2º de ESO
Soluciones de ejercicios y problemas

ÍNDICE:

1.	Resolución de problemas	2
2.	Números	8
3.	Potencias y raíces	16
4.	Divisibilidad	22
5.	Sistemas de medida	27
6.	Longitudes y áreas. Semejanza	34
7.	Cuerpos geométricos. Volúmenes	42
8.	Movimientos	50
8.	Magnitudes proporcionales. Porcentajes	68
9.	Álgebra	75
10.	Tablas y gráficas. El plano cartesiano. Funciones	83
11.	Estadística y probabilidad	94

Total: 105

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde.

CAPÍTULO 1: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

1. Inventa problemas similares a: La piscina de tu pueblo tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 25 m de largo y 15 m de ancho. El alcalde desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

Solución abierta:

2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74.791 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?

Solución: Al padre de Juan le faltan 75 000 – 74 791 = 209 km y a la madre de María 25 000 – 24 312 = 688 km.

3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. A) ¿Cuántos euros costará ponerlo? B) Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.

Solución: A) (8 + 5 + 8 + 5) x 8 = 208 €. B) Solución abierta.

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?

Solución: Suponemos que un mes tiene 4 semanas, luego en un mes ahorras 40 €. No tienes para el ordenador. Suponemos que un año tiene 52 semanas, entonces si ahorras todas tus pagas tendrás 520 €. Tampoco tienes para un ordenador.

5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.

Solución abierta:

6. Informan que a una manifestación han ido 500.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?

Solución: Una forma de estimarlo es contar cuántas personas hay en un metro cuadrado y estimar los metros cuadrados que ocupa la manifestación.

7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)

Solución: Puedes estimar que una persona tuviera una longitud de un metro. Si hay siete mil millones de personas, la longitud sería de 7 000 000 000 m, igual a 7 000 000 km, siete millones de kilómetros.

8. ¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?

Solución abierta: Puedes pesar una cantidad pequeña de lentejas y contarlas. Y entonces calcular las que caben en un kilo.

9. Aprende a hacer magia. Piensa un número. Súmale 10. Dobla el resultado. Réstale 6. Calcula la mitad. Quita el número del principio. ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?

Solución: $((x+10)2-6)/2-x=x+10-3-x=7$.

10. ¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?

Solución: Para obtener un 0 debemos multiplicar 2 por 5. Hay más doses que cincos así que es suficiente contar el número de cincos que aparecen en ese producto. Múltiplos de 5: 200; Múltiplos de 25: 40; Múltiplos de 125: 8; Múltiplos de 625: 1; Total: 249

11. Cuadrado Mágico

Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

***Solución:** Observa que la suma de los 9 números es 216, para que la suma de tres sea igual en todas direcciones su valor debe ser 72 y el 24 debe estar en el centro. Puedes obtener más soluciones utilizando simetrías.*

27	22	23
20	24	28
25	26	21
21	28	23
26	24	22
25	20	27
27	20	25
22	24	26
23	28	21

12. ***"El depósito":*** De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1 200 litros de agua ¿Qué capacidad tiene el depósito?

Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

***Solución:** A partir del dibujo es evidente que la capacidad del depósito es 1 800 litros.*

13. Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?

***Solución:** 2535 años*

14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

***Solución:** Primero coge la cabra, la deja en la otra orilla y vuelve, después cruza con el lobo y a la vuelta coge de nuevo a la cabra; a continuación traslada el repollo y por último vuelve a llevar a la cabra.*

15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2: $4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2$

Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.

Solución:

$1 = (4 \cdot 4) : (4 \cdot 4)$;

$3 = 4 - (4 : 4)^4$;

$4 = 4 - (4 - 4)^4$;

$7 = 4 + 4 - (4 : 4)$.

16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?

***Solución:** Porque le entregué los 10 euros en dos billetes de 5 euros.*

17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona les invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?

***Solución:** Cada persona comió 8/3 del total, es decir 2 panes más 2/3 de pan; como la primera persona sólo tenía 3 panes le cedió 1/3 de pan y la segunda 7/3, es decir, 2 panes mas 1/3 de pan. Un reparto equitativo de las 8 monedas sería 1 moneda para la primera y 7 monedas para la segunda.*

18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

***Solución:** $x + (x + 1) = 11$; $x = 5$*

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

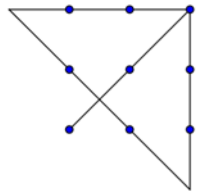
o o o

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Solución:

Para unirlos sin levantar el lápiz hay que comenzar por uno de los dos vértices en los que concurren un número impar de segmentos.

El bloqueo en este problema es que no se contempla la posibilidad de salir del espacio marcado por los puntos.



20. Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Solución: Si no te ha salido es porque con el enunciado te hemos hecho creer que no debías salir del plano. Un tetraedro tiene 6 aristas iguales y 4 caras. El bloqueo en este problema es que no se contempla la posibilidad de pasar al espacio.

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

21. Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas…). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?

Solución: Sea n el número de monedas que tenemos en cada mano. Al pasar 6 monedas de la derecha a la izquierda en la derecha tenemos $n-6$ y en la izquierda $n+6$. Al eliminar de la mano izquierda las monedas de la derecha obtenemos:

$n+6-(n-6)=12$. Por lo tanto si pasamos 4 objetos obtenemos 8 y si pasamos 5 obtenemos 10.

22. Otro juego: Es un juego de calculadora y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.

3	6
+	–
/	=
33	

5	7
x	/
+	=
147	

10	7
+	–
x	=
123	

2	7
+	–
x	=
95	

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

Solución: Simplemente juega usando la calculadora.

CURIOSIDADES. REVISTA

Un enigma

Cuatro paredes, sin puertas
Con seis filos las harás
Y ten además en cuenta
Que el más sencillo de cinco es.

Del libro de Luis Balbuena "Cuentos de Cero"

Solución: El tetraedro

Un juego: EL NIM

Es un juego para dos jugadores
De cada fila, por turno, se pueden tomar una, dos o toda la fila. Pierde quien debe tomar la última ficha.

O O
O O O
O O O O

El número de filas y de fichas, (monedas, bolitas de papel, palillos…) puede modificarse. Es importante buscar la estrategia ganadora.

El oso

Un cazador cuenta a un grupo de amigos:
– Anduve 2 km hacia el sur, luego 2 km al este, y por último 2 km al norte. Me encontré en el lugar de partida. Y allí cacé un oso. ¿De qué color era el oso?
Amigo 1: – Naturalmente, era blanco.
Amigo 2: – ¡Falso! ¡Ahí no hay osos!
Analiza dónde estaba el cazador.

Solución: El primer amigo opina que el cazador estaba en el Polo Norte. El segundo amigo que estaba en un punto de un meridiano del hemisferio sur, tal que al andar 2 km llegara a otro meridiano de circunferencia 2 km. Pero hay más. Muchas más soluciones posibles. Búscalas

EJERCICIOS Y PROBLEMAS de 2º de ESO

23. **"El hotel de los líos":** Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen? Son cuadrados perfectos que sólo tienen un número impar de divisores.

24. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

Solución: $2\pi 2 \approx 12$ m, menos de 15 metros.

25. **La invitación:** Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Para empezar hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas.
Solución: Hay igual cantidad de limón en la jarra de agua, que agua en la jarra de limón.

26. **"Los cachorros":** Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad de lo que le queda más medio, y a su primo la mitad de lo que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?

Ayuda: Haz un esquema.
Solución: Se trata de comenzar por el final. Partiendo del resultado final 1 cachorro, sumándole un medio y multiplicándolo por dos, se obtiene de forma recursiva 3, 7, 15 y 31 que es el número de cachorros que quedaba después de cada regalo.
El cesto tenía 31 cachorros, a la amiga le regala 16, al amigo 8, a su prima 4, a su primo 2 y le queda 1.

27. Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?

Solución abierta:

28. Un amigo dice a otro:

– El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?
– No, me falta un dato.
– Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.

¿Qué edad tienen las hijas?

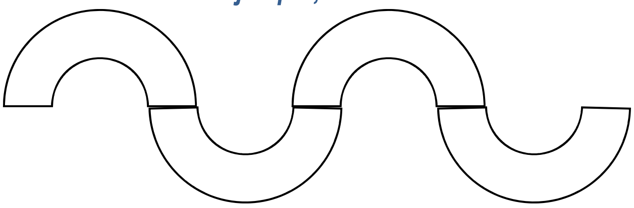
Solución: Se trata de buscar las diferentes ternas de divisores de 36 cuyo producto es 36. La suma de los números de cada una de estas ternas es diferente excepto dos de ellas que suman lo mismo: 1 + 6 + 6 = 13 y 2 + 2 + 9 = 13. En la primera no existe una mayor, luego la solución es 2, 2, 9.

29. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.

Solución: Para empezar hazlo más fácil. Empieza con una trama de dos por dos, luego de 3 x 3… Experimenta. Juega con el problema.

30. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.

Solución abierta: Hay infinitos diseños. Por ejemplo,



31. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.

Solución:

Partimos de que los 8 litros están en la jarra de 8.

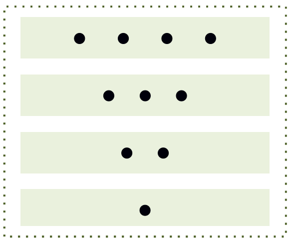
	1º	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*6º*	*7º*	*8º*	*9º*
8 litros	*8*	*5*	*5*	*2*	*2*	*7*	*7*	*4*	*4*
5 litros	*0*	*0*	*3*	*3*	*5*	*0*	*1*	*1*	*4*
3 litros	*0*	*3*	*0*	*3*	*1*	*1*	*0*	*3*	*0*

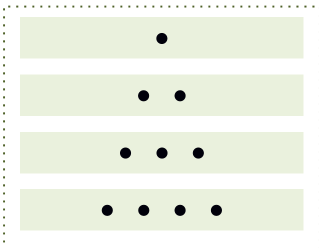
32. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5,2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m², ¿cuánto costará pintarla?

Solución abierta:

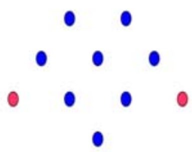
33. Monedas Ordenadas

Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:

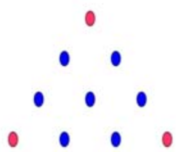




Solución: 1º)



2º)



34. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "*Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquenla*" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "*Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas*" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

Solución:* *Se trata de numerar las 6 latas y realizar una pesada con 1 bola de la primera lata, 2 bolas de la segunda, 3 de la tercera, 4 de la cuarta, 5 de la quinta y 6 de la sexta. La pesada será de 21 gramos y un número de miligramos que indica la lata incorrecta.

En el caso en el que no se sabe el número de latas defectuosas se coge de cada una de las latas un número de bolas diferente de modo que las sumas parciales no coincidan, por ejemplo, distintas potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16 y 32 el peso total será de 63 gramos y x miligramos. Expresando x en base 2 obtenemos el número de latas defectuosas.

35. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lal Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de suma:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\quad \text{LAL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$

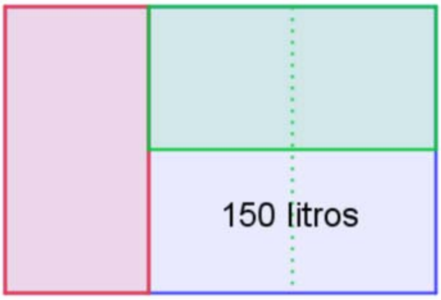
¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una suma correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, pero la solución no es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).

Solución:* *Hay varias soluciones posibles. Dos de ellas son:

$$\begin{array}{r} 1542 \\ +\quad 909 \\ \hline 2451 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1652 \\ +\quad 909 \\ \hline 2561 \end{array}$$

36. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 litros de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Solución:* *A partir del dibujo es evidente que 450 litros.



CAPÍTULO 2: NÚMEROS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS

37. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 8216 b) 591274 c) 918273 d) 90003040506

***Solución:** a) $8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6$; b) $5 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$; c) $9 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3$; d) $9 \cdot 10^{10} + 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 6$.*

38. ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 708544 b) 67339001 c) 5092175 d) 9847

***Solución:** a) centenas de millar; b) unidades de millón; c) decenas; d) unidades .*
El mayor valor lo tiene en el b) y el menor en el d)

39. Razona por qué, en el número natural 77777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

***Solución:** Porque al no ocupar el mismo lugar no tienen igual valor.*

40. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:

a) MDCVX b) MMMCCXXXIIII c) MMCDXXVI d) MMCCCXLIII

***Solución:** a) 1660; b) 3234; c) 2426; d) 2343.*

41. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.

***Solución:** 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.*

42. Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar n. Ya sabes que C_n es igual a n^2: $C_n = n^2$

Comprueba que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.

***Solución:** Comprobado*

43. Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3… Exprésalo de forma general.

***Solución:** $C_n = T_n + T_{n-1}$.*

44. Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.

Solución abierta y manipulativa:

45. Dibuja tres números hexagonales.

Solución gráfica:

46. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:

a) Un submarino navega a 345 m de profundidad
b) Hoy el termómetro marcaba 15 º C
c) El coche estaba en el sótano 5.
d) Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo

***Solución:** a) – 345 m; b) + 15 ºC; c) – 5; d) – 212.*

47. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:

a) Me he quedado sin dinero.
b) Miguel nació en el año dos mil.
c) El garaje está en el tercer sótano.

***Solución:** a) 0; b) +2000; c) – 3.*

48. Indica el significado de los números –4, 0 y +7 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un garaje b) En una temperatura c) En una cuenta

***Solución:** a) sótano, planta baja y planta 7; b) 4 grados bajo cero, a 0 ºC y a 7 ºC;*
c) Números rojos, vacía, saldo positivo.

49. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+43| b) |–7,2| c) | 0 | d) |–81,7|

***Solución:** a) 43; b) 7,2; c) 0; d) 81,7.*

50. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

Solución abierta:

51. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

Solución abierta:

52. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible: a) $\frac{24}{18}$ b) $\frac{21}{49}$ c) $\frac{7}{7}$

Solución: a) 4/3; b) 3/7; c) 1.

53. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\frac{4}{8}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{3}{11}$ y $\frac{33}{9}$ c) $\frac{5}{8}$ y $\frac{105}{168}$

Solución: a) si; b) no; c) si,

54. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{9}{4}$

Solución abierta: Por ejemplo: a) 2/10, 3/15, 4/20; b) 18/8, 27/12, 36/16.

55. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes: a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$

Solución: a) si; b) si.

56. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\frac{-1}{5}$ b) $\frac{9}{-4}$ c) $\frac{-3}{7}$ d) $\frac{2}{-15}$

Solución abierta: Por ejemplo: a) –2/10, –3/15, –4/20; b) –18/8, –27/12, –36/16; c) –6/14; –9/21; –12/28;

57. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

Solución abierta:

58. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes: a) $\frac{97}{2}$ b) $\frac{345}{4}$

Solución: a) 48,5; b) 86,25.

59. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{25}{12}$

Solución: a) 0,333...; b) 0,7777....; c) 0,8333...; d) 0,363636...; e) 2,083333......

60. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$

Solución: a) 11,123; b) 6,666; c) 9,350; d) 8,717; e) 8,334; f) 2,640.

61. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

a) $11'1234$ b) $6'\overline{6}$ c) $9'3\overline{50}$ d) $8'\overline{71}$ e) $8'334\overline{8}$ f) $2'64\overline{08}$ g) $3'99\overline{96}$

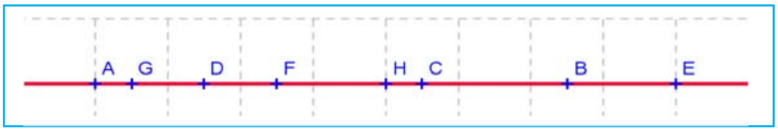
Solución: a) 11,123; b) 6,667; c) 9,350; d) 8,717; e) 8,335; f) 2,641; g) 4,000.

2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

62. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números:

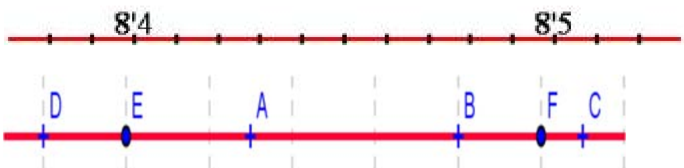
–8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

Solución:



63. Sitúa en la siguiente recta los números 8’43, 8’48, 8’51 y 8’38

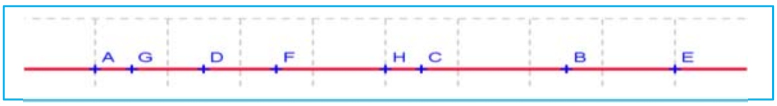
Solución gráfica:



64. Representa en una recta numérica los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

Solución gráfica: –8 < –7 < –5 < –3 < 0 < 1 < 5 < 8.

A < G < D < F < H < C < B < E



65. Completa en tu cuaderno con el signo < (menor) o > (mayor) según corresponda:
a) –13,6 –67,1 b) –80,2 +94,5 c) +37 +48 d) +52 –64 e) –21 |–25|
Solución: a) –13,6 > –67,1 b) –80,2 < +94,5 c) +37 < +48 d) +52 > –64 e) –21 < |–25|
66. Ordena de menor a mayor a) +5,1, –4,9, –1,5, +18,2, 5,17 b) +6,9, –7,2, –8,5, –5,9, –7,21
Solución: a) –4,9 < –1,5 < 5,1 < 5,17 < 18,2; b) –8,5 < –7,21 < –7,2 < –5.9 < 6,9.
67. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:
a) –0,872 y –0,8721 b) 3,58 y |–3,57| c) 7,0001 y 7,00001 d) –4,78 y –8,92
Solución: a) –0,872 b) 3,58 c) 7,0001 d) –4,78
68. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6’147 y menores que 6’2.
Solución abierta: Por ejemplo: 6,1473 y 6,1479.

3. OPERACIONES

69. Halla el resultado de las siguientes sumas:
a) (+12,8) + (+57) + (–4,6) b) (–83,2) – (–24,1) + (–10,5) c) (–35) + (–48) + (+92)
Solución: a) 65,2; b) –69,6; c) 9.
70. Efectúa estas operaciones
a) (+3,8) + (+4,2) – (–52) b) (–614) + (–77) + (–811) c) (–97) – (–12) + (+26) d) (–45) + (+52)
Solución: a) (+3,8) + (+4,2) – (–52) = 60; b) (–614) + (–77) + (–811) = –1502; c) (–97) – (–12) + (+26) = –59; d) (–45) + (+52) = 7
71. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?
Solución: 30 – 16 + 21 – 17 + 24 – 9 = 33 pasajeros.
72. Un avión vuela a 3672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?
Solución: 3672 + 213 = 3885 m.
73. Arquímedes nació en el año 287 a.C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?
Solución: 75 años.
74. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.
Solución abierta: Por ejemplo: 50 + 25 + 25; 150 – 25 – 25; 200 – 100 + 0;
75. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.
Solución abierta: Por ejemplo: –1 + 1 – 2 + 2.

76. Realiza las siguientes sumas de fracciones: a) $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$ b) $\frac{7}{6}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{5}{8}+\frac{5}{2}$ d) $\frac{67}{100}+\frac{13}{24}$
Solución: a) 23/15; b) 29/18; c) 25/8; d) 727/600.
77. Calcula: a) $\frac{5}{14}-\frac{7}{6}$ b) $\frac{11}{6}-\frac{13}{5}$ c) $\frac{13}{100}-\frac{13}{240}$ d) $\frac{50}{21}-\frac{7}{3}$
Solución: a) –17/21; b) –23/30; c) 91/1200; d) 1/21.

78. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:
a) (+35) · (+2) b) (+4) · (–72) c) (–8) · (–45) d) (–5) · (+67)
e) (+28) : (+2) f) (+27) : (–3) g) (–36) : (–2) h) (–54) : (+9)
Solución: a) 70; b) –288; c) 360; d) –335; e) 14; f) –9; g) 18; h) –6.
79. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:
a) (+721) · (+3) b) (+562) · (–3) c) (–915) · (–2) d) (–6) · (+72)
e) (+303) : (+3) f) (+505) : (–5) g) (–160) : (–4) h) (–704) : (+2)
Solución: a) 2163; b) –1686; c) 1830; d) –432; e) 101; f) –101; g) 40; h) –352.
80. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:
a) (+2) · (+40) b) (+30) · (–2) c) (–60) · (–3) d) (–50) · (+8)
e) (+80) : (+4) f) (+18) : (–3) g) (–15) : (–5) h) (–70) : (+7)
Solución: a) 80; b) –60; c) 180; d) –400; e) 20; f) –6; g) 3; h) –10.
81. Calcula: a) $\frac{8}{22}\cdot\frac{3}{75}$ b) $6\cdot\frac{7}{11}$ c) $23\cdot\frac{1}{23}$ d) $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{3}$
Solución: a) 4/275; b) 42/11; c) 1; d) 33/10.

82. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{8}$ b) $\frac{9}{15}\cdot\frac{5}{3}$ c) $\frac{14}{25}\cdot\frac{5}{21}$ d) $\frac{6}{15}\cdot\frac{10}{12}$

Solución: a) 1/3; b) 1/5; c) 2/15; d) 1/3.

83. Calcula: a) 7,3·2,54 b) 2,89·7,21 c) 3,54·5,2·6,8 d) 6,9·7,5·6,1

Solución: a) 18,542; b) 20,8369; c) 125,1744; d) 315,675.

84. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 756 · 4 – 756 · 3 b) 350 · 8 + 350 · 2 c) 927 · 13 – 927 · 3 d) 700 · 33 – 700 · 3

Solución: a) 756 · 4 – 756 · 3 = 756(4-3))756; b) 350 · 8 + 350 · 2 = 350(10) = 3500;
c) 927 · 13 – 927 · 3 = 927 *10 = 9270; d) 700 · 33 – 700 · 3 = 700 * 30 = 21000.

85. Efectúa: a) $9\cdot(4{,}01+3{,}4)$ b) $7{,}3\cdot(12+5{,}14)$ c) $2{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

Solución: a) 66,69; b) 125,122; c) 11,107

86. Realiza los productos indicados: a) $\frac{7}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}$

Solución: a) 7/10; b) 7/10; c) 7/10.

87. Efectúa las siguientes operaciones: a) $\frac{9}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}\right)$ b) $\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{8}\right)$

Solución: a) 143/24: b) 259/48; c) 549/48.

88. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad *D* = *d*· *c* + *r*

a) 8214 : 26 b) 271093 : 452 c) 1112220000 : 385 d) 274 : 25

Solución: a) cociente = 315, resto = 24; 8214 = 26*315 + 24;
b) cociente = 599, resto = 345; 271093 = 452*599 + 345;
c) cociente = 2888883, resto = 45; 1112220000 = 385*2888883 + 45;
d) cociente = 10, resto = 24; 274 = 25*10 + 24

89. Realiza las siguientes operaciones:

a) +4 – (+5) · (-3) b) +6 + (–9) : (+2–5) c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)]

Solución: a) 19; b) 9; c) 6.

90. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)
d) +11 + (+7) · (+6 – 8) e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)] f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)]

Solución: a) 2; b) –7; c) 30; d) –3; e) –12; f) 15.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Repaso números naturales

91. Realiza las siguientes operaciones: a) (34 + 52) · 5 b) 89 · 2 + 12 c) 55 + 67 · 3 + 13 d) 280 – 110 · 2 + 90

Solución: a) 430; b) 190; c) 269; d) 150.

92. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 20) b) 8 · 22 – 20 c) 8 · 22 – 8 · 20 d) 8 · (22 + 20) e) 8 · 22 + 20

Solución: a) y c)

93. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

Solución: a) 8 · (22 – 20) = 16; b) 8 · 22 – 20 = 156; c) 8 · 22 – 8 · 20 = 16; d) 8 · (22 + 20) = 336; e) 8 · 22 + 20 = 196.

94. Realiza las siguientes operaciones:

a) 23·6 + (35–13) :11–4·7 b) 48:4·8:2– (3·12):6 c) 357–23·7 +280:14 d) 20·9–11·7+265:53

Solución: a) 112; b) 42; c) 216; d) 108.

Números enteros

95. Efectúa en tu cuaderno:

a. 6 – (8 + 10 – 1 – 2) b. 7 + (2 – 8 – 1) – (8 – 1 + 6)
c. (10 – 2 – 7) – (1 – 9 – 16) d. –(9 – 6 – 8) – (– 7 – 10 + 2)

Solución: a) –8; b) –15; c) –23; d) 20.

96. Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:

a. 15 + [2 – 8 – (10 – 3)] b. 7 – [(5 – 8) – (6 – 12)]
c. (5 – 14) – [2 – (2 – 4 – 3)] d. (1 – 11 + 6) – [(3 – 2) – (4 – 16)]
e. [8 – (4 – 16)] – [10 – (5 – 12)]

Solución: a. 15 + 2 – 8 – 10 + 3 = 2; b. 7 – 5 + 8 – 6 + 12 = 16; c. 5 – 14 – 2 + 2 – 4 – 3 = –16;
d. 1 – 11 + 6 – 3 + 2 + 4 + 16 = 15; e. 8 – 4 + 16 – 10 + 5 – 12 = 3.

97. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:
a. (+4) · (+8) b. (–11) · (–5) c. (+12) · (–6) d. (–11) · (–10) e. (+16) : (+4)
f. (–12) : (+6) g. (+24) : (–3) h. (–81) : (–9) i. (–63) : (+7) j. (–30) : (–10)
***Solución:** a) 32; b) 55; c) –72; d) 110; e) 4; f) –2; g) –8; h) 9; i) –9; j) 3.*

98. Halla en tu cuaderno:
a. $(-2)^1$ b. $(-2)^2$ c. $(-2)^3$ d. $(-2)^4$ e. $(-2)^5$
f. $(-2)^6$ g. $(-2)^7$ h. $(-2)^8$ i. $(-2)^9$ j. $(-2)^{10}$
***Solución:** a) –2; b) 4; c) –8; d) 16; e) –32; f) 64; g) –128; h) 256; i) –512; j) 1024.*

99. Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:
a. 18 – 7 · 3 b. (18 – 7) · 3 c. (–12) – 4 · (–8)
d. [(–12) – 4] · (–8) e. (–5) · (+7) + (–3) f. (–5) · [(+7) + (–3)]
***Solución:** a) –3; b) 33; c) 20; d) 128; e) –38; f) –20.*

100. Calcula mentalmente: a. $(-1)^1$ b. $(-1)^2$ c. $(-1)^3$ d. $(-1)^4$ e. $(-1)^5$ f. $(-1)^6$ g. $(-1)^7$ h. $(-1)^8$ i. $(-1)^9$ j. $(-1)^{10}$
***Solución:** a) –1; b) 1; c) –1; d) 1; e) –1; f) 1; g) –1; h) 1; i) –1; j) 1.*

101. Calcula en tu cuaderno: a) $(-6)^4$ b. $(+5)^5$ c. $(-3)^3$ d. $(+4)^3$ e. $(-9)^2$ f. $(-10)^6$
***Solución:** a) 1296; b) 3125; c) –27; d) 64; e) 81; f) 1 000 000.*

102. Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: −5, 7, −3, 0, −6, 1, 2
***Solución:** 7 > 2 > 1 > 0 >7 > 2 > 1 > 0 > –3 > –5 > –6; Opuestos: 5, –7, 3, 0, 6, –1, –2; Valor absoluto: 5, 7, 3, 0, 6, 1,2.*

103. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía: Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he tomado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?
***Solución:** Lunes: 15 +10 = 25; Martes: 25 + 5= 30; Miércoles: 30 – 3 = 27; Jueves: 27 – 1 = 26. Ha aumentado en 11 €.*

104. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?
***Solución:** – 3.*

105. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?
***Solución:** Tenía 500 euros más.*

106. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?
***Solución:** 2013 + 240 = 2253; 2013 – 390 = 1623.*

107. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?
***Solución:** 19 + 9 = 28 años.*

108. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?
***Solución:** 27 – 33 = – 6. En el año 6 aC.*

109. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?
***Solución:** En el año 7 dC.*

110. Hace una hora el termómetro marcaba –5 ºC y ahora marca 5 ºC. La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?
***Solución:** Ha aumentado 10 ºC*

111. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja 12 ºC a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?
***Solución:** 19 º C bajo cero, es decir – 19 ºC.*

112. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edifico que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?
***Solución:** A la planta 5.*

113. Un juego

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre 3.

–6		**+6**
	+2	
		0

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre –70.

		+7
	–7	
–7		**+2**

Solución:

–6	***3***	***+6***
4	***+2***	***–3***
5	***–2***	***0***

–5	***2***	***+7***
–2	***–7***	***–5***
–7	***5***	***+2***

114. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:

–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €.

El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Solución: Tenía 21 euros.

Fracciones

115. Realiza los siguientes cálculos: a) $\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}}{5}\cdot\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{4}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}}+1$ c) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2$ d) $\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}\right):\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{9}{8}\right)$

Solución: a) 19/240; b) –59; c) –100/51; d) 36/47.

116. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.

Solución: Quedan 6/8 de pastel pues 2 porciones ya han sido ingeridas, y se deben repartir entre 6 + 2 comensales (a los que ya han comido, no se les va a dar más), luego a cada uno le tocará 6/64 = 0,09375 de pastel.

117. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Solución: 140 cm.

118. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?

Solución: 80/3 = 26,666 años.

119. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

a) $\dfrac{8}{3}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{16}{7}$ e) $\dfrac{21}{4}$ f) $\dfrac{5}{6}$

Solución: Propia: b) f); Impropia: a), c), d) e).

120. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.

Solución: a) 2+(2/3); c) 2+(1/2); d) 2+(2/7); e) 5+(1/4).

121. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\dfrac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\dfrac{5}{4}$ de 500?

Solución: Se han vendido 625 entradas, 125 más de la capacidad del teatro.

122. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km^3, ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?

Solución: El volumen total es de 3180 km^3, sumergido hay 2862 km^3.

123. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los 3/7 y los robles, 1/3. ¿Qué espacio ocupan las encinas?

Solución: 5/21.

124. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los 3/5 de su sueldo y José los 5/7, ¿quién gasta más?

Solución: Gasta más José.

125. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\frac{7}{6}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}+\frac{\ }{6}=\frac{\ }{6}$ b) $\frac{7}{10}-\frac{5}{14}=\frac{\ }{70}-\frac{\ }{70}=\frac{\ }{70}$

Solución: a) $\frac{7}{6}+\frac{5}{3}=\frac{7}{6}+\frac{10}{6}=\frac{17}{6}$ ***;*** ***b)*** $\frac{7}{10}-\frac{5}{14}=\frac{49}{70}-\frac{25}{70}=\frac{24}{70}$

126. 1/3 de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos,,,), en comer gastan 3/7, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?

Solución: 5/21.

127. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los 3/20 del total. Si se desperdician los 1/7, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?

Solución: Los hogares consumen 75/2 litros por persona y día, de los que se desperdician 75/14, luego en una casa de 5 habitantes se desperdician al día 375/14 $\approx$ ***26,8 litros.***

128. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan ¼ sin corregir, ¿cuánto tiempo deberá dedicar todavía?

Solución: 5/3 $\approx$ ***1,66 horas.***

129. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\frac{\ }{5}$ b) $\frac{34}{\ }$ c) $\frac{\ }{2}$

Solución: 85/5 = 34/2 = 34/2.

130. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}$ b) $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{6}$ c) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{16}:\frac{3}{10}$

Solución: a) 3/2; b) 4/15; c) 5/4; d) 5/8.

131. Tres náufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada náufrago?

Solución:

	Cocos que había	*simplificados*	*Cocos de cada una*		
Por la mañana	*3k*		*k*	*2*	*10*
Persona 3	$\left(\frac{3}{2}\right)(3k)+1$	$\frac{9k+2}{2}$	$\frac{3k}{2}$	*3*	*15*
Persona 2	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9k+2}{2}\right)+1$	$\frac{27k+10}{4}$	$\frac{9k+2}{4}$	*5*	*23*
Persona 1	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{27k+10}{4}\right)+1$	$\frac{81k+38}{8}$	$\frac{27k+10}{8}$	*8*	*35*

k = 2: Número de cocos: 6 + 3 +5 + 8 + 3 = 25

k = 10: Número de cocos: 30 + 15 +23 + 35 + 3 = 106

El valor de k es cualquier número congruente con 2 módulo 8: 2, 10, 18, 26, 34, 42, …

132. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las repartan de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

Solución: 6 hijas y 36 perlas.

Expresiones decimales

133. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número $1{,}8\overline{7}$ dé como resultado un número natural.

Solución: 169/90.

134. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:

a) 9,235 b) 57,0001 c) $8{,}\overline{7}$ d) $3{,}52\overline{87}$ e) $5'9\overline{996}$

Solución: a) 9,2 y 9,23; b) 57,0 y 57,00; c) 8,7 y 8,77; d) 3,5 y 3,52; e) 5,9 y 5,99.

135. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:

a) 8,9351 b) $5{,}19\overline{90}$ c) $83{,}\overline{74}$ d) 77,992 e) $56{,}\overline{01}$

Solución: a) 8,9 y 8,84; b) 5,2 y 5,20; c) 83,7 y 83,75; d) 78,0 y 77,99; e) 56,0 y 56,01.

136. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.

Solución: a) baja y alza; b) alza y alza; c) baja y alza; d) alza y baja; e) baja y baja.

137. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0'72 euros y cada lapicero 0'57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?

Solución: Gasto 15,36 euros.

138. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1,53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

Solución: 2,04 €.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 · (15 + 3)?

a) 303 b) 360 c) 330 d) 90

Solución: b)

2. El resultado de la operación: $\{(-5 + 8) \cdot (-3 - 5) + (-7 + 1) : (+9 - 3)\}$ es:

a) –25/6 b) +24 c) –25 d) –5

Solución: c)

3. Un termómetro ha subido 4 ºC, luego ha bajado 6 ºC, después ha bajado 8 ºC y, por último, marca menos 9 º C. La temperatura inicial era:

a) –1 ºC b) –19 ºC c) +1 ºC d) –14 ºC

Solución: c)

4. Al viajar desde una latitud de 9º Norte hasta otra de 20º Sur, la variación de latitud es:

a) 11 Sur b) 29º Norte c) 11º Norte d) 29º Sur

Solución: d)

5. Si estás situada en el punto –15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5 d) +14 +12 – 1

Solución: d)

6. Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$:

a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

Solución: d)

7. El resultado de la operación $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) \cdot 2 + \frac{51}{10}$ es :

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3

Solución: a)

8. Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{3}$:

a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$

Solución: b)

9. Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$:

a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$

Solución: a)

10. Ordena de menor a mayor los números: 5,67; 5,68; 5,6666; 5,63; 5,5; 5,8; 5,6070.

Solución: 5,5 < 5,6070 < 5,63 < 5,6666 < 5,67 < 5,68 < 5,8.

CAPÍTULO 3: POTENCIAS Y RAÍCES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POTENCIAS

139. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 5^2 b) 3^4 c) 10^6 d) 4^3 e) 1^7 f) 1000^3

Solución: a) 25, b) 81, c) 1 000 000, d) 64, e) 1, f) 1 000 000 000.

140. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 3^7 b) 7^5 c) 2^{10} d) 9^5 e) 25^3 f) 16^4.

Solución: a) 2187; b) 16807; c) 1024; d) 59049; e) 15625; f) 65536.

141. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.

Solución: Cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Cubos: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

142. Indica cuáles de las siguientes potencias son cuadrados y cuáles son cubos:

a) 7^2 b) 11^2 c) 5^3 d) 5^4 e) 8^2 f) 16^3 g) 10^2

Solución: Cuadrados: a) 7^2, b) 11^2, e) 8^2 y g) 10^2. Cubos: c) 5^3 y f) 16^3.

143. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 8^3 b) 3^2 c) 16^4 d) 48^2 e) 4^5 f) 6^6.

Solución: a) Ocho elevado al cubo. Ocho elevado a tres. b) Tres elevado al cuadrado. Tres elevado a dos. c) Diez y seis elevado a la cuarta. Dieciséis elevado a cuatro. d) Cuarenta y ocho elevado al cuadrado. Cuarenta y ocho elevado a dos. e) Cuatro elevado a la quinta. Cuatro elevado a cinco. f) Seis elevado a la sexta. Seis elevado a seis.

144. Calcula mentalmente:

a) 1^{6562}; b) 0^{8526} c) 9327^0 d) 0^{3782}; e) 1^{1000}; f) 9761^0.

Solución: a) 1; b) 0; c) 1; d) 0; e) 1; f) 1.

145. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2				
	9			
		64		
			1	
				0

Solución:

a	a^2	a^3	a^4	a^5
2	**4**	**8**	**16**	**32**
3	9	**27**	**81**	**243**
4	**16**	64	**256**	**1024**
1	**1**	**1**	1	**1**
0	**0**	**0**	**0**	0

146. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

a) $10^{\square} = 100.000$ b) $10^{\square} = 100.000.000$ c) $10^{\square} = 1000$.

Solución: a) 5; b) 8; c) 3.

147. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10:

a) 82.345 b) 3.591.825 c) 700.098 d) 2.090.190.

Solución: a) $82.345 = 8\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 4\cdot10 + 5$;

b) $3.591.825 = 3\cdot10^6 + 5\cdot10^5 + 9\cdot10^4 + 1\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 2\cdot10 + 5$;

c) $700.098 = 7\cdot10^5 + 9\cdot10 + 8$;

d) $2.090.190 = 2\cdot10^6 + 9\cdot10^4 + 1\cdot10^2 + 9\cdot10$.

148. Calcula: a) $3 \cdot 10^6$ b) $5 \cdot 10^8$ c) $2 \cdot 10^4$ d) $34 \cdot 10^5$.

Solución: a) 3 000 000; b) 500 000 000; c) 20 000; d) 3 400 000.

11. Utiliza la **calculadora** para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación dos veces seguidas la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado del número.

a) Compruébalo. Marca 8 * * = , ¿qué obtienes?

b) Continúa pulsando la tecla igual y obtendrás las potencias sucesivas: 8 * * = = =…

c) Utiliza tu calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

d) Vuelve a utilizarla para obtener las potencias sucesivas de 31 y anótalas en tu cuaderno.

Solución manipulativa:

2. OPERACIONES CON POTENCIAS Y PROPIEDADES

149. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno:

a) $8^{10} \cdot 8^2$ b) $5^{23} \cdot 5^3$ c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6$ d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9$

e) $(6^3)^2$ f) $(4^2)^4$ g) $(3^0)^6$ h) $(7^3)^2$

i) $9^{10} : 9^2$ j) $3^{23} : 3^3$ k) $11^8 : 11^3$ l) $5^{30} : 5^9$

m) $14^4 : 14^4$ n) $1^{35} : 1^{35}$ o) $7^3 : 7^0$ p) $8^4 \cdot 8^0$

Solución: a) $8^{10} \cdot 8^2 = 8^{12}$ b) $5^{23} \cdot 5^3 = 5^{26}$ c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{14}$ d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9 = 10^{21}$

e) $(6^3)^2 = 6^6$ f) $(4^2)^4 = 4^8$ g) $(3^0)^6 = 3^0 = 1$ h) $(7^3)^2 = 7^6$

i) $9^{10} : 9^2 = 9^8$ j) $3^{23} : 3^3 = 3^{20}$ k) $11^8 : 11^3 = 11^5$ l) $5^{30} : 5^9 = 5^{21}$

m) $14^4 : 14^4 = 14^{10}$ n) $1^{35} : 1^{35} = 1^0 = 1$ o) $7^3 : 7^0 = 7^3$ p) $8^4 \cdot 8^0 = 8^4$.

150. Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1. Analiza la siguiente operación:

$$\frac{25}{25} = 1 \quad \text{y también} \quad \frac{25}{25} = \frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2} = 5^0$$

Por ese motivo se dice que todo número distinto de cero elevado a cero es igual a uno.

Solución:

151. Calcula: a) $(5 \cdot 2)^7$ b) $(64 : 4)^3$.

Solución: a) $14^7 = 105413504$; b) $8^3 = 512$.

152. Calcula mentalmente:

a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^2$

d) $10^{31} \cdot 10^{40} \cdot 10^4 \cdot 10^2$ e) $1^{20} \cdot 1^{27} \cdot 1^{18}$ f) $0^{41} \cdot 0^{86}$.

Solución: a) 64; b) 81; c) 625; d) 10^{77}; e) $1^{65} = 1$; f) 0.

153. Escribe en forma de una única potencia a) $7^5 \cdot 7^6 \cdot 7^4$ b) $6^4 \cdot 6^6 \cdot 6^7$ c) $5^{20} \cdot 5^{17}$ d) $8^6 \cdot 2^5 \cdot 2^3$.

Solución: a) 7^{15}; b) 6^{17}; c) 5^{37}; d) 2^{32}.

154. Calcula mentalmente

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ b) $1^4 \cdot 1^6 \cdot 1^7$ c) $10^{15} \cdot 10^5$ d) $0^2 \cdot 0^6 \cdot 0^{12}$.

Solución: a) 64; b) 1; c) 10^{20} = 100 000 000 000 000 000 000; d) 0.

155. Calcula mentalmente: a) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ b) $0^3 \cdot 0^7 \cdot 0^8$ c) $1^{46} \cdot 1^{200}$ d) $5^5 \cdot 2^5$.

Solución: a) 10^{10} = 10 000 000 000; b) 0; c) 1; d) 100 000.

156. Escribe en forma de una única potencia y calcula: a) $2^5 \cdot 5^5$ b) $10^3 \cdot 3^3$ c) $2^6 \cdot 5^6$ d) $10^5 \cdot 5^5$.

Solución: a) $10^5 = 100000$ b) $30^3 = 27000$ c) $10^6 = 1000000$ d) $50^5 = 312500000$.

157. Escribe en forma de una única potencia: a) $\dfrac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3}$ b) $\dfrac{1{,}6^6 \cdot 1{,}6^{20} \cdot 1{,}6^1}{1{,}6^{15} \cdot 1{,}6^9}$ c) $\dfrac{(2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (2/3)^6}$

Solución: a) 3^{10}; b) $1{,}6^3$; c) $(2/3)^6$.

158. Escribe en forma de una única potencia:

a) $\dfrac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3}$ b) $\dfrac{(-1{,}6)^6 \cdot (-1{,}6)^{20} \cdot (-1{,}6)^1}{(-1{,}6)^{15} \cdot (-1{,}6)^9}$ c) $\dfrac{(-2/3)^5 \cdot (2/3)^{15} \cdot (-2/3)^2}{(2/3)^{10} \cdot (-2/3)^6}$

Solución: a) $(-3)^{10} = 3^{10}$; b) $(-1{,}6)^3 = -1{,}6^3$; c) $(-2/3)^6 = (2/3)^6$.

159. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41$ b) $53^3 \cdot 53^2$ c) $5'2^2 \cdot 5'2$ d) $27^3 \cdot 27$.
Solución: a) $41^6 = 4750104241$; b) $53^5 = 418195493$; c) $5,2^3 = 140,608$; d) $27^4 = 531441$.

160. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58$ b) $3^4 \cdot 23^2$ c) $0'6^3 \cdot 0'6^5$ d) $301^2 \cdot 301$.
Solución: a) $58^6 = 38068692544$; b) 42849; c) $0,6^8 = 0,01679616$; d) $301^3 = 27270901$.

161. Calcula utilizando la **calculadora**: a) $7,4^2 \cdot 7,4^3 \cdot 7,4$ b) $0,82^4 \cdot 0,82^2$ c) $7,35^3 \cdot 7,35^5$ d) $0,002^2 \cdot 0,002$.
Solución: a) $7,4^6 = 164206,49$; b) $0,82^6 = 0,30400667$; c) $7,35^8 = 8517236,62$; d) $0,002^3 = 0,000000008$.

3. RAÍCES

162. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.
Solución: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

163. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:
a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.
Solución: a) 7; b) 5; c) 10; d) 8; e) 9; f) 1; g) 0.

164. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:
a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.
Solución: a) 7; b) 5; c) 10; d) 7 o por exceso 8; e) 8 o por exceso 9; f) 1; g) 11.

165. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:
a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.
Solución: Naturales: a), g); N. Irracionales: d), f); No existen: b), c), e).

166. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:
a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{64}$ d) $\sqrt[3]{8}$ e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{0}$.
Solución: a) 3; b) 2; c) 4; d) 2; e) 10; f) 1; g) 0.

167. Introducir los siguientes factores en el radical: a) $2\cdot\sqrt[4]{5}$ b) $10\cdot\sqrt[3]{3}$ c) $2\cdot\sqrt[3]{4}$ d) $5\cdot\sqrt[5]{4}$ e) $3\cdot\sqrt[3]{7}$
Solución: a) $\sqrt[4]{2^4\cdot 5}=\sqrt[4]{80}$; ***b)*** $\sqrt[3]{10^3\cdot 3}=\sqrt[3]{3000}$; ***c)*** $\sqrt[3]{2^3\cdot 4}=\sqrt[3]{32}$; ***d)*** $\sqrt[5]{5^5\cdot 4}=\sqrt[5]{12500}$; ***e)*** $\sqrt[3]{3^3\cdot 7}=\sqrt[3]{189}$

168. Extraer los factores que se pueda del radical: a) $\sqrt[3]{10000\,x^9y^3}$ b) $\sqrt[5]{100000}$ c) $\sqrt[4]{81a^8b^6c^4}$ d) $\sqrt[3]{1000a^7b^4}$.
Solución: a) $10x^3y\sqrt[3]{10}$; ***b) 10; c)*** $3a^2bc\sqrt[4]{b^2}$; ***d)*** $10a^2b\sqrt[3]{ab}$.

169. Calcula: a) $3\sqrt{8}+5\sqrt{32}-6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{27}+3\sqrt{3}-2\sqrt{81}$.
Solución: a) $3\sqrt{8}+5\sqrt{32}-6\sqrt{2}=6\sqrt{2}+20\sqrt{2}-6\sqrt{2}=20\sqrt{2}$; ***b)*** $4\sqrt{27}+3\sqrt{3}-2\sqrt{81}=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}-18=15\sqrt{3}-18$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Potencias

170. Escribe en forma de potencias de 10:
a) Un millón b) Un billón c) Una centena de millar.
Solución: a) 10^6; b) 10^{12}; c) 10^5.

171. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:
a) 25^0 b) 10^6 c) $5\cdot10^4$ d) 2^4 e) 4^2
f) 10^2 g) 10^5 h) 10^{12} i) 10^6 j) 6^3
Solución: a) 1; b) 1000000; c) 50000; d) 16; e) 16; f) 100; g) 100000; h) 1000000000000; i) 1000000; j) 216.

172. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10:
a) 600000000 b) 250000000 c) 914000000000
Solución: a) $6\cdot10^8$; b) $25\cdot10^7$; c) $914\cdot10^9$

173. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:
a. La distancia de la Tierra al Sol → 150 000 000 km
b. El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno: 37643750 000 000 000 000 000 átomos
Solución: a) $15\cdot10^7$ km; b) $38\cdot10^{21}$ átomos.

174. Halla en tu cuaderno:
a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4$ b) $(7^4)^2$ c) $6^5 : 3^5$ d) $(9 : 3)^5$

e) $(15:5)^3$ f) $(21:7)^3$ g) $(75:5)^4$ h) $(4:2)^5$ i) $8^2 : 2^5$

***Solución:** a) 2^{16}; b) 7^8; c) 2^5; d) 3^5; e) 3^3; f) 3^3; g) 15^4; h) 2^5; i) 2.*

175. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$ ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?

***Solución:** $(4^3)^2 = 4^6$ y $4^{(3)^2} = 4^9$. Son distintos. La potenciación no es asociativa.*

176. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:

a) $36 \cdot 6^2$ b) $3^3 \cdot 81$ c) $36 : 6^2$

***Solución:** a) 6^4; b) 3^7; c) 1.*

177. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:

a.) $12^7 : 6^7$ b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16$ c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4$ d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5$

***Solución:** a) 2^7; b) 2^3; c) $5^2 3^2/2^2$; d) 2^3.*

178. Calcula: a) $(2 + 3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales? b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6 + 8)^2$ ¿Son iguales?

***Solución:** a) $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$; $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Son distintos; b) $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ y $(6 + 8)^2 = 14^2 = 196$.*

179. Calcula en tu cuaderno:

a) $2^3 + 2^4$ b) $3^5 - 3^4$ c) $5^3 \cdot 5^2$ d) $10^4 \cdot 10^3$ e) $7^4 : 7^2$ f) $10^5 : 10^3$

***Solución:** a) $8 + 16 = 24$; b) $243 - 81 = 162$; c) $5^5 = 3125$; d) $10^7 = 10000000$; e) $7^2 = 49$; f) $10^2 = 100$.*

180. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

***Solución:** La arista mide 6 cm, el volumen 216 cm³.*

181. Calcula en tu cuaderno: a) $(2^3 \cdot 8 \cdot 2^5) : (2^6 \cdot 2^3)$ b) $(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5) : (5 \cdot 5^2 \cdot 5)$

***Solución:** a) 4; b) $5^3 = 125$.*

182. Calcula 5^3 y 3^5 ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$ ¿Son iguales?

***Solución:** $5^3 = 125$ y $3^5 = 243$. No son iguales. No tienen esa propiedad conmutativa que si tiene el producto: $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 15$.*

183. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1000; 144.

***Solución:** $12 = 2^2 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $144 = 2^4 \cdot 3^2$.*

184. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3$ b) $(16^2 : 4^3)^3$ c) $(9^2 : 3^3)^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5$

***Solución:** a) $(5^3 \cdot 5^2)^3 = 5^{15}$ b) $(16^2 : 4^3)^3 = 2^6$ c) $(9^2 : 3^3)^2 = 3^2$*

d) $(2^5 : 2^2)^3 = 2^9$ e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2 = 3{,}7^7$ f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5 = 2{,}5^6$.

185. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6$ b) $9^4 \cdot 27^2$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2$

d) $(7^{10} : 7^2)^2$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3$

***Solución:** a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6 = 7^{108}$ b) $9^4 \cdot 27^2 = 3^{10}$ c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2 = 2^{24}$*

d) $(7^{10} : 7^2)^2 = 7^{16}$ e) $(9^5 \cdot 81^2)^3 = 3^{54}$ f) $(6^7 \cdot 36^5)^3 = 6^{51}$.

186. Un campo cuadrado mide 3600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?

***Solución:** Tiene de lado 60 m luego hacen falta 240 metros de valla.*

187. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4? ¿Y para obtener 8^8?

***Solución:** a 4, a 12.*

188. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.

***Solución:** 25 cuadrados pequeños respectivamente; 36, 49 y 100.*

Raíces

189. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{49}$ c) $\sqrt{1}$ d) $\sqrt{0}$

e) $\sqrt{169}$ f) $\sqrt{196}$ g) $\sqrt{36}$ h) $\sqrt{144}$

***Solución:** a) 11; b) 7; c) 1; d) 0; e) 13; f) 14; g) 6; h) 12.*

190. La superficie de un cuadrado es de 1000000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

***Solución:** Lado = 1000 m; Perímetro = 4000 m.*

191. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt{625}$

d) $\sqrt[4]{81}$ e) $\sqrt[3]{27}$ f) $\sqrt{1000000}$

Solución: a) 2; b) 10; c) 25; d) 3; e) 3; f) 1000.

192. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{60}$ b) $\sqrt{250}$ c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ f) $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ g) $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ h) $\sqrt[4]{81b^5m^9}$

Solución: a) $\sqrt{60}$ ***= 2***$\sqrt{15}$ ***b)*** $\sqrt{250}$ ***=5***$\sqrt{10}$ ***c)*** $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3}$ ***= 5a²bc***$\sqrt[3]{b^2}$ ***d)*** $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1}$ ***= 2ab²***$\sqrt[3]{abc}$

e) $\sqrt{49b^5x^8}$ ***= 7b²x⁴***$\sqrt{b}$ ***f)*** $\sqrt[3]{125b^6c^5}$ ***=5b²c***$\sqrt[3]{c^2}$ ***g)*** $\sqrt[3]{216b^4x^7}$ ***= 6bx²***$\sqrt[3]{bx}$ ***h)*** $\sqrt[4]{81b^5m^9}$ ***= 3bm²***$\sqrt[4]{bm}$

193. Introduce los siguientes factores en el radical:

a) $3x\sqrt{x}$ b) $5\sqrt{100}$ 5 c) $6\sqrt{32}$ d) $4\sqrt{20}$

e) $2\sqrt[3]{3}$ f) $7a\sqrt[3]{3}$ g) $5\sqrt[5]{2^4}$ h) $a\sqrt[3]{5}$

Solución: a) $3x\sqrt{x} = \sqrt{9x^3}$ ***b)*** $5\sqrt{100} = \sqrt{2500}$ ***c)*** $6\sqrt{32} = \sqrt{1152}$ ***d)*** $4\sqrt{20} = \sqrt{320}$

e) $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$ ***f)*** $7a\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1029a^3}$ ***g)*** $5\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{10000}$ ***h)*** $a\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5a^5}$

194. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.

Solución gráfica: Son cuadrados de lado 6, 7, 8 y 10 respecticamente.

195. Escribe el signo = o ≠ en el hueco:

a) $\sqrt{64+36}$ $\square$ $\sqrt{64} + \sqrt{36}$. b) $\sqrt{9+16}$ $\square$ $\sqrt{9} + \sqrt{16}$.

Solución: a) $\sqrt{64+36}$ ***= 10 ≠*** $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ ***= 8 + 6 = 14; b)*** $\sqrt{9+16}$ ***= 5 ≠*** $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ ***= 3 + 4 = 7.***

196. Halla en tu cuaderno:

a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}$ b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}$ d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}$

Solución: a) $9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180} = 18\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 24\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

b) $30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12} = 90\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 46\sqrt{3} = 53\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50} = 5\sqrt{2} - 14\sqrt{2} + 60\sqrt{2} = 51\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7} = 12\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

197. Calcula en tu cuaderno:

a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}$ b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2$ d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2$

Solución: a) $5 \cdot \sqrt{16} - 32 : 2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49} = 20 - 4 + 24 = 40.$

b) $3 \cdot 10^2 - 5 \cdot \sqrt{64} + 7^0 = 300 - 40 + 1 = 261.$

c) $5 \cdot 3^2 - 2 \cdot (1 + \sqrt{36}) - 2 = 45 - 14 - 2 = 29.$

d) $32 : 2^3 - 2 \cdot \sqrt{25} + 2^2 = 4 - 10 + 4 = -2.$

Problemas

198. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 7 225 m² de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

Solución: 85 m.

199. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?

Solución: Están abiertas las puertas: 1, 4, 9, 16…. Los cuadrados perfectos.

200. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8,25 minutos en llegar a la Tierra.

Solución: 148500000 km = $1,485 \cdot 10^8$.

201. Halla el volumen de un cubo de 1,5 m de arista.

Solución: 3,375 m^3.

202. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es 8 100 m^2. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.

Solución: Lado de esta parcela = 90. Lado de la otra = 180. Área = 32400 m^2.

203. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

Solución: V = 343 cm^3.

204. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

Solución: 29 plantas. El cuadrado tiene 5 plantas de lado.

205. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

Solución: Tiene 36 baldosas.

206. Arquímedes, en su tratado *El arenario* contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.

a) Calcula el volumen de la Tierra en km^3, y escribe ese volumen en notación exponencial.
b) Pasa el volumen a mm^3, en notación exponencial.
c) Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm^3. Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.
d) Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm^3 por 100.
e) ¿Has obtenido $1,15 \cdot 10^{32}$ granos de arena?

Solución: a) $(4/3)\pi 6500^3 = 1,15035 \cdot 10^{12}$ km^3; b) $= 1,15035 \cdot 10^{30}$ mm^3; c) 100 granos en cada mm^3; d) Caben $1,15 \cdot 10^{32}$ granos de arena.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4$, $(-4)^3$ y $(-5)^2$

a) –16, –12, 25 b) 16, –64, 25 c) 32, –64, 10 d) –64, –32, –26

Solución: b)

2. ¿Cuál es el resultado de la operación $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2$?

a) 900 b) $9 \cdot 10^4$ c) $20 \cdot 10^2$ d) 500

Solución: a)

3. Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda: a) 3^3 ▯ 27 b) 1^{35} ▯ 35 c) 732^0 ▯ 732 d) 10^5 ▯ 50

Solución: a) $3^3 = 27$ b) $1^{35} \neq 35$ c) $732^0 \neq 732$ d) $10^5 \neq 50$

4. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?

a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) –19683

Solución: c)

5. ¿Cuál de las respuestas corresponde a la división $0'7^6 : 0'7^4$?

a) $0'7^2$ b) $0'7^3$ c) $0'7^{10}$ d) 6/4

Solución: a)

6. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$

a) –1000 b) –30 c) 100 d) 60

Solución: a)

7. Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0'2)^2)^4$

a) $(0'2)^8$ b) $(-0'2)^6$ c) 0'032 d) –0'0016

Solución: a)

8. ¿La raíz cuadrada de 81 vale?

a) 18 b) 8,7 c) 9 d) 3

Solución: c)

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 169 b) 441 c) 636 d) 1024 e)

700

Solución: e)

10. El lado de una superficie cuadrada de 196 centímetros cuadrados mide:

a) 19 cm b) 14 cm c) 13 cm d) 17 cm

Solución: b)

CAPÍTULO 4: DIVISIBILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. DIVISIBILIDAD

207. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.

Solución: Múltiplos de 11: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77; Múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49.

208. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

Solución: 15, 30, 45, 135.

209. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.

Solución: 24, 36, 48, 60, 72, 84.

210. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

Solución: 5 es divisor de 40; 8 es divisor de 40; 40 es múltiplo de 5 y de 8; 40 es divisible entre 5 y entre 8.

211. Escribe frases usando las expresiones: "*ser múltiplo de*", "*ser divisor de*" y "*ser divisible por*" y los números 27, 3 y 9.

Solución abierta: Por ejemplo: 3 es divisor de 9 y de 27; 9 es múltiplo de 3; 27 es múltiplo de 3 y de 9...

212. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?

Solución: 21, 24, 81, 90, 234, 621, 600, 3411, 46095, 16392, 385500. Son divisibles por 3.

213. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.

Solución abierta: Por ejemplo: 70, 140, 210, 280.

214. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 15*A*72 sea múltiplo de 3. b) 2205*A* sea múltiplo de 6. c) 6*A*438 sea múltiplo de 11.

Solución: a) A = 0, 3 6 o 9; b) A = 0 o 6; c) A = 4.

215. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

Solución: No, 6 es divisible por 2, y no lo es por 4. Al revés, si, todos los números divisibles por 4, lo son por 2.

216. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

Solución: Debe ser divisible entre 3 y 5, luego la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3, y terminar en 0 o en 5.

217. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	
984486725	Divisible por 5	
984486720	Divisible por 3	
783376500	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

Solución:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	***Verdadero***
984486725	Divisible por 5	***Verdadero***
984486720	Divisible por 3	***Verdadero***
783376500	Divisible por 6	***Verdadero***
984486728	Divisible por 4	***Verdadero***
23009845	Divisible por 11	***Falso***

218. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.

Solución: Por ejemplo 3925 es múltiplo de 5, y es igual a $3\cdot1000 + 9\cdot100 + 2\cdot10 + 5$. Observa que todos los sumandos son siempre múltiplos de 10, salvo, quizás el último, que debe ser, por tanto 5 o 0.

219. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.

Solución: Por ejemplo 3928 es igual a $3\cdot1000 + 9\cdot100 + 2\cdot10 + 8$. Los sumandos $3\cdot1000$ y $9\cdot100$ son múltiplos de 4. Para que el número sea múltiplo de 4, deben serlo también los dos últimos: 28.

220. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que $10 = 9 + 1$. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.

Solución: Por ejemplo 3927 es igual a $3\cdot1000 + 9\cdot100 + 2\cdot10 + 7 = 3\cdot(999 + 1) + 9\cdot(99 + 1) + 2\cdot(9 + 1) + 7 =$ $(3\cdot999+ 9\cdot99 +2\cdot9) + (3 + 9 + 2 + 7)$. El primer sumando es múltiplos de 3: $3\cdot999 + 9\cdot99 +2\cdot9$, así que para que el número lo sea, basta con que lo sea el segundo: $(3 + 9 + 2 + 7)$.

221. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que 10 = 11 – 1. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.

Solución: Por ejemplo 3927 es igual a $3\cdot1000 + 9\cdot100 + 2\cdot10 + 7 = 3\cdot(1001 - 1) + 9\cdot(99 + 1) + 2\cdot(11 - 1) + 7 =$ $(3\cdot(1001) + 9\cdot(99) + 2\cdot(11)) + (-3 + 9 - 2 + 7)$. El primer sumando: $(3\cdot(1001) + 9\cdot(99) + 2\cdot(11))$ es múltiplo de 11, luego para que el número lo sea, basta con que también el segundo sea o 0 o múltiplo de 11: $(-3 + 9 - 2 + 7)$

222. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

Solución: 75 y 150.

223. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 50 es múltiplo de 10.
b) 2 es divisor de 30.
c) 4 es múltiplo de 16.
d) 66 es divisible por 11.
e) 80 es divisor de 8.
f) 3 es divisible por 12.

Solución: Verdaderas: a), b), d), f) ; falsas: c), e).

224. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 372*x*54*y*.

Solución: y debe ser y = 0, pues para que sea múltiplo de 10, debe terminar en cero. Para que sea múltiplo de 9 la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 9, por lo que x = 6.

225. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

Solución: El 666. Debe terminar en 0, 2, 4, 6 o 8, y la suma de sus cifras ser múltiplo de 9.

226. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300

Solución: a) {1, 3, 5, 15, 25, 75}; b) {1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88}; c) {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}; d) {1, 5, 25}; e) {1, 2, 4, 8, 16, 32, 5, 10, 20, 40, 80, 160}; f) {1, 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12, 20, 15, 50, 75, 25, 100, 150, 300}

2. NÚMEROS PRIMOS

227. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

Solución: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79...

228. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

Solución: Hay un número infinito de números primos.

229. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

Solución manipulativa:

230. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos? Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.

Solución: El 13.

231. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

Solución: La criba es un utensilio que se emplea para limpiar el grano (principalmente del trigo) de la paja, el polvo y otros sólidos no deseados con que se haya mezclado. En el contexto matemático se utiliza como sinónimo de separación. En nuestro caso hablamos de la criba de Erastótenes, que nos ayuda a separar los números primos de los compuestos. Un algoritmo es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos. Este se usa tanto en contextos matemáticos como informáticos.

232. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

Solución: a) $50 = 2\cdot5^2$; b) $36 = 2^2\cdot3^2$; c) $100 = 2^2\cdot5^2$; d) $110 = 2\cdot5\cdot11$.

233. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

Solución: a) $150 = \ = 2\cdot3\cdot5^2$; b) $121 = 11^2$; c) $350 = 2\cdot5^2\cdot7$; d) $750 = 2\cdot3\cdot5^3$.

234. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342

Solución: a) $1240 = 2^3\cdot3\cdot5\cdot7$; b) $2550 = 2\cdot3\cdot5^2\cdot7$; c) $4520 = 2^3\cdot5\cdot113$; d) $5342 = 2\cdot2671$.

235. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

Solución: Todos ellos tienen como factores 2 y 5 con la misma potencia, la cual coincide con el número de ceros que tienen.

236. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

Solución: Todos son potencias de dos. 512, 1024, 2048, 4096, 8192

237. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80

Solución: a) 45; b) 11; c) 6; d) 16.

238. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Solución: a) 11; b) 6; c) 25; d) 1.

239. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

Solución: a) 120; b) 80; c) 330; d) 240.

240. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Solución: a) 66; b) 9240; c) 600; d) 14256.

241. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

Solución: a) 10 collares; b) con 3 cuentas blancas, 1 azul y 9 rojas cada uno.

242. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

Solución: Dentro de 24 horas, otra vez a las 9 de la mañana.

243. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

Solución: 12 ramos, con 2 rosas y 3 claveles.

244. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?

b) ¿A qué hora ocurrirá?

Solución: a) 120 minutos = 2 horas, a las 12 de la mañana.

245. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

Solución: Con 60 pasteles les toca un pastel a cada uno.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Divisibilidad

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

Solución abierta: Por ejemplo: 110, 176, 242, 308, 396, 440, 506, 550, 616, 660, 682, 748, 814…

2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

Solución: Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40; Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60. Son comunes: 12, 24 y 36.

3. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 24*A*75 sea múltiplo de 5. b) 1107*A* sea múltiplo de 3. c) 5*A*439 sea múltiplo de 6.

Solución: a) A puede ser cualquier número: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; b) A puede ser 0, 3, 6 o 9; c) No hay solución; como el número termina en 9 no es múltiplo de 2 y por tanto no puede ser múltiplo de 6.

4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

Solución: 30, 60, 75, 150.

5. Busca todos los divisores de 210.

Solución: {1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 210}

6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Solución:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	***Verdadero***
78344	Divisible por 6	***Falso***
87300	Múltiplo de 11	***Falso***
2985644	Múltiplo de 4	***Verdadero***
1	Divisor de 13	***Verdadero***
98	Divisor de 3	***Falso***

Números primos

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de *m* y *n* sin averiguar el valor numérico de cada uno:
   a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
   b) $m = 3 \cdot 5$ $n = 2 \cdot 7$
   c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $n = 22 \cdot 32$
   d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $n = 2 \cdot 52 \cdot 7$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5$

Solución: a) m.c.m.(m, n) = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 5 = 360, y M.C.D.(m, n) = 6;
b) m.c.m.(m, n) = 2 · 3 · 5 · 7 = 210 y M.C.D.(m, n) = 1;
c) m.c.m.(m, n) = 11 · 3 · 13 · 32 = 13728 y M.C.D.(m, n) = 11 · 2 · 2 · 2 = 88;
a) m.c.m.(m, n) = 3 · 5 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 13 · 7 = 98280 y M.C.D.(m, n) = 8.

8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:
   a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ………
   b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ………

Solución:
   a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ***su producto.***
   b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ***1***.

9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

a) 4 y 8	d) 7 y 10	g) 10 y 15	j) 2 y 2	m) 2, 3 y 4
b) 2 y 3	e) 6 y 12	h) 2 y 5	k) 4 y 1	n) 3,6, y 12
c) 3 y 12	f) 6 y 9	i) 4 y 6	l) 3 y 7	o) 3, 4 y 6

Solución: a) 8 y 4; b) 6 y 1; c) 3 y 12; d) 70 y 1; e) 12 y 6; f) 18, y 3; g) 30 y 5; h) 10 y 1; i) 12 y 2; j) 2 y 2; k) 4 y 1; l) 21 y 1; m) 12 y 1; n) 12 y 3; o) 12 y 1.

10. Calcula: a) m.c.m.(8, 40) M.C.D.(8, 40)
    b) m.c.m.(15, 35) M.C.D.(15, 35)
    c) m.c.m.(84, 360) M.C.D.(84, 360)

Solución: a) m.c.m.(8, 40) = 40 y M.C.D.(8, 40) = 8; b) m.c.m.(15, 35) =105 y M.C.D.(15, 35) = 5
c) m.c.m.(84, 360) = 2520 y M.C.D.(84, 360) = 12.

11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes

Solución: Coinciden cada 180 segundos, es decir, cada 2 minutos, luego vuelven a coincidir a las 18:32 y 18:34 horas

12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:
    a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.
    b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

Solución: Coinciden sus salidas cada 360 minutos, es decir, cada 6 horas; a) Vuelven a salir juntos a las 12 horas.
b) El primero hace un viaje cada 2 horas, luego en ha efectuado 3 viajes; el segundo, 5 y el 3º, 4 viajes.

13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

Solución: Sólo 2, con 16 piezas de coral 44 de turquesa, 28 perlas y 33 azabaches.

14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

Solución: Cada 360 minutos.

15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

Solución: Cada 60 km.

16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

Solución: Puede armar 6 bolsas (para 6 amigos) con 2 gorros, 1 collar, 3 anillos y 6 caramelos.

17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas maquinas durante ese periodo?

Solución:

18. Comprueba si 2 047 es primo usando la hoja de cálculo

Solución: Resuelto totalmente en el texto

AUTOEVALUACIÓN

246. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.
b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.
c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.

Solución: a)

247. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?
a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63} c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}
b) D(63) = {1, 2, 9,21,63} d) D(63) = {0, 1, 3, 7, 9, 21, 63}

Solución: c)

248. La descomposición de 81000 en factores primos es:
a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

Solución: a)

249. De los números:183, 143 y 1973,
a) Todos son primos b) Ninguno es primo c) 143 es primo d) 1973 es primo

Solución: d)

250. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?
a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.
b) 11 es múltiplo de 121.
c) 33 es divisor de 11.
d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.

Solución: d)

251. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2\cdot(3+4)=2\cdot3+2\cdot4$ es:
a) La propiedad conmutativa. b) La propiedad distributiva.
c) La propiedad asociativa. d) Esa igualdad no es cierta.

Solución: b)

252. El M.C.D.(650, 700) es: a) 10 b) 30 c) 20 d) 50

Solución: d)

253. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?
a) El 17 de septiembre b) El 1 de septiembre c) El 17 de agosto d) Ese año no vuelven a coincidir

Solución: a)

254. Queremos alicatar una pared de 615x225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?
a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible

Solución: a)

CAPÍTULO 5: SISTEMAS DE MEDIDA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

255. Clasifica como magnitudes o unidades de medida. Indica cuáles de las unidades de medida pertenecen al SI:
a) Centímetro cúbico b) Tiempo c) Hora d) Memoria de un ordenador e) Gramo f) Masa h) Kilómetros por hora

Solución: Magnitudes: b), d), f); Unidades de medida: a) SI, c) SI, e) SI, h).

256. Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:
a) Área b) Herzio c) Yuan d) Grado Fahrenheit e) Año luz

Solución: a) Superficie b) Frecuencia c) Dinero d) Temperatura d) Longitud

257. Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:
a) La edad de la Tierra b) El tamaño de un jardín
c) La capacidad de un bidón d) La distancia entre Madrid y Valencia
e) La masa de un armario f) Lo que tardas en hacer un problema

Solución: a) Año b) m^2 c) litro d) kilómetro e) Tonelada f) Minutos

258. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:

12 º C 2 km 33 m^2 5 l 0,55 g

masa longitud capacidad superficie temperatura

Solución:

masa → 0,55 g

longitud → 2 km

capacidad → 5 l

superficie → 33 m^2

temperatura → 12º C

259. Si Ramón mide 1,65 metros y Jesús mide 164 centímetros: ¿Quién es más alto?

Solución: Ramón

260. Contesta con una regla graduada:
a) Mide la longitud de tu cuaderno. ¿Cuánto mide?
b) Mide un lápiz. ¿Cuánto mide?

Solución abierta:

261. Averigua cuánto mide de largo tu habitación.

Solución abierta:

262. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:
a) 54 dm b) 21,08 m c) 8,7 hm d) 327 mm

Solución: a) 540 cm b) 2108 cm c) 87000 cm d) 32,7 cm

263. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:
a) 8 m 1 mm en centímetros b) 3,5 km 27 dam en centímetros c) 13 km 21 mm en milímetros
d) 7 hm 15 cm en centímetros e) 2 dam 5 dm en metros f) 0,6 m 340 mm en decímetros.

Solución: a) 800,1 cm b) 377000 cm c) 13000021 mm d) 70015 cm e) 20,5 m f) 9,4 dm

264. Observa la tabla anterior y calcula:
a) 35 dam^2= ____ m^2 b) 67 m^2 = ____mm^2 c) 5 km^2 = ____ m^2 d) 7 m^2 = ____ hm^2

Solución: a) 35 dam^2= 3500 m^2 b) 67 m^2 = 67 000 000mm^2 c) 5 km^2 = 5000000 m^2 d) 7 m^2 = 0,0007 hm^2

265. Pasa 98 hm^2 37 dam^2 a centímetros cuadrados.

Solución: 9800000000 + 37000000 = 9837000000 cm^2

266. Expresa las siguientes superficies en áreas:
a) 1.678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28.100 ca

Solución: a) 167 800 a b) 500 a c) 820 a d) 281 a

267. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:
a) Centímetros cuadrados b) Decámetros cuadrados c) Hectáreas d) Áreas.

Solución: *a) 71 400 000 cm²* *b) 71 ,4 dam²* *c) 0,714 ha* *d) 71,4 a*

268. Expresa en metros cúbicos 3,2 dam³ 5600 dm³.

Solución: 3200 + 5,6 = 3205,6 m³

269. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) 0,38 m³ b) 81 dm³ c) 1,23 hm³ d) 52 m³

Solución: *a) 0,00038 dam³* *b) 0,000081 dam³* *c) 1230 dam³* *d) 0,052 dam³*

270. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?

Solución: 10 dL

271. Expresa en hectolitros:

a) 34 L b) 1.232 cL c) 57 daL d) 107 hL

Solución: *a) 0,64 hL* *b) 0,7232 hL* *c) 9,7 hL* *d) 6070 hL*

272. Ordena de menor a mayor estas medidas:

a) 7,0001 hm³ b) 23.000 L c) 8 mL d) 4 mm³

Solución: *d < c < a < b*

273. Calcula el volumen (en litros y en cm³ de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

Solución: *2 L = 2000 cm³*

274. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:

a) 17 g b) 59 dag c) 73,5 kg d) 350 g

Solución: *a) 0,17 hg* *b) 5,9 hg* *c) 735 hg* *d) 3,5 hg*

275. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 3,6 dag b) 59 kg c) 740,5 kg 8,5 dag d) 3 dag 15,10 dg

Solución: a) 36 g *b) 59000 g* *c) 74050 + 85 = 74135 g* *d) 30 + 1,51 = 31,51 g*

276. Expresa en kilogramos:

a) 5 t 5 q 2,5 magb) 9,35 t 750 dag c) 712 q 459 hg d) 22 t 3 mag 8 kg

Solución:

a) 5000 + 500 + 25 = 5525 kg *b) 9350 + 7,5 = 9357,5 kg*

c) 71200 + 45,9 = 71245,9 kg *d) 22000 + 30 + 8 = 220038 kg*

277. Estima la masa de:

a) tu cuaderno b) tu bolígrafo c) tu cartera d) tu mesa

Solución abierta

2. MEDIDA DE ÁNGULOS

278. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´

Solución: a) 3º 28' 20"; b) 1º 23'; c) 3' 50"; d) 20º 4' 53"

279. Pasa de forma incompleja a forma compleja

a) 12 o 34´ 40´´ b) 13 o 23´ 7 ´´ c) 49 o 56´ 32 ´´ d) 1 o 25´ 27 ´´

Solución: a) 45280"; b) 48187"; c) 179792"; d) 5127".

280. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465"		
	245 ´ 32 ´´	
		31 o 3´ 55 ´´

Solución:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465"	*141' 5"*	*2º 21 ' 5"*
14732"	245 ´ 32 ´´	*4º 5' 32"*
111835"	*1863' 55"*	31 o 3´ 55 ´´

281.

282. Utiliza una hoja de cálculo, y calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´ b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´

c) 16 º 45' + 23 º 13" + 30 º 20´ 30´´ d) 65 º 48´ 56´´ – 12 º 33´ 25´´

e) 35 º 54´ 23´´ – 15 º 1´ 35" f) 43 º 32´ 1 ´´ – 15 º 50´ 50"

Solución: a) 47º 12' 45"; b) 33º 44' 13"; c) 70º 5' 43"; d) 53º 22' 51"; e) 20º 52' 48"; f) 27º 41' 11".

34° 45' 30'' + 12 ° 27' 15''	34		45	30
	12		27	15
	46		72	45
16 ° 30' 1''+ 12° 13' 12'' + 2	2		1	
	12		13	12
	16		30	1
		30	44	13
16 ° 45' + 23 ° 13" + 30 ° 20'	30		20	30
	23			13
	16		45	
		69	65	43
65 ° 48' 56'' – 12 ° 33' 25''	65		47	116
	12		25	65
		53	22	51
35 ° 54' 23'' – 15 ° 1' 35"		35	53	83
		15	1	35
		20	52	48
43 ° 32' 1 '' – 15 ° 50' 50"		42	91	61

3. MEDIDA DEL TIEMPO

283. ¿Cuántos segundos tiene una hora?

Solución: 3600.

284. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos?

Solución: 168 horas; 10080 minutos.

285. ¿Cuántas semanas tiene un año no bisiesto?

Solución: Unas 52 semanas.

4. UNIDADES MONETARIAS

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

286. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1.200 € a libras, bolivianos, yenes y Dirhams:

Solución: 1200 € = 1032 libras = 10800 bolivarianos = 157200 yenes = 13320 durhams.

287. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 $ b) 4051,5درهم c) 104.800 ¥ (yenes) d) 5.103 Bs

Solución: a) 300 €; b) 365 €; c) 800 €; d) 567 €.

288. Jessica se quiere comprar una tablet. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2.700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la tablet?

Solución: En China. Le cuesta sólo 22 €.

289. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

Solución: 200 € = 172 libras = 260 dólares = 720 soles = 1800 bolivarianos = 26200 yenes = 1600 yuanes = 2220 durhams.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de longitud

1. Descompón en sus distintas unidades:

a) 3945,67 cm b) 415,95 mm c) 5148 m d) 67,914 km e) 0,82 dam

Solución:

a) 3 dam 9 m 4 dm 5 cm 67 mmm b) 4 dm 1 cmm 5,95 mm c) 5km 1 hm 4 dam 8 m

d) 6 Mam 7 km 9 hm 1 dam 4 m e) 8m 2 dm

2. Completa con el número o unidad correspondiente:

a) 50 m = _______ hm = 5000 _______ b) 300 hm = 30 _____ = ___________ m

c) _____ dm = _______ m = 2300 mm d) 40 km = 4000 ____ = ___________ dm

Solución:

a) 50 m = 0,5 hm = 5000 cm b) 300 hm = 30 km = 30 000 m

c) 23 dm = 2,3 m = 2300 mm d) 40 km = 4000 dam = 400 000 dm

3. Ordena de menor a mayor:

2,7 m; 30 cm; 0,005 km; 2600 mm; 0,024 hm; 26 dm.

***Solución:* 30 cm < 0,024 hm < 2600 mm = 26 dm < 2,7 m < 0,005 km**

4. Calcula la longitud que falta o sobra para tener a 1 m:

a) 27 cm b) 300 mm + 25 cm c) 0,00034 km + 0,22 dam d) 0, 3 m + 27 cm + 120 mm

Solución: a) faltan 73 cm; b) faltan 45 cm; c) sobran 1,54 m; d) faltan 31 cm.

5. Unos amigos están planeando hacer el Camino de Santiago andando desde Frómista (Palencia). La distancia a recorrer es de unos 400 km. Ellos calculan que a un paso cómodo pueden andar 5 km en cada hora. Si piensan andar 6 horas al día, ¿cuántos días tardarán en hacer el camino?

Solución: 14 días (400/30 = 13,333 días)

6. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?

Solución: 0,12 mm; 1750 folios

7. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 5 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?

Solución: 14 vueltas completas más un largo del parque (Debería comenzar haciendo el largo)

8. Expresa en U.A.

a) 38.000 km b) 8.000 m c) un millón de micras d) dos millones de metros

Solución: a) 0,000254014 U.A. b) 0,000000053 U.A c) 0,67 .10 $^{-11}$ d) 0,000013369 U.A

Unidades de superficie

9. Completa las siguientes igualdades

a) 3,5 dam^2 = ______ m^2 = ______ dm^2 b) 0,08 km^2 = _______ m^2 = _____ cm^2

c) 32 cm^2 = _____ dm^2 = ______ dam^2 d) 6075 m^2 = _____ dm^2 = ______ hm^2

Solución:

a) 3,5 dam2 = 350 m2 = 35000 dm2 ***b) 0,08 km2 = 80000 m2 = 800 000 000 cm2***

c) 32 cm2 = 0,32 dm2 = 0,000032 dam2 ***d) 6075 m2 = 607500 dm2 = 0,6075 hm2***

10. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:

a) 3 m^2 2 cm^2 5 mm^2 en decímetros cuadrados b) 6 dam^2 2 dm en metros cuadrados

c) 9,3 hm^2 5 m^2 6 cm^2 en decámetros cuadrados d) 7 dm^2 5 dam^2 en milímetros cuadrados

Solución*: *a) 300,0205 dm²; b) 600,02 m²; c) 930,050006 dam²; d) 5000070000 mm².

11. Expresa en hectáreas:

a) 3,2 km^2 b) 1.000 ca c) 600.000 dam^2 d) 824 m^2 e) 67 a f) 200 mm^2.

Solución*: *a) 320 ha; b) 0,1 ha; c) 6000 ha; d) 0,0824 ha; e) 0,67 ha; f) 0,00000002 ha.

12. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca d) 37 m^2.

Solución*: *a) 80000 a; b) 2,61 a; c) 303,03 a ; d) 37 a

13. La superficie de China es de 9560000 km^2. ¿Cuántas ha tiene?

Solución: 956 000 000 ha

14. Dibuja en tu cuaderno el contorno de tu mano.
    a) Recorta después un cuadrado de 1 cm de lado y estima, en centímetros cuadrados, la superficie de tu mano.
    b) Si utilizas un papel normal de 60 g/m^2, y dibujas tu mano como en el ejercicio anterior y lo recortas, al pesar el papel con un peso muy preciso, obtienes de nuevo la superficie de la mano. (¡Antes de los ordenadores se calculaban así, con papel y tijeras, algunas superficies!). ¿Cuánto mide en cm^2?

Solución abierta (indicativo 200 cm²)

15. El padre de Juan quiere comprar un terreno de 7,3 ha a 3,2 € cada m^2. ¿Cuánto le va a costar?

Solución: 73000 x 3,2 = 23360 €

Unidades de volumen

16. Piensa en un cubo de lado una unidad. Piensa ahora en un cubo del doble de lado. ¿Cuántos cubitos de los primeros son necesarios para obtener ese cubo?

Solución*: *8 cubitos.

17. Expresa en metros cúbicos: 28,7 hm³ 5 m³ 2.800 dam³ 45 dm³.
***Solución**: 31 500 005,045 m³*

18. Expresa en litros:
a) 8,1 hL b) 451 mL c) 2,3 kL d) 0,528 kL e) 6,25 cL f) 7,2 mL
Solución: a) 810 L b) 0,451 L c) 2 300 L d) 528 L e) 0,0625 L f) 0,0072 L

19. Completa las siguientes igualdades:
a) 2 m³ = ______ L b) 33 cL = ______ dm³ c) 500 mm³ = _______ mL
d) 230 mL = _____ dm³ e) 0,02 hm³ = _____ L f) 0,016 hL = _______ m³
g) 0,35 dm³ = ____ mL h) 230 cL = ______ cm³ i) 0,25 hm³ = ______ kL
Solución: ***a) 2 m3 = 1000 L*** ***b) 33 cL = 0,33 dm3*** ***c) 500 mm3 = 500 mL***
d) 230 mL = 0,230 dm3 ***e) 0,02 hm3 = 20 000 000 L*** ***f) 0,016 hL = 0,0016 m3***
g) 0,35 dm3 = 350 mL ***h) 230 cL = 2300 cm3*** ***i) 0,25 hm3 = 250 000 kL***

20. En una urbanización se recoge cada semana 27 m³ de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?
Solución: 27000 : 42 = 642,86 L

Unidades de masa

21. ¿Qué tiene más masa, un kg de papel o un kg de plomo?
Solución: la misma

22. Expresa en gramos las siguientes masas:
a) 2,7 dag b) 51,3 kg c) 35,7 kg 8,6 dag d) 3 dag 5 g 26,29 dg
Solución: a) 27 g b) 51300 g c) 35786 g d) 37,629 g

23. Copia en tu cuaderno y completa:
a) 1 g = ... dg = ... cg = ... mg = ... dag b) 1 kg = ... hg = ... dag = ... g = ... cg = ... mg
c) 1 tm = ... kg = ... g = ... hg = ... dag d) 1 qm = ... kg = ... g = ... tm = ... hg = ... cg
Solución:
a) 1 g = 10 dg = 100 cg = 1000 mg = 0,1dag
b) 1 kg = 10 hg = 100 dag = 1000 g =100000 cg = 1000 000 mg
c)1 tm = 1000 kg = 1000 000 g = 10 000 hg =100 000 dag
d) 1 qm = 100 kg = 100 000 g = 0,1 tm = 1000 hg = 10 000 000 cg

24. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,943 hg							
75282,9 dg							
64,92 kg							
4375 dag							
369266 cg							

Solución:

	kg	*hg*	*dag*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*
0,943 hg	*0,0943*	*0,943*	*9,43*	*94,3*	*943*	*9430*	*94300*
75282,9 dg	*7,52829*	*75,2829*	*752,829*	*7528,29*	*75282,9*	*752829*	*7528290*
64,92 kg	*64,92*	*649,2*	*6492*	*64920*	*649200*	*6492000*	*64920000*
4375 dag	*43,75*	*437,5*	*4375*	*43750*	*437500*	*4375000*	*43750000*
369266 cg	*3,69266*	*36,9266*	*369,266*	*3692,66*	*36926,6*	*369266*	*3692660*

25. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro tiene una densidad de 19,3 y la plata de 10,5. Dos pulseras de igual masa, una de palta y otra de oro, ¿Cuál tendrá mayor volumen?
Solución: El oro

Unidades de tiempo

26. Joaquín va cada día a la escuela y tarda 15 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 50 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas.
Solución: 15 x 5 x 50 = 3750 minutos; 3750: (60 x 24) = 2,6 días

27. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en una semana? ¿Y en un año? Esas horas, ¿cuántos días son?
Solución: 8x7= 56 horas; 56 x 52,114 = 2920 horas en un año; 121 días

28. Enrique va cada día a la escuela y tarda 20 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 30 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuántos segundos gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas en horas.
Solución: 20 x 5 x 30 x 60 = 180 000 segundos.

29. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántos minutos has dormido en una semana?, ¿y cuántos segundos? ¿Cuántos minutos en un año? ¿Y segundos?

Solución: ***8 x7 x 60 = 3360 minutos a la semana;*** ***3360x60=201 600 segundos;***
8 x 365 x 60 =175200 minutos al año; ***10 512 000 segundos***

Unidades monetarias

30. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia dos mil euros a dólares, libras, yuanes y soles.

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (MAD)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

Solución: ***2000 x 1,3 = 2600 dólares; 1720 libras; 16 000 yuanes; 7200 soles***

31. Confecciona una hoja de cálculo con la siguiente tabla de equivalencias, para hacer los cambios de moneda.

Solución:

56	Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
57	1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1
58	1200	1032	1560	4320	10800	157200	9600	13320
59	2000	1720	2600	7200	18000	262000	16000	22200

32. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional. A) ¿Qué diría al de Japón? B) ¿Y al de Marruecos? C) ¿Y al del Reino Unido? Realiza los cálculos.

Solución: A) 52400 yenes B) 4440 Dírhams C) 344 Libras

33. Con las equivalencias del cuadro adjuntos, cambia a euros las siguientes cantidades:

Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dírhams (درهم)
1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1

a) 4025 Dólares b) 5162 Libras c) 215,925 ¥ (yenes) d) 6.214 Bs

Solución: a) 3096,15 € ***b) 6002,33 €*** ***c) 1,65 €*** ***d) 690,44 €***

34. Pedro se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 3900 ¥ y 150 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil?

Solución: En EEUU ***(423,1 € en EEUU; 506,25 en China)***

AUTOEVALUACIÓN

1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 9 cm^3 b) 0,27 dm^3 c) 0,003 m^3 d) 27 cm^3.

Solución: d).

2. ¿Cuánto miden 8 millas inglesas si una milla inglesa mide 1609,342 m?

a) 11 km b) 102 km 998 m c) 12 km 875 m d) 12872 m.

Solución: c).

3. María se entrena corriendo todos los días. Da 14 vueltas a un recorrido de 278 m. ¿Cuánto recorre?

a) 3,892 km b) 40 hm 89 m c) 398,2 dam d) 38 km 92 m.

Solución: a).

4. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7,4 dm y 8,43 cm. ¿Cuál de las respuestas corresponde al área del triángulo?

a) 31,191 dm^2 b) 3000 cm^2 c) 311,91 dm^2 d) 3,1191 dm^2.

Solución: d)

5. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 9 cm^3 b) 0,27 dm^3 c) 0,003 m^3 d) 27 cm^3.

Solución: d).

6. De las siguientes medidas, ¿cuál es la mayor?

a) 5,78 daL b) 578 L c) 5,78 kL d) 0,578 hL.

Solución: c).

7. El resultado de sumar 0,07 kg + 0,62 dag + 9,3 hg es:

a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1006,2 g.

Solución: d).

8. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es:

a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2000 mL

Solución: c).

9. Gladys ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650 $ en metálico. Los cambia a euros y éstos los cambiará a soles en un nuevo viaje a Perú. ¿Cuántos soles tendrá?

a) 3042 S/ b) 1800 S/ c) 235 S/ d) 140 S/

Solución: b).

10. Una jarra de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las 3/4 partes de la jarra, ¿cuánto pesa?

a) 1500 g b) 1,7 kg c) 16 hg d) 10,7 kg

Solución: b).

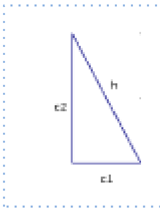
11. El número de segundos de una semana es:

a) 25200 s b) 604800 s c) 602520 s d) 10080 s ***Solución: b).***

CAPÍTULO 6: LONGITUDES Y ÁREAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS



1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Solución: No es posible. La hipotenusa debe medir 25 cm.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 8 *cm* y 6 *cm*   b) 12 *m* y 9 *m*   c) 6 *dm* y 14 *dm*   d) 22,9 *km* y 36,1 *km*.

Solución: a) 10 cm; b) 15m; c) 15,23 dm; d) 42,75 km.

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
   a) 27 *cm* y 12 *cm*   b) 32 *m* y 21 *m*   c) 28 *dm* y 12 *dm*   d) 79,2 *km* y 35,6 *km*

Solución: a) 24,19 cm; b) 24,15 m; c) 25,3 dm; d) 70,75 km.

