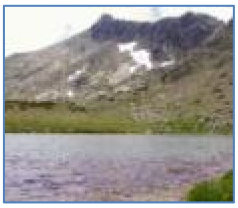
Ejemplo 17:

- El gráfico adjunto muestra las temperaturas a lo largo de un día de invierno en el pico de Peñalara.



A partir de esta gráfica podemos obtener más información sobre la situación planteada.

Así, por ejemplo, podemos ver que la temperatura mínima que se alcanzó ese día fue de –6 °C a las 6 h de la mañana. Nos lo indica el punto de coordenadas (6, –6) que tiene la ordenada menor de todos los puntos de la gráfica. Es un **mínimo**.



- Del mismo modo podemos ver que la temperatura más alta fue de 6 °C, que se obtuvo a las 16 h. El punto de coordenadas (16, 6) así nos lo indica. Es un **máximo**.

Podemos también afirmar que la temperatura fue subiendo desde las 6 h hasta las 16 h pues las ordenadas de los puntos cuya abscisa está entre esas horas van creciendo. Es **creciente**.

Así mismo el punto (10, 2) nos indica que a las 10 h de la mañana hacía una temperatura de 2 °C, temperatura que se alcanzó también a las 20 h, aunque esta vez bajando.

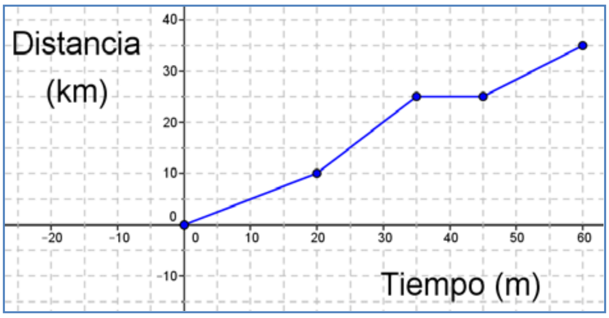
El hecho de que de 10 h a 14 h subiera la temperatura menos que en horas anteriores (gráfica menos inclinada) pudo ser debido a causas climatológicas concretas, como que se pusiera la niebla, y después, de 14 a 16 h, hay una subida rápida (pudo salir el sol). La gráfica nos indica que algo así pudo pasar.

A partir de las 16 horas la temperatura baja, la gráfica es **decreciente**.

La temperatura es de 0 °C hacia las 9 horas y a las 22 horas. (0, 9) y (0, 22). Son los puntos en que la gráfica corta al eje de abscisas. Al eje de ordenadas lo corta en (–2, 0).

Ejemplo 18:

- La actividad resuelta que nos describe el recorrido de Juan de camino a casa de sus abuelos. La gráfica que dibujamos y resume el viaje era la que figura a la derecha.



viaje de Juan a casa de sus abuelos

De la gráfica, además de lo que ya conocíamos y que nos ayudó a dibujarla, podemos extraer, "de un simple vistazo" más información.

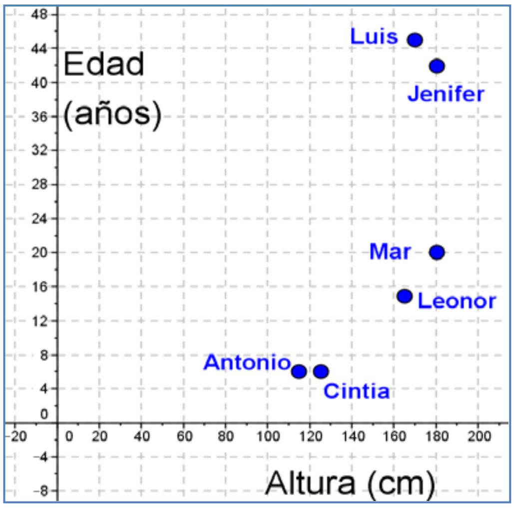
Por ejemplo, si miramos a la gráfica podemos observar que en el kilómetro 20 llevaba 30 minutos pedaleando, o que a los 10 minutos había recorrido 5 kilómetros, que el tramo más rápido fue de los 20 a los 35 minutos (se ve mayor inclinación), o que en el minuto 40 estaba parado.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Es una gráfica **continua**, pues podemos dibujarla sin levantar el lápiz.

Ejemplo 19:

- La gráfica siguiente nos indica la relación entre la edad y la estatura de los miembros de una familia.



Si observamos los puntos de esta gráfica veremos que Jenifer y Luis son los puntos (180, 43) y (170, 45) y representan a los padres que tienen 43 y 45 años y miden 180 y 170 cm respectivamente.

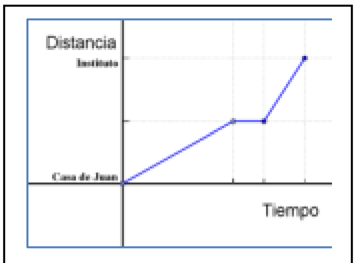
Los pequeños Antonio y Cintia son mellizos de 6 años y miden 115 y 125 centímetros. Mar tiene 20 años y mide 180 cm, representada por el punto (180, 20) y, por último, Leonor mide 165 y tiene 15 años.

De la gráfica también podemos deducir que Mar y su madre, Jenifer, son los más altos de la familia, que Luis es el de más edad y que Cintia mide 10 centímetros más que su hermano mellizo.

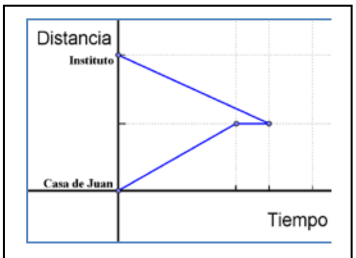
Actividades resueltas

- Observando las gráficas de debajo, determina cuál es la que mejor se ajusta a la situación siguiente:

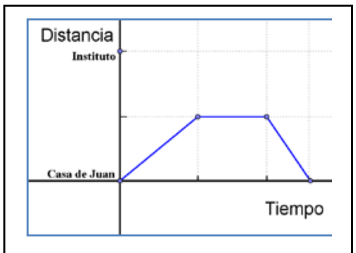
"Juan va al Instituto cada mañana desde su casa, un día se encuentra con un amigo y se queda charlando un ratito. Como se la ha hecho tarde sale corriendo para llegar a tiempo a la primera clase"



gráfica 1



gráfica 2



gráfica 3

Solución

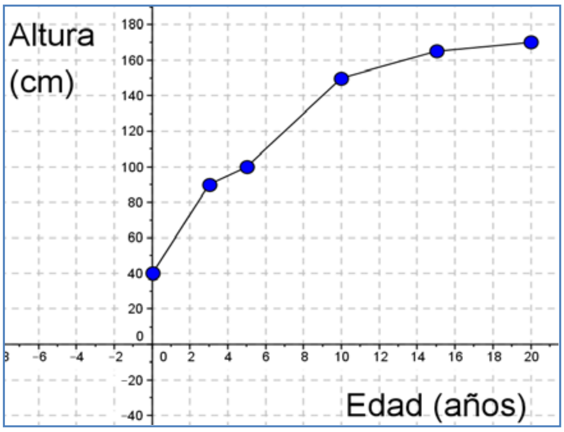
La gráfica 1 **es la que más se ajusta** pues: el segmento horizontal indica que durante un tiempo pequeño no avanzó en distancia, esto es que estaba parado, y la inclinación del tercer segmento es mayor que la del primero, lo que indica que en menos tiempo recorrió más distancia, esto es, que fue más rápido.

La gráfica 2 **no puede ser**, pues Juan no puede estar en dos sitios distintos, a la vez, en el mismo momento. Esta gráfica indica, por ejemplo, que en el instante inicial (tiempo 0) Juan está en su casa y en el instituto al mismo tiempo.

La gráfica 3 **no puede ser**, ya que la gráfica nos indica que Juan regresa a su casa después de charlar con su amigo y no va al instituto.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.



Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medía 1 metro?

b) ¿Cuánto medía al nacer?

c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?

d) ¿En qué periodo creció menos?

Solución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.

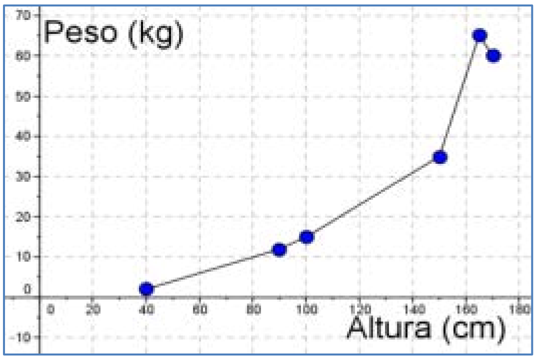
b) El punto que representa el nacimiento es el (0, 40), luego midió 40 centímetros

c) Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.

d) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

Actividades propuestas

14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.



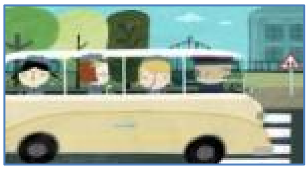
Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuándo medía 150 cm?

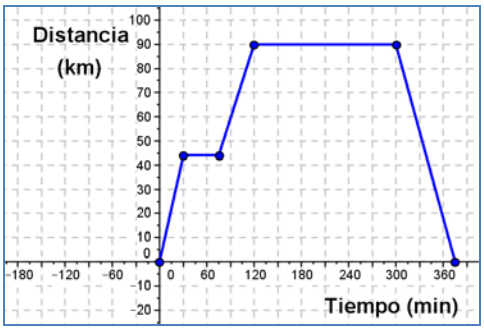
b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?

c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?

15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.



Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:



a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?

b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?

c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?

d) Haz una descripción verbal del viaje

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. LAS FUNCIONES

3.1. La función como relación entre dos variables. Variable dependiente y variable independiente

No es raro escuchar o leer en la prensa expresiones como: *"el precio está **en función de** la demanda"*, *"el número de escaños obtenidos por un partido político está **en función del** número de votos obtenidos"*, *"los resultados obtenidos en los estudios están **en función del** tiempo dedicado a estudiar"*, o como esta: *"el área de un círculo está **en función del** radio"*.

Estas expresiones indican que el precio de un objeto, el número de escaños, los resultados académicos y el área del círculo están relacionados, respectivamente, con la demanda, el número de votos recibidos, el tiempo dedicado al estudio y el radio, de tal forma que la primera magnitud citada depende únicamente de la segunda.

Una magnitud **Y** está **en función de** otra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depende de **manera única** del valor que tenga la magnitud **X**.

*Nota: la Real Academia Española, en el Diccionario panhispánico de dudas, dice que **'en función de'** es una locución preposicional que significa **'según o dependiendo de'***

Ejemplo 20:

- La temperatura del agua que está en un cazo al fuego depende de la cantidad de calor que recibe, así decimos que: *la temperatura del agua **T** varía **en función del** calor recibido* **Q**, o simplemente que **T** está en función de **Q**.

Cuando realizamos un viaje en coche podemos observar varias magnitudes; vamos a estudiar la relación entre dos de ellas, por ejemplo, la distancia recorrida y el tiempo transcurrido desde la salida.

Según sea nuestro viaje y lo que hagamos durante su recorrido (ir por autopista o por una carretera secundaria, parar un rato, volver…) la distancia recorrida según el tiempo transcurrido será mayor o menor, pero es claro que *la distancia está **en función** del tiempo*. En cada instante de tiempo habremos recorrido una distancia determinada.

Como hemos visto en algunos ejemplos y actividades anteriores, por ejemplo, en el caso de Juan que va a ver a sus abuelos, en la actividad 20, hay un periodo de tiempo (10 minutos) en el que se detiene a descansar y no avanza distancia, pero el tiempo no se detiene. Así nos encontramos con que a varios valores de la magnitud tiempo les corresponden el mismo valor de la magnitud distancia (los 25 kilómetros que había recorrido antes de parar).

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sin embargo, a cada valor de la magnitud tiempo solamente le corresponde un único valor de la magnitud distancia, esto es evidente pues Juan no puede estar en dos sitios distintos en el mismo instante de tiempo.

Cuando esto ocurre decimos que la relación entre las dos magnitudes es una **función.**

Una **función** es una relación entre dos magnitudes numéricas **X** e **Y**, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud **X**, le hace corresponder **un único** valor de la segunda magnitud **Y**.

Además ambas magnitudes tienen valores numéricos y varía una en función de la otra (la distancia varía según la variación del tiempo en el ejemplo de Juan). Para abreviar nos vamos a referir a ellas como variables.

En las **relaciones funcionales,** a las magnitudes relacionadas las llamamos **variables.**

Asimismo, en nuestro viaje, la distancia depende del tiempo transcurrido, así que decimos que la distancia es la variable dependiente y el tiempo es la variable independiente.

Nota: Cuando tenemos una relación funcional entre dos variables en la que una es el tiempo que transcurre, esta, normalmente, es la variable independiente.