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

Solución: Altura = 6,06 m; Área = 21,22 m^2.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

Solución: Apotema = 6,93 cm; Área = 166,3 cm^2.

6. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 5 *dm*.

Solución: Altura de la base = 4,3 dm; área de la base = 10,8 dm^2; altura del tetraedro = 4.08 dm; Volumen = 14,73 dm^3.

7. Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.

Solución: 216,5 dm^3.

8. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.

Solución: 16,97 m.

9. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.

Solución: 19,92 cm.

2. SEMEJANZA

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 70º y otro de 50º. Un ángulo de 70º y otro de 60º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
    c) *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30º, *b'* = 3,5 cm, *c'* = 4,5 cm
    d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 12 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 22 cm

Solución: a) Semejantes; b) Semejantes; c) Semejantes; d) No semejantes, debería ser c' = 21 cm.

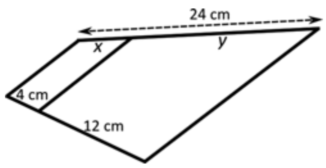
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm, *b*' = 4 cm, ¿*c*'?
    b) *A* = 45º, *b* = 8 cm, c = 4 cm. *A*' = 45º, *b*' = 16 cm, ¿*c*'?

Solución: a) c' = 8 cm; b) c' = 8 cm.

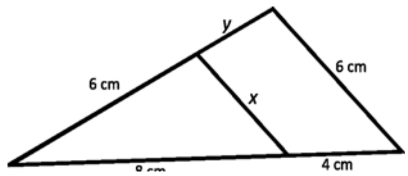
12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Solución: 24 cm, 28 cm y 28 cm.

13. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.



a)



b)

Solución: a) x = 6 cm, y = 18 cm; b) y = 10 cm, x = 4,8 cm.

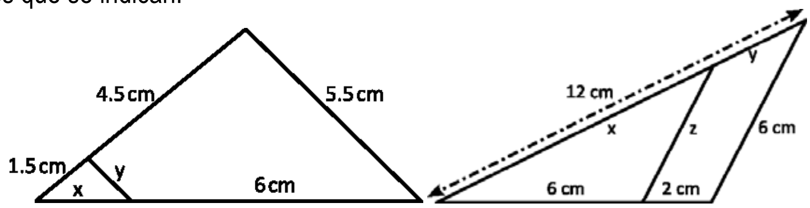
14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

Solución: Longitud del poste = 4 m; Longitud del cable = 5 m.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

Solución: 14,44 m.

16. Calcula las longitudes que se indican:



Solución: a) x = 2 cm; y = 1,375 cm; b) x = 9 cm; y = 3 cm; z = 4,5 cm.

17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

Solución: Volumen del melocotón = 1145,12 cm³; Volumen de su hueso = 42,41 cm³; razón de proporcionalidad = 27.

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 25 *cm* y 40 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

Solución: Áreas: 176,71 cm², 490,87 cm², 1256,64 cm²; 176,71/ 1 = 176,71; 490,87/3 = 163,62; 1256,64/4 = 314,16; La más barata es la que cuesta 4 euros, luego la de 1 euro y la más cara, la de 3 euros.

19. Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Solución: La razón de proporcionalidad = 10, luego debe medir 5/10 = 0,5 m = 5 dm; El radio del cilindro debe medir 2,52 dm, y el radio de la maqueta 0,252 dm. Su volumen es π*0,252²*5 = 1 dm³.

20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es *k* = 100. ¿Cuánto mide la pirámide real?

Solución: 50 m.

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

Solución: Si cada cm del dibujo se corresponde con 1000 cm de la realidad:

Dibujo	Medida real
26 cm	***26000 cm = 260 m***
1100 cm = 11 m	11 km = ***1100000 cm***
0,05 m	***5000 cm = 50 m***

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

Solución:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m = ***70000 cm***	***50000***
7 cm	0,7 hm = ***70000 cm***	***10000***
4 cm	20 km = ***2000000 cm***	***500000***

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

Solución abierta: Por ejemplo en los mapas, las maquetas, los planos.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

Solución: Cada cm del mapa corresponde con 13 000 000 cm de la realidad, es decir, con 130 km.

2. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

Baldosas rectangulares

25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 *cm*. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

Solución: El otro cateto mide 6 cm. El área mide 24 cm².

26. Las baldosas de la figura miden 24 *cm* de largo y 9 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

Solución: 216 cm².

27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?

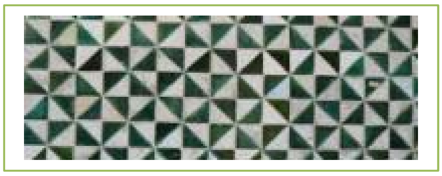
Solución abierta y manipulativa: Lo normal es que sea un rectángulo y su área mida base * altura.

28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

Solución: 52740 cm².

29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 *mm* y una altura de 12 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

Solución: 120 mm²; en total 21600 mm² = 2,16 cm².



30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 *cm*. Si su hipotenusa mide 14 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (*Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

Solución: El otro cateto mide 12,65 cm y el área mide 37,95 cm².

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?

Solución: 2046 cm².

32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 2,3 y 1,7 *m* y altura 1,4 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

Solución: 2,8 m².

33. Calcula el área de un romboide de 24 *cm* de base y 21 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

Solución: 504 cm².

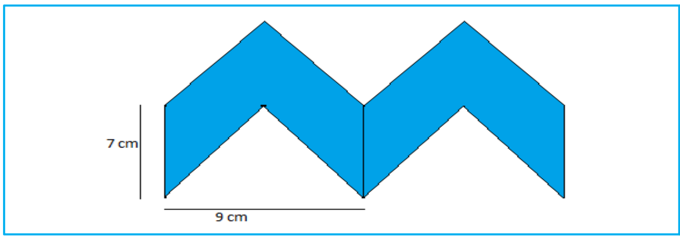
34. Dado un hexágono regular de lado 4 *cm*, calcula la longitud de la apotema y determina su área.

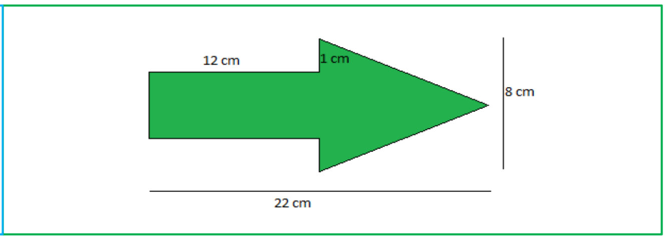
Solución: Apotema = 3,5 cm; Área = 20,78 cm².

35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 *cm*, calcula la longitud de la apotema y determina su área.

Solución: Apotema = 3,5 cm; Área = 7 cm².

36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:





Solución: a) 126 cm²; b) 112 cm².

37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

Solución: a) 80,57 cm; b) 53,54 cm.

4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

38. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.

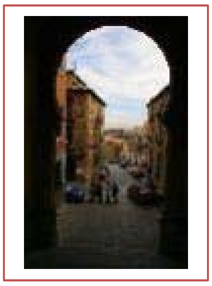
Solución abierta y manipulativa: Ya sabes que $\pi \approx 3,14159265...$.

39. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

Solución: 40080 km.

40. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

Solución: 12732,4 km. En metros: 12 732 400 m.



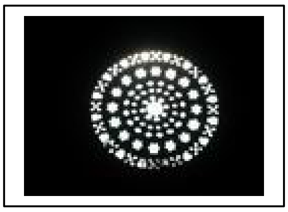
41. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 5,3 *m*. ¿Cuál es la longitud del arco?

Solución: Suponiendo que sea un arco de medio punto, L = 16,65 m. Pero si suponemos que abraca un arco de 240 º, entonces L = 25 m.

42. Un faro gira describiendo un arco de 160º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

Solución: 2,79 km.

43. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 *m*, y la de la siguiente figura es de 3 *m*.



a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.

b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas

c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 *m*.

d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

Solución: a) $\pi/2$ m; b) $3\pi/8$ m; c) 4π m²; d) Solución manipulativa y gráfica.

44. Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 *cm*.

Solución: 176 π = 552,9 cm².

45. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 *cm* y que forma un ángulo de 60 º. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

Solución: Área del sector circular = $15^2 \cdot \pi/60$ = 117,81 cm²; Apotema triángulo = 13; Área = 97,43; Área del segmento circular = 20,38 cm².

46. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 *cm* y 12 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

Solución: Área de la corona = 20,84 cm²; Área del sector = 3,47 cm².

47. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 12 *cm* y que forma un ángulo de 60 º. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.

Solución: 390.04 cm².

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de Pitágoras

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta

Solución: No. La hipotenusa debe medir 11,66 cm.

2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.

Solución gráfica y manipulativa: La primera mide 5 y la segunda 10, luego mide el doble. Las áreas miden 9, 16, 25 y 36, 64 y 100.

3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.

Solución gráfica y manipulativa: Dibujamos un lado horizontal que mide 1 y otro lado que mide 1 formando un ángulo de 45º con el anterior. El otro lado mide aproximadamente 0,7 y el teorema de Pitágoras daría $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}4$

Dibujamos un lado horizontal que mide 1 y otro lado que mide 1 formando un ángulo de 135º con el anterior. El otro lado mide aproximadamente 1,8 y el teorema de Pitágoras daría $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}4$

4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 *cm* y 6,9 *cm*?

Solución: 10,7 cm.

5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 16 *cm* y 12 *cm* b) 40 *m* y 30 *m* c) 5 *dm* y 9,4 *dm* d) 2,9 *km* y 6,3 *km*.

Solución: a) 20 cm; b) 50 m; c) 10,6 dm; d) 6,9 km.

6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 25 *cm* y 15 *cm* b) 35 *m* y 21 *m* c) 42 *dm* y 25 *dm* d) 6,1 *km* y 4,2 *km*

Solución: a) 20 cm; b) 28 m; c) 33,7 dm; d) 4,4 km.

7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.

Solución: 11,3 m.

8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm

Solución: 13 cm.

9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Solución: El otro cateto mide 8 cm, perímetro = 24 cm; área = 48 cm².

Semejanza

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 30º y otro de 20º. Un ángulo de 120º y otro de 20º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.
    c) *A* = 40º, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 40º, *b'* = 4 cm, *c'* = 6 cm
    d) *a* = 3 cm, *b* = 4 cm, *c* = 6 cm. *a'* = 12 cm, *b'* = 16 cm, *c'* = 24 cm

Solución: a) Lo sería si midieran 120º y 30º; b) Semejante; c) Semejante; d) Semejante

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
    a) *a* = 15 cm, *b* = 9 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 10 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?
    b) *A* = 50º, *b* = 3 cm, c = 7 cm. *A'* = 50º, *b'* = 18 cm, ¿*a'*?

Solución: a) Imposible, a' = 10 cm, b' = 6 cm, c' = 8 cm; b) c' = 42 cm.

$$a = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)} = \sqrt{58 - 42\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)} \Rightarrow a' = 6\sqrt{58 - 42\cos\left(\frac{5\pi}{18}\right)}$$

12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Solución: 24 cm, 28 cm y 28 cm.

13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

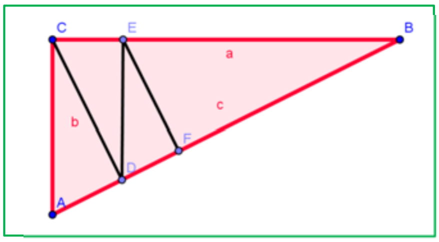
Solución gráfica y manipulativa: 36 º, 72 º, y 72 º. El número de oro: Φ = 1,618...

14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

Solución: 360 º.

15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

Solución: 22,5 m.



16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.

Solución: Utiliza la semejanza de triángulos, el triángulo grande ABC es semejante al triángulo ACD, pues son triángulos rectángulos con un ángulo distinto de recto, común. Por lo que el lado AD/AC = AC/AB ⇒ AD = 45*45/75 = 27 u. Área ABC = AC*CB/2 = 1350 u²; CD = 36 u. Área ACD = CD*AD/2 = 36*27/2 = 486 u²; CD = 36; DE = 28.8 u; EF = 23.04 u.

17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

Solución: A1 = 200 cm²; A2 = 100 cm².

18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de 700 cm², ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

Solución: 1 750 000 km².

19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

Solución: Son semejantes. Cada lado es la mitad del triángulo inicial, luego el perímetro es la mitad del triángulo inicial y el área mide la cuarta parte.

20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Solución: Altura = 12 cm; A1 = 45 cm²; A2 = 180 cm²; Observa que la razón de semejanza entre las longitudes es 2 mientras que la razón entre las áreas es 4, 45 * 4 = 180.

21. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.

Solución: 27,5 cm²^{2}.

22. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 8 *m* y 6 *m* c) 3 *dm* y 7 *dm* d) 27,3 *km* y 35,8 *km*.

Solución: a) 5 cm; b) 10 cm; c) 7,6 dm; d) 45,02 km.

23. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 5 *cm* y 3 *cm* b) 10 *m* y 6 *m* c) 25 *dm* y 10 *dm* d) 34,7 *km* y 12,5 *km*

Solución: a) 4 cm; b) 8 m; c) 22,92 dm; d) 32,37 km.

24. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

Solución: Altura = 6,93 m; Área = 27,7 m^{2}.

25. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

Solución: Apotema = 6,06 cm; Área = 127,3 cm^{2}.

26. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.

Solución: Apotema cara = 2,6 dm; Área base = 3,9 dm^{2}; Altura tetraedro = 2,45 dm; Volumen = 3,18 dm^{3}.

27. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.

Solución: 7,21 cm.

28. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?

Solución: 3,9 m.

29. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?

Solución: 14,14 m.

30. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.

Solución: La otra diagonal mide 5,3 cm: Área = 15,87 cm^{2}.

31. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.

Solución: El lado desigual mide 6 cm. La altura se calcula con el teorema de Pitágoras. La altura es $\sqrt{40}$ ***cm. El área es*** $3\sqrt{40} = 6\sqrt{10} \approx$ ***18,97 cm^{2}.***

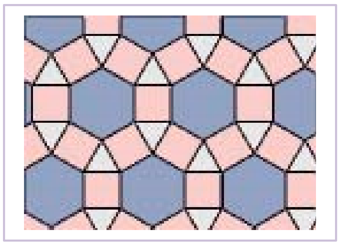
32. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?

Solución: 60 cm^{2}.

33. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

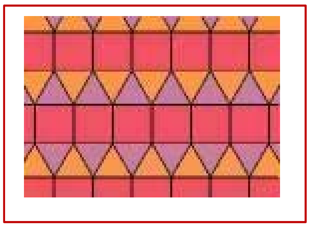
Solución: 52 cm.

Problemas



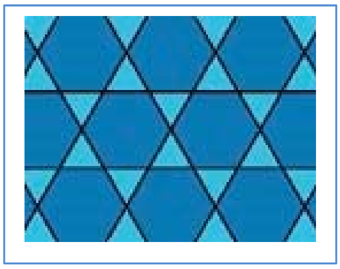
34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.

Solución gráfica y manipulativa: a) 25 cm^{2}; b) 10,8 cm^{2}; c) 65 cm^{2}; d) 660,6 cm^{2}.



35. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.

Solución gráfica y manipulativa: a) 49 cm^{2}; b) 21,2 cm^{2}; c) Consideramos 6 cuadrados, 12 triángulos, entonces el área de cuadrados es: 294 cm^{2}, y la de triángulos: 254,6 cm^{2}, luego la proporción es de 1,15. El área total de las 4 franjas es: 2·294 + 2x·254,6 = 1097,2 cm^{2}.



36. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?

Solución: Área hexágono = 91,13 cm^{2}, área triángulo = 15,19; Por cada hexágono hay 6 triángulos por lo que ocupan igual área del mosaico.

37. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 *m*, y se separa de la pared una distancia de 2 *m*, ¿cuál es su longitud?

Solución: 7,28 m.

38. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 *m* de largo y 60 *m* de ancho. Calcula:
   a) La diagonal del terreno cuadrado.
   b) La diagonal del rectángulo
   c) El área de cada terreno.
   d) ¿Cuál tiene mayor superficie?

Solución: a) 183,8 m; b) 208,8 m; c) Ac = 16900 m^2; Ar = 12000 m^2; d) Tiene mayor superficie el cuadrado.

39. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.

Solución: a) Acuadrado = 144 cm^2; Acírculo = 153,9 cm^2; b) Reborde cuadrado = 48 cm; reborde círculo = 44 cm; c) Es menor la del círculo, el posavasos circular tiene mayor superficie y menor reborde; d) El lado del cuadrado debe medir 12,5 cm, y el radio del círculo, algo menos de 8; e) Las áreas son: Acuadrado = 156,25 cm^2, y Acírculo = 199 cm^2.

40. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?

Solución: 1,92 m.

41. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero, ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

Solución: Usando el teorema de Pitágoras se obtiene que mide 138,5 m.

42. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.

Solución: Diagonal de una cara = 11,3 cm; Diagonal cubo = 13,9 cm.

43. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:
   a) Longitud de una arista.
   b) Altura del triángulo de la base.
   c) Perímetro de la base
   d) Altura de una cara
   e) Perímetro de una cara

Solución: a) 8,06 cm; b) 6 cm; c) 6,57 cm; d) 7,3 cm; e) 7,3 + 7,3 + 2,2 = 16,75 cm.

44. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?

Solución: r = 6,63 cm.

45. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de un cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris…. Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?

Solución manipulativa, abierta y gráfica: Si el cono exterior tiene unos 20 conos de lado, el siguiente 16 y el siguiente 12, entonces A1 = 346,4 cm^2, A2 = 221,7 cm^2, A3 = 124,71 cm^2. Necesitamos unos 1732 conos.

46. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro: a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor. b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza. c) Calcula la superficie de cada abanico.

Solución manipulativa, abierta y gráfica: La longitud es de 1 m = 100 cm, si la anchura del friso de pétalos es de 25 cm, la del friso de abanicos de 30 cm y la anchura del friso de trenzas de 15 cm, entonces, la superficie de un pétalo es aproximadamente de 61,4 cm^2. En la trenza hay 20 trozos, luego la superficie de cada trozo de trenza es de 75 cm^2. En el friso de abanicos hay 18 abanicos, la superficie de un abanico es aproximadamente de 167 cm^2.

47. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1,2 m. a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas. b) La superficie de dicha estrella. c) La superficie de la cruz.

Solución manipulativa, abierta y gráfica: La estrella está formada por dos cuadrados cuya diagonal mide 0,6 m = 60 cm, por lo que su lado mide 42,4 cm. a) El lado de la estrella mide 42,4/(2+$\sqrt{2}$) = 12,4 cm; b) A = 2109 cm^2; c) 1491 cm^2. La estrella está formada por un cuadrado de diagonal 60 cm más 4 triángulos que forman dos cuadrados de lado 12, 4 cm. La cruz está formada por dicho cuadrado menos los mismos dos cuadrados anteriores.

AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
   a) 6,32 *cm* b) 7 *cm* c) 0,05 *m* d) 627 *mm*

Solución: a)

2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
   a) 714 *cm* b) 7,4 *m* c) 8 *m* d) 8925,1 *mm*

Solución: a)

3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
   a) 4,3 *dam*^{2} b) 21 *m*^{2} c) 40 *m*^{2} d) 1273057 *cm*^{2}

Solución: d)

4. El área de un rectángulo de 10 cm de diagonal y 8 cm de base es:
   a) 53 *cm*^{2} b) 80 *cm*^{2} c) 48 *cm*^{2} d) 62 *cm*^{2}

Solución: c)

5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
   a) 45 *dm* b) 181 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*

Solución: b)

6. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene aproximadamente como área:
   a) 49 *cm*^{2} b) 48 *cm*^{2} c) 50 *cm*^{2} d) 48,37 *cm*^{2}

Solución: b)

7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 *m* mide aproximadamente:
   a) 3,14 *m* b) 1,4 *m* c) 1,26 *m* d) 1,7 *m*

Solución: b)

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* mide:
   a) 6,32 *cm* b) 5 *cm* c) 0,052 *m* d) 62 *mm*

Solución: b)

9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 6 *m*, el otro cateto mide:
   a) 87 *cm* b) 4 *m* c) 8 *m* d) 5,1 *mm*

Solución: b)

10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 *cm* y 16 *cm* es:
    a) 34 *cm* b) 70 *cm* c) 40 *cm* d) 62 *cm*

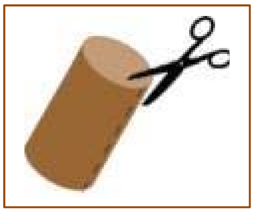
Solución: c)

CAPÍTULO 7: CUERPOS GEOMÉTRICOS. VOLÚMENES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL ESPACIO

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un rollo de papel higiénico.

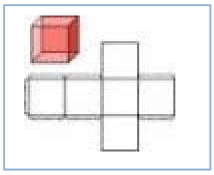


a) ¿Qué forma tienen las bases de la lata?
b) ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?
c) Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?
d) Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?

Solución: a) Círculos; b) No; c) Un rectángulo; d) Dos círculos

2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.

Solución gráfica y abierta:



3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).

Solución gráfica y manipulativa:

4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

Solución gráfica:

5. Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?

Solución manipulativa:

6. Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
a) esfera; b) cilindro; c) poliedro regular; d) prisma; e) pirámide; f) cono

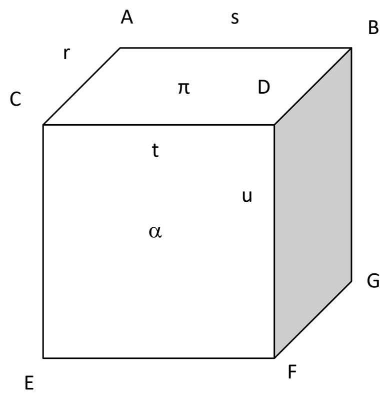
Solución abierta: Por ejemplo: a) naranja, b) rollo de papel higiénico, tizas, latas de conserva, c) cubo de Rubik, d) edificio, goma de borrar, e) Pirámide de Egipto, f) gorro de bruja.

7. Aprende a hacer un cubo con papiroflexia:

Solución manipulativa:

http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67

Solución manipulativa:



8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F.

Solución: u.

9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E.

Solución: α.

10. Indica el plano que contiene a la recta *t* y al punto B.

Solución: π

11. Indica el plano que contiene a las rectas *s* y *t*.

Solución: π

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.

Solución abierta:

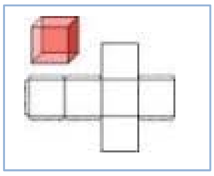
13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.

Solución gráfica y manipulativa:

14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
    a) Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
    b) Tres pares de rectas que se crucen.
    c) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

Solución gráfica y abierta: Con el cubo de la figura del ejercicio 8: a) r, t y r(E, F);
b) r y r(E, F); s y R(D, F); t y r(B, G);
c) r y s, se cortan en A y se encuentran en π***; t y u, se cortan en D y se encuentran en*** α***; r y t, se cortan en C y se encuentran en*** π.

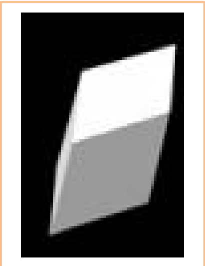
15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α. Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.
Solución abierta: Contenidas: t, u, r(C, E), r(E, F); Paralelas: s y r(B, G); Secantes: r en C, r(B, D) en D, r(F, G) en F.
16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:
a) un cubo b) un cilindro c) un cono d) una esfera e) una pirámide
Solución gráfica:
17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
   a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
   b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
   c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
   d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
   e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.



Solución gráfica:
18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.
Solución gráfica:
19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.
Solución gráfica:
20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.
Solución gráfica:
21. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.
Solución gráfica:
22. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.
Solución: Tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 caras.
23. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.
Solución gráfica:
24. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.
Solución gráfica:
25. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.
Solución gráfica:

2. POLIEDROS

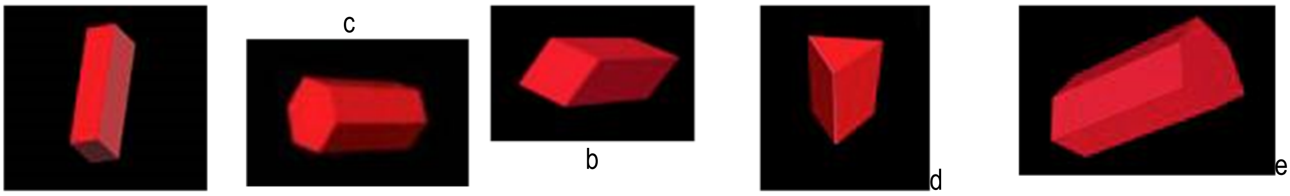
26. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.
Solución manipulativa:
27. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?
Solución: Todas sus caras son polígonos regulares, pentágonos y hexágonos, pero no es un poliedro regular pues todas sus caras no son iguales.



28. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama *romboedro*. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:
Solución: Todas sus caras son rombos todos ellos iguales pero el rombo no es un polígono regular, luego el romboedro no es un poliedro regular.

29. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?
Solución manipulativa: Con una trama de triángulos puedes construir, con 4 triángulos un tetraedro regular, con 8 un octaedro (regular) con 20 un icosaedro (regular) pero con 6 también puedes construir un poliedro, con sus 6 caras iguales y triángulos equiláteros, pero no es un poliedro regular pues en unos vértices hay 3 caras y en otros 4. Todos los vértices no son iguales.
30. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.
Solución manipulativa: Con 2, un prisma de base un rombo, con 6 un prisma hexagonal regular.

31. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos o oblicuos y del número de lados de sus bases.



Solución: a) Prisma cuadrangular, recto y regular; b) prisma hexagonal, recto y regular; c) prisma cuadrangular, no recto, y no regular, de base un rombo; d) prisma triángular, recto y regular; e) prisma hexagonal no regular.

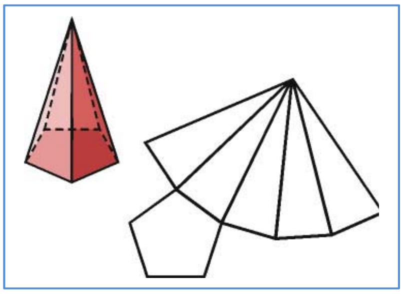
32. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!

Solución manipulativa:

33. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?

Solución: Ninguna, todas son consecutivas; Cuatro.

34. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama *caja de zapatos*).



Solución: Aristas, 12; Vértices, 8; Caras, 6. Todas sus caras son rectángulos.

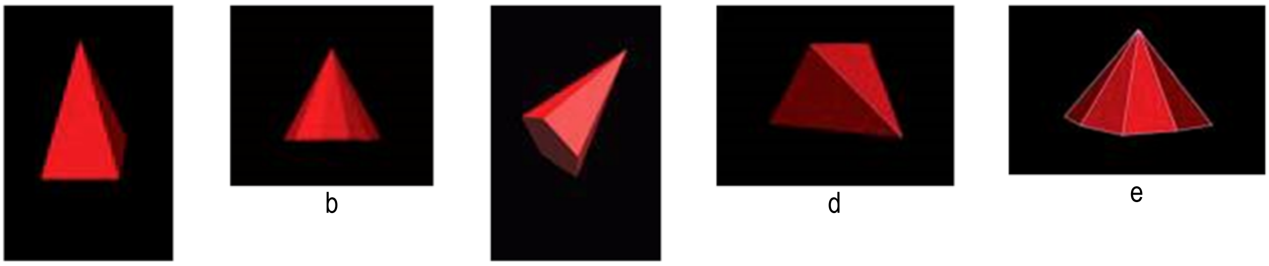
35. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.

Solución manipulativa:

36. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.

Solución gráfica y manipulativa:

37. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas o oblicuas y del número de lados de su base.



Solución: a) Regular, recta, de base cuadrada; b) Regular, recta, de base hexagonal; c) No regular, oblicua, de base pentagonal; d) No regular, oblicua, de base cuadrada; e) Regular, recta, de base octogonal.

38. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

Solución manipulativa:

39. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.

Solución: 86,6 cm²^{2}***.***

40. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.

Solución: 384 cm^{2}***.***

41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?

Solución: 1208 cm^{2}***.***

42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^{2}, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?

Solución: A = 12505,4 cm^{2} ***= 1,25 m***^{2}***. Nos basta con 0,0625 litros.***

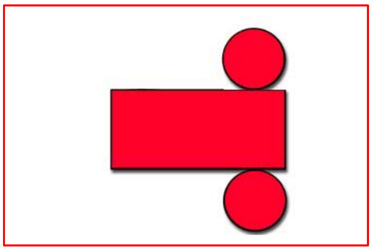
43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.

Solución: V = 93,5 cm^{3}***.***

44. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. *Indicación*: puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.

Solución: V = 241,4 cm³.

3. CUERPOS REDONDOS



45. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.

Solución gráfica y manipulativa:

46. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.

Solución: A = 282,7 cm².

47. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.

Solución manipulativa y abierta:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El espacio

1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.

Solución gráfica:

2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
   a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
   b) Un cono con cortes paralelos a su base
   c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
   d) Una prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara

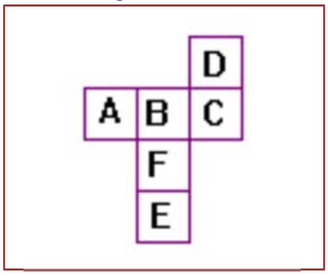
Solución gráfica:

3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.

Solución abierta:

4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.

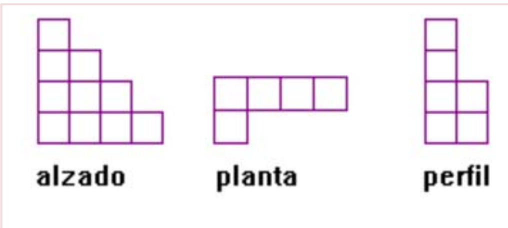
Solución gráfica:



5. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería…

Solución: D

6. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?



Solución: 10.

7. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
   a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.
   b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
   c) ¿Existen rectas paralelas?

Solución gráfica y abierta: a) Se cruzan las rectas de aristas opuestas; b) Se cortan 3 rectas en cada vértice; c) No hay rectas paralelas.

8. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.

Solución: Hay 4 planos, ninguno paralelo. Se cortan en las aristas, que son 6.

Poliedros

9. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120 º, ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?

Solución: No. En un vértice como mínimo hay 3 polígonos y la suma de 120 + 120 + 120 = 360, un ángulo plano.

10. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60º y 120 º. Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.

Solución manipulativa:

11. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.

Solución manipulativa:

12. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.

Solución: Un cubo tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices; caras + vértices = aristas + 2; Prisma hexagonal: 8 caras, 12 vértices y 18 aristas: 8 + 12 = 20 = 18 + 2.

13. Un balón de futbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.

Solución: Si, no es una esfera. Tiene pentágonos regulares y hexágonos regulares.

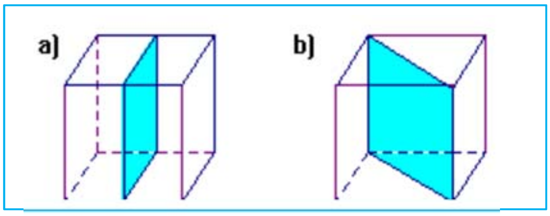
14. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina… ¡Seguro que se te ocurren otras formas!

Solución manipulativa:

15. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?

Solución: El poliedro dual del tetraedro regular es otro tetraedro regular.

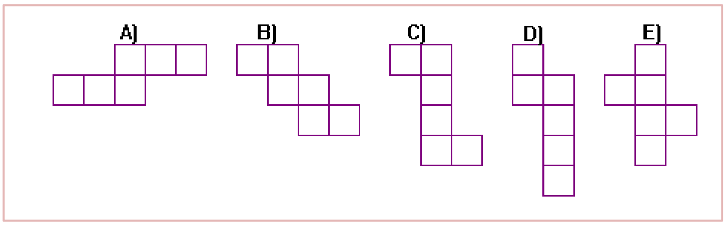
16. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



Solución manipulativa: Prisma trinagular recto no regular. Solución abierta.

17. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.

Solución: 4 diagonales.



18. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.

Solución: D.

19. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (*Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina*).

Solución manipulativa: Cuando pasas por 3 vértices. Puedes obtener un hexágono regular cuando pasas por el punto medio de 6 aristas.

20. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.

Solución gráfica, manipulativa y abierta:

21. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.

Solución: Pasando por dos aristas opuestas como en la figura b del problema 18.

22. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm.

Solución: 9,9 cm.

23. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?

Solución abierta y manipulativa: Por ejemplo, la caja de zapatos es un ortoedro y hay gomas de borrar que son paralelepípedos.

24. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.

Solución gráfica y manipulativa:

25. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?

Solución: Siempre 3.

26. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?

Solución: Las de un prisma triangular, 3 + 2 = 5.

27. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.

Solución gráfica y manipulativa:

28. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.

Solución gráfica y manipulativa:

29. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?

Solución: Una pirámide cuadrangular.

30. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?

Solución: Un prisma 18, una pirámide, ninguna.

31. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.

Solución gráfica y manipulativa:

32. Construye un pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.

Solución gráfica y manipulativa: Vas a necesitar 3. Así puedes comprobar la fórmula del volumen de una pirámide, que es un tercio del de un prisma de igual base y altura.

33. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?

Solución: 10,2 cm.

34. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?

Solución: 5,4 m.

35. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.

Solución: V = 127,3 cm³.

36. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm.

Solución: V = 701,9 cm³. La altura del cono grande mide aproximadamente 10 cm, la del cono pequeño, 5,59 cm, y la del tronco, 4,47 cm.

37. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.

Solución: Total = 525,5 cm². Lateral = 432 cm²; Apotema del hexágono = 5,2 cm.

38. Calcula la superficie total de un tronco de cono de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.

Solución: Superficie total = 136,5 cm²; Superficie lateral = 101,8 cm²; Superficie de las bases: 6,9 cm² y 27,7 cm².

39. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de 67π cm². ¿Cuánto mide si superficie total si su altura mide 10 cm?

Solución: Atotal = 89,445 π cm².

Cuerpos redondos

40. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:

   a) un lado, un rectángulo b) un cateto, un triángulo rectángulo

   c) la hipotenusa, un triángulo rectángulo d) su diámetro, una círculo.

Solución manipulativa y gráfica: a) Cilindro; b) Cono; c) Dos conos unidos por la base; d) Una esfera.

41. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.

Solución abierta: Por ejemplo, algunas latas de conserva, algunos botes de medicina, algunas tizas, Las patas de algunas sillas…

42. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.

Solución gráfica:

43. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.

Solución manipulativa:

44. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.

Solución gráfica y manipulativa:

45. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.

Solución abierta: Por ejemplo un gorro de payaso, la punta de un lapicero, algún tejado de una torre…

46. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.

Solución gráfica y manipulativa:

47. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.

Solución abierta: Por ejemplo: Una pelota, un planeta, una cereza….

48. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.

Solución gráfica y manipulativa:

49. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.

Solución: Radio inscrita = 5 cm; Radio circunscrita = 15,8 cm.

50. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.

Solución: Área = $6*10^2$ = 600 cm^2; Volumen = 10^3 = 1000 cm^3.

51. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (*Ayuda*: La apotema del pentágono mide 5,4 cm).

Solución: Tetredro = 110,85 cm^2; Cubo = $6*8^2$ = 384 cm^2; Octaedro = 221,7 cm^2; Dodecaedro = 12*8*5,4/2 = 259,2 cm^2; Icosaedro = 554,3 cm^2.

52. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?

Solución: 7/3 cm.

53. Calcula la superficie y el volumen de una esfera si la longitud de su circunferencia máxima es de 10π m.

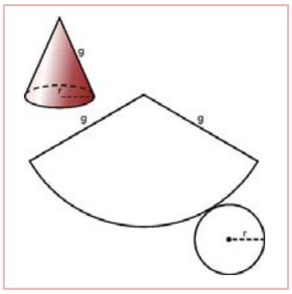
Solución: Superficie = 100 π m^3; Volumen = $500\pi/3$ m^3.

54. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.

Solución: Superficie esfera inscrita = 100π m^2; Volumen esfera inscrita = $500\pi/3$ m^3; Superfice esfera circunscrita = 1000π m^2; Volumen esfera circunscrita = 5270,5π m^3.

55. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si R = 6 cm.

Solución: Superficie lateral cilindro = $2\pi R\cdot 2R = 4\pi R^2$; Superficie esfera = $4\pi R^2$; S = 144 $\pi \approx$ 452,4 cm^2.



56. Un cono tiene de altura h = 7 cm, y radio de la base r = 2 cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.

Solución: Generatriz = 7,28 cm; Volumen = 28 π cm^3; Superficie lateral = 14,56 π cm^2;

57. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.

Solución: Superficie lateral = 48π cm^2; Superficie total = 66 π cm^2.

58. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.

Solución: Suerficie lateral = 136,7 π cm^2; Superficie total = 200,7π cm^2.

59. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Calcúlalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.

Solución: La superficie de una cara se multiplica por 4. Su volumen se multiplica por 8. S = 100 m^2; V = 1000 m^3.

60. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

Solución: R = 17,84 cm.

61. Utiliza una hoja de cálculo (o la calculadora) para calcular el volumen de una esfera de radio 7 u, tomando para π diferentes aproximaciones.

Solución:

	A	B	C	D	E
1	**VOLUMEN DE UNA ESFERA DE RADIO**				
2	Radio	Valor de PI	Volumen	(4/3)*PI*R^3	
3	7	3	1372	unidades de volumen	
4		3,14	1436,02667	unidades de volumen	
5		3,1416	1436,7584	unidades de volumen	
6		PI()	1436,75504	unidades de volumen	

Se observa como aumenta el volumen al aumentar el valor de pi, y como 3.1416 es mayor que pi.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?
   a) el cilindro b) la esfera c) el icosaedro d) el dodecaedro

Solución b):

2. La definición correcta de poliedro regular es:
   a) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares
   b) Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales
   c) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales
   d) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.

Solución d):

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta
   a) Un prisma oblicuo puede ser regular
   b) El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura
   c) Las caras de un dodecaedro son hexágonos
   d) El volumen de una pirámide es área de la base por la altura

Solución b):

4. Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:
   a) $2\pi rh$ b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) $2\pi r(h + r)$ d) $2/3\pi rh$

Solución a):

5. El número de vértices de un icosaedro es:
   a) 20 b) 12 c) 30 d) 10

Solución b):

6. El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:
   a) 83,1 cm^3; 96 cm^2 b) 35,7 cm^3; 48 cm^2 c) 0,1 L; 0,9 ha d) 106 m^3; 95 m^2

Solución: a)

7. El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente:
   a) 62 cm^3; 24 cm^2 b) 7000 L; 0,48 ha c) 7 cm^3; 8 cm^2 d) 27,6 m^3; 48 m^2

Solución: d)

8. El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:
   a) $0,12\pi$ L b) 36π cm^3 c) 12 π cm^3; d) 36π cm^3

Solución: c)

9. El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:
   a) 100π m^3; 40π m^2 b) 100π cm^3; 40π cm^2 c) 31,4 cm^3; 12,56 cm^2 d) 33π cm^3; 7π cm^2

Solución: b)

10. El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:
    a) 288π cm^3; 144π cm^2 b) 144π cm^3; 288π cm^2 c) 452 m^3; 904 m^2 d) 96π cm^3; 48π cm^2

Solución: a)

CAPÍTULO 9: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?

Solución: Todos los lados y todos los ángulos miden lo mismo)

2. Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

Solución gráfica

3. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?

Solución: Las longitudes son dobles de grandes y los ángulos son iguales. Es una semejanza.

4. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?

Solución: Es simétrica. O semejante se rezón de semejanza –1.

5. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

Solución gráfica y abierta.

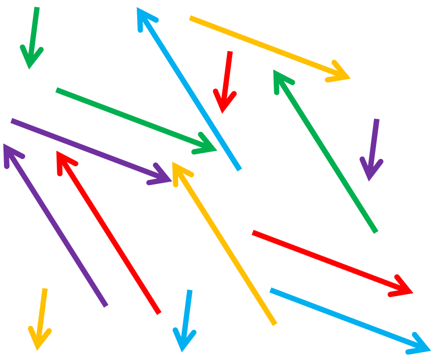
2. TRASLACIONES

6. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** y ***CB***. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.

Solución AB = (4, 4); AC = (7, –5); BC = (3, –9); CA = (–7, 5); CB = (–3, 9).

7. El vector fijo ***AB*** tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.

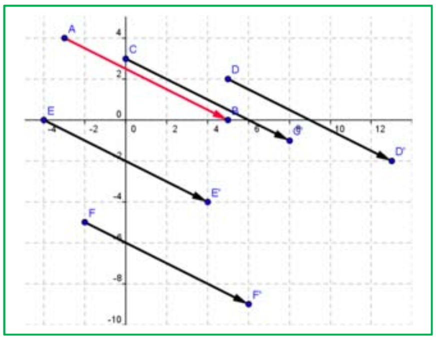
Solución: A = (–5, –1)



8. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo ***AB*** son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.

Solución: B = (6, 1)

9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.

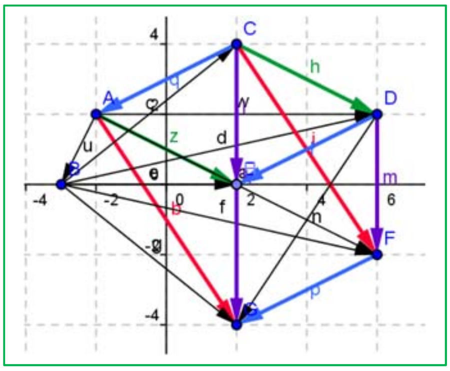


Solución gráfica

10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E* (–4, 0) y *F* (–2, –5).

Solución gráfica

11. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.



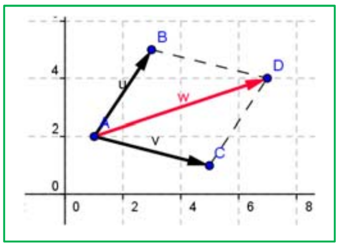
Solución gráfica: Son equipolentes: AG = CF; GA = FC; CD = AE; EA = DC;
CE = DF = EG; EC = FD = GE; DE = FG = CA; ED = GF = AC.

12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos ***DE*** y ***FG***. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

Solución: DE = (–4, –2) = FG. Son dos representantes del mismo vector.

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama u al vector fijo ***AB*** e indica sus componentes. b) Llama v al vector fijo ***BC*** e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector w = u + v. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.

Solución gráfica: a) u = AB = (–9, 1); b) v = BC = (7, –11); c) w = u + v = (–2, –10); d) solución gráfica.



14. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector **u** = (2, 3) con origen en *A*, y el vector **v** = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma **u** + **v**, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre **u** y **v**.

Solución gráfica: u + v = (6, 2).

15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot(4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)] c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) – 6·(4, –5)] d) 9.3·(2, 6) + (3.7, 5.2)

Solución: a) (3, –3/2); b) (3, –6); c) 65, –99); d) (22.3, 61).

16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) y ***w*** = (3, 4):

a) 2***u*** – (***v*** + ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

Solución: a) (–17, 15); b) (23, –7); c) (–11, –14).

17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.

Solución abierta y gráfica:

18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Solución manipulativa y gráfica: Las dos figuras tienen todas sus longitudes y ángulos iguales. Esas rectas son paralelas. Han seguido un vector libre.

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa: Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

Un friso en Camboya

20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

Solución: Horizontal.

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).

Solución manipulativa y gráfica:

22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?

Solución manipulativa y gráfica: A' = (7, 3); B' = (7, 5); C' = (5, 5).

23. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Solución manipulativa, abierta y gráfica:

24. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

Solución manipulativa y gráfica: Otra traslación de vector (–1, –1).

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.

Solución manipulativa y gráfica:

26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Solución manipulativa y gráfica:

3. GIROS O ROTACIONES

28. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.

Solución manipulativa y gráfica:

29. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.

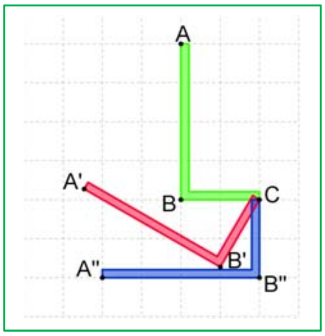
Solución manipulativa y gráfica:

30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?

Solución manipulativa y gráfica: A' ***(–2, 4),*** B' ***(2, 3) y*** C' ***(0, 5)***

31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante el giro la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.



32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.

Solución manipulativa y gráfica:

33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?

Solución: Un giro de 60º no deja ninguna recta invariante. Un giro de 180º deja invariantes a las rectas que pasan por el centro de giro. Los giros de 0º y de 360º son la identidad, dejan todos los puntos y rectas invariantes.

34. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?

Solución manipulativa y gráfica: Ya sabes, la simetría central en el plano es un giro de 180º luego es un movimiento directo. Los lados y los ángulos de un triángulo y su girado 180º son iguales, y con el mismo sentido.

35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

Solución: No tienen simetría central: B, P, T. ***Si la tienen:*** H, N, O, S, X, Z.

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

Solución abierta: Por ejemplo, una puerta, las patillas de unas gafas, un picaporte.

37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: El plano se transforma en un plano, una esfera en una esfera igual, un cono en otro cono igual, los planos paralelos se transforman en planos paralelos y los ortogonales en planos ortogonales.

4. SIMETRÍAS

38. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto *P'* simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'*. (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).

Solución manipulativa y gráfica:

39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.

Solución manipulativa y gráfica:

40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.

Solución manipulativa y gráfica:

41. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.

Solución manipulativa y gráfica:

42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

Solución: Eje de ordenadas: A' (–3, –4), B' (–5, 6), C' (4, 5); Eje de abscisas: A" (3, 4), B" (5, –6), C" (–4, –5).

43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

Solución: Eje de simetría horizontal: B, D. ***Eje de simetría vertical:*** A, M, T, U, V, W..

44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

Solución manipulativa y gráfica: Mediante una simetría la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas

paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*

Solución manipulativa y gráfica: El rectángulo tiene dos ejes de simetría, las mediatrices de los segmentos AB y BC.

46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: El hexágono tiene 6 ejes de simetría, 3 van de vértice a vértice opuesto, y 3 van de centro de lado a centro de lado opuesto.

47. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

Solución manipulativa y gráfica: Tiene 5, que van de vértice a centro de lado.

48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

b) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

c) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?

d) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

Solución manipulativa y gráfica: c) No existe ninguna simetría axial que transforme P' en P'', Existe la simetría central de centro el origen. Es un movimiento directo. d) P (–2, 5); P' (2, 5); P (–2, –5).

49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.

Solución manipulativa y gráfica: El vector de traslación es perpendicular a la dirección de las rectas, de sentido de la primera recta a la segunda y de módulo, el doble de la distancia entre las rectas.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.

Solución manipulativa y gráfica: El centro de giro es el punto de intersección de las rectas, y el ángulo de giro tiene de amplitud el doble del ángulo que forman las rectas y de sentido, de la primera recta a la segunda.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

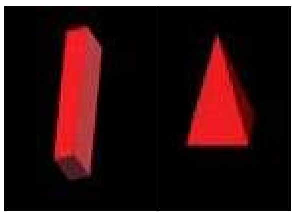
Solución: La misma simetría. La simetría es involutiva: s o s = Identidad.

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?

Solución: Ortogonales.

53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Solución abierta: Por ejemplo: mi silla, la mesa, mi ordenador, la lámpara, un lápiz.



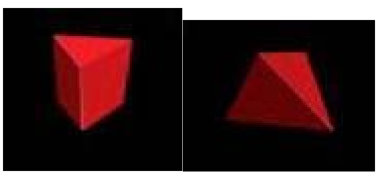
54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:

a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?

b) Una pirámide recta de base cuadrada.

c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?

Solución: a) Tiene 5 planos de simetría, 2 pasan por 4 vértices y 2 aristas laterales; 2 pasan por los puntos medios de 4 aristas de la base; 1 pasa por los puntos medios de las aristas laterales. Tiene un eje de rotación de 90º, 180º y 270º que va de centro de la base cuadrada a centro de la otra base. Un prisma oblicuo, ninguno. b) Pirámide de base cuadrada tiene 4 planos de simetría, 2 pasan por 2 vértices de la base y el vértice y los otros 2, por los puntos medios de las aristas de la base y el vértice. Tiene un eje de rotación de 90º, 180º y 270º que pasa por el vértice y el centro de cuadrado de la base. c) Se pierden los planos de simetría que pasan por dos aristas.



55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:

a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.

b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?

c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

Solución: a) 3 Planos que pasen por una arista y la mitad de una cara rectángulo; 1 plano que pase por la mitad de las aristas laterales; b) 3 Planos que pasen por una arista y la mitad de una cara lateral; Ninguno; c) 1 plano que divida a la base en dos triángulos iguales y 1 plano que pase por la mitad de las aristas laterales

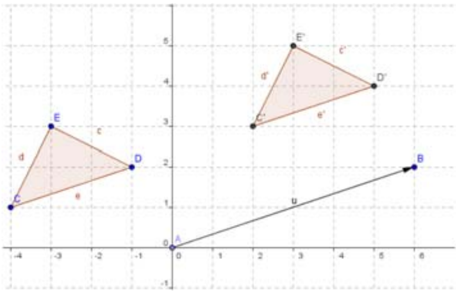
56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: El plano se transforma en un plano, una esfera en una esfera igual, un cono en otro cono igual, los planos paralelos se transforman en planos paralelos y los ortogonales en planos ortogonales.

GEOGEBRA

57. - *Utiliza Geogebra para estudiar* vectores *y traslaciones.*

- En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.



11. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?

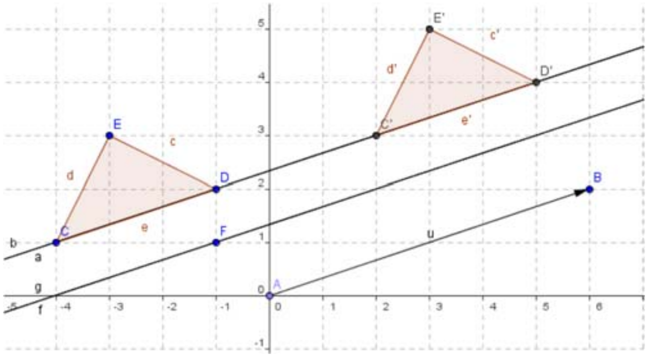
Solución manipulativa:

58. Comprueba en la ventana algebraica que:

   a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

   b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*
- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo, la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.



Solución manipulativa:

59. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

Solución manipulativa: Ninguno.

60. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Solución manipulativa: Los del eje de simetría. Rectas invariantes, además del eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, son rectas invariantes las rectas ortogonales al eje de simetría.

61. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45º.

   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.

   b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Solución manipulativa: El centro de giro es un punto invariante. No hay rectas invariantes (si el giro no es de 180º)

62. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

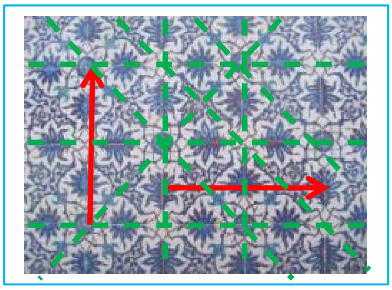
   a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.

   b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.

   c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

Solución manipulativa: En la simetría central, el centro es un punto invariante, y las rectas que pasan por ese centro son rectas invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES



63. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

Solución: Dos vectores de traslación ortogonales indicados en rojo. Ejes de simetría horizontales, verticales y oblicuos marcados, algunos de ellos, en verde. Los puntos de intersección de los ejes de simetría son centros de giro de 90º.

64. Análisis de mosaicos de la Alhambra: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 180º? ¿Y de 30º?

Solución: No hay simetrías. Hay giros de 60º y de 120º.

65. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

Solución abierta y manipulativa:

66. Generación de un mosaico mediante giros y traslaciones: animación. Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

Solución manipulativa:

67. También puedes ver en la siguiente animación cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.

Solución manipulativa:

68. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo, una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

Solución abierta y manipulativa:

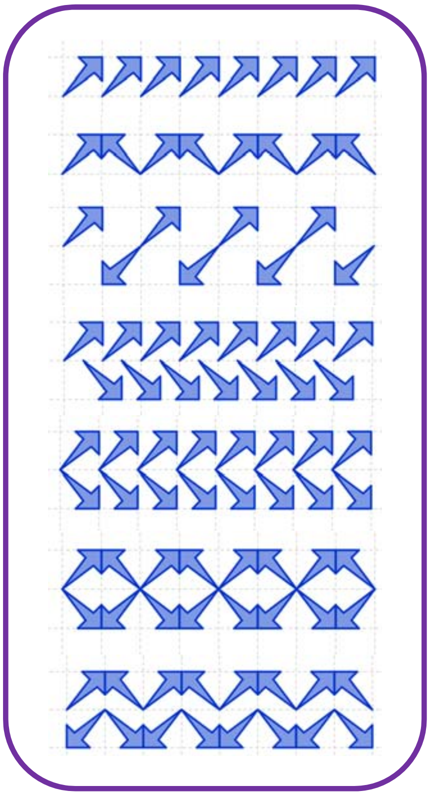
69. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

Solución: A) En L4, L5. B) L2, L5. C) L3, L5, L7. D) Si, en L6 y L7. E) Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180º, y simetría con deslizamiento.

70. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

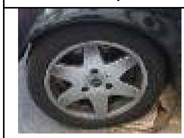
Solución abierta y manipulativa:



71. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

Solución: Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180º, y simetría con deslizamiento. Observa: en el primero únicamente hay traslación, en el 2º, simetría de eje vertical, en el 3º giros de 180º; en el 4º simetría con deslizamiento, en el 5º simetría de eje horizontal, en el 6º simetrías de eje horizontal y de je vertical, y por lo tanto giros de 180º; en el 7º simetrías de eje vertical y simetría con deslizamiento.

72. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12

a) Tiene simetría central.
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

Solución: a) Simetría central: 2, 3, 4, 7, 9, b) Ejes de simetría axial: 1 (5), 2 (6), 3 (7), 4 (4), 5 (5), 6(5), 7 (6)… c) Todos, d) Solución abierta.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?

Solución gráfica y manipulativa: Los vectores correspondientes a lados paralelos tienen las mismas coordenadas.

1. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, –2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

Solución: AB = (3, 1); AC = (4, –7); AD = (7, –2); BC = (1, –8); BD = (4, –3); CD = (3, 5); DC = (–3, –5); BA = (–3, –1).

2. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A'* (1, 5).

Solución: AA' = (–2, –2)

3. Por la traslación de vector u = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A'*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A'*?

Solución: A' = (11, 12).

4. Por la traslación de vector u = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A'* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?

Solución: A = (6, 4).

5. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector u = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

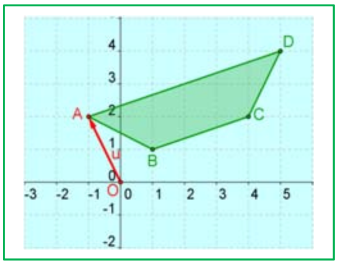
Solución: Centro = C' = (0, 0), radio = 3 unidades.

6. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C'* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?

Solución manipulativa y gráfica: Es una traslación de vector u + v = (2, 5). El origen se transforma en O' = (2, 5).

7. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?

Solución: A' = (1, 5); B' = (–1, 7); C' = (1, 9); D' = (3, 7).



8. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.

Solución: A' = (–2, 4); B' = (0, 3); C' = (3, 4); D' = (4, 9).

9. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

Solución: A' = (0, 5); B' = (1, 8); C' = (3, 9).

10. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
    a) Trasládalo con la traslación de vector u = (3, 0).
    b) Trasládalo después mediante la traslación de vector v = (0, 4).
    c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
    d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

Solución manipulativa y gráfica: c) C'' = (3, 4); d) (3, 6).

11. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector u = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector v = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.

Solución manipulativa y gráfica: A' (15, 10), B (6, 13) y C (9, 17).

12. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector u = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

Solución: v = (–2, 6).

13. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.
    b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.
    c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?

Solución manipulativa y gráfica: u = (5, 4). Longitud = 6.4 cm.

14. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

Solución: –u = (2, –5).

15. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
    b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?

c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.

Solución abierta, manipulativa y gráfica: b) El friso con la letra* M *tiene simetrías verticales.

16. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Solución: La traslación es una isometría, conserva distancias y ángulos, por tanto transforma un plano en un plano, una esfera en una esfera, un cono en un cono, mantiene el paralelismo y la ortogonalidad.

Giros

17. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A''* obtenido al girar *A'* 90º con el mismo centro de giro.

Solución manipulativa y gráfica: A' = (–5, –4); A'' = (–4, 5).

18. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.

Solución abierta, manipulativa y gráfica: Las dos figuras tienen todas las longitudes y los ángulos iguales.

19. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.

Solución manipulativa y gráfica:

20. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

Solución manipulativa y gráfica: En 8 giros de 45º llegas al triángulo inicial, luego los giros han sido de 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º, 360º.

21. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.

Solución manipulativa y gráfica:

22. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

Solución abierta: Si tiene centro de simetría. Por ejemplo: Un folio, una flor de 6 pétalos iguales, un cubo.

23. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A'*, *B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?

Solución manipulativa y gráfica: A' = (–2, –6), B (2, –5), C (–5, –3)

24. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?

Solución manipulativa y gráfica: A'' = (13, 9), B'' = (11, 21) y C'' = (9, 14).

25. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P'*?

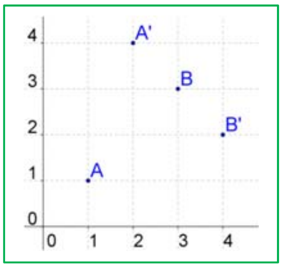
Solución: P' = (–x, –y)

26. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

Solución: A' = (–3, 4), B' = (–5, –6), C' = (4, –5).

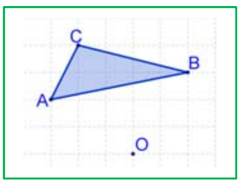
27. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?

Solución manipulativa y gráfica: Un rombo. 6 giros de 60º, 120º, 180º, 240º, 300º, 360º.



28. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.

Solución manipulativa y gráfica: Tienes que dibujar la mediatriz del segmento AA' y la del segmento BB' y buscar el punto donde se cortan.



29. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.

Solución manipulativa y gráfica: Resulta otro triángulo igual.

30. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?

Solución manipulativa y gráfica: Es suficiente girar dos puntos. Basta girar el punto donde corta a la recta la ortogonal desde el punto O.

31. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (***Ayuda***: Es un

juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

Solución: Juega. Con la ayuda es fácil descubrir la estrategia ganadora.

32. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

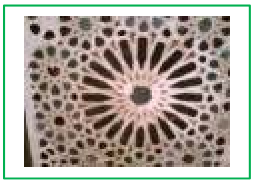
Solución: 90º. No. Hay ejes de simetría ortogonales. Los centros de giro están en la intersección de dichos ejes.

33. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

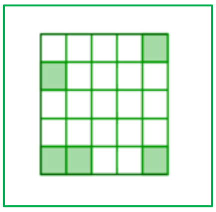
Solución: El centro es en todos los casos donde se cortan los ejes de simetría. a) 71º; b) 60º; c) 36º; d) 120º; e) 189º; f) 90º; g) 180º; h) El centro es el punto de intersección de las diagonales, 180º; i) 45º.

34. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?



Solución: Tiene centro de giro de 18º.

35. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.



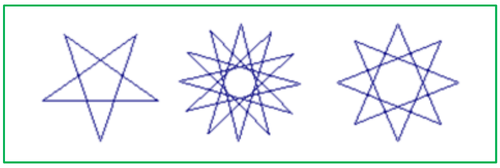
Solución manipulativa y gráfica: La simetría central es un movimiento directo, conserva distancias y ángulos.

36. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

Solución: 3.

37. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A’* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

Solución manipulativa y gráfica:



38. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

Solución: Tienen centro de simetría el de 12 puntas y el de 8 puntas. El de 5, no. El ángulo de giro es de: 72º, 30º, 45º, respectivamente.

39. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

Solución abierta: Por ejemplo, algo con forma de cilindro, cono o esfera.

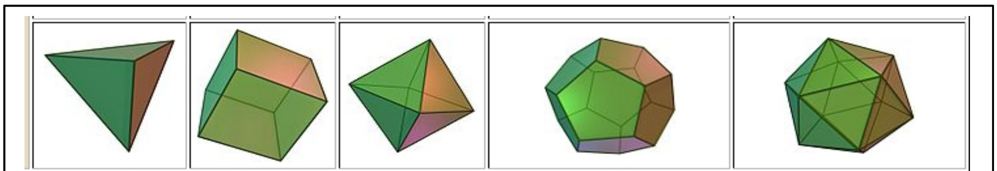
40. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A’* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

Solución: B’ (–8, –1), C’ (–5, –5), D’ (–1, –2) y E’ (–3, –0)

41. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

Solución: 90º.

42. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



Solución: No tiene simetría central el tetraedro-

43. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?

Solución: Tiene simetría central el cilindro.

Simetrías

44. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.

Solución manipulativa y gráfica:

45. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

Solución: a) H, I, O, X; ***b)*** A, M, T, U, V, W; ***c)*** B, C, D, E; ***d)*** F, G, J, K, L, N, P, Q, R, S, Y, Z***;***
e) Las letras H, I, O, X ***tienen centro de simetría.***

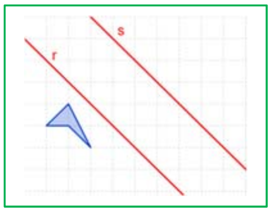
46. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?
a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

Solución: Un único eje de simetría: a), c). Dos ejes: d); f). Ninguno: b), e).

47. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:
a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.
e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

Solución: a) 4; b) 3; c) 1; d) 6; e) Infinitos; f) 2; g) 2.

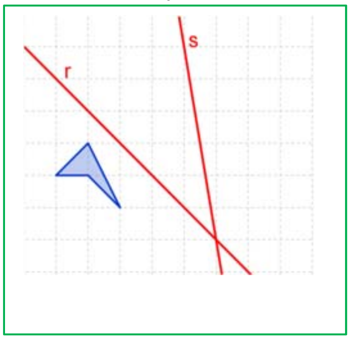
48. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.
Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:
b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*.
c) ¿Qué elementos la definen?
d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

Solución manipulativa y gráfica: a) (5, 7), (6, 7), (7, 6) y (6, 8); b) y c) Una trslación de vector u = (2, 2);
d) Es otra traslación de vector –u = (–2, –2); Vértices: (–1, 1), (0, 1), (1, 0) y (0, 2).

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

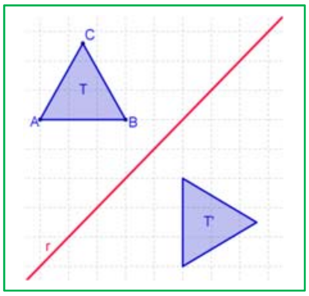
c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

Solución manipulativa y gráfica: La isometría es un giro.

50. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

Solución manipulativa y gráfica: a) Son iguales; b) Puedes pasar de una a otra mediante isometrías directas, es decir, traslaciones y giros. Si las haces coincidir dando la vuelta, es mediante simetrías. Las dimensiones no cambian.



51. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*?

Solución manipulativa y gráfica:

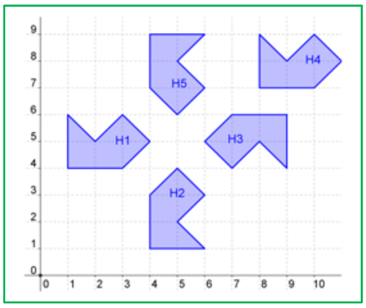
52. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Solución manipulativa:

Problemas

53. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.
   a) Una traslación según el vector (1, 3).
   b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.
   c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

Solución: a) La traslación no deja ningún punto invariante, y deja invariantes las rectas paralelas al vector de traslación. b) La simetría axial deja invariantes a los puntos del eje de simetría, en este caso, al eje de ordenadas. El eje es una recta invariante de puntos invariantes. Rectas invariantes son también las perpendiculares al eje de ordenadas, en este caso, las rectas horizontales. C) La simetría central deja invariante al centro de simetría, en este caso, al origen de coordenadas. Deja invariantes a las rectas que pasan por el centro, en este caso a las rectas que pasan por el origen de coordenadas.



54. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

Solución: H1: (1, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 6), (4, 5) y (3, 4);
H2 simetría; Vértices: (4, 1), (6, 1), (5, 2), (6, 3), (5, 4) y (4, 3);
H3 simetría central de centro (9, 6); Vértices (9, 4), (8, 5), (7, 4), (6, 6), (7, 6);
H4 traslación de vector (7, 3); Vértices (8, 7), (8, 9), (9, 8), (10, 9), (11, 8) (10, 7)
H5 giro de 90º. Vértices (4, 9), (6, 9), (5, 8), (6, 7), (4, 7) y (4, 9);

55. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?
b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?
c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?

d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

***Solución:** a) Las traslaciones dejan invariante a las rectas paralelas al vector de traslación. b) La simetría central, tanto en el plano como en el espacio, deja invariante a las rectas que pasan por el centro. c) La simetría axial deja invariante a las rectas perpendiculares al eje de simetría. Los únicos puntos invariantes son los del eje. d) La simetría especular deja invariantes a las rectas y a los planos ortogonales al plano de simetría. Solo deja invariantes a los puntos del plano de simetría.*

56. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

Solución:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Traslación	*Ninguno*	*Paralelas al vector de traslación*	*Ninguna*
Simetría central	*El centro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Ninguna*
Giro	*El centro de giro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Ninguna*
Simetría axial	*El eje de simetría*	*El eje y las perpendiculares al eje*	*El eje de simetría*
Simetría con deslizamiento	*Ninguna*	*Ninguna*	*Ninguna*

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación	*Ninguno*	*Paralelas al vector de traslación*	*Ninguno*
Simetría central	*El centro*	*Rectas que pasan por el centro*	*Los planos que pasan por el centro*
Giro	*Los puntos del eje de giro*	*Rectas ortogonales al eje*	*Los planos que contienen al eje de giro*
Simetría especular	*El plano de simetría*	*Las del plano de simetría y las ortogonales al plano*	*El plano s¡de simetría y los planos ortogonales al plano de simetría*
Simetría con deslizamiento	*Ninguna*	*Ninguna*	*Ninguno*

57. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)

a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

***Solución manipulativa y gráfica:** a) A' (–1, 3), B' (1, 4) y C' (–2, 5); b) A" (–1, –2), B" (–2, –4) y C" (–3, –1).*

58. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2), *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

Solución manipulativa y gráfica: a) A' (–1, 0), B' (1, 1), C' (–2, 2) y D' (0, 3); b) A" (4, –1), B" (2, –2), C" (5, –3) y D" (3, –4)

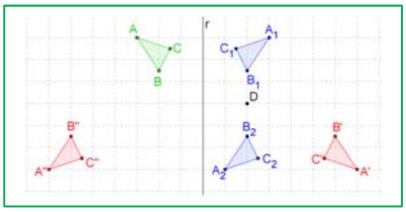
Problemas de ampliación

59. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

Solución manipulativa y gráfica: Si. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

60. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:



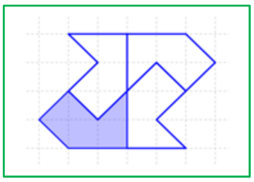
61. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.

c) ¿Qué conclusión obtienes?

Solución: a) Simetría de eje r y giro de 180º de centro D; b) Giro de centro D y 180º, y simetría de eje la recta r; c) La composición de isometrías no es conmutativa, pues A"B"C" es distinto de $A_2B_2C_2$.

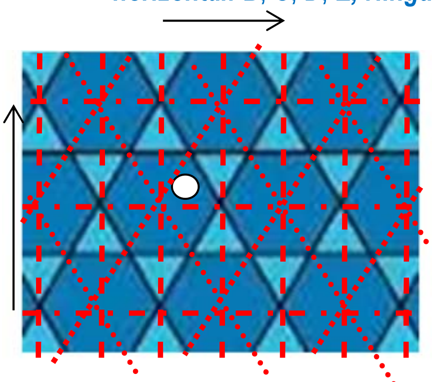


Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

Solución: Giros de 90º, 180º y 270º.

62. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

Solución: Eje vertical: A, M, T, U, V, W***; Dos ejes de simetría:*** H, I, O, X***; Centro de simetría:*** N, S, Z***; Eje de simetría horizontal:*** B, C, D, E***; Ningún tipo de simetría:*** F, G, J, K, L, P, Q, R, Y.



63. **Análisis de un mosaico:** Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.

a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

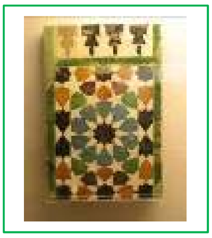
b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.

e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.

Solución manipulativa y gráfica: Los ejes de simetría están señalados en rojo. a) Hay giros de 60º en los centros de los hexágonos. B) Hay giros de 180º con centro en los vértices de los triángulos. C) Hay simetrías de ejes verticales, de ejes horizontales y de ejes oblicuos.



64. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

Solución manipulativa: Hay ejes de simetría horizontales y verticales; y centros de giro de 36º y de 45º.

65. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico. Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.

Solución manipulativa:

66. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja

previamente su gráfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

Solución: Son pares, con eje de simetría el eje de ordenadas: a) y c). Son impares, con centro de simetría el origen: b) y d).

67. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.

Solución manipulativa y gráfica: cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.

68. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.

Solución manipulativa y gráfica: Es importante construir los poliedros y manejarlos. Contienen dos aristas opuestas

69. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

Solución manipulativa y gráfica: Tienen 5 planos de simetría. Tiene un eje de giro de 72º. No tiene simetría central.

70. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución manipulativa y gráfica: Tiene simetría central. Tres ejes de giro (de 180º) que pasan por el centro de una cara al centro de la cara opuesta. Planos de simetría que pasan por los ejes de giro y centros de las aristas.

71. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Solución: No tiene simetría central. Eje de giro de 120º que pasa por el vértice y el centro de la base. Tres planos de simetría que pasan por el eje de giro y un vértice de la base.

72. Describe las isometrías que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada

d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

Solución: a) Todos los planos que pasan por el centro son planos de simetría, y todos los diámetros que pasan por el centro son ejes de giro de cualquier ángulo; b) Todos los planos que pasan por los centros de las bases son planos de simetría, y el eje que pasa por los centros de las bases es eje de giro de cualquier ángulo; c) El eje que pasa por los centros de la base es eje de giro de 90º, º80º y 270º, los planos que contienen a ese eje y pasan por puntos medios de las aristas son planos de simetría. Los ejes que pasan por los centros de las caras rectangulares son ejes de giro de 180º, y los planos que pasan por dichos ejes y puntos medios de aristas so planos de simetría; d) Todos los planos que pasan por el vértice y el centro de la base son planos de simetría, y el eje que pasa por el vértice y el centro de la base es eje de giro de cualquier ángulo; e) No tiene simetría; f) La recta que pasa por el vértice y el centro de la base es eje de giro de 120º y 240º, los planos que contienen a dicho eje y pasan por un vértice de la base son planos de simetría.

73. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

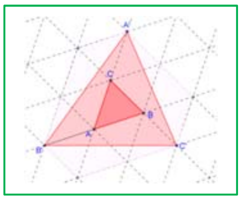
Solución abierta, manipulativa y gráfica:

74. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	***No***	***Si***	***4, 120º***	***Si***	
Cubo	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Octaedro	***Si***	***Si***	***3, 90º; 4, 120º; 6, 180º***	***Si***	
Dodecaedro	***Si***	***Si***		***Si***	
Icosaedro	***Si***	***Si***		***Si***	

75. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
   a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
   b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
   c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
   d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?

Solución manipulativa y gráfica: a) Muchos mosaicos hemos visto que los tienen. b) Para que sea un centro de simetría debe ser ortogonales. c) Es una simetría especular de plano vertical. d) Si.



76. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.

Solución: 1/4 u^2.

77. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

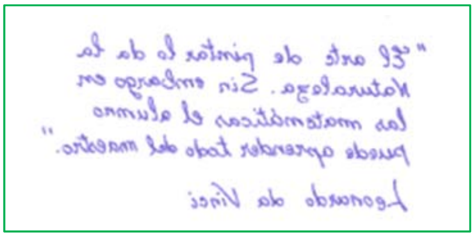
Solución abierta, manipulativa y gráfica:

78. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.

Solución abierta, manipulativa y gráfica:

79. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.

Solución manipulativa y gráfica:



80. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.

Solución manipulativa y gráfica: Ayuda***: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.***

81. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

Solución manipulativa y gráfica: a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ ***que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120º. Aplicamos ahora la simetría de vértice A:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$***. La composición transforma al triángulo en:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ ***que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría. d) Hacemos ahora el giro de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$***. Componemos el giro de 120º con el de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ ***y obtenemos la identidad. e) Componemos dos giros de 240º:*** $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ ***y obtenemos el giro de 120º. La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).***

82. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

Solución manipulativa y gráfica: En el diseño de este mosaico hay simetrías de eje vertical, de eje horizontal, simetrías de ejes oblicuos, giros de 90º, giros de 45º y traslaciones.

83. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

Solución manipulativa y gráfica: Al componer simetrías de ejes paralelos tienes una traslación. Al componer simetrías de ejes secantes obtienes un giro de ángulo doble al que forman los ejes de simetría.

84. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

Solución manipulativa y gráfica: El hueso es simétrico con dos ejes de simetría ortogonales. Se pasa de un hueso blanco a uno de color adyacente con un giro de 901 y centro el vértice del cuadrado inicial.

85. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas *m* y *n* que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto *O*. Dibuja su transformado por:
   a) Un giro de centro el punto *O* y ángulo 60º.
   b) La simetría de eje *n*
   c) La simetría de eje *m*
   d) La composición de la simetría de eje *n* con la de eje *m*
   e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

Solución manipulativa y gráfica: La composición de la simetría de eje n con la de eje m es un giro de centro el punto de intersección y de 60º.

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)

Solución: b)

2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector **u**:
   a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)

Solución: c)

3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) **no** puede ser:
   a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º b) Una traslación de vector **u** = (2, 2)
   c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º d) Una simetría de eje *y* = *x*.

Solución: b)

4. La transformación identidad también se llama:
   a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)

Solución: d)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
   a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles

Solución: c)

6. La simetría central en el plano es un giro de:
   a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º

Solución: b)

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
   a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central

Solución: b)

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

Solución: b)

9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:
   a) O b) H c) S d) D

Solución: d)

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
   a) Dos giros de distinto centro b) Dos simetrías de ejes secantes
   c) Un giro y una simetría d) Dos simetrías de ejes paralelos.

Solución: b)

CAPÍTULO 9: MAGNITUDES PROPORCIONALES. PORCENTAJES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

RAZÓN Y PROPORCIÓN

1. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente. ¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

Solución: a) 40; b) 1/40

2. Medio kilo de cerezas costó 1,90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

Solución: 0,5 / 1,90 = 50 / 190.

3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes

Solución abierta: Por ejemplo: 360/10; 72/2.

4. Completa las siguientes proporciones:

a) $\frac{5}{22}=\frac{45}{x}$ b) $\frac{0,3}{x}=\frac{7}{14}$ c) $\frac{x}{9,5}=\frac{4,7}{1,9}$ d) $\frac{0,05}{100}=\frac{x}{400}$

Solución: a) 198; b) 0,6 c) 23,5; d) 0,20

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10 b) 24, 40, 50, 30 c) 0,36; 0,06; 0,3; 1,8

Solución: a) 12/3 = 40/10; b) 24/40 = 30/50; c) 0,36/0,3 = 1,8/0,3.

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2,5:

0,5	9	6		20			2,5
			50		8	25	

Solución:

0,5	9	6	***20***	20	***16***	***10***	2,5
1,25	***22,5***	***15***	50	***50***	8	25	***6,25***

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:
   1) La cantidad de filetes que debo comprar y el número de personas que vienen a comer.
   2) El peso de una persona y su altura.
   3) El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él
   4) El precio de una tela y lo que necesito para hacer un vestido.
   5) Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado
   6) El peso de una persona y su sueldo.

Solución: Directamente proporcionales 1) y 5) En la 4) se puede interpretar* lo *cómo metros necesarios y* el precio de una tela *como precio por m o precio total, en este último caso sería proporcional directa. No son directamente proporcionales: 2) 3) y 6)

8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$ c) $\frac{7,5}{56,9}=\frac{x}{2}$

Solución: a) 60; b) 7/3 c) x = 2*7,5/56,9 = 0,2636204

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3,9 0,3 1,3 0,1 b) 5, 12, 6,10 c) 0,18 4 0,4 18. ¿Hay más de una solución?

Solución: a) 3,9 / 1,3 = 0,3/0,1; b) 5/6 = 10/12; c) 18 / 4 = 0,18 / 0,4.

10. El coche de Juan gasta 5,5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?

Solución: 37,015 l.

12. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?

Solución: 2,5 €; 2250 €.

13. Una fabada para 6 personas necesitas 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?

Solución: 48 personas.

14. Cuatro camisetas nos costaron 25,5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?

Solución: 89,25 €.

15. Calcula mentalmente:

a) El 50 % de 240 b) el 1 % de 570 c) el 10 % de 600 d) el 300 % de 9.

Solución: a) 120; b) 5,70; c) 60; d) 27.

16. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
	60	294

Solución:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	***125***
720	***15***	108
60	140	***84***
490	60	294

17. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

Solución: Italianas: 10%; francesas: 30% alemanas: 25% rusas: 35%.

18. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?

Solución: a) 63 €; b) 357 €.

19. ¿Cuál de estas dos oferta ofrece un mayor % de descuento:

Antes 44,99 €
Ahora 31,99 €

Antes 11,99
Ahora 9,99

Solución: la primera 28,89%, la segunda 16,68%

20. Completa:
   a) De una factura de 540 € he pagado 459 €. Me han aplicado un .... % de descuento
   b) Me han descontado el 16 % de una factura de .... € y he pagado 546 €.
   c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

Solución: a) 15 %; b) 650 €; c) 750 €.

21. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.

Solución: 11512 €.

22. Una persona invierte 3570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3659,25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.

Solución: 2,5 %.

23. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?

Solución: 40 €.

24. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 \$	105 \$	90,4 \$	100,20 \$	12 \$
Precio final					

Solución:

Importe factura	34 \$	105 \$	90,4 \$	100,20 \$	12 \$
Precio final	***39,1***	***120,7***	***103,96***	***115,23***	***13,8***

25. El precio de un televisor es 650 € + 21 % IVA. Lo pagaremos en seis meses sin recargo. Calcula la cuota mensual.

Solución: (650 + 136,5)/6 = 131,08 €.

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

26. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

Solución abierta: Por ejemplo: mapas de países, mapas de carreteras, plano de una ciudad, plano de un piso

27. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 3,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

Solución: (1:9 459 459) la respuesta más adecuada es 1:10 000 000

28. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
36 cm	
	7,7 km
0,005 m	

Solución:

Dibujo	Medida real
36 cm	***900 m***
700 cm	7,7 hm
0,005 m	***12 km***

29. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,5 cm	900 m	
7 cm	7,7 hm	
4 cm	12 km	

Solución:

Dibujo	Medida real	Escala
1,5 cm	900 m	***1:60000***
7 cm	7,7 hm	***1:11000***
4 cm	12 km	***1:300000***

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

30. Cinco trabajadores terminan su tarea en 8 días. El número de trabajadores y el número de días que tardan, ¿son magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

Solución: Son inversamente proporcionales. Razón de proporcionalidad: 40.

31. Completa la tabla de proporcionalidad inversa y señala el coeficiente de proporcionalidad.

Velocidad en km/h	100	120			75
Tiempo en horas	6		20	4	

Solución:

Velocidad en km/h	100	120	***30***	***150***	75
Tiempo en horas	6	***5***	20	4	***8***

32. Hemos cortado una pieza de tela en 24 paños de 0,80 cm de largo cada uno. ¿Cuántos paños de 1,20 m de largo podremos cortar?

Solución: 16 paños.

33. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 €. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo, ¿cuántos euros debe poner ahora cada uno?

Solución: 3 €.

34. Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

Solución: 4,8 horas.

REGLA DE TRES COMPUESTA

35. Seis personas gastan 2100 € durante 4 meses en gastos de transporte. Si el gasto durante 10 meses ha sido de 3600 €, ¿a cuántas personas corresponde?

Solución: Corresponde a 4,11 personas, que no es exacta. Aproximadamente 4 personas.

36. Con una jornada de 8 horas diarias, un equipo de 20 personas tarda 9 días en concluir un trabajo. ¿Cuántas personas se necesitan para realizar el mismo trabajo, trabajando 9horas diarias para realizar el trabajo en 5 días?

Solución: 32 personas

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos

Solución: Cociente entre dos números o dos medidas. Por ejemplo: 3 kg / 12 €; 2 / 6; 800 km / 56 l.

2. ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental: a) 6, 24, 12, 3 b) 35 0,5 1,25 7

Solución: Extremos y medios. a) 6/24 = 3/12; 6·12 = 3·24; b) 7/35 = 0,5/2,5; 7·2,5 = 35·0,5-

3. Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?

Solución: Aproximadamente 5,7 kg.

4. Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11.36		56.8		25.56

Solución:

Litros de gasolina	8	25	***40***	4	***18***
Euros	11.36	***35,5***	56.8	***5,68***	25.56

5. En España muchos productos llevan en el precio un impuesto llamado IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), del 21 %. En los tickets de los establecimientos suelen marcar el precio final, sumando el 21 % de IVA. Calcula el precio final de una batidora que vale 110 € +IVA

Solución: 133,10 €.

6. Con 48 € puedo comprar 20 piezas de madera. Si las piezas costaran 1,50 € cada una, ¿cuántas podría comprar con el mismo dinero?

Solución: 32 piezas.

7. ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

MASA DE ROSQUILLAS
2kg de harina
6 huevos
1kg y medio de azúcar

MASA DE ROSQUILLAS
Medio kilo de harina
4 huevos
400 g de azúcar

Solución: En la segunda.

8. Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso ¿cuántos días podremos dar de comer a les restantes?

Solución: 37 días y medio.

9. Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4,5		10		3

Solución:

Velocidad en km/h	90	120	***40,5***	75	***135***
Tiempo en horas	4,5	***3,375***	10	***5,4***	3

Razón =90*4,5 = 120*3,375 = 40,5*10 = … = 405.

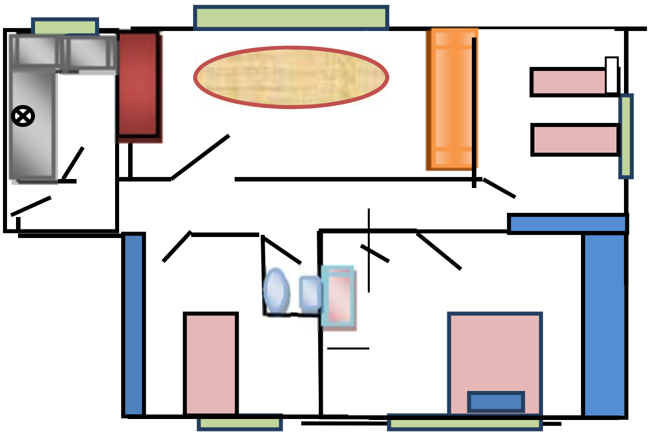
10. Cada gominola cuesta 5 cent y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?

Solución: Tiene 25 gominolas y cuesta 125 céntimos.

11. Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿cuánto tiempo tardarán el llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?

Solución: 1,8 horas

12. Observa el plano de esta vivienda dibujado a una escala 1:400. ¿Cuáles son las dimensiones reales del salón? ¿Y de la cocina?



Solución: Salón: 7 cm plano corresponden a 28 m reales y 3 cm del plano, corresponden a 12 m reales; Cocina: 3,5 cm del plano corresponden a 14 m reales y 2 cm del plano a 8 m reales.

13. Expresa en euros el cambio de 1400 $, si cada euro cotiza a 1,26 $

Solución: 1111,11 €.

14. El agua al congelarse aumenta un 10 % su volumen. ¿Cuántos litros de agua necesitamos para conseguir una barra de hielo de 75 dm^3?

Solución: 68,18 l.

15. Un pantalón costaba 36 € pero en las rebajas se vende a 28 €. ¿Qué % han rebajado?

Solución: 22,22 %.

16. El precio de una televisión es 847 €, IVA incluido. Calcula el precio sin IVA.

Solución: 700 €,

17. Señala en cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales:
    a) La cantidad de árboles talados y los kilos de leña almacenados
    b) La velocidad del tren y el tiempo que tarda en llegar a su destino
    c) El tamaño de la bolsa y la cantidad de bolsas necesarias para guardar la compra
    d) La distancia que recorre un automóvil y la gasolina que gasta
    e) Las personas que asisten al cumpleaños y el tamaño del trozo de tarta que toca a cada uno
    f) El radio de una circunferencia y su longitud
    g) Las bombillas que iluminan una sala y el gasto en electricidad.

Solución: Directa: a), d), f), g); Inversa: b), c), e).

18. Para vaciar un depósito hemos empleado 17 cubos de 22 litros cada uno. Si la siguiente vez los cubos tienen una capacidad de 34 litros ¿cuántos necesitaremos?

Solución: 11 cubos.

19. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado

Antes	Después
23,95	15,95

Solución: 33,33 % redondeando ambos precios,

20. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21,6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12,20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?

Solución: 35,55 %; Costaba 7,40 €; Aumento 64,86 %.

21. Un empleado público que gana 1154€ netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5% a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?

Solución: 173,10€

22. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.

A la vista de este cuadro de precios ¿Cuánto cuesta estacionar un coche en zona azul y en zona verde durante 80 minutos? ¿Y durante 45 minutos?

Zona azul	Tarifa		Zona verde	Tarifa
Hasta veinte minutos	0,25 €		Hasta veinte minutos	0,55 €
Media hora	0,45 €		Media hora	1,05 €
Una hora	1,20 €		Una hora	2,25 €
Hora y media	1,90 €		Hora y media (máx.)	3,50 €
Dos horas	2,50 €			

Solución: En zona azul 1,45 € y en zona verde 2,80 €.

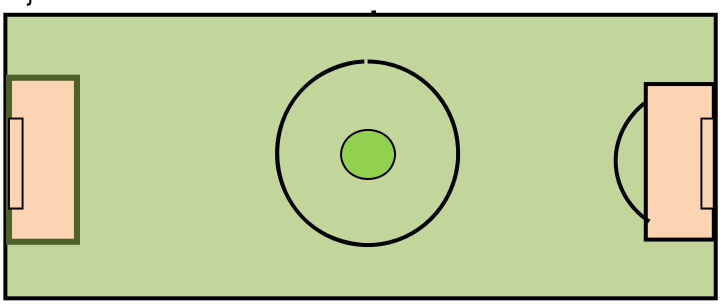
23. El precio de un ordenador portátil es 899€ IVA (21 %) incluido. Calcula su precio sin IVA.

Solución: 742,97 €.

24. El juego cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324€ + IVA (21 %). Calcula el precio de cada rueda.

Solución: 98,01 €.

25. En un dibujo, el campo de fútbol mide 24 cm por 16 cm. El campo mide 90 m de largo ¿Cuánto mide de ancho? ¿A qué escala está dibujado?



Solución: Ancho: 60 m; Escala: 1:375

26. En un mapa dibujado a escala 1: 250000, la distancia entre dos puntos es de 0,15 m. Calcula la distancia real en km

Solución: 37,5 km.

27. La base y la altura de un rectángulo miden 14 cm y 32 cm. ¿A qué escala hemos dibujado otro rectángulo semejante al anterior, de 49 cm de base? Calcula su altura.

Solución: Escala: 7:2; Altura: 112 cm.

28. Con 840 kg de pienso alimentamos a 12 animales durante 8 días. ¿Cuántos animales similares podrían alimentarse con 2130 kg durante 15 días?

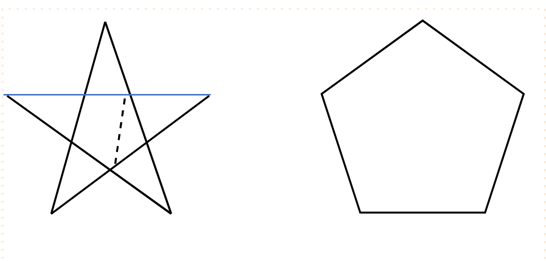
Solución: 16,22 es decir aproximadamente 16 animales

29. Para almacenar 2580 kg de mercancía en 4 días contratamos a 6 personas. Si sólo podemos contar con 5 personas y la carga es de 3000 kg ¿Cuántos días se tardará en el almacenaje?

Solución: 5,58 días

30. *Teano* fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos la proporción áurea. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas. Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la escuela pitágórica, y su relación con el número de oro.

Solución: diagonal/lado = 1,61803…



31. Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva.

La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro:

$$\frac{\text{Segmento verde}}{\text{Segmento rojo}} = \frac{\text{Diagonal}}{\text{Lado}} = 1,618\ldots$$

32. Al número de oro se le llama "La Divina Proporción" porque los objetos áureos son armoniosos a la vista. Esto sucede con las dimensiones de muchos rectángulos. Si divides el lado mayor entre el menor debes obtener el número de oro. Busca a tu alrededor alguno de esos rectángulos armoniosos.

Solución abierta:

33. El número de oro, del que conocerás más características en próximos cursos, tiene un valor aproximado de 1,62.

Si quieres saber si eres áurea o áureo, puedes establecer la siguiente razón:

$$\frac{\text{tu altura}}{\text{la distancia entre el suelo y tu ombligo}}$$ y debe aproximarse lo más posible al número de oro. Mídete.