Cuando tenemos dos magnitudes, **X** e **Y**, que están relacionadas de tal forma que **Y** es función de **X**, a la magnitud **Y** se la denomina **variable dependiente**, y a la magnitud **X,** de la que depende, se la denomina **variable independiente**.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, a las magnitudes solemos llamarlas **X** e **Y**, siendo **X** la independiente e **Y** la dependiente.*

Ejemplo 21:

- *"El precio del kg de peras es de 1.80 €."* Esta situación nos define una relación entre el precio y el peso, de tal manera que el precio que pagamos depende del peso que compramos. La relación es una función. El peso y el precio son las variables, el peso es la variable independiente y el precio la variable dependiente.

Ejemplo 22:

- *La relación entre dos variables viene dada por la función* $y = 2x - 1$.

En este caso **Y** está en función de **X**, pues para cada valor **x** de la variable **X** hay un único valor **y** de la variable **Y**, siendo la variable **X** la variable independiente y la variable **Y** la dependiente.

*Nota: Cuando tenemos una función entre dos variables que desconocemos, solemos llamarlas **X** e **Y**, y a los valores que toman estas variables les denominamos **x** e **y** respectivamente. Así cuando la magnitud **X** toma el valor **x**, la magnitud **Y** vale **y**.*

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- En las siguientes relaciones di si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuáles son las variables dependientes e independientes.

a) El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
b) El perímetro de un polígono regular y la longitud de su lado.
c) El número de habitantes de los pueblos y la temperatura media en verano.
d) La altura y el número de hermanos de los estudiantes de 2º de E.S.O.

Solución

a) El consumo de un coche sí está en función de la velocidad a la que circula. En este caso el consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente.

b) También aquí se da una relación funcional, el perímetro es función del lado. El perímetro es la variable dependiente y el lado la independiente.

c) En este caso no hay una relación funcional pues hay pueblos grandes y pequeños no teniendo que ver con la temperatura media en varano que haga en ellos.

d) Tampoco hay relación funcional en este caso. Puedes comprobarlo en tu clase.

Dibujo de una función - Gráficos y ejemplos. En este vídeo de un vamos a enseñarte a cómo realizar el dibujo de una función. ¿Cómo se hace el dibujo de una gráfica de una función? Esto es lo que vamos a explicar en el vídeo de hoy. Respetaremos su comportamiento, hacerlo de manera coherente sin tener que aproximar o coger puntos al azar. Propondremos una serie de pasos estructurados para poder tener un dibujo muy coherente de la función.

https://www.youtube.com/watch?v=6OADRq6Mq8Q

Actividades propuestas

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuáles son las variables dependientes e independientes.

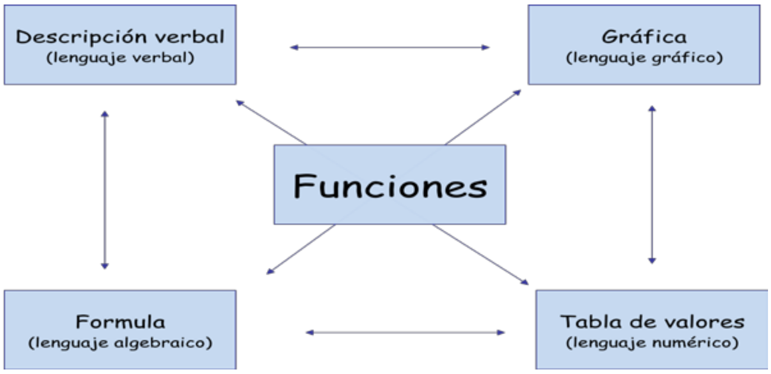
a) El consumo de un coche y la distancia recorrida.
b) La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor.
c) El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí.
d) La temperatura de un lugar y la hora del día.
e) El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.

17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

3.2. La función: tabla de valores, gráfica, expresión verbal y expresión algebraica

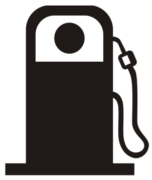
La gran mayoría de las situaciones que hemos estudiado hasta este momento son relaciones funcionales en las que hay dos variables, y una depende de la otra de manera única; esto es, son ***funciones***.

Además, hemos visto que las ***funciones*** se pueden representar de varias maneras; como una ***descripción verbal*** que describe una situación, como una ***tabla de valores*** que nos indica los valores correspondientes de la relación, como una ***gráfica*** que nos visualiza la situación y como una ***expresión algebraica*** (fórmula) que nos relaciona las dos magnitudes.



Ejemplo 23:

- Si observamos el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche podemos estudiar la relación entre el número de litros de gasolina y lo que pagamos.

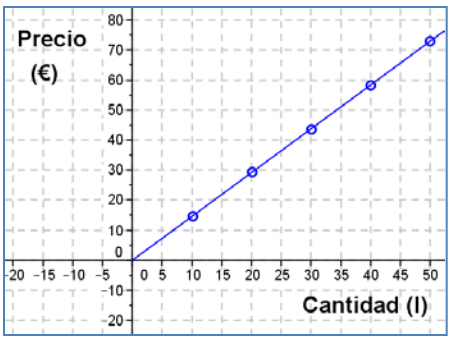


El precio que pagamos es función de la cantidad de gasolina que echamos y puede venir dada de las siguientes maneras:

- Descripción verbal: *"El litro de gasolina se situó en la primera semana de agosto en 1,46 €".*
- Expresión algebraica (fórmula): $p = 1.46 \cdot l$ (donde p es el precio y l es la cantidad de gasolina)
- Tabla de valores:

Cantidad (l)	10	20	30	40	50
Precio (€)	14.60	29.20	43.80	58.40	73.00

- Gráfica:



Ejemplo 24:

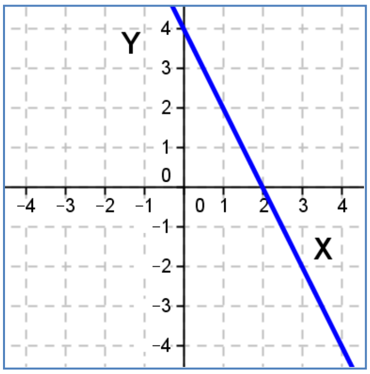
- Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo $y = 4 - 2 \cdot x$

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	–2	–4

y, a partir de ella, dibujar una gráfica:



En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor ***x*** de la variable **X** podemos calcular el valor ***y*** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: "*A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número*"

Nota: En muchas ocasiones no es posible, a nuestro nivel, encontrar la fórmula que define una función dada como una tabla de valores, su descripción verbal o su gráfica.

video

ESTUDIO Completo de FUNCIONES y Representación GRÁFICA. Hacemos los pasos de estudio completo de una función para luego poder representarla gráficamente. Susi Profe

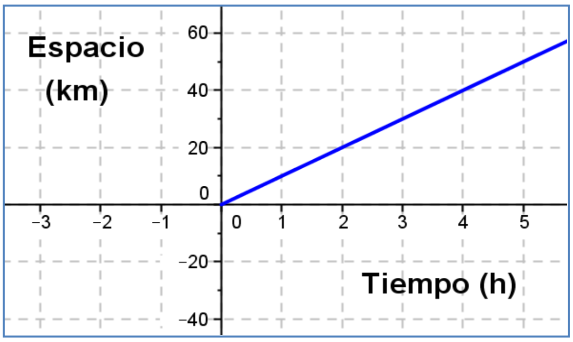
https://www.youtube.com/watch?v=vmegw722HLA

Actividades propuestas

18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (cm)	0	42	96	123	151	177

19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

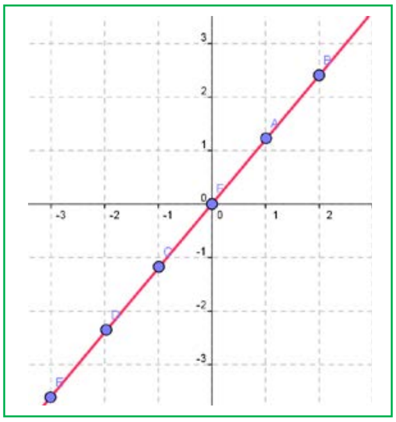
3.3. Una función importante. La función lineal o de proporcionalidad directa

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:



- *Representa gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:*

Magnitud A (*x*)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (*y*)	–3'6	–2'4	0	1'2	2'4

Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-3.6}{-3} = \frac{-2.4}{-2} = \frac{1.2}{1} = \frac{2.4}{2} = 1.2$$

La relación se define así: *y* = 1.2*x*.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula ***y* = *m*·*x***.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma ***y* = *m*·*x***.

Actividades propuestas

21. María quiere comprar una cinta que vale a 0.7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.

22. Representa gráficamente las funciones:

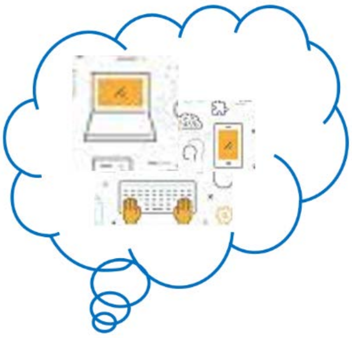
a) *y* = 5*x*, *b)* *y* = 1.5*x*, *c)* *y* = 0.5*x*, *d)* *y* = –2*x*, *e)* *y* = –3.2*x*, *f)* *y* = –1.2*x*

23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.

24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

3.4. Utilización de *Geogebra* para la interpretación de la pendiente de una función lineal



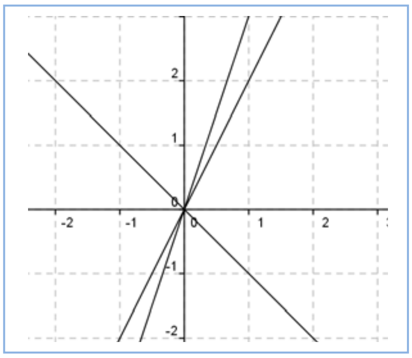
En esta actividad se va a utilizar el programa **Geogebra** para representar funciones lineales cuyas gráficas son rectas.

Se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza.

Actividades resueltas

Utiliza Geogebra para estudiar rectas con distintas pendientes.

- Abre el programa Geogebra y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil analizar las funciones.
- En la ventana de debajo de la pantalla, en **Entrada**, escribe: $y = 2x$. Inmediatamente aparece dibujada esa función en la ventana gráfica.
- Escribe de nuevo en **Entrada** otras rectas con distintas pendientes: $y = 3x$, $y = -x$…
- Dibuja todas las funciones lineales que quieras y responde a las siguientes preguntas.
  - Cuando la pendiente es positiva, ¿qué ocurre al crecer la pendiente? ¿Y al disminuir?
  - Cuando la pendiente es negativa, ¿qué ocurre al crecer la pendiente en valor absoluto? ¿Y al disminuir?



- Todas las funciones de la forma $y = mx$ son rectas. Son funciones lineales. Todas ellas pasan por el origen (0, 0).
  - Cuando la abscisa vale 1, ¿cuánto vale la ordenada?

Actividades propuestas

26. Utiliza *Geogebra* para nuevamente representar gráficamente las funciones:

$$a)\ y = 5x,\ b)\ y = 1.5x,\ c)\ y = 0.5x,\ d)\ y = -2x,\ e)\ y = -3.2x,\ f)\ y = -1.2x$$

27. Indica en las funciones anteriores sus características: a) cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. b) ¿Son continuas? c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados. d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.

CURIOSIDADES. REVISTA

Descartes y el sistema de referencia cartesiano

El sistema de referencia cartesiano se llama así en honor al filósofo, científico y matemático francés ***René Descartes*** *que vivió entre los años 1596 y 1650. Descartes quiso fundamentar su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un «punto de partida» sobre el que edificar todo el conocimiento. En Geometría, Descartes también comenzó tomando un "punto de origen" para poder representar la geometría plana.*

Principio del palomar o Principio de Dirichlet

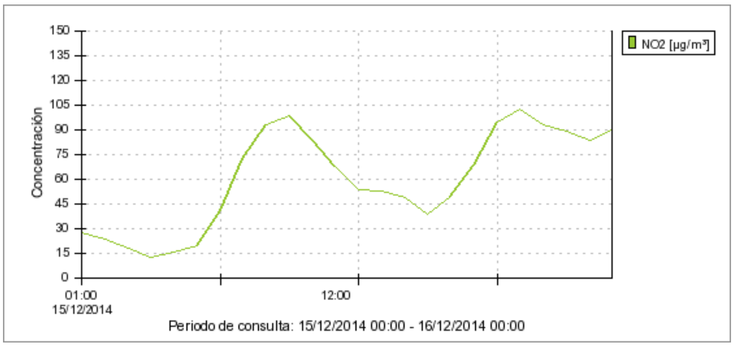
"Si una bandada de 21 palomas se mete por 20 agujeros de un palomar, es seguro que al menos dos palomas se han metido en el mismo agujero"

¿Estás de acuerdo?

Este principio tan sencillo permite resolver otros problemas, cómo por ejemplo:

¿Se puede asegurar que ahora mismo hay en Madrid al menos 20 personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

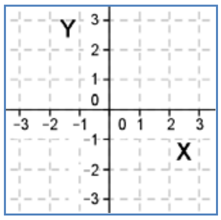
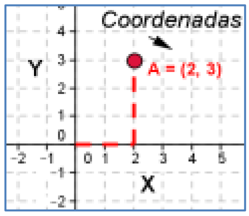
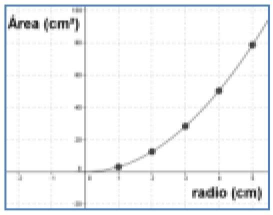
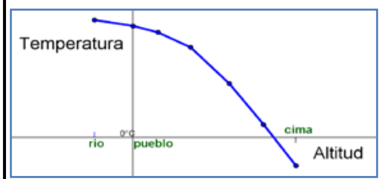
Para razonar la respuesta considera que nadie tiene más de 200 mil pelos en la cabeza y que en Madrid hay unos 4 millones de personas.



La gráfica indica la evolución del NO2 en la estación de calidad del aire de Cuatro Caminos de Madrid, durante un día, el 16 de diciembre de 2014. Observa como sube hacia las 9 de la mañana a la entrada del trabajo y vuelve a subir a la salida, hacia las 6 de la tarde.

En la página de la Comunidad de Madrid puedes conocer cómo está la calidad del aire en cada momento, y saber cuáles son los valores umbrales que no se deberían rebasar.

RESUMEN

<table>
<tr><th>CONCEPTO</th><th>DEFINICIÓN</th><th>EJEMPLOS</th></tr>
<tr><td>Sistema de referencia cartesiano</td><td>Dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas Ejes, que se cortan en un punto llamado Origen. El eje horizontal se denomina eje de abscisas, y el eje vertical, eje de ordenadas.</td><td></td></tr>
<tr><td>Coordenadas</td><td>Es un par ordenado de números (x, y), que nos indica donde se encuentra el punto respecto al sistema de referencia cartesiano que estamos utilizando.</td><td></td></tr>
<tr><td>Tabla de valores</td><td>Tabla en la que situamos ordenadamente las cantidades correspondientes de dos magnitudes relacionadas.</td><td><table><tr><td>Tiempo (min)</td><td>0</td><td>30</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td>Si representamos en un sistema de referencia cartesiano todos los pares de datos de una tabla de valores obtenemos una gráfica.</td><td></td></tr>
<tr><td>Gráficas a partir de situaciones</td><td>Una situación cotidiana o relacionada con fenómenos naturales descrita verbalmente se puede representar mediante una gráfica</td><td></td></tr>
<tr><td>Función</td><td>Una magnitud Y está en función de otra magnitud X, si el valor de Y depende de manera única del valor que tenga X.</td><td>La temperatura del agua T varía en función del calor recibido Q</td></tr>
<tr><td>Variables</td><td>En las relaciones funcionales, a las magnitudes variables relacionadas las llamamos solamente variables</td><td>"El precio del kg de peras es 1,80 €."
El peso y el precio son las variables</td></tr>
<tr><td>Variable dependiente e independiente</td><td>Cuando tenemos dos magnitudes variables que están relacionadas de tal forma que Y es función de X, a la magnitud Y se la denomina variable dependiente, y a la magnitud X se la denomina variable independiente.</td><td>El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
El consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente</td></tr>
<tr><td>Variables y valores</td><td>Cuando tenemos una función entre dos variables X e Y, a los valores que toman estas variables les denominamos x e y respectivamente.</td><td>Cuando la magnitud X toma el valor x, la magnitud Y vale y.</td></tr>
</table>

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano cartesiano. Coordenadas

1. Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

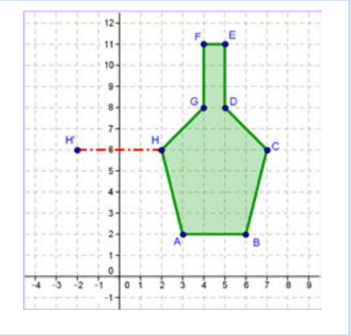
$I=\left(\frac{3}{2},-3\right)$ $J=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $K=(6,3'5)$ $L=\left(-\frac{3}{4},-0'5\right)$

2. Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

$M=\left(4,-\frac{5}{2}\right)$ $N=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $P=\left(-6,-\frac{9}{5}\right)$ $Q=\left(-\frac{7}{2},5\right)$

$R=(2,0)$ $S=(-7,0)$ $T=\left(0,-\frac{7}{2}\right)$ $U=(0,7)$ $O=(0,0)$

3. Observa la siguiente vasija:



a. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.

b. Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H’ es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.

c. Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?

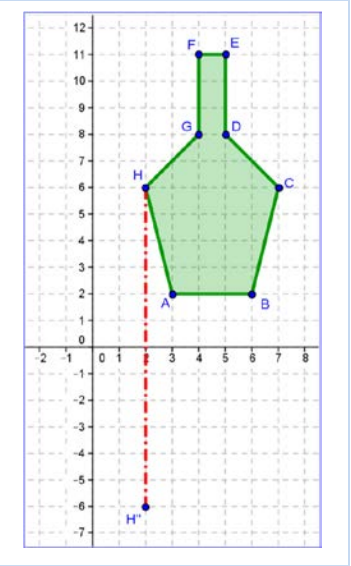
d. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

e. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

f. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

4. Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.



a. Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H’’ es el reflejado de H por este nuevo espejo.

b. Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.

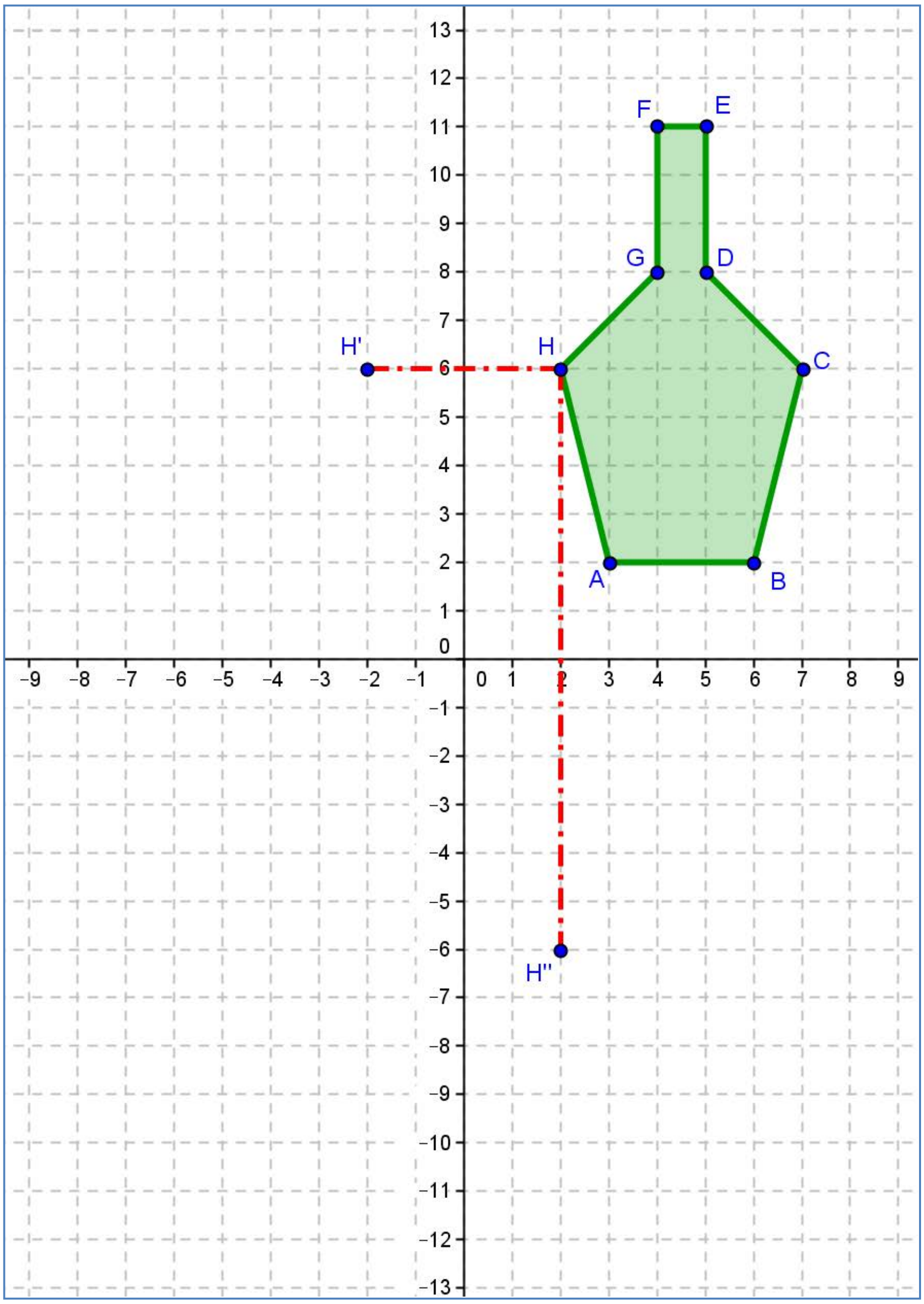
c. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.

Material fotocopiable



Vasija

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.

a. Representa los puntos M = (3, 4), N = (–1, 1) y R = (2, –4).

b. Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto (1, –1) del sistema anterior.

c. Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.

d. ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado.

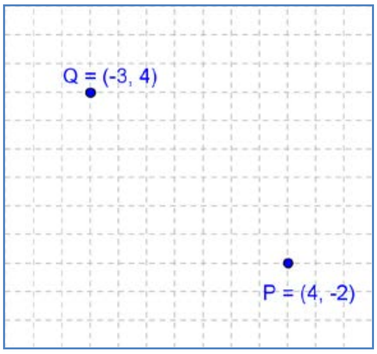
6. Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.

a) Representa un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3.3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1.9 cm.

b) ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.

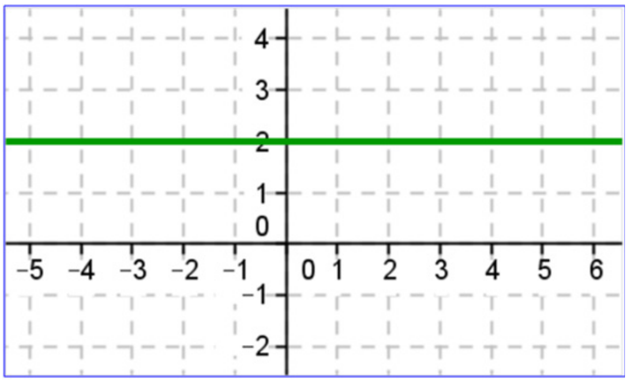
c) ¿Cómo son estos puntos entre sí dos a dos?

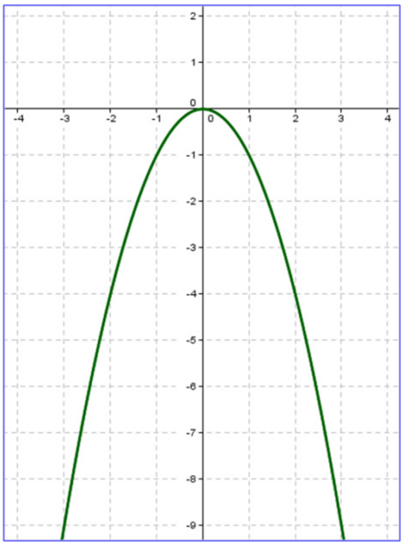
7. Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.

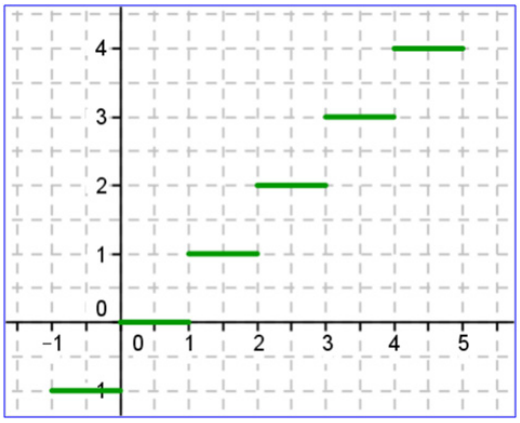


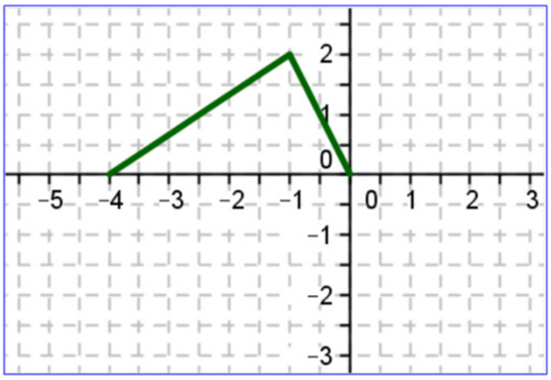
Tablas y Gráficas

8. Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:



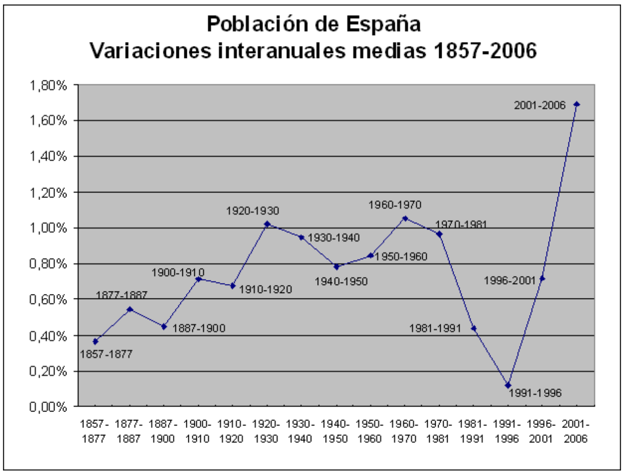






Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9. El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la `población española, mediante la gráfica siguiente:



Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?

b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?

c) ¿Y entre 1991 y 2001?