Solución abierta:

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación

   a) Proporcional directa b) proporcional inversa c) no es proporcional

Solución: a)

2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:

   a) 22,4 € b) 30.6 € c) 26.4 € d) 24.2 €

Solución: c)

3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699,20€. El importe total de la factura sin descuento era:

   a) 920€ b) 1220€ c) 880€

Solución: a)

4. De Jaén a Cádiz se tardan 4h y 15 minutos por carretera a una media de 86 km/h. Si subimos la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto se tardará en hacer el recorrido?

   a) 3h 39 minutos b) 3h 6 minutos c) 3h 56 minutos

Solución: a)

5. La distancia entre dos ciudades es 108 km. En el mapa se representa con una distancia de 6 cm. La escala del mapa es:

   a) 1:180000 b) 1: 18000 c) 1:1600000 d) 1:1800000

Solución: d)

6. Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:

   a) 3227 € b) 2998 € c) 3028 €

Solución: a)

7. Los datos que completan esta tabla de proporcionalidad inversa son:

Personas que realizan un trabajo	30		10	9	
Días que tardan en realizarlo	15	6			25

   a) 12; 5; 4,5; 50 b) 75; 45; 30; 18 c) 75; 45; 50; 18

Solución: a)

8. Cuatro personas han pagado 1540 € por siete noches de hotel. ¿Cuánto pagarán 6 personas si desean pasar 12 noches en el mismo hotel?

   a) 3690 € b) 3960 € c) 3820 €

Solución: b)

9. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios, empleando 3 horas al día?

   a) 40 días b) 30 días c) 50 días

Solución:

10. 48 estudiantes necesitan 12450 € para organizar un viaje de estudios de 10 días. ¿Cuántos días durará el viaje si disponen de un 15 % más de dinero y acuden 8 estudiantes menos?

   a) 12 días b) 18 días c) 15 días

Solución: c)

CAPÍTULO 10: ÁLGEBRA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:
   a) El triple de un número más su mitad.
   b) La edad de una persona dentro de 10 años.
   c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.
   d) La diferencia entre dos números consecutivos.

Solución: a) $3x + x/2$; b) $x + 10$; c) $x/6 - x^2$; d) $x - (x - 1)$.

2. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.

Solución: $(x + 7)*2 - 10 - x = x + 4$. Adela dijo 9, luego $x = 9 - 4 = 5$.

3. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.

Solución abierta:

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:
   a) $3 - 14xy$ b) $2a + 6b - 9c$ c) $6xy + 8$ d) $2xy + 6 - 4y$

Solución: a) Coeficientes: 3 y – 14, parte literal: xy, número de términos: 2; b) Coeficientes: 2, 6 y –9, parte literal: a, b y c, número de términos: 3; c) Coeficientes: 6 y 8, parte literal: xy, número de términos: 2; d) Coeficientes: 2, 6 y – 4, parte literal: xy, y, número de términos: 3.

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:
   a) $6x + 4y$ para $x = 3$, $y = 2$.
   b) $2 - 3a$ para $a = -5$.
   c) $5a + 9b - 7c$ para $b = -1$, $a = -1$ y $c = +2$.

Solución: a) 26; b) 17; c) – 28.

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:
   a) $3x^6 + 7x^2 - x$ b) $7x^3 + 8x^5 - 6x^2$ c) $3xy^6 + 7xy^2 - 2xy$

Solución: a) Grado: 6; Monomios: $3x^6$, $7x^2$, $-x$; b) Grado: 5; Monomios: $7x^3$, $8x^5$, $-6x^2$; c) Grado: 7; Monomios: $3xy^6$, $7xy^2$, $-2xy$

7. Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$.

Solución: $p(0) - 7$; $p(1) = 3$, $p(-1) = 3$, $p(2) = 213$.

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
   a) $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$ b) $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$

Solución: a) $-x^3 + 9x - 1$; b) $-6x^3 + 3x^2 - x + 9$.

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:
   a) $(-2x)\cdot(3x^2 - 4)$ b) $(2x^3 + 1)\cdot(-4x + 5)$ c) $(4x^3 - x^2 - 1)\cdot(2x + 6)$ d) $(-1)\cdot(8x^2 + 7x - 9)$

Solución: a) $-6x^3 + 8x$; b) $-8x^4 + 10x^3 - 4x + 5$; c) $8x^4 + 22x^3 - 6x^2 - 2x - 6$; d) $-8x^2 - 7x + 9$.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

Solución:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$	$4x - 5$	$6x - 7$	x
$3x + 2 = x - 9$	$3x + 2$	$x - 9$	x
$8a + 7 = 65$	$8a + 7$	65	a
$4x - 3y = 2 + y$	$4x - 3y$	$2 + y$	x , y

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:
    a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

Solución: a) 2; b) 2; c) 1; d) 1.

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:
    a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

Solución: a) 1; b) 2; c) 2; d) 3.

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

Solución:

Ecuación	Soluciones		Ecuación	Soluciones
$3x + 5 = x - 1$	***–3***		$a^2 - 6 = -2$	***–2, 2***
$x + 6 = 4x - 3$	***3***		$b - 4 = 8 - b$	***6***

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:
    a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

Solución: a) $x = -3/2$; b) $x = -15/2$; c) $x = 1$; d) $x = -2$.

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.
    a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

Solución: c), d) y e).

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:
    a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Solución abierta: Por ejemplo: a) $x = 4$, $2x = 8$; $3x = 12$; b) $x = 5$; $2x = 10$; $2x - x = 5$; c) $x = -1$; $2x = -2$; $x = 5 - 6$; d) $2x = -10$; $5 + x = 0$; $3x + 15 = 0$.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

Solución: 4, 5, y 6.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Solución: La madre tiene 48 años y Álvaro tiene 16 años.

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

Solución: $(2(x + 12) - 20)/2 = x + 12 - 10 = x + 2$. Basta restar 2 al número que nos digan.

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

Solución: $(10x - x)/9 = 9x/9 = x$.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

Solución: 20, 21 y 22.

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

Solución: 5 €.

23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

Solución: Miden 30 cm, 30 cm y 16 cm.

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

Solución: $A = 48$ cm^2. Los catetos miden 8 y 12 cm.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

Solución: 24º y 72º.

26. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

27. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

Solución: Tardan 3 horas y media.

28. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

Solución: Hay 12 monedas de 10 céntimos y 4 de 20 céntimos.

29. Si un bolígrafo vale 1.5 euros que es el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5.50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

Solución: 2 bolígrafos y 7 lápices.

30. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

Solución: Tiene 6 crías, regala a la primera amiga 3, le quedan 3, al segundo amigo 1,5 + 0,5 = 2 crías, y le queda 1.

31. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

Solución: Hay 36 conejos y ninguna gallina.

32. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

Solución: 4800 litros.

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

33. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2-\sqrt{2}x+8=0$ c) $3x^2 - 5 = 0$ e) $2x^2-\frac{3}{x}=0$

b) $7xy^2 - 2 = 0$ d) $6 - 8,3x = 0$ f) $2x^2-3\sqrt{x}+4=0$

Solución: Si lo son: a) c); No lo son: b), d), e) y f).

34. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $7 - 8x^2 + 2x = 0$ b) $-6x^2 + 9x = 0$

c) $4x^2 - 5 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

Solución: a) – 8, 2 y 7; b) – 6, 9 y 0; c) 4, 0 y – 5; d) 1, –3 y 5.

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 9x = 0$ b) $2x^2 - 8 = 0$ c) $x^2 - 81 = 0$ d) $2x^2 + 5x = 0$

Solución: a) x = 0 y x = –3; b) 0 y 4; c) 9 y – 9; d) 0 y –5/2.

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ c) $3x^2 - 8x + 2 = 0$ d) $x^2 - x - 12 = 0$

Solución: a) 2 y 3; b) 1 y –14; c) $x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}$, 2,4 y 2,5; d) 4 y – 3.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

37. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy+7y=9 \\ 8x-5y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y-3x=4 \\ 5x-6y=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x-9=5y \\ 4x+7y=2/3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

Solución: Si lo son: b), c); No lo son: a), d).

38. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x+4y=-5 \\ 3x-6y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+7y=10 \end{cases}$

Solución: a) x = -1/12, y = -29/24; b) Incompatible; c) x = 11/13, y = 6/13.

39. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 6x+7y=8 \\ -2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

Solución: x = 13/8, y = -1/4; b) x = 2, y = 3; c) x = 1, y = 1.

40. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Solución: a) x = 2, y = -2; b) x = 19/7, y = -27/7; c) x = 3, y = -2.

41. Abre una hoja de cálculo y diseña una que te permita resolver sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Solución manipulativa.

42. Utiliza la hoja Sistemas y ecuaciones para comprobar las soluciones de las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de este capítulo

Solución abierta

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lenguaje algebraico

1. Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:
   a) Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.
   b) Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.
   c) Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.
   d) Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.

Solución: a) Lola = x – 11; Jordi = x + 2; c) y = 30 – x; d) Carmen = x/2.

2. En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.

Solución: x = ovejas; patas = 4x; orejas = 2x.

3. Escribe en lenguaje algebraico
   a) La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años
   b) La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.

Solución: a) Cristina = 2(hermano + 5); b) Rafa = (hermana – 3)/3

4. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:
   a) Raquel tiene x cromos
   b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel
   c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe
   d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos
   e) Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.

Solución: a) R = x; b) Pepe = x + 10; c) Teresa = 3(x + 10); d) Carmela = 2x + 10; e) Marta = 3(x + 10)/2.

5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número	1) $3x + 2(x + 1)$
b) Restamos 7 a la mitad de un número	2) $3x + 9$
c) El triple de un número más el doble del siguiente	3) $8x$
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra	4) $x/2 – 7$
e) El perímetro de un octógono regular.	5) $x – 3$
f) La edad de alguien hace 3 años	6) $20 – x$

Solución: a – 2; b – 4; c – 1; d – 6; e – 3; f – 5.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de *x*:

a) $y = 0,5 + 3x$ para x = 3 b) $y = 1,6x$ para $x = 0,75$ c) $y = 4 + 1,5x$ para $x = 2,1$

Solución: a) y = 9,5; b) y = 1,2; c) y = 7,15.

7. Simplifica las siguientes expresiones:
   a) $3a^2b – 2a^2b + 7a^2b$ b) 5xy + 7xy – 2xy c) 6x + 9x – 3x d) 2x + 7x – 2y e) 3*ab* + 8*ab* – 6*ab*

Solución: a) 8a²b; b) 10xy; c) 13x; d) 9x – 2y; e) 5ab.

8. Realiza las operaciones siguientes
   a) 3x + 5x – 2y + 9y – 4x – 3y b) $(2x – 5x^2) – (3x^2 + 5x)$
   c) 3(7x – 3) – 2(2x + 5) d) 2a – 5a + 7a – 8a + b

Solución: a) 4x – 4y; b) –3x – 8x²; c) 17x – 19; d) –4a + b.

Ecuaciones de primer grado

9. Encuentra el número que falta:
   a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

Solución: a) 3; b) – 2; c) 10; d) 3.

10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	*Edad en años*
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

Solución: Federica.

11. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

Solución: a) – 1; b) 5; c) 5; d) 2.

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.

a) $x + 10 = 17{,}5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2{,}5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h) 3x = 15* *j) x = 7,5*

Solución: a), b), d), e), f), g), i), j)

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ j) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

Solución: a) –1; b) –3; c) –2; d) 6; e) 4; f) 27; g) 3; h) 11; i) 5; j) 0; k) 1; l) –6.

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

Solución abierta: Por ejemplo: x = 4; 5x = 23 – 3; 3x – 12 = 5.

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

Solución abierta: Por ejemplo: 2x = 14; 3x = 21…

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

Solución: a) x = 14; b) x = 10; c) x = 7; d) x = 15.

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

Solución: a) x = 9; b) x = 16; c) x = 80; d) x = 7.

18. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

Solución: a) x = 1; b) x = 3; c) x = –6; d) x = –3 /8.

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

Solución: a) x = 2; b) x = –14 ; c) x = 3; d) x = 50/11.

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

Solución: a) x = 6; b) x = 1; c) x = 12; d) x = 4/3.

21. Resuelve:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

Solución: a) x = 21; b) x = 3; c) x = 8; d) x = 8.

22. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10 = 3/2$

36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x + 1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 - 2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1)= 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

***Solución:** El interés de este ejercicio es que el alumnado practique. 1) 2; 2) –3; 3) 3; 4) 4; 5) –4; 6) 2; 7) –4; 8) 8; 9) –4; 10) –2; 11) 9; 12) 6; 13) 5; 14) 5; 15) 2; 16) 6; 17) 11; 18) 2; 19) 5; 20) 4; 21) 3; 22) 4; 23) 3; 24) 4; 25) –4; 26) –3; 27) 11/4; 28) 3; 29) 3; 30) 3; 31) 5; 32) 21; 33) –6; 34) 10/3; 35) 15; 36) 14; 37) 9; 38) –2/3; 39) –10; 40) 3/2; 41) 4; 42) 2; 43) 3; 44) 11/3; 45) 9; 46) 2; 47) 3/5; 48) 5; 49) 3/7; 50) –4; 51) 18; 52) –5/3; 53) 7; 54) 45/4; 55) 2; 56) 21/5; 57) 5; 58) 2/3; 59) 112; 60) 18; 61) 1; 62) 2; 63) –23/4; 64) 5; 65) 6/11; 66) 4; 67) –3; 68) 1; 69) 1; 70) –2; 71) 24; 72) 5/6; 73) 4; 74) 14; 75) 6; 76) 9; 77) –3/4; 78) 4; 79) 12/11; 80) 8/9.*

Problemas

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

***Solución:** 165 kg.*

24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:
    a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?
    b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?
    c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?
    d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

***Solución:** a) 10 cromos; b) 30 canicas; c) 18 discos; d) 12 años.*

25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

***Solución:** Hay 50 gallinas y 20 conejos.*

26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.

***Solución:** 5.*

27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

***Solución:** A la primera 90 €, a la segunda 45 € y a la tercera, 15 €.*

28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

***Solución:** Miden 80º, 60º y 40º.*

29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

***Solución:** 29/5.*

30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

***Solución:** 43 y 44.*

31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

***Solución:** El lápiz cuesta 0,15 € y el bolígrafo 0,45 €.*

32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

***Solución:** Llevo 3 monedas de 50 céntimos y 7 de 20 céntimos.*

33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

***Solución:** Base = 18 m; Altura = 42 m.*

34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

***Solución:** Laura tiene 12 años.*

35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Solución: 11 años.

36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

Solución: 6 cm.

37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

Solución: Lado igual = 4 cm; Lado desigual = 7 cm.

38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

Solución: 9.

39. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

Solución: 2 mesas y 10 sillas.

40. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución: Lado igual = 12 cm; Lado desigual = 6 cm.

41. Cuadrados mágicos: En el cuadro *Melancolía* del famoso pintor alemán *Alberto Durero* (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Solución abierta: Por ejemplo:

8	*1*	*6*
3	*5*	*7*
4	*9*	*2*

42. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Solución: a) x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4 = x; b) 84.

Ecuaciones de segundo grado

43. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $7x^2 + 12x = 0$ c) $3x^2 + 75 = 0$

d) $x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $6x^2 - 5x - 7 = 0$ f) $x^2 - 9 = 0$

Solución: a) 1 y -6; b) 0 y -84; c) Sin solución; d) Sin solución; e) 1,6 y -26,7; f) 3 y -3.

44. Diseña una hoja de cálculo para resolver ecuaciones de segundo grado.

Solución manipulativa. Puedes verla en Sistemas y ecuaciones.

Sistemas lineales

45. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Solución: a) Indeterminado; b) Incompatible; c) x = -10/13, y = 11/13.

46. Diseña una hoja de cálculo para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Solución: En el fascículo 7.4 de GeoGebra, en la página 68, puedes ver dicha hoja de cálculo.

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 8,3x – 2,5 + *y*, son:
   a) 8,3, 2,5 y 1 b) +8,3, –2,5 y +1 c) + 8,3 y – 2,5 d) 8,3, 1, 2,5

Solución: b)

2. El valor numérico de la expresión algebraica 4 a + 3 b, cuando *a* = 5 y *b* = – 2, es:
   a) 14 b) –14 c) 26 d) – 26

Solución: a)

3. La solución de la ecuación 3,4 + 5,2*x* – 8,1*x* = 9,4 + 7,3*x* es:
   a) –10/17 b) +6/–10,2 c) – 10/1,7 d) 0,58

Solución: b)

4. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:
   a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2

Solución: c)

5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?
   a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ *d) $x + x - 8 = 50$*

Solución: d)

6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:
   a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20

Solución: c)

7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?
   a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) 6x = 136

Solución: b)

8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:
   a) 9 y 12 b) 10 y 10 c) 12 y 6 d) 8 y 12

Solución: b)

9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:
   a) 900 €, 400 € y 650 € b) 450 €, 650 € y 950 € c) 600 €, 400 €, 1000 € d) 650 €, 400 €, 950 €

Solución: d)

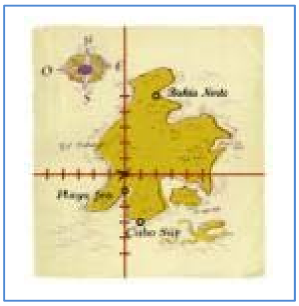
10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?
   a) 340 km y 200 km b) 300 km y 240 km c) 420 km y 120 km d) 320 km y 220 km.

Solución: b)

CAPÍTULO 11: TABLAS Y GRÁFICAS. FUNCIONES

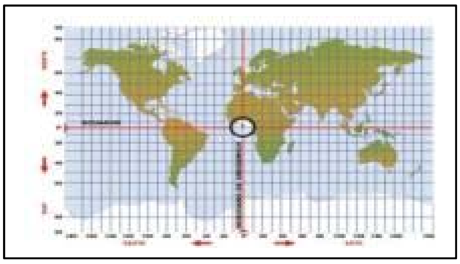
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS



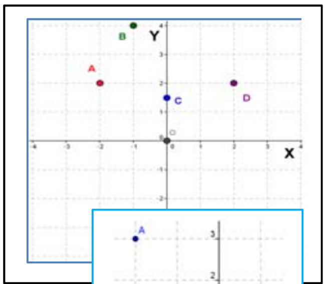
1. Describe y marca en el plano adjunto como llegarías a:
   a. Cabo Sur
   b. Bahía Norte
   c. Playa Fea

***Solución manipulativa y gráfica:** Estamos en (0, 0); a) Para ir a Cabo Sur avanzamos tres unidades hacia el sur y una al este; b) Para ir a bahía Norte avanzamos 5 unidades hacia el norte y 2 unidades hacia el este; c) Para ir a Playa Fea avanzamos una unidad hacia el sur.*



2. En el mapa indica en que cuadrante se encuentran los siguientes paises:
   a. Australia
   b. España
   c. Argentina
   d. China

Solución:
a) 4º cuadrante; b) 2º cuadrante; c) 3º cuadrante; d) 1º cuadrante.

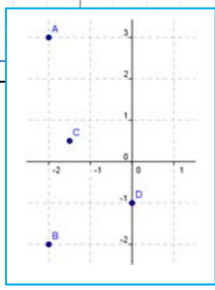


3. Indica cuales son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:

Solución:
A = (–2, 2); B = (–1, 4); C = (0, 1,5); D = (2, 2); E = (1, –4); O = (0, 0).

4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes: A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1'5, 0'5) y D = (0, –1)

Solución gráfica:



2. TABLAS Y GRÁFICAS

5. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.

Solución abierta: Por ejemplo:

km:	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*
litros	*0*	*7*	*14*	*21*	*28*

6. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.

Solución abierta: Por ejemplo:

Lado (cm)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
Perímetro (cm)	*0*	*4*	*8*	*12*	*16*

7. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *"Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado"*

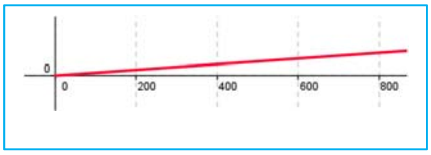
Solución abierta: Por ejemplo:

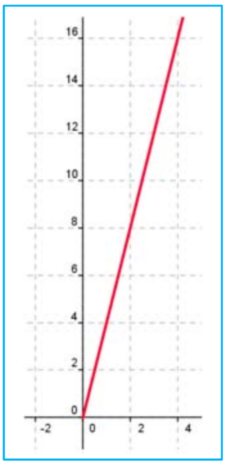
Minutos hablados	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Precio (céntimos)	*0*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*

8. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Solución:

Es posible unir los puntos pues el coche puede recorrer 130 km, por ejemplo; y = 7x/100.





9. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Solución:

Es posible unir los puntos pues el cuadrado puede recorrer 2,3 cm de lado, por ejemplo. y = 4x.

10. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la actividad propuesta sobre una *compañía de telefonía*. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Solución:

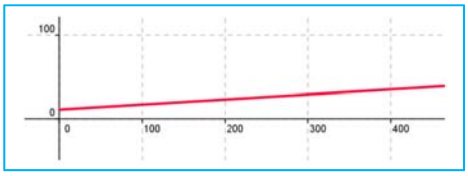
11. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

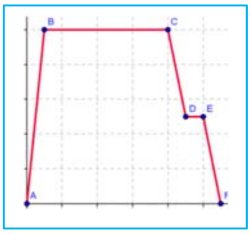
Consumo de gas: ....0,058 € por kw/h
Impuesto especial: ....0,002 € por kw/h
Término fijo: ....4,30 € por mes
Alquiler de contador…. 2,55 €

La factura era de dos meses, había consumido 397 kw/h y el gasto ascendía a 34,97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26,15 € con un consumo de 250 kw/h.

Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

Solución:* *Fijo cada dos meses = 11,15; Por kw/h: 0,06; y = 0,06x + 11,15; y(397) = 34,97; y(250) = 26,15. Tiene sentido unir los puntos, pues se puede consumir cualquier cantidad.





12. *La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa.*

Construye una gráfica de esta situación.

Solución manipulativa, abierta y gráfica:

13. *"María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos."*

Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

Solución manipulativa y gráfica:

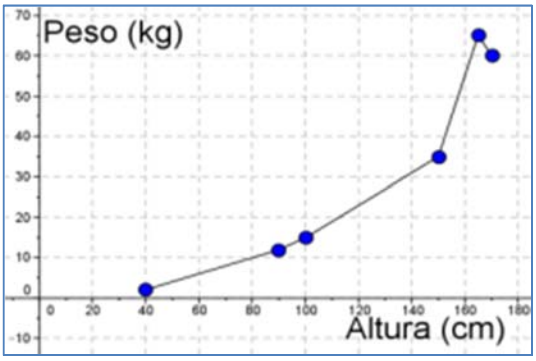
14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida.

Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuando medía 150 cm?

b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?

c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?



Solución:

a) 15 kg; 35 kg; b) 160 cm; c) 165 cm; Cuando pesaba 65 kg y media 165 cm adelgazó a 60 kg.

15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez.

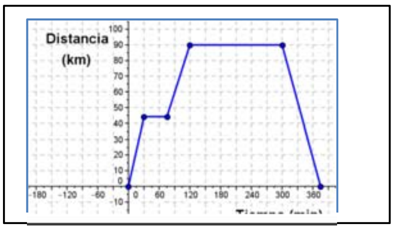
Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:

a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?

b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?

c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?

d) Haz una descripción verbal del viaje



Solución: a) En Aranjuez, 3/4 de hora; En Toledo, 3 horas; b) 2 horas, 1 hora; c) A las 15 horas; Camino de Toledo; d) Salen de Toledo a las 9 h, a las 9:30 descansan en Aranjuez 45 minutos, a las 10:15 reanudan el viaje a Toledo, donde llegan a las 11 horas. Están en Toledo hasta las 14 horas, cuando inician el viaje de regreso, llegando al instituto a las 15 horas.

3. LAS FUNCIONES

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. El consumo de un coche y la distancia recorrida.

b. La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor.

c. El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí.

d. La temperatura de un lugar y la hora del día.

e. El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.

Solución:

Funciones: a), e); No funciones: b), d). El c) se podía pensar que si es función, que a un determinado número de habitantes le corresponde un determinado número de colegios, pero en la práctica, no lo es.

17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

Solución abierta:

18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

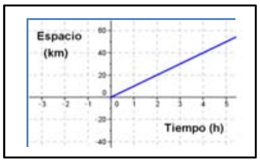
Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

Solución gráfica:

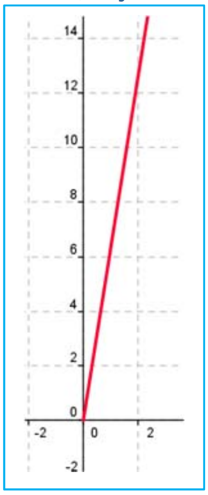
19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.

Solución:

Tiempo (horas)	*0*	*1*	*2*	*4*	*5*	*6*
Espacio (km)	*0*	*10*	*20*	*40*	*50*	*60*



Al aumentar el tiempo, aumenta el espacio recorrido: y = 10x, donde x es el tiempo, en horas, e y es el espacio recorrido en km.



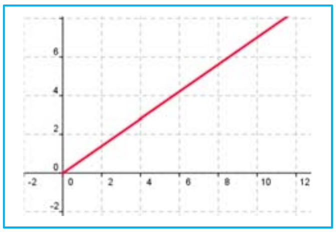
20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula:
$l = 2·\pi·r$

Solución:

Radio	*0*	*1*	*2*	*4*	*5*	*6*
Longitud de la circunferencia	*0*	2π	4π	8π	10π	12π

21. María quiere comprar una cinta que vale a 0'7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.

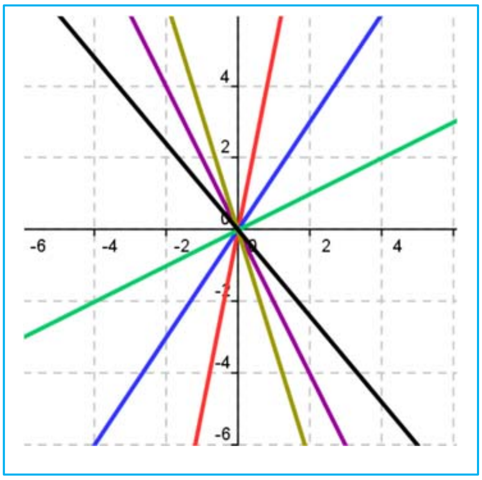
Solución gráfica:



22. Representa gráficamente las funciones:
a) y = 5*x*, *b) y* = 1'5*x*, *c) y* = 0'5*x*, *d) y* = –2*x*, *e) y* = –3'2*x*, *f) y* = –1'2*x*

Solución:

a) y = 5x, b) y = 1'5x, c) y = 0'5x, d) y = –2x, e) y = –3'2x,
f) y = –1'2x

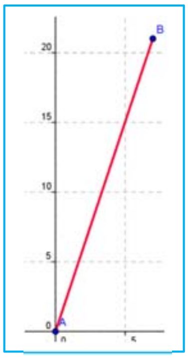


23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.

Solución: Son crecientes las de pendiente positiva: a) y = 5x, b) y = 1'5x, c) y = 0'5x, y decrecientes, las negativas: d) y = –2x, e) y = –3'2x, f) y = –1'2x

24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

Solución: y = 5x; Es una recta, una función lineal.

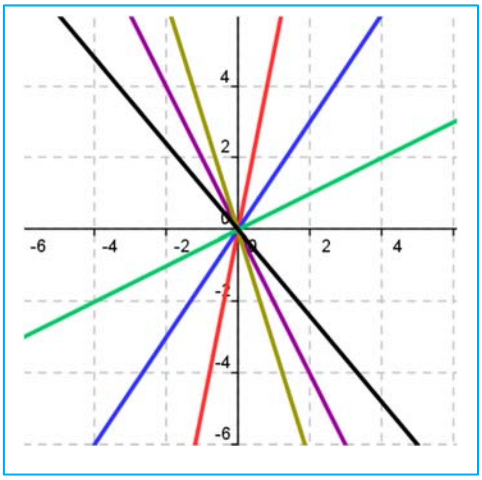


25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?

Solución: y = 3000x, donde x es el número de días, e y el consumo en litros. El consumo durante una semana, en miles de litros, es y = 21x. Es una recta, una función lineal.

26. Utiliza *Geogebra* para nuevamente representar gráficamente las funciones:
a) y = 5*x*, *b) y* = 1'5*x*, *c) y* = 0'5*x*, *d) y* = –2*x*, *e) y* = –3'2*x*, *f) y* = –1'2*x*

Indica en las funciones anteriores sus características: a) cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. b) ¿Son continuas? c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados. d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.



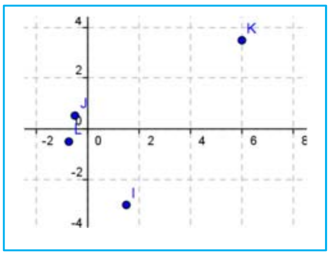
Solución:

a) y = 5x,
b) y = 1'5x,
c) y = 0'5x,
d) y = –2x,
e) y = –3'2x,
f) y = –1'2x

Las de pendiente positiva: a) b) y c) son crecientes, Las otras 3 decrecientes; b) Son continuas; c) Todas ellas cortan sólo en el origen: (0, 0); d) No hay ni máximos ni mínimos. Son rectas que pasan por el origen.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano cartesiano. Coordenadas



1) Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

$$I=\left(\frac{3}{2},-3\right)\qquad J=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\qquad K=(6,\,3'5)\qquad L=\left(-\frac{3}{4},-0'5\right)$$

Solución:

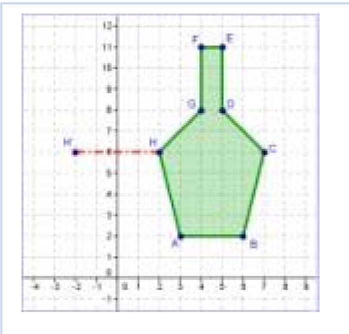
2) Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

$$M=\left(4,-\frac{5}{2}\right)\qquad N=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\qquad P=\left(-6,-\frac{9}{5}\right)\qquad Q=\left(-\frac{7}{2},5\right)$$

$$R=(2,0)\qquad S=(-7,0)\qquad T=\left(0,-\frac{7}{2}\right)\qquad U=(0,7)\qquad O=(0,0)$$

Solución: Cuadrante 1º: N, 2º: Q; 3º: P; 4º: M. Eje de abscisas: R, S, O; Eje de ordenadas: T, U, O.