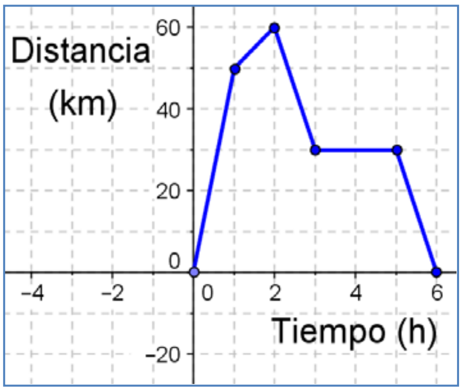
Razona sobre el significado de esta gráfica.

a) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?

b) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?

c) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

10. Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:



a. ¿A qué distancia de su casa llega?

b. ¿Cuánto tiempo está parado?

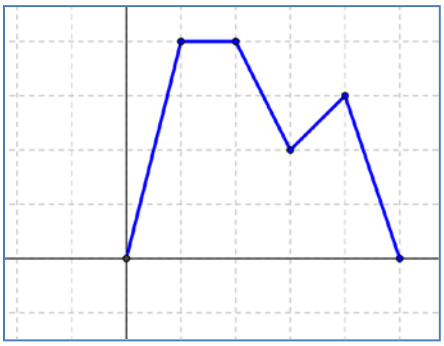
c. ¿Cuánto tarda en volver?

d. A las dos horas, ¿a qué distancia está de su casa?

e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?

f. ¿Cuándo va más deprisa? y ¿cuándo más despacio?

11. La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.



A. Invento una situación que pueda ser representada por esta gráfica.
B. Señala cuáles son las magnitudes y en qué unidades se miden.
C. Indica, en los ejes, los números adecuados.
D. Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.

12. El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:

Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados.

13. Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €.

b. Un número y la mitad de dicho número.

c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

Las funciones

14. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuáles son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura del puré a largo del tiempo.

b. El precio de una camiseta y su color.

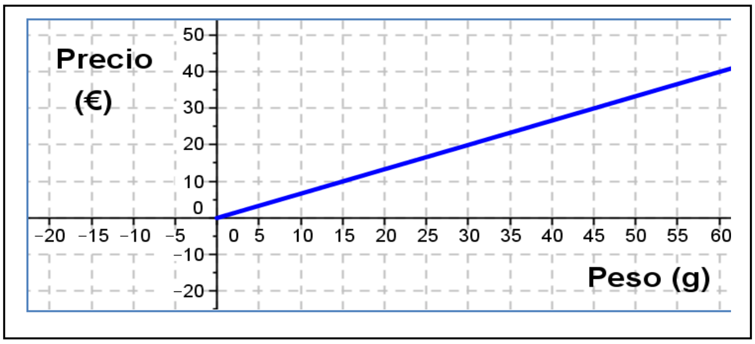
c. El área de un cuadrado y su lado.

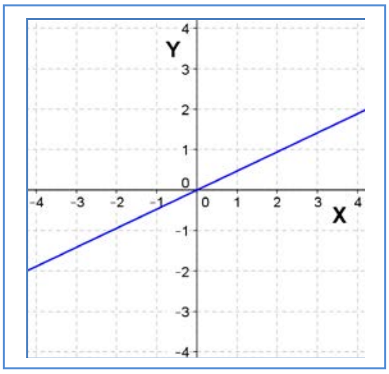
d. El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.

e. El volumen de una esfera y su radio.

15. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

16. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



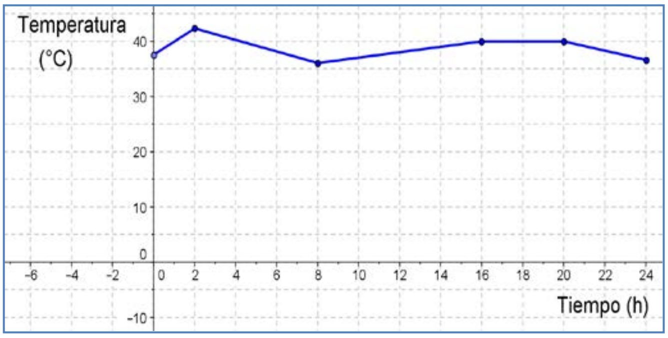


¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? ¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?

17. Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: $d = 100 \cdot t$. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?

18. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?

19. La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día.



Mirando la gráfica indica:

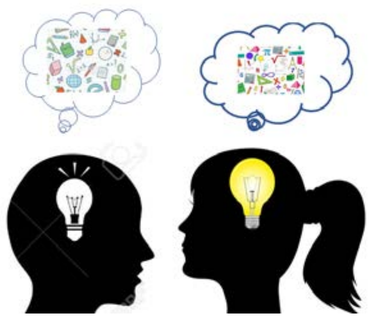
a) ¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana? ¿y a las doce de la noche?

b) ¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?

c) ¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?

d) ¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?

e) Describe con palabras esta situación.



ESTIMA EL RESULTADO

20. Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

21. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuáles son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
b. El precio de un coche y su color.
c. El volumen de un líquido y su peso.
d. La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
e. La longitud de un muelle y el peso colgado en él.

22. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

23. En una papelería 10 lápices cuestan 2.5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?

24. Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.

AUTOEVALUACIÓN

1) El punto de coordenadas A = (–5, –6) está situado en el:

a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

2) Indica qué afirmación es falsa:

a) El eje de abscisas es el eje OY
b) El eje de ordenadas es vertical
c) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas
d) El eje de ordenadas es el eje OY

3) Los puntos de coordenadas A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

4) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

5) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa

c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

6) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.

7) Indica qué afirmación es falsa:

a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas.

b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente.

8) Escribe una tabla de valores de la función y = 2x – 3.

x	1	2	3	4
y				

a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.

9) Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

PARA EL PROFESORADO

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en Matemáticas y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de secundaria. Esto no es extraño si analizamos cómo ha evolucionado dicho concepto a lo largo de la historia.

En la historia de las Matemáticas comienza a plantearse el concepto de función hacia el siglo XIV y ha sido uno de los que ha presentado una mayor dificultad, siendo en el siglo XX uno de los ejes de la investigación matemática. Incluso para los matemáticos del siglo XVIII no estaba muy claro el concepto de función. Por ejemplo, en un artículo de *Jean Bernoulli* publicado en 1718 se encuentra esta primera definición: *"Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes"*. Los matemáticos estaban dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer. Fue *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Recordemos que cuando Fourier expuso su desarrollo de una función en serie trigonométrica, empezó a discutirse sobre qué era una función, cuáles podían ajustarse a ese desarrollo, y este hecho fue un catalizador en la historia de las Matemáticas que, entre otras muchas cosas, llevó a formalizar este concepto. La noción moderna de función es muy reciente, podemos fecharla en la obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805 - 1859) de 1837, donde aparece la noción de función como correspondencia, independiente de una representación analítica o geométrica.

A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos del mundo que nos rodea y ha sido expresado en distintos lenguajes —verbal, gráfico, algebraico y numérico—. Por tanto, para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones, es preciso estudiar este concepto desde distintos aspectos, utilizando diferentes lenguajes y trabajando en distintas situaciones.

Ya que las relaciones funcionales se encuentran con frecuencia en nuestro entorno, el estudio de funciones, por los estudiantes de E.S.O., debe comenzar con el tratamiento de aquellas situaciones que existen en su entorno, sin olvidar las relacionadas con otras áreas de conocimiento (las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.).

Desde el primer curso de la E.S.O. los estudiantes pueden ir aproximándose al concepto de función interpretando los significados de las distintas expresiones de las funciones. Estos procedimientos se han de trabajar a lo largo de toda la etapa, y se van adquiriendo a medida que aumenta la madurez cognitiva y el campo de experiencia del estudiante.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de programas informáticos específicos como el Geogebra, o por aplicaciones elaboradas ya por algunos profesores y que están a disposición de todos, como las elaboradas dentro del Proyecto Gauss (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado) o en páginas personales de estos.

Bien utilizando un solo ordenador en el aula —con la PDi o mediante la proyección de la pantalla—, o bien con el uso de los ordenadores por los estudiantes en el aula de informática, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas y la interpretación de sus puntos y es un apoyo inestimable para acercarse a la representación de funciones y al concepto de función.

Por último hay que indicar que la tercera parte de este capítulo pretende una primera formalización al concepto de función y, aunque se ha tratado de seleccionar actividades en las que las relaciones funcionales son esencialmente proporcionales, puede ser de mayor dificultad.

De este modo, encontrar la expresión algebraica a partir de la representación gráfica de una función sencilla es una de las ampliaciones que se pueden proponer a los estudiantes más aventajados y puede servir para el estudio y comprensión mayor del significado de las funciones.

Por todo ello, y dependiendo del tiempo que se desee o se pueda emplear para el desarrollo de este capítulo, esta tercera parte se puede suprimir sin que haya ninguna actividad, de las partes anteriores, que quede sin terminar de desarrollar.

Autores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2º ESO

CAPÍTULO 12: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco

Revisor: Raquel Caro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF

Índice

Resumen

Si quieres conocer la estatura o el peso de las personas que tienen entre 11 y 13 años en España, puedes recoger los datos de cada una de las personas de esas edades. Pero esto es muy laborioso. Lo que hace la Estadística es recoger una **muestra** que nos permita representar la totalidad de la población objeto de estudio. La recogida de datos es muy antigua. El emperador Augusto mandó hacer un censo, (o recogida de datos) de todo su Imperio.

El origen de la Probabilidad puede encontrarse en los juegos de azar, y los juegos de azar, dados, cartas, lotería… hacen un buen uso de la Estadística y la Probabilidad.

La Ciencia progresa deduciendo, mediante razonamientos lógicos correctos, e infiriendo, con unas observaciones experimentales, se induce algo más general.

En este capítulo repasaremos los conocimientos que ya tienes del curso pasado sobre frecuencias y probabilidad y la representación de datos estadísticos e iniciaremos el estudio de las medidas de centralización: media, mediana y moda.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

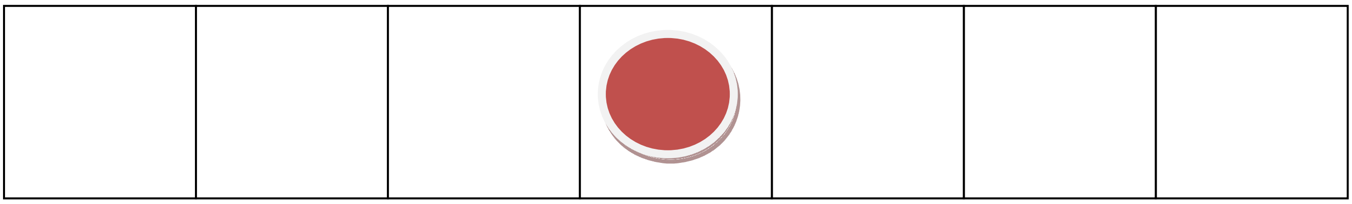
1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1.1. Fenómenos o experimentos aleatorios

Ya sabes que:

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel, que manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, el resultado no es siempre el mismo, no es posible predecir el resultado.

- ***Veamos un juego:*** Dibuja 3 casillas hacia la derecha, una casilla central y 3 casillas hacia la izquierda. Coloca una ficha en la casilla central. Tiramos dos dados y anotamos la suma de sus caras superiores.



Si sale más de 7 se mueve la ficha a la derecha, si menos, hacia la izquierda. Tiramos los dados varias veces. Anota cuántas tiradas necesitas para llegar a una de las metas.

Es un ***ejemplo*** de **fenómeno o experimento aleatorio** porque no se puede predecir el resultado.

- Sin embargo, calcular el coste de 3 kg de fruta, sabiendo el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Es un fenómeno **determinista**. También es determinista calcular el coste del recibo del agua sabiendo el gasto.

Actividad resuelta

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.
b) Lanzar un dado.
c) Si en una urna hay 7 bolas negras y 5 rojas, sacamos una y anotamos el color.
d) Sacar una carta de una baraja española.

- No son experimentos aleatorios

a) Si sales sin paraguas cuando llueve seguro que te mojas.
b) El precio de medio kilo de mandarinas si cuestan a 1.7 € el kilo.
c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:

a) La superficie de los países de la Comunidad Europea.
b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
c) El área de un círculo del que se conoce el radio.
d) Tiramos una chincheta y anotamos si cae con la punta hacia arriba.
e) Saber si el próximo mes es febrero.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencias acumuladas

Ya sabes que:

Al realizar repetidas veces un experimento podemos anotar las veces en que se obtiene cada uno de los posibles resultados.

Posibles resultados	Número de veces
cara	49
cruz	51
Total	100

Ejemplo:

- Tiramos una moneda 100 veces y anotamos las veces en que nos ha salido cara y las veces en que nos ha salido cruz. Nos ha salido cara 49 veces, entonces decimos que la frecuencia absoluta de cara es 49.
- Al dividir la frecuencia absoluta por el número total de experimentos tenemos la frecuencia relativa, así la frecuencia relativa de cara es 49/100, o bien 0.49.

La **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que se ha obtenido ese suceso.

La **frecuencia relativa** de un suceso se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el número total de experimentos.

Si sumas las frecuencias relativas de todos los posibles resultados de un experimento, esa suma siempre es igual a 1.

Al conjunto de los posibles resultados y sus correspondientes frecuencias se le denomina **distribución de frecuencias.**

Posibles resultados	Frecuencias relativas
cara	0.49
cruz	0.51
Suma total	**1**

Actividades propuestas

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

En ocasiones puede interesarnos saber cuál es la frecuencia, absoluta o relativa, del suceso *ser menor a igual a n*. Entonces se dice que es una **frecuencia acumulada**. Naturalmente esto sólo tiene sentido si los datos son numéricos.

Actividad resuelta

- En el ejemplo anterior la tabla de frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas es:

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

Observa que cada valor se obtiene sumando al anterior. Así 15 + 18 = 33, y 33 + 16 = 49…

Actividades propuestas

3. Escribe la tabla de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del ejercicio 2. Observa que el último valor ahora es 1.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Experimentos aleatorios. Sucesos

Todos los días aparecen en nuestra vida hechos que tienen que ver con el azar o con la probabilidad. Si jugamos al parchís, intuimos que *más o menos* una de cada 6 veces saldrá un 5, con lo que podremos sacar una ficha a recorrer el tablero. En el 'Monopoly' sacar un doble tres veces seguidas nos manda a la cárcel ("sin pasar por la casilla de salida"). Esto no ocurre muchas veces, sin embargo, todos los que hemos jugado a esto, hemos ido a la cárcel por ese motivo.

Al realizar un experimento aleatorio no se puede predecir el resultado que se va a obtener. No obstante, habitualmente tenemos información sobre lo posible que es un determinado suceso. Así pues, el objetivo es cuantificar de alguna manera esta información que se denomina la probabilidad del suceso.

La **probabilidad** es una medida de lo factible que es que tenga lugar un determinado suceso.

Para estudiar la probabilidad, debemos introducir algunos nombres. Lo vamos a hacer con ayuda de un caso concreto.

Espacio muestral

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**.

- Por ejemplo, los posibles resultados al tirar una moneda son que salga *cara* o salga *cruz*.
- Los posibles resultados al tirar un dado es que nos salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Al realizar el experimento siempre se obtendrá uno de los posibles resultados.

Al conjunto de resultados de un experimento aleatorio se le denomina **espacio muestral**.

A los elementos del espacio muestral se les llama **sucesos elementales**.

Ejemplo

- Imaginemos que tenemos una bolsa con 7 bolas: 2 blancas, 4 rojas y una negra. Hacemos el siguiente **experimento aleatorio**: meter la mano en la bolsa y mirar el color de la bola que ha salido.

Hay 3 *casos* posibles: "que la bola sea blanca", "que la bola sea roja" o "que la bola sea negra". Abreviadamente los representaremos por *blanca*, *roja* o *negra* (también podremos representar los colores o escribir B, R o N; recuerda que en matemáticas siempre se debe simplificar, incluso la manera de escribir).

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles: {B, R, N}.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Los diferentes **sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. En nuestro ejemplo los sucesos posibles son {B}, {R}, {N}, {B, R}, {B, N}, {R, N}, {B, R, N}.

Es seguro que en nuestro experimento la bola que sacamos es "blanca", "negra" o "roja". Por eso al espacio muestral se le llama también **suceso seguro**.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos.

1. Baraja española de 40 cartas. Experimento: sacamos una carta al azar y miramos su palo.

   Espacio muestral: {oros, copas, espadas, bastos}

2. Experimento: Lanzamos simultáneamente 1 moneda de euro y una de 2 euros al aire.

   Espacio muestral: {Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}

3. Experimento: Lanzamos simultáneamente 2 monedas de 1 euro (indistinguibles)

   Espacio muestral: {Salen 2 caras, Salen 2 cruces, Sale 1 cara y una cruz}

4. Experimento: Lanzamos una moneda de 1 euro y apuntamos qué ha salido; la volvemos a lanzar y apuntamos el resultado.

   Espacio muestral: {CC, CX, XC, XX}

5. Experimento: Lanzamos simultáneamente dos dados y sumamos los números que se ven en las caras superiores.

   Espacio muestral: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. Experimento: Lanzamos un dado usual y sumamos los números que aparecen en la cara superior y la cara inferior (la que no se ve, que está sobre la mesa).

   Espacio de sucesos: {7}

En los ejemplos anteriores, (2) y (4) son equivalentes: los posibles resultados del lanzamiento de 2 monedas que se distinguen son los mismos que los del lanzamiento de una misma moneda dos veces (por ejemplo, equiparamos el resultado del lanzamiento de la moneda de 1 euro del ejemplo 3 con el primer lanzamiento de la moneda del ejemplo 4 y el resultado del lanzamiento de la moneda de 2 euros con el segundo lanzamiento).

En el experimento 6 siempre sale el mismo resultado (por alguna razón los puntos en los dados usuales se distribuyen siempre de modo que las caras opuestas suman 7). Técnicamente éste no es un experimento aleatorio, puesto que el resultado no depende del azar.

Actividad resuelta

- El espacio muestral del experimento aleatorio:

  a) Extraer una bola de una bolsa con 5 bolas rojas y 2 negras es {*roja*, *negra*}

  b) Al sacar un papel de una bolsa donde se han puesto 3 papeles numerados del 1 al 3, es {1, 2, 3}

- Así, para el lanzamiento de un dado, aunque el espacio muestral habitual será {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es posible que sólo sea de interés si el resultado obtenido es par o impar, en cuyo caso el espacio muestral sería {*par*, *impar*}.

- En el caso del lanzamiento consecutivo de dos monedas, el espacio muestral puede ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bien: {*0 caras*, 1 *cara*, 2 *caras*}, si nos interesa únicamente el número de caras obtenidas.

- Algunos **sucesos** del experimento aleatorio tirar un dado son:

  a) Sacar un número impar: {1, 3, 5}

  b) Sacar un número mayor que 4: {5, 6}

  c) Sacar un número menor que 4: {1, 2, 3}

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURSO SUPER BÁSICO DE PROBABILIDAD, desde cero. Introducción. Lo más importante. Curso super básico de probabilidad, desde cero. Lo más importante que necesitas saber sobre este tema es sin duda la regla de Laplace y cómo manejar la unión y la intersección de probabilidades. En esta introducción a la probabilidad resolvemos varios ejercicios de probabilidades usando como argumento el lanzamiento de un dado. Además de analizar varios casos en donde calculamos la probabilidad, hablamos sobre el espacio muestral y el concepto de suceso. MATEMÁTICAS CON JUAN

https://www.youtube.com/watch?v=ifyDuAw0MvE

Actividades propuestas

4. Para cada uno de los ejemplos anteriores: lanzar un dado, tirar dos monedas, indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.

5. En una bolsa tenemos 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5. Se hacen los dos experimentos siguientes:

EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.

EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.

¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

6. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.

7. Inventa cinco experimentos aleatorios y escribe el conjunto de posibles resultados

8. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar*".

9. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe*".

10. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de sacar dos cartas.

11. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las centenas del primer premio.

12. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.

13. Escribe tres sucesos aleatorios de tirar tres monedas.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Probabilidad

Dados todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio, asignaremos a cada suceso A, una cantidad que denotaremos por P(A) y que llamaremos la probabilidad del suceso A.

Ya sabes que la probabilidad es una medida que nos indica el grado de confianza de que ocurra un determinado suceso.

La **probabilidad** se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Si ese número está próximo a 0 diremos que es un suceso improbable (ojo, improbable no quiere decir que sea imposible), mientras que si está próximo a 1 diremos que ese suceso es mucho más probable.

La probabilidad es una medida de la certeza que tenemos que se verifique un suceso. Sirve para prevenir el futuro usando lo que se sabe sobre situaciones pasadas o presentes.

Pero la palabra "probable" es de uso común, por lo que siempre sabes si algo es "*muy probable*", "*bastante probable*", "*poco probable*" o "*muy improbable*".

Actividad resuelta

- Si no has estudiado nada un examen es *bastante probable* que te suspendan, y si te lo sabes, es *muy probable* que saques buena nota.
- Si una persona roba un banco *es probable* que acabe en la cárcel.
- Es *poco probable* que se caiga el avión que acaba de salir de Barajas.
- Es *seguro* que después del lunes llega el martes.
- Es *muy improbable* que mañana haya un maremoto.

Actividades propuestas

14. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:

a) El jueves vas al colegio.

b) Cruzas la calle y te pilla un coche.

c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.

d) Le toca la lotería a Juan.

e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol.

f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima.

g) ¿Amanecerá mañana?

h) Mañana haya un terremoto en Madrid.

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, analizando las frecuencias relativas de que ocurra el suceso, y la otra **por simetría**.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo

- En una bolsa que contiene 20 bolas blancas introducimos una bola negra (indistinguible al tacto). Mezclamos bien las bolas de la bolsa, y realizamos el experimento consistente en meter la mano en la bolsa y sacar una bola.

Sin que hayamos estudiado nada formalmente sobre probabilidad. ¿Qué piensas que es más probable, que la bola sacada sea blanca o que sea negra? ¡Estamos de acuerdo en que es más probable sacar una bola blanca!

Ahora ya sí que podemos plantearnos una pregunta: ¿En qué medida es más probable sacar una bola blanca?

No es difícil de calcular. Los datos que tenemos son los siguientes:

- La bolsa tiene 21 bolas.
- 1 bola es negra.
- 20 bolas son blancas.

La probabilidad de sacar la bola negra es 1 de entre 21. La probabilidad de sacar una bola blanca es de 20 entre 21.

Lo que acabamos de utilizar es conocido como **Ley de Laplace.** Si todos los casos posibles de un espacio muestral son **equiprobables** (esto es, tienen la misma probabilidad de ocurrir), y S es un suceso de ese experimento aleatorio se tiene que

Regla de Laplace:

La probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles

$$P(S) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } S}{\textit{número de casos posibles}}$$

Pero, ¿y si no podemos asegurar que todos los casos sean equiprobables?

La probabilidad de que ocurra un cierto resultado al realizar el experimento, aunque ya se verá en otros cursos en detalle, se calcula como la frecuencia relativa de ese resultado repitiendo el experimento muchas veces. Cuantas más veces repitas el experimento, más se aproximará la frecuencia relativa al valor de la probabilidad.

- Por ejemplo, si tiras una moneda al aire una sola vez y sale cara, parecerá que la probabilidad de sacar cara es 1, pero si repites más veces el experimento, la frecuencia relativa de sacar cara se irá acercando a 0.5 con el tiempo. Eso nos dice que la probabilidad de sacar cara es 0.5.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- Mezclamos una baraja española de 40 cartas (los palos son oros, copas, espadas y bastos y en cada palo hay cartas numeradas del 1 al 7 además de una sota, un caballo y un rey).

Se realiza el experimento consistente en *cortar la baraja y quedarnos con la carta superior*.

Consideraremos los siguientes sucesos:

1) Obtener una figura.
2) Obtener una carta con un número impar.
3) Obtener una carta de espadas.
4) Obtener una carta de espadas o una figura.
5) Obtener la sota de oros.

En principio las cartas no van a estar marcadas, con lo que la probabilidad de que salga cada una de ellas es la misma. Esto es, estamos ante un experimento aleatorio con todos los casos equiprobables.

1) En la baraja hay 12 figuras (3 por cada palo). Así

   Casos favorables: 12

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 12/40 = 3/10

2) Por cada palo hay 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 y 7.

   Casos favorables: 16

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 16/40 = 2/5

3) Hay 10 cartas de espadas en la baraja

   Casos favorables: 10

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 10/40 = 1/4

4) Hay 10 cartas de espadas y además otras 9 figuras que no son de espadas (claro, las 3 figuras de espadas ya las hemos contado).

   Casos favorables: 19

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 19/40

5) Solo hay una sota de oros

   Casos favorables: 1

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 1/40

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Más actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*} y suponemos que la moneda no está trucada
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6, pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6} y suponemos que el dado no está trucado luego todos ellos son equiprobables.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados.
- La probabilidad de sacar bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0.5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0.49.

Observa que para poder utilizar la Regla de Laplace debes haberte cerciorado que los sucesos elementales son equiprobables.

Si cruzas una calle pueden ocurrir dos cosas, que te pille un coche o que no te pille, sin embargo, es evidente que la mitad de las veces que cruzas calles no te pilla un coche.

En este caso lo útil es utilizar las frecuencias relativas para estimar probabilidades cuando éstas no son conocidas.

La **ley de los grandes números** nos dice que cuando se repite muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso S se aproxima a su probabilidad. Cuanto más grande sea el número de repeticiones, mejor va siendo la aproximación.

En juegos de dados, monedas, cartas… suponemos que no están trucadas y que por eso los sucesos elementales son equiprobables.

- Sacamos una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un oro es 10/40 = 1/4, y la probabilidad de sacar un rey es 4/40 = 1/10.
- Tiramos dos monedas y queremos calcular la probabilidad de que sea cara. Podemos considerar que el espacio de sucesos elementales es: {0 caras, 1 cara, 2 caras}, o bien {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +). Para decidir tendremos que saber en cuál de los casos son equiprobables. Jugando, jugando, es decir, le experiencia no dice que son equiprobables en el segundo caso y por tanto la probabilidad de que alguna sea cara es 3/4, en lugar de 2/3 como sería en el primer caso.

Actividades propuestas

15. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.

16. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.

17. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Una bolsa de bolas contiene 26 negras y 26 rojas. Se mezcla el contenido de la bolsa, se mete la mano y se saca una bola, se mira el color y se devuelve a la bolsa. A continuación, se saca otra bola y se mira el color. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido una bola roja y una bola negra?

Antes de seguir leyendo, piénsalo. Si te equivocas no pasa nada: el sentido de probabilidad no lo tenemos demasiado desarrollado, pero este es el momento de hacerlo.

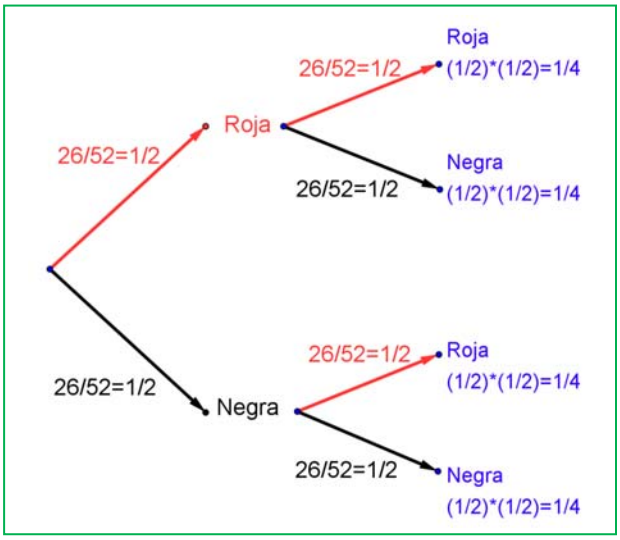
Este problema lo hemos planteado muchas veces a otros estudiantes. Algunos dicen que la probabilidad es 1/3 porque hay 3 casos posibles: Roja-Roja, Negra-Negra y Roja-Negra. Esa respuesta no es correcta.

En realidad, el suceso *sacar una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra y Negra-Roja. Dependiendo de cómo hubiésemos escrito el espacio muestral o de cómo hubiésemos planteado el problema ese detalle se podría ver con mayor o menor claridad.

Así, la probabilidad de sacar una bola de cada color es, en realidad 1/2.

Si no te lo crees puedes hacer un experimento: será difícil que tengas 26 bolas negras y 26 bolas rojas, pero sí que es fácil que tengas una baraja francesa. Mézclala, corta y mira el color de la carta que ha quedado arriba en el montón. Apúntalo. Vuelve a dejar las cartas en el mazo, vuelve a mezclar, corta de nuevo y mira el color de la carta que ha quedado arriba ahora. Apunta los colores. Repite este experimento muchas veces: 20, 50 o 100.

Si tienes en cuenta los resultados verás que, aproximadamente, la mitad de las veces las dos cartas son del mismo color y la otra mitad las cartas son de colores diferentes. Con eso, hemos podido "comprobar" que la probabilidad de ese suceso era 1/2.



Otra forma que te puede ayudar a razonar sobre este problema, y otros muchos de probabilidad, es confeccionar un **diagrama en árbol**. La primera bola que sacamos tiene una probabilidad de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Ese número lo escribimos en la rama del árbol. Si devolvemos a la bolsa la bola y volvemos a sacar otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea Roja vuelve a ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razonamiento el resto de las ramas.

La probabilidad de que las dos bolas que hayamos sacado sean rojas es el producto de sus ramas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidad obtenemos para los sucesos Negra-Negra, Negra-Roja y Roja-Negra. La probabilidad de Roja-Negra es por tanto 1/4, igual a la de Negra-Roja. Como son sucesos elementales la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

Actividades propuestas

18. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero “con sentido”).
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Normalmente cuando “te inventas” los resultados sí sueles poner la mitad de caras y la mitad de cruces. En un experimento aleatorio estos números están cerca de la mitad, pero no suelen ser la mitad exacta.

Cuando te lo inventas, en general pones pocos grupos seguidos de caras o cruces.

El cerebro nos engaña y en temas probabilísticos tenemos que educarlo mucho más. Por eso este tema es muy importante, aunque sea el que muchas veces se queda sin dar. Nos ayuda a que, como ciudadanos, no nos engañen. Ni con loterías, ni con cartas, ni con estadísticas electorales.

video

¿Qué es la Estadística? ¿Para qué es útil? Fundamentos y conceptos.
¿Qué es la Estadística? ¿Para qué es útil? Fundamentos y conceptos. DiegoFercho

https://www.youtube.com/watch?v=pt9-9BUQgQs

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Historia de la estadística. ¿De dónde viene la palabra estadística? ¿Cuándo se empezó a usar? En este breve vídeo, te mostraré los inicios de la estadística y qué personas marcaron un antes y un después en su historia. ¡Anímate a buscar qué és un censo y un catastro, para entender mejor el vídeo!

https://www.youtube.com/watch?v=O2L_VsKDxlw

Si hacemos una representación gráfica de los datos podremos comprender su significado con mucha más facilidad que si, simplemente, los dejamos en forma de tabla. Para ello, naturalmente, ya tendremos que haber recogido los datos y elaborado una tabla.

Vamos a estudiar cuatro tipos de representaciones, el diagrama de rectángulos, el diagrama de líneas, el pictograma y el diagrama de sectores, aunque hay algunas otras representaciones posibles.

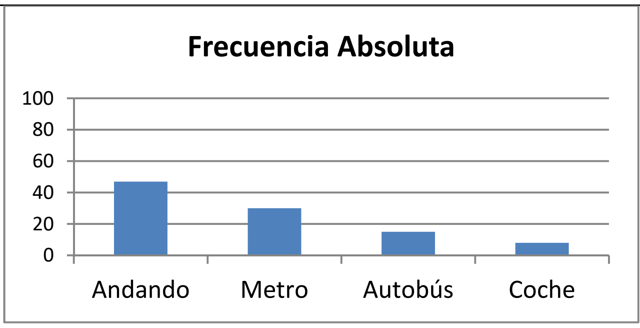
2.1. Diagrama de rectángulos o de barras

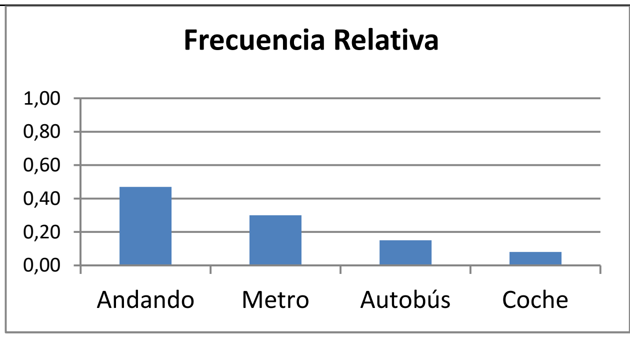
En un diagrama de rectángulos o de barras se indican en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical la frecuencia con la que dichos datos aparecen, por tanto, podrá ser un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas, o relativas o acumuladas según la frecuencia utilizada.

Actividad resuelta

- Preguntamos a 100 estudiantes cuál es el medio de transporte que utilizan para ir a la escuela. Las respuestas aparecen en la tabla del margen. Dibujamos el diagrama de rectángulos.

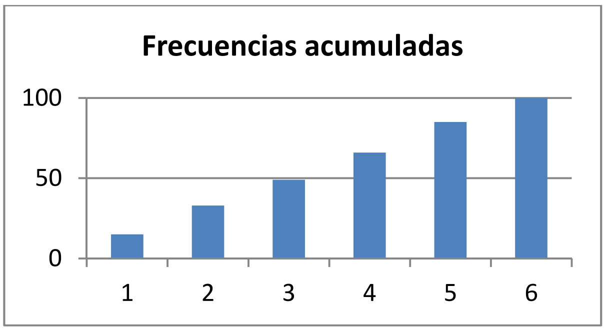
Medio de transporte	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Andando	47	0.47
Metro	30	0.3
Autobús	15	0.15
Coche	8	0.08





Si queremos dibujar el diagrama de barras de frecuencias relativas, utilizamos la columna de frecuencias relativas para hacerlo, y se obtiene el diagrama denominado "*Frecuencia Relativa*". Si comparamos el diagrama de barras de frecuencias absolutas con el de relativas se observa que son

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias acumuladas
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	



Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

iguales salvo en las unidades del eje de ordenadas, que ahora, en el de Frecuencias Relativas, siempre llegan hasta 1.

Tenemos la tabla de frecuencias acumuladas del experimento tirar un dado. Dibujamos el diagrama de barras de frecuencias acumuladas. Se observa como las barras van creciendo y la altura de la última coincide con la suma total, en este caso, 100, el total de veces que hemos tirado el dado.

Actividades propuestas

Posibles resultados	Número de veces
cara	56
cruz	44

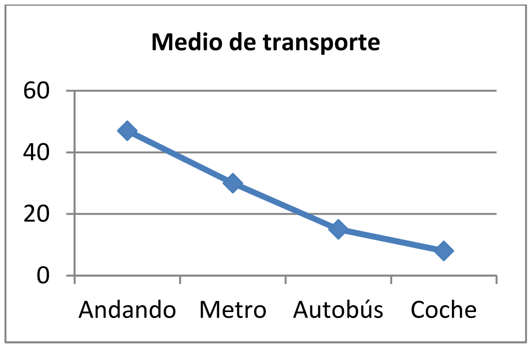
19. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas acumuladas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

20. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

2.2. Diagrama de líneas

Igual que en el diagrama de rectángulos se indica en el eje horizontal todos los posibles resultados del experimento y en el eje vertical las frecuencias. En lugar de dibujar barras, ahora simplemente se unen los puntos obtenidos con líneas.



Actividad resuelta

- El diagrama de líneas absolutas de la actividad resuelta anterior es el del margen:

Actividades propuestas

21. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas del experimento tirar un dado de la actividad 20.

22. Dibuja los diagramas de líneas absolutas, relativas y relativas acumuladas del experimento tirar una moneda de la actividad 19.

2.3. Pictograma

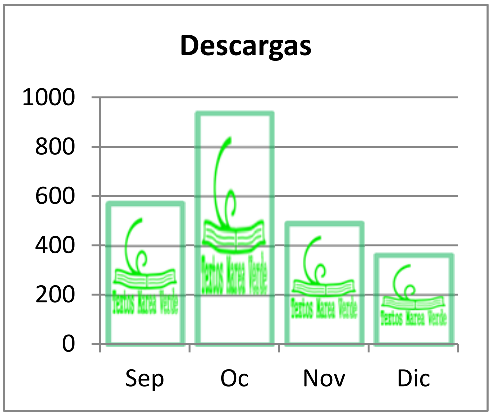
En los pictogramas se representan las frecuencias mediante una gráfica de barras rellenas de dibujos alusivos.

Actividad resuelta

- Se han obtenido datos sobre el número de descargas que se han hecho de los Textos Marea Verde y se tienen los datos indicados en la tabla. Se representan con un pictograma, sustituyendo el rectángulo por un dibujo alusivo.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Marea verde	Descargas
Septiembre	572
Octubre	937
Noviembre	489
Diciembre	361

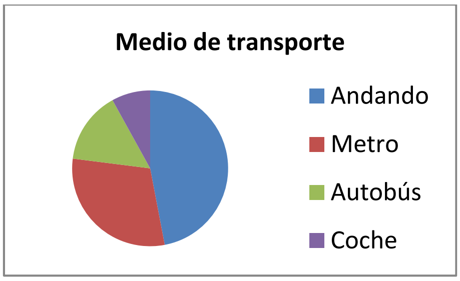


2.4. Diagrama de sectores

En los diagramas de sectores las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

Actividad resuelta

- El diagrama de sectores de la tabla sobre el medio de transporte utilizado es:



Puedes observar que con una simple mirada sabes que algo menos de la mitad de los estudiantes van andando y algo más de la cuarta parte van en metro.

Pero realizarlo a mano requiere un trabajo previo pues debes calcular los ángulos mediante una regla de tres: multiplicas por los 360° que mide un ángulo completo y divides por el número total que en este caso es 100.

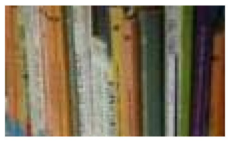
Medio de transporte	Frecuencia	Ángulo
Andando	47	$47 \cdot 360° / 100 = 47 \cdot 3.6 = 169.2$
Metro	30	$30 \cdot 360° / 100 = 108$
Autobús	15	$15 \cdot 360° / 100 = 54$
Coche	8	$8 \cdot 360° / 100 = 28.8$
TOTAL	100	360°

Actividades propuestas

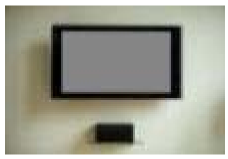
23. Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en *Pictograma*.

24. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 19.

25. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 20.



26. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.



27. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

28. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase, pregunta al menos a 10 personas, sobre el tiempo que tardan en ir desde su casa al centro escolar. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Vamos a poder obtener unos números de una tabla de frecuencias o de unos datos que nos den información sobre su "*centro*" e información sobre lo que se alejan de dicho centro.

3.1. Media aritmética

Actividad resuelta

- Sabes muy bien calcular la media de tus notas. Juan ha tenido en Matemáticas, 7, 3, 5, 9, 8. Tu nota media la calculas sumando todas las notas: 7 + 3 + 5 + 9 + 8 = 33, y dividiendo la suma entre el número total de notas: 33/5 = 6.6.

En general si se quiere calcular la media de x_1, x_2, …, x_n, se hace lo mismo, se suman todos y se divide por el número total de datos.

Media = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$

Actividades propuestas

29. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

Actividad resuelta

Pero si tienes muchos datos y los tienes agrupados en una tabla de frecuencias, puedes hacerlo mejor de otra manera.

- Imagina que tienes las siguientes notas, a las que llamas x_i, con las frecuencias absolutas, a las que llamas f_i:

												Suma total
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3	**43**

Esto significa que hay dos 1, hay dos 3, y que hay 8 personas que han sacado un 5. No vamos a sumar 1 +1 dos veces, o 5 + 5 + 5… ocho veces, sino multiplicar 1 · 2, 3 · 2, 5 · 8…

Añadimos una fila a la tabla con esos productos:

$x_i \cdot f_i$	0	2	2	6	12	40	42	42	48	36	30	**260**

Sumamos esa fila $x_i \cdot f_i$ y obtenemos 260. Como la de frecuencias f_i suma 43, las dividimos, por lo que la media resulta: Media = 260 / 43 = 6.04.

En general si la variable toma los valores x_1, x_2, …, x_n, con una frecuencia absoluta f_1, f_2, …, f_n, para calcular la media se multiplica cada valor por su frecuencia, se suman dichos productos y se divide por el total de datos:

Media = $(x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n)/ (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

30. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3.56.

31. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

a) Calcula la media.

b) Repite ahora tú los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

Actividad resuelta

- Una compañía de seguros de automóvil ha realizado un estudio sobre 1000 asegurados para saber cuánto dinero ha gastado la compañía en reparaciones por accidente. Los datos están en la tabla:

Dinero gastado en euros	De 0 a 100	De 100 a 300	De 300 a 500	De 500 a 900	De 900 a 1100	De 1100 a 1500	Más de 1500 euros
Número de asegurados	167	150	145	131	106	57	24

Ahora la cosa se complica. No conoces el valor de x_i. Puedes construir la tabla de frecuencia sustituyendo cada intervalo por su punto medio:

							Suma Total
x_i	50	200	400	700	1000	1300	1700	
f_i	167	150	145	131	106	57	24	780

Y ahora ya sabes calcular la media. Añadimos la fila de los productos $x_i \cdot f_i$.

$x_i \cdot f_i$	8 350	30 000	58 000	91 700	106 000	74 100	40 800	408 950

La suma de esos productos es: 408 950, y la suma de las frecuencias es: 780, luego la media del dinero gastado en seguros es: Media = 408 950 / 780 = 524.3 €.

Actividades propuestas

32. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Moda

¿Qué es lo que está de moda? Lo que más se lleva.

La **moda** de una distribución de frecuencias es el valor más frecuente.

Actividad resuelta

La moda de las tablas de frecuencias siguientes es la indicada:

- Medio de transporte

Medio de transporte	Frecuencia
Andando	47
Metro	30
Autobús	15
Coche	8
TOTAL	100

La moda es ir *andando*.

- Notas

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3

La moda es 5.

- Lanzamiento de un dado

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La moda es 6.

- Lanzamiento de dos dados

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

La moda es 7.

Nota

Puede ocurrir que una distribución de frecuencias tenga más de una moda. Por ejemplo, la distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	9	8	8	9

tiene 3 modas, 1, 3 y 6, ya que el valor más alto de la frecuencia absoluta es 9 en los tres casos.

La moda permite clasificar los conjuntos de datos en *unimodales*, *bimodales* o *plurimodales*, según el número de modas que tengan.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Mediana

La **mediana** es el valor central que deja por debajo el mismo número de datos que por encima.

Una forma de calcular la mediana es ordenar los valores de menor a mayor, y si el número de datos es impar, el valor central es la mediana. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

Los ***cuartiles*** Q_1, Q_2 y Q_3 son los valores tales que el 25 %, 50 % y 75 % (respectivamente) de los valores de la variable son inferiores a él. Por tanto, la mediana coincide con el segundo cuartil.

Actividad resuelta

- La mediana de las notas, ya ordenadas siguientes: 2, 3, 5, 7, 9, 9, 10, es 7, pues es el valor central de un número impar de datos.
- La mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10, es la media entre 5 y 7, es decir, es 6, pues 5 y 7 son los valores centrales de un número par de datos.

Hay que destacar que esta medida de tendencia central, a diferencia de la media, no se ve afectada por valores extremos. Es decir, la mediana de las notas: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, sigue siendo la media entre 5 y 7, es decir, 6.

Actividades propuestas

33. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

3.4. Medidas de dispersión

Recorrido es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. También se denomina **rango**.

Recorrido intercuartílico o **rango intercuartílico** se calcula restando $Q_3 - Q_1 = 2.07 - 1.92 = 0.15$.

Varianza es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

Equivalentemente (desarrollando los cuadrados que aparecen en la expresión) se puede calcular mediante esta otra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Se representa por σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2013 se recogen en la siguiente tabla:

2.03	1.96	1.91	2.11	1.91	1.93	2.08	1.99	1.90	2.16	2.06	2.03

Calculamos la media y se obtiene 2.0058. Calcula la varianza y la desviación típica.

Para calcular la **varianza** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador, de modo similar a como acabamos de hacer. Después terminaremos dividiendo entre el número de datos.

$(2.03 – 2.0058)^2 + (2.06 – 2.0058)^2 + (2.16 – 2.0058)^2 + (1.90 – 2.0058)^2 + (1.99 – 2.0058)^2 +$

$(2.08 – 2.0058)^2 + (1.93 – 2.0058)^2 + (1.91 – 2.0058)^2 + (2.11 – 2.0058)^2 + (1.91 – 2.0058)^2 +$

$(1.96 – 2.0058)^2 + (2.03 – 2.0058)^2 = 0.08934$

Así la **varianza** es 0.08934/12 = 0.00744

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{0.00744} = 0.08628$.

Actividades propuestas

34. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

35. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

Si tenemos frecuencias relativas las expresiones son:

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

Por tanto, la **desviación típica** se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

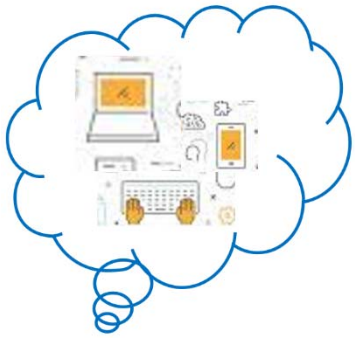
Actividades propuestas

36. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3.56. Calcula la varianza y la desviación típica.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

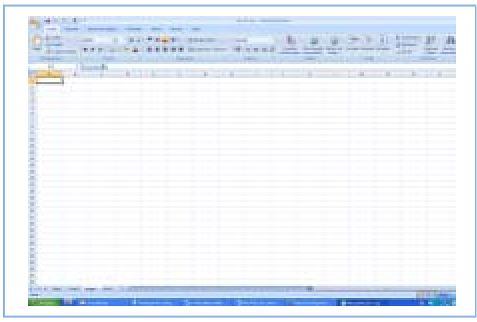


4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

El ordenador puede ayudar mucho en los cálculos estadísticos. Hay muchos programas para ello. En particular son fáciles de usar las hojas de cálculo. Vamos a resolver un problema utilizando una de ellas.

Actividad resuelta

- Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización:



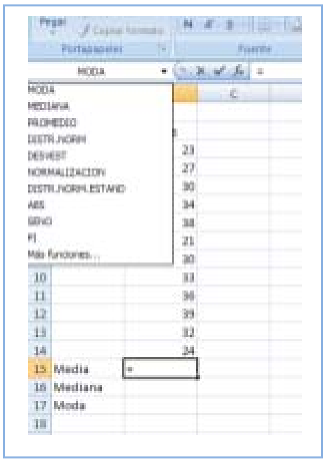
23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.

Para calcular la **media**, la **mediana** o la moda, abrimos la hoja de cálculo. Consta de filas indicadas por las letras A, B, C… y columnas indicadas por los números 1, 2, 3… cada casilla se identifica por su columna y su fila, por ejemplo, A1 es la primera casilla.

Escribimos los datos que nos han dado en la columna B a partir de la fila 3, dejando la primera columna y las dos primeras filas para poner títulos.

Escribimos en B2: Residuos; en A15: Media; en A16: Mediana; y en A17: Moda.

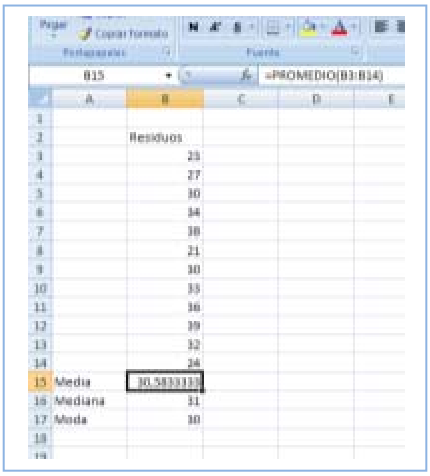
Nos colocamos sobre la casilla B15. En la ventana *fx* escribimos el signo igual: **=**, y desplegamos las funciones de la lista de la izquierda. Nos interesan: PROMEDIO (que es la media), MEDIANA y MODA.



Escribimos en la casilla B15:

=PROMEDIO(B3:B14),

y obtenemos la media que es 30,58.



Observa lo que esa expresión significa. Estás diciendo al ordenador que calcule la media (promedio) de los datos que están entre la casilla B3 y la casilla B14.

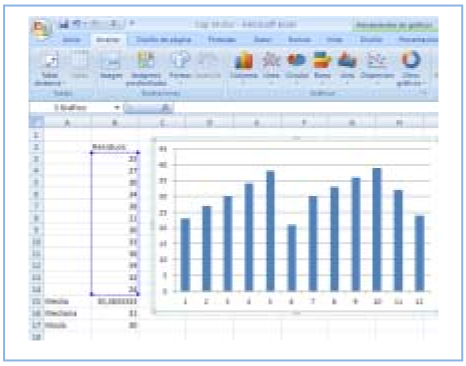
Para calcula la mediana nos colocamos en la casilla B16 y escribimos:

=MEDIANA(B3:B14),

y para calcular la moda nos colocamos en B17 y escribimos: =MODA(B3:B14).

Hemos obtenido que la mediana es 31 y la moda es 30.

Puedes investigar la cantidad de funciones que tiene el ordenador que también calcula (y que aún no conoces), desviación típica, coeficiente de curtosis, valor mínimo, valor máximo, cuartil…



También dibuja gráficas con facilidad. Para que tenga sentido deberíamos agrupar los datos en una tabla. Pero si desarrollas el menú de "*Insertar*" puedes ver los tipos de gráficas que puedes dibujar: de *columna*, *línea*, *circular*, *barra*, *dispersión*…

Hemos dibujado un diagrama de rectángulos seleccionado los datos e insertando un gráfico de columnas.

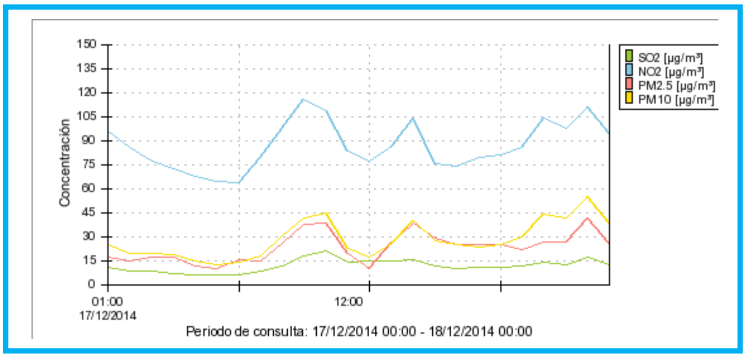
Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.

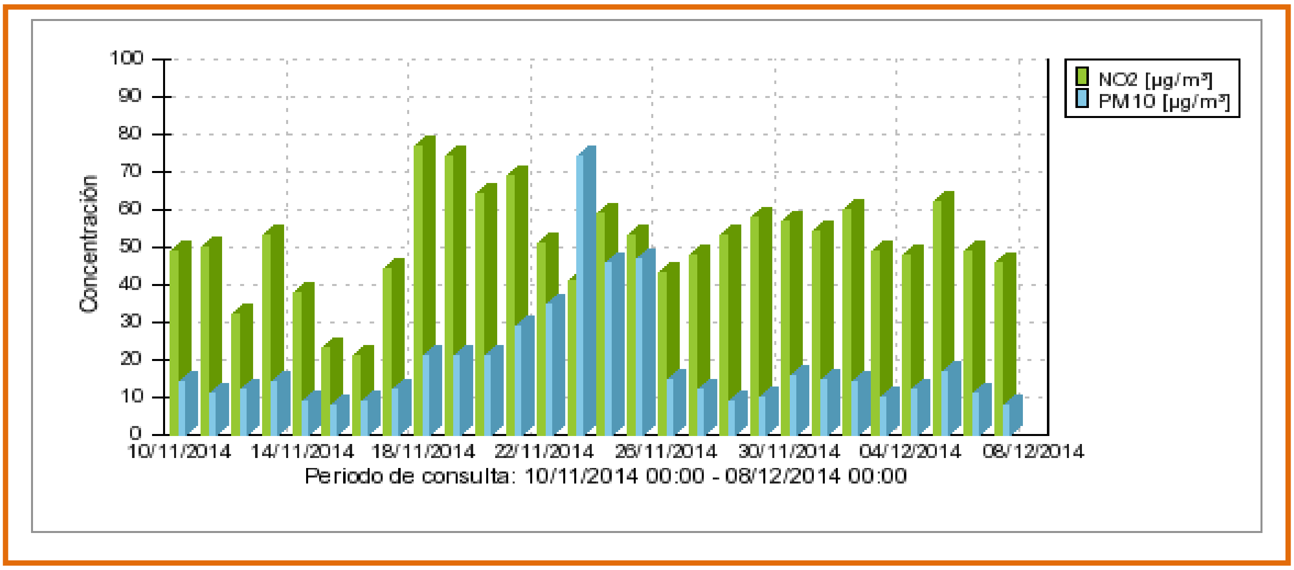
Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Series temporales sobre la calidad del aire en Madrid

En Madrid se controla la calidad del aire. Puedes ver el **diagrama de líneas** de las concentraciones de **NO_2, SO_2 y partículas** durante un día en la estación de Cuatro Caminos. En el eje de abscisas aparece el tiempo, las 24 horas. En el eje de ordenadas las distintas concentraciones.





Tenemos ahora un **diagrama de barras** también de la estación de Cuatro Caminos de únicamente NO_2 y partículas con los valores **medios** diarios durante cuatro semanas, a partir del 8 de diciembre. Analiza esta nueva serie temporal. Consideras que estos valores son altos o son bajos

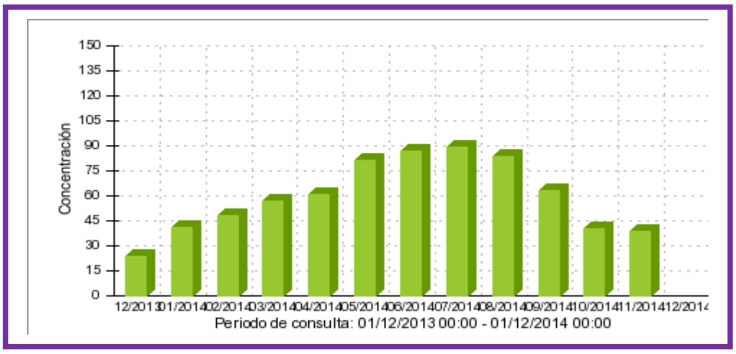
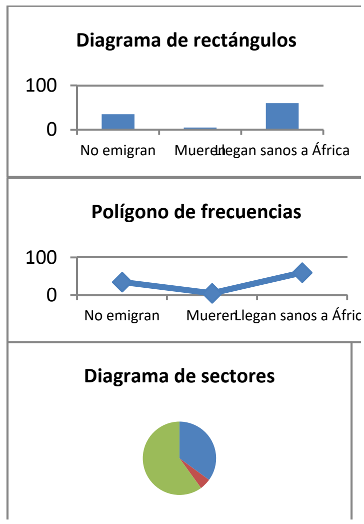


Diagrama de barras de la concentración de **ozono** en la estación de la Casa de Campo con los valores **medios** mensuales obtenidos durante un **año**. Cuándo es mayor la concentración de ozono, ¿en invierno o en verano?

La Comunidad de Madrid y el Ayuntamiento de Madrid controlan la calidad del aire, lo que es obligatorio para cumplir con las directivas europeas. Puedes buscar información en Internet escribiendo: http://www.mambiente.munimadrid.es/svca/index.php. o simplemente "calidad del aire en Madrid".

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

CONCEPTO	*DEFINICIÓN*	*EJEMPLOS*
Fenómeno o experimento aleatorio	Es aquel en el que no se puede predecir el resultado. Los datos estadísticos son los valores que se obtienen en un experimento.	Tirar una moneda y saber si va a salir cara o cruz
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un dato estadístico	Si al tirar un dado hemos obtenido 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores	
Suceso posible.	Posible resultado de un experimento aleatorio	En el experimento aleatorio tirar un dado el conjunto de posibles resultados, o el conjunto de sucesos elementales o espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por tanto, un posible resultado es, por ejemplo, 3.
Espacio muestral	Conjunto de resultados posibles	
Sucesos elementales	Elementos del espacio muestral	
Diagrama de rectángulos	Los datos se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Diagrama de líneas	Se unen los puntos superiores de un diagrama de rectángulos	
Pictograma	Se sustituye los rectángulos por un dibujo representativo	
Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la **media** es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6. La **moda** es: 5. La **mediana** es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	
Moda	El valor que más se repite.	

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El azar y la probabilidad

1. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1 000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?

c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?

d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

2. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:

a) Tener un accidente de tráfico.

b) Salir de paseo y cruzar alguna calle.

c) Salir de paseo y que te caiga un rayo.

d) Mañana nazca algún niño en París.

e) Mañana no amanezca.

f) Mañana llueva.

3. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

b) Escribe otra de frecuencias relativas.

c) Dibuja un diagrama de rectángulos.

d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.

4. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Gráficos estadísticos

5. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van unos jóvenes al mes al cine. Los datos están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas.

b) Representa un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

c) Haz un pictograma.

d) Representa los datos en un diagrama de sectores.

6. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	**Porcentaje**
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

a) Haz un diagrama de rectángulos
b) Representa un diagrama de líneas.
c) Haz un pictograma.
d) Representa los datos en un digrama de sectores.

7. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.

8. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los datos en un diagrama de rectángulos y en un diagrama de líneas.

9. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas.

b) Representa estos datos en un diagrama de sectores.

c) Haz un pictograma.

10. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sectores que describa esta situación.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Medidas de centralización

11. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4

Calcula la media aritmética.

12. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.

13. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21

Calcula la media aritmética.

14. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son:

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.

c) Calcula la media.

15. Los jugadores de un equipo de baloncesto tiene las siguientes edades:

13, 12, 14, 11, 12, 12.

Calcula la media.

16. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas hijos tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1

Calcula la media.

17. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la media aritmética.

b) Calcula la mediana.

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

18. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la media aritmética.

b) Calcula la mediana.

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

19. Se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula la media aritmética.

b) Calcula la mediana.

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

20. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.

c) Calcula la media.

d) Calcula la mediana.

e) Calcula la moda.

21. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

Calcula la media, la mediana y la moda.

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

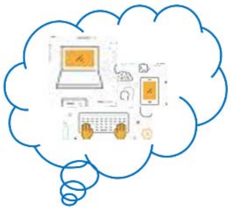
12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a) Calcula la media.

b) Calcula la mediana.

c) Calcula la moda.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Ordenador

23. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de mascotas en el ordenado y vuelve a calcular la media, la mediana y la moda.

24. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

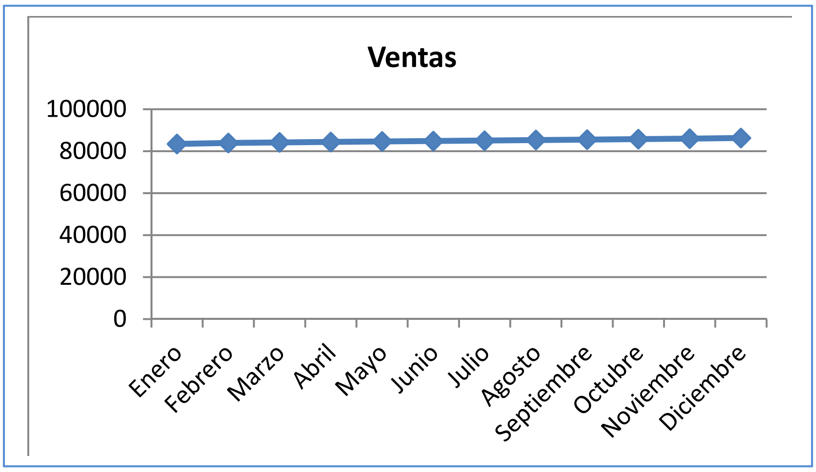
25. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

26. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la semana que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o… Piensa sobre qué podrías preguntar.

Problemas

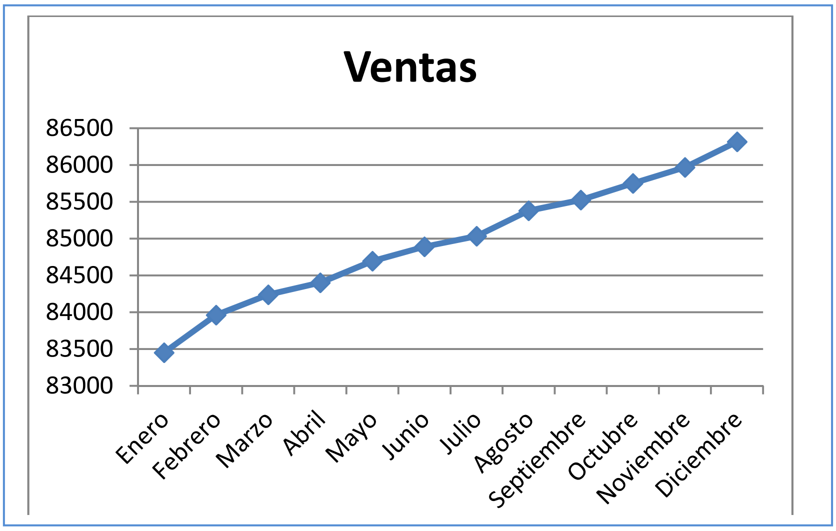
27. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuanta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316



El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:

No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:



Ambos gráficos son correctos.

Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

28. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, x, …. Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, x, …Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

29. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño: 25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula la media, la moda, la mediana, la varianza y la desviación típica.

30. Con los datos del problema anterior:

a) Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m^3: (21, 23), (23, 25), … (39, 41)

b) Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.

c) ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que 31 m^3?

d) ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que 35 m^3?

31. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

32. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más, pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto suman estos dos números?

EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica la respuesta correcta:

a) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta.

b) La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores.

c) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.

d) Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad.

2. Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:

a) 1/40 b) 0.25 c) 4/40 d) 10/40

3. Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En … … …. … … …. las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

4. Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0.125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:

a) 45° b) 30° c) 60° d) 72°

5. En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

6. La media de los siguientes datos 7; 0; 9.5; 2; 4.1; 3.8; es:

a) 6.3 b) 3.8 c) 4.4 d) 5.5

7. La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

9. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?

a) 3/4 b) 1/6 c) 2/6 d) 5/6

10. Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quien es una muestra:

a) Estudiantes de España y estudiantes de ese centro

b) Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A

c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A

d) Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A

Autora: Nieves Zuasti y Fernando Blasco
Revisores: Raquel Caro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2º DE ESO

ÍNDICE