3) Observa la siguiente vasija:



a. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.
b. Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H' es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.
c. Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?
d. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

e. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
f. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

Solución manipulativa y gráfica: a) A = (3, 2), B = (6, 2), C = (7, 6), D = (5, 8), E = (5, 11), F = (4, 11), G = (4, 8), H = (2, 6),

d) La nueva vasija está en el segundo cuadrante.

e) Las nuevas coordenadas son: A' = (–3, 2), B' = (–6, 2), C' = (–7, 6), D' = (–5, 8), E' = (–5, 11), F' = (–4, 11), G' = (–4, 8), H' = (–2, 6).

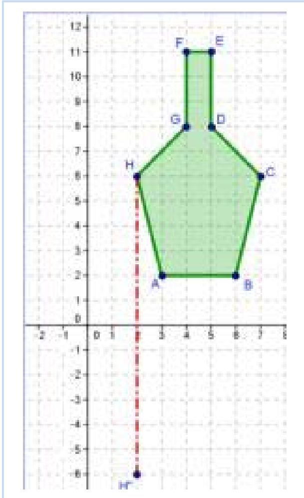
f) Los puntos son simétricos, tienen igual ordenada y la abscisa, igual pero negativa.

4) Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.

a. Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H” es el reflejado de H por este nuevo espejo.
b. Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.
c. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?.

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.
e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.



Solución manipulativa y gráfica:

c) La nueva vasija está en el cuarto cuadrante.

e) Las nuevas coordenadas son: A” = (3, –2), B” = (6, –2), C” = (7, –6), D” = (5, –8), E” = (5, –11), F” = (4, –11), G” = (4, –8), H” = (2, –6).

f) Los puntos son simétricos, tienen igual abscisa y la ordenada, igual pero negativa.

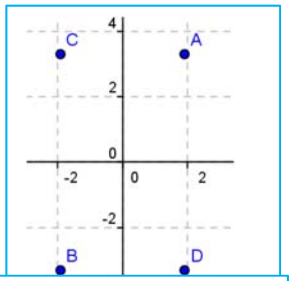
5) Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.

a. Representa los puntos M = (3, 4) N = (–1, 1) y R = (2, –4)
b. Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto (1, –1) del sistema anterior.
c. Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.
d. ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado.

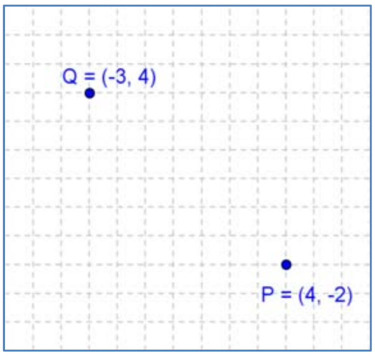
Solución manipulativa y gráfica: M = (2, 5) N = (0, 0) y R = (1, –3). Los puntos son los mismos, han cambiado los ejes.

6) Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.

a) Represента un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3,3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1,9 cm.
b) ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.
c) ¿Cómo son éstos puntos entre sí dos a dos?

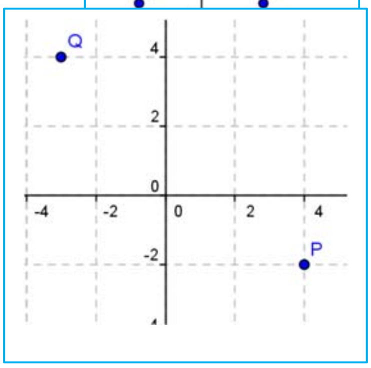


Solución manipulativa y gráfica: Son los puntos (1,9, 3,3), (–1,9, –3,3), (–1,9, 3,3), (1,9, –3,3). Son simétricos.



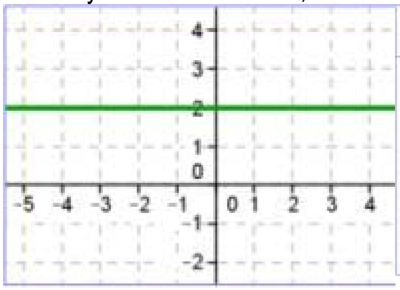
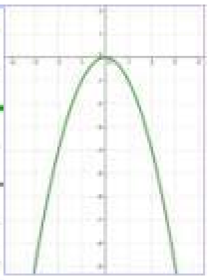
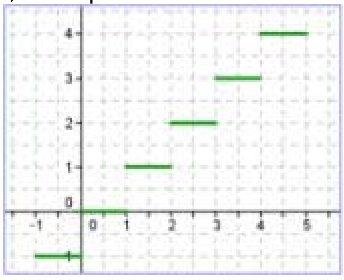
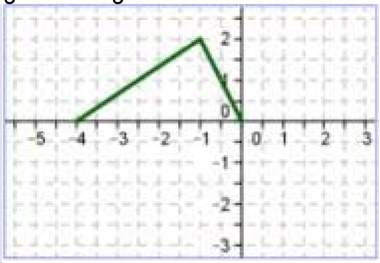
7) Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.

Solución manipulativa y gráfica:



Tablas y Gráficas

8) Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:

Solución:

a)

x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*

b)

x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*-4*	*-1*	*0*	*-1*	*-4*

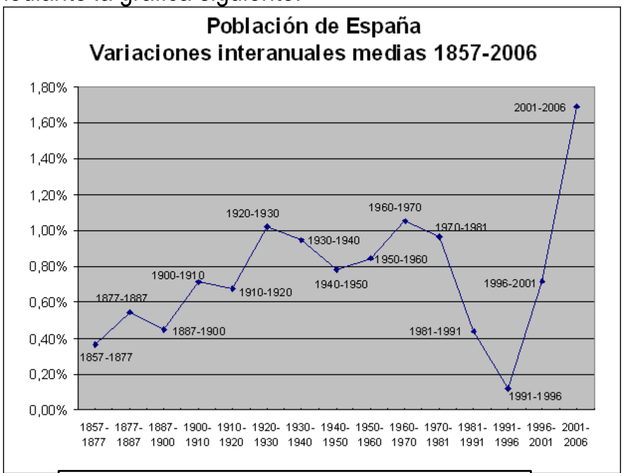
c)

x	*-1,2*	*-0,5*	*0*	*0,7*	*1,9*
y	*-2*	*-1*	*0*	*0*	*1*

d)

x	*-4*	*-2,5*	*-1*	*-0,5*	*0*
y	*0*	*1*	*2*	*1*	*0*

9) El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la `población española, mediante la gráfica siguiente:

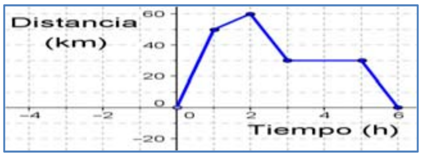


Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?
b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?
c) ¿Y entre 1991 y 2001?
Razona sobre el significado de esta gráfica.
d) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?
e) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?
f) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

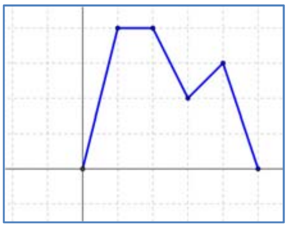
Solución: a) Crece (lentamente); b) Crece (lentamente); c) Crece; d) Las variaciones interanuales medias; e) La población crece, pero cuando la curva de la gráfica es decreciente significa que disminuyen las variaciones interanuales, es decir, la población crece más lentamente.

10) Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:



a. ¿A qué distancia de su casa llega?
b. ¿Cuánto tiempo está parado?
c. ¿Cuánto tarda en volver?
d. A las dos horas ¿a qué distancia está de su casa?
e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?
f. ¿Cuándo va más deprisa? Y ¿Cuándo más despacio?

Solución: a) 69 km; b) 2 horas; c) 4 horas; d) 60 km; e) Una hora; f) En la primara hora que recorre 50 km; En la segunda hora sólo recorre 10 km;



11) La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.

A. Inventa una situación que pueda ser representada por esta gráfica.
B. Señala cuales son las magnitudes y en qué unidades se miden.
C. Indica, en los ejes, los números adecuados.
D. Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.

Solución abierta:

12) El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:

Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados.

Solución gráfica:

13) Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €
b. Un número y la mitad de dicho número.
c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

Solución abierta: Por ejemplo:

a)

x (peso de la miel en kg)	*0*	*1*	*2*	*3*
y (precio en euros)	*0*	*7*	*14*	*21*

b)

x	*-2*	*0*	*1*	*2*
y	*-1*	*0*	*0,5*	*1*

c)

x (perímetro)	*0*	*3*	*6*	*9*
y (lado)	*0*	*1*	*2*	*3*

Las funciones

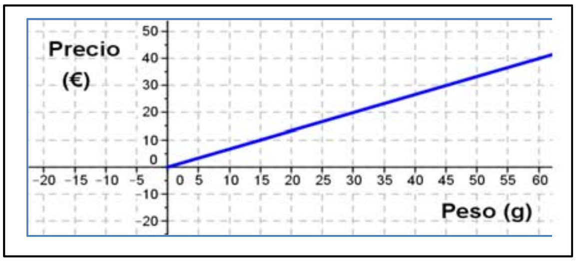
14) En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura del puré a largo del tiempo.
b. El precio de una camiseta y su color.
c. El área de un cuadrado y su lado.
d. El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.
e. El volumen de una esfera y su radio.

Solución: Funciones: a) Variable independiente: Tiempo, Variable dependiente: temperatura; c) Variable independiente: área, Variable dependiente: lado; e) Variable independiente: volumen, Variable dependiente: radio; No funciones: b), c).

15) Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

Solución abierta:



16) Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? ¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?

Solución:

El precio de 15 gramos de un producto son 10 euros. La variable independiente es el peso en gramos, y la dependiente, el precio. No podemos comprar una cantidad negativa de producto, liego no tiene sentido prolongarla en el tercer cuadrante.

x (peso en g)	*0*	*15*	*30*	*45*
y (precio en euros)	*0*	*10*	*20*	*30*

17) Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: $d = 100 \cdot t$ ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?

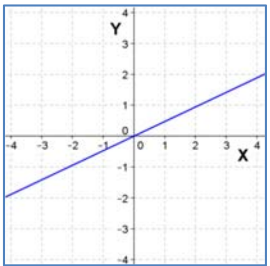
Solución gráfica:

t (tiempo)	*0*	*1*	*2*	*3*
d (distancia)	*0*	*100*	*200*	*300*

La variable independiente es el tiempo, la dependiente, la distancia.

18) Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?

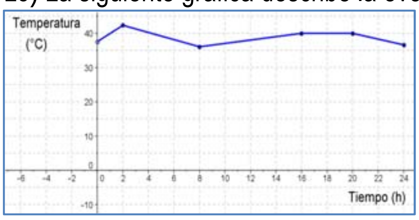
Solución:



x	*-2*	*0*	*2*	*4*
y	*-1*	*0*	*1*	*2*

y = 0,5x; es una recta que pasa por el origen de pendiente 0,5.

19) La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día. Mirando la gráfica indica:



a) ¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana? ¿y a las doce de la noche?
b) ¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?
c) ¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?
d) ¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?
e) Describe con palabras esta situación.

Solución: a) 40 ºC; b) A la 1 h, a las 4, y entre las 16 y las 20 horas; c) A las 2, de 42 ºC; d) Al enfermo de sube la temperatura hasta los 42 ºC y las 2 de la noche, luego desciende hasta 36 ºC a las 8 de la mañana, para volver a subir hasta 40 ºC a las 4 de la tarde, en que se estabiliza en esa temperatura,

para volver a descender a las 20 horas.

20) Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

Solución gráfica:

x (tiempo en minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (litros)	500	475	450	425	400	375	350	325	300	275	250

El tiempo (en minutos) es la variable independiente, la cantidad de agua de la bañera, en litros, es la variable dependiente; y = 500 – 25x.

21) En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
b. El precio de un coche y su color.
c. El volumen de un líquido y su peso.
d. La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
e. La longitud de un muelle y el peso colgado en él.

Solución: Funciones: a) Variable independiente: Tiempo, Variable dependiente: temperatura; c) Variable independiente: peso, Variable dependiente: volumen; e) Variable independiente: peso, Variable dependiente: longitud del muelle, No funciones: b). En el caso d) habría que explicarlo más.

22) Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

Solución abierta:

24) En una papelería 10 lápices cuestan 2,5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?

Solución: y = 0,25x; x, variable independiente, es el número de lápices, e y, variable dependiente, el precio a pagar.

25) Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.

Solución gráfica:

AUTOEVALUACIÓN

1) El punto de coordenadas A = (–5, –6) está situado en el:

a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

Solución: c)

2) Indica qué afirmación es falsa:

a) El eje de abscisas es el eje OY

b) El eje de ordenadas es vertical

c) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas

d) El eje de ordenadas es el eje OY

Solución a):

3) Los puntos de coordenadas A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

Solución: a)

4) Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

Solución: c)

5) La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa

c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

Solución: a)

6) Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.

Solución: d)

7) Indica qué afirmación es falsa:

a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas

b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente

Solución: c)

8) Escribe una tabla de valores de la función y = 2x – 3.

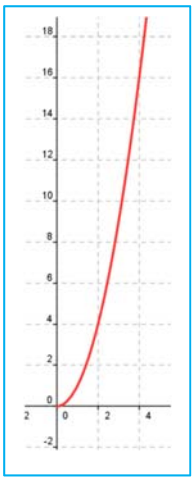
x	1	2	3	4
y				

a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.

Solución: a)

9) Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado.

Solución:



CAPÍTULO 12: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:
   a) La superficie de los países de la Comunidad Europea
   b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada
   c) El área de un círculo del que se conoce el radio
   d) Tiramos una chincheta y anotamos si cae con la punta hacia arriba
   e) Saber si el próximo mes es febrero.

Solución: Es fenómeno aleatorio: b) y d). No lo es: a), c) y e).

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

Solución:

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	*0,15*
2	18	*0,18*
3	16	*0,16*
4	17	*0,17*
5	19	*0,19*
6	15	*0,15*
Suma total	100	*1*

3. Escribe la tabla de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del ejercicio 2. Observa que el último valor ahora es 1.

Solución:

Posibles resultados	Frecuencias relativas	Frecuencias relativas acumuladas
1	*0,15*	*0,15*
2	*0,18*	*0,33*
3	*0,16*	*0,49*
4	*0,17*	*0,66*
5	*0,19*	*0,85*
6	*0,15*	*1*
Suma total	*1*	

4. Para cada uno de los ejemplos anteriores: lanzar un dado, tirar dos monedas, indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.

Solución abierta: Por ejemplo, en lanzar un dado: sacar un número par, sacar múltiplo de 3, sacar más de 4 no son sucesos individuales. En tirar dos monedas: sacar cara, sacar al menos una cara, sacar alguna cruz.

5. En una bolsa tenemos 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5. Se hacen los dos experimentos siguientes:
   EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.
   EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.
   ¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?
   Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

Solución: El experimento A porque todas las bolas son rojas. B = {1, 2, 3, 4, 5}

6. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.

Solución: C = {(negro, negro), (negro, rojo), (rojo, negro), (rojo, rojo)}

7. Inventa cinco experimentos aleatorio y escribe el conjunto de posibles resultados

Solución abierta:

8. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar*"

Solución: B = {1, 2, 3, 4, 5}

9. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe*"

Solución: T = {0, 1, 2, 3, 4…}

10. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de sacar dos cartas.

Solución abierta: Por ejemplo: las dos cartas tengan igual valor; o las dos cartas sean figuras.

11. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las centenas del primer premio.

Solución abierta: Por ejemplo: S1: La cifra de las centenas sea par; S2: La cifra de las centenas sea mayor que 7.

12. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.

Solución abierta: Por ejemplo: S1 = {(2, 2), (4, 4), (6, 6)}; S2 = {(1, 1)}; S3 = {(3, 3), (6, 6)}.

13. Escribe tres sucesos aleatorios de tirar tres monedas.

Solución abierta: Por ejemplo: Las tres sean cara; Hay alguna cara. Al menos una es cara.

14. Señala si son *poco probables* o *muy probables* los siguientes sucesos:

    a) El jueves vas al colegio.
    b) Cruzas la calle y te pilla un coche.
    c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo.
    d) Le toca la lotería a Juan.
    e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol.
    f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima.
    g) ¿Amanecerá mañana?
    h) Mañana haya un terremoto en Madrid.

Solución: Poco probables: b), c), d), f), h). Muy probables: a) e).

15. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.

Solución: 1/3.

16. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.

Solución: a) 1/40; 10/40 = 1/ 4; c) 4/40 = 1/ 10; d) 11/40; e) 13/40.

17. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Me basaría en el estudio de las frecuencias relativas.

18. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

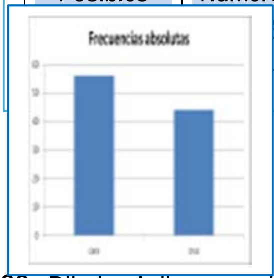
Solución abierta y experimental:

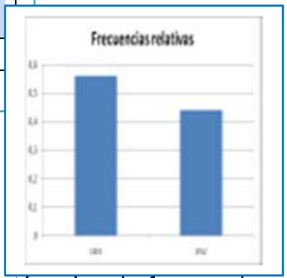
2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

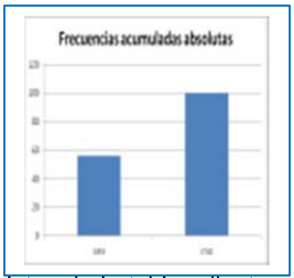
19. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas acumuladas.

Posibles	Número de … s

Solución: Observa los valores del eje de ordenadas



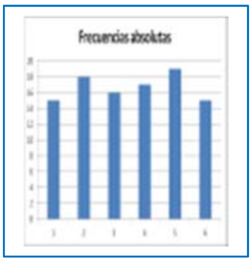


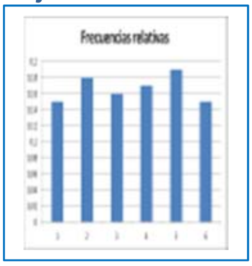


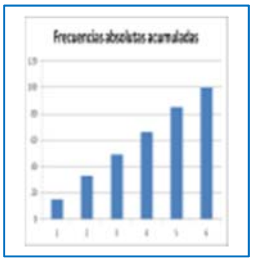
20. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

Solución: Observa los valores del eje de ordenadas

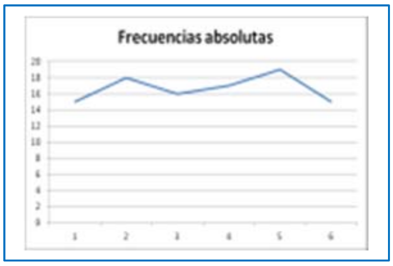


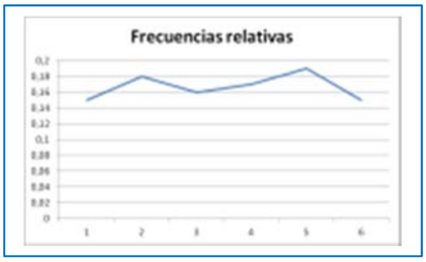


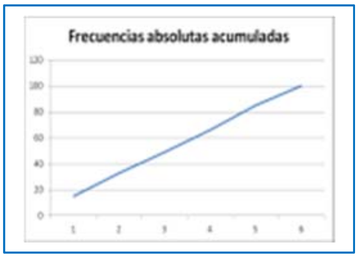


21. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas del experimento tirar un dado de la actividad anterior.

Solución: Observa los valores del eje de ordenadas

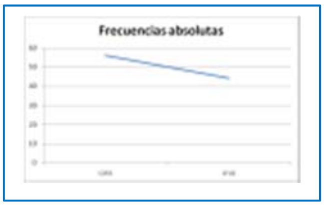


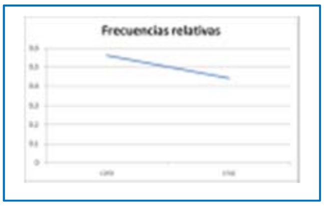


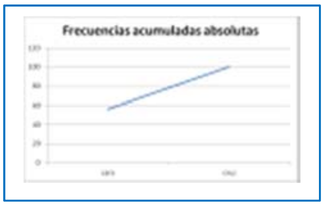


22. Dibuja los diagramas de líneas absolutas, relativas y relativas acumuladas del experimento tirar una moneda de la actividad 19.

Solución: Observa los valores del eje de ordenadas

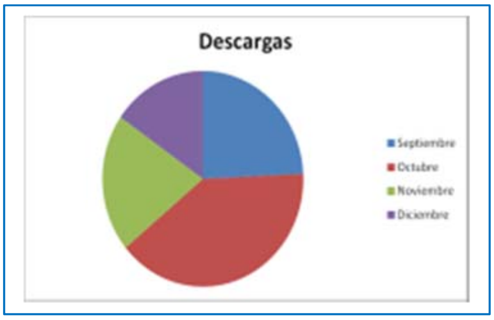






23. Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en *Pictograma*.

Solución:



24. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 19.

Solución:

25. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 20.

Solución:

26. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Solución experimental y abierta:

27. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Solución experimental y abierta:

28. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase, pregunta al menos a 10 personas, sobre el tiempo que tardan en ir desde su casa al centro escolar. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Solución experimental y abierta:

3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

29. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

Solución 11,33 ºC:

30. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3,56.

Solución: La suma de las frecuencias absolutas es 50.

Hacemos la tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10
x_i*f_i	***9***	***16***	***21***	***32***	***40***	***60***

La suma del producto de los valores por las frecuencias es 178. Luego la media es 178/50 = 3,56.

31. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

a) Calcula la media.
b) Repite tu los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

Solución: a) Media = 7,04; b) Experimental y abierta

32. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

Solución: Media = 52,7 kg

33. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:
a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

Solución:

	Media	***Mediana***	***Moda***
a)	***129,88***	***6***	***9***
b)	***6,13***	***6***	***9***
c)	***337,11***	***7***	***9***

En la moda no influyen los casos extremos, en la mediana, poco, pero en la media influyen mucho.

34. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:
a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000   b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10   c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Solución:

	Media	***Varianza***	***Desviación típica***
a)	***129,88***	***123617,84***	***351,59***
b)	***6,13***	***9,27***	***3,04***
c)	***337,11***	***497182,11***	***705,11***

Observa como aumenta la varianza y la desviación típica en los casos con valores extremos: a) y c).

35. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

Solución:

Media	***Varianza***	***Desviación Típica***

11,33	*60,24*	*7,76*

36. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3,56. Calcula la varianza y la desviación típica.

Solución: Varianza = 3,17. Desviación típica = 1,78.

4. EL ORDENADOR Y LA ESTADÍSTICA

37. Juega con el ordenador. Inserta otros gráficos distintos de columna, de línea, circular, barra, dispersión e indica a qué tipo de representación corresponden.

Solución experimental y abierta:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El azar y la probabilidad

1. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0,12	0,13					0,1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?

c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?

d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Solución: d) Completamos la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
Frecuencia absoluta	79	102	*120*	*130*	93	98	104	77	*100*	*97*	1000
Frecuencia relativa	*0,079*	*0,102*	0,12	0,13	*0,093*	*0,098*	*0,104*	*0,077*	0,1	*0,097*	1
Frecuencia absoluta acumulada	79	181	*301*	*431*	*524*	*622*	*726*	*803*	*903*	*1000*	
Frecuencia relativa acumulada	*0,079*	*0,181*	*0,301*	*0,431*	*0,524*	*0,622*	*0,726*	*0,803*	*0,903*	*1*	

a) 97; b) 301; c) 0,181.

2. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:

a) Tener un accidente de tráfico.

b) Salir de paseo y cruzar alguna calle.

c) Salir de paseo y que te caiga un rayo.

d) Mañana nazca algún niño en París.

e) Mañana no amanezca.

f) Mañana llueva.

Solución: Imposibles: e), poco probables:a) c) , posibles: f), muy probables: b) Seguros: d)

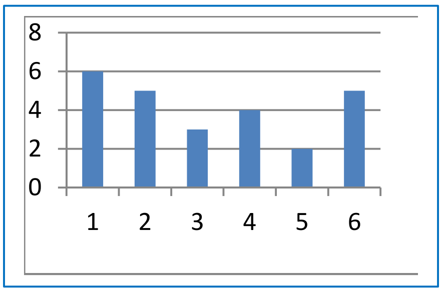
3. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

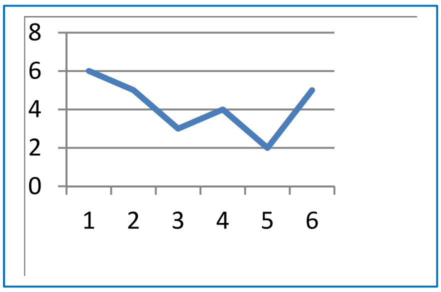
1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

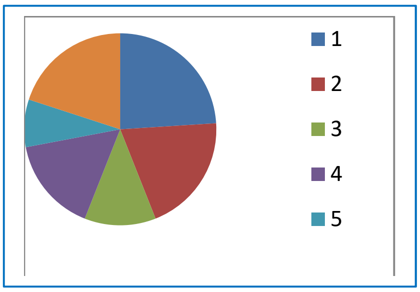
a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Escribe otra de frecuencias relativas.
c) Dibuja un diagrama de rectángulos.
d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.

Solución:

Valores	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Frecuencias absolutas	*6*	*5*	*3*	*4*	*2*	*5*
Frecuencias relativas	*0,24*	*0,20*	*0,12*	*0,16*	*0,08*	*0,20*







4. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido: 7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2. Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Solución:

Minutos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Frecuencias absolutas	*1*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*3*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
Frecuencias relativas	*0,07*	*0,07*	*0,20*	*0,07*	*0,13*	*0,07*	*0,20*	*0,00*	*0,07*	*0,07*	*0,00*	*0,07*

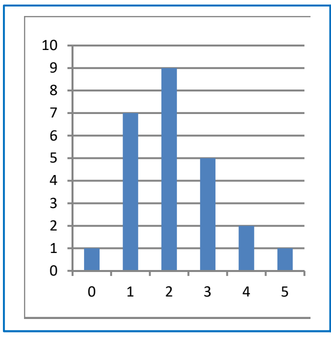
Gráficos estadísticos

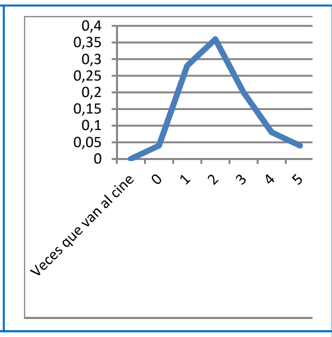
5. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van unos jóvenes al mes al cine. Los datos están en la tabla:

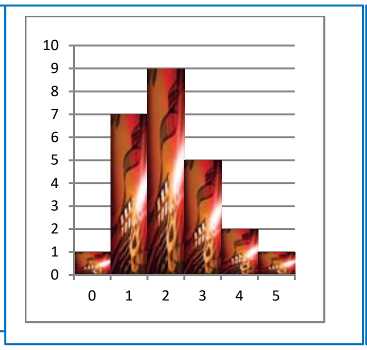
Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

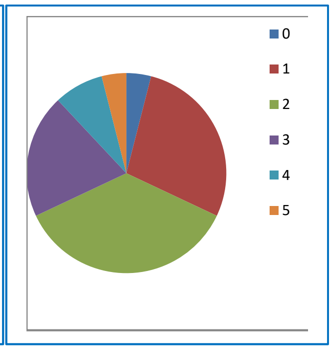
a) Representa un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas.
b) Representa un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
c) Haz un pictograma
d) Representa los datos en un digrama de sectores.

Solución:







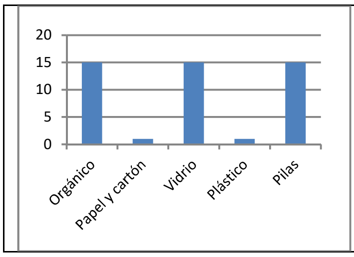


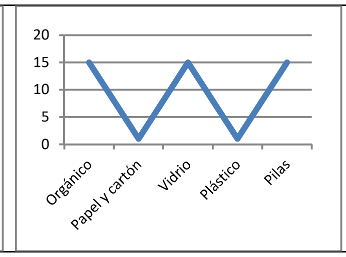
6. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

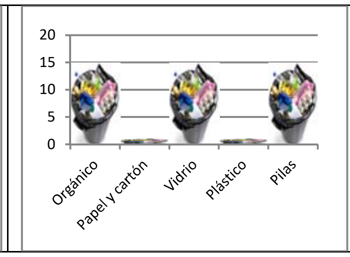
Tipo de residuo	Porcentaje
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

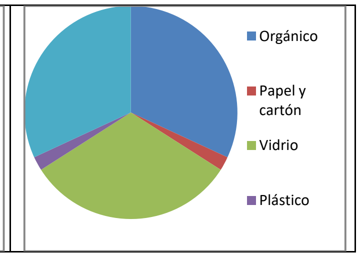
a) Haz un diagrama de rectángulos
b) Representa un diagrama de líneas.
c) Haz un pictograma
d) Representa los datos en un digrama de sectores.

Solución:









7. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas.

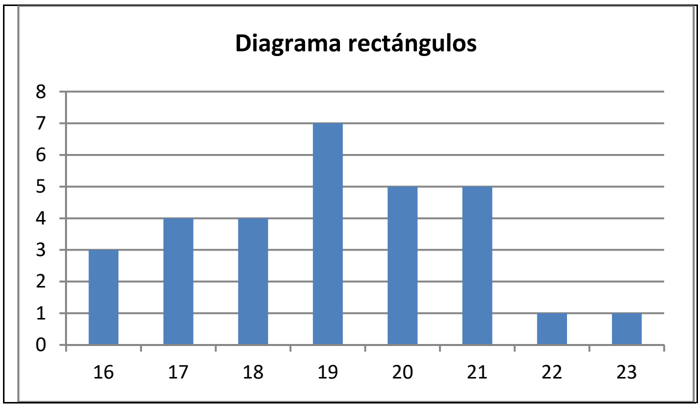
Solución: 1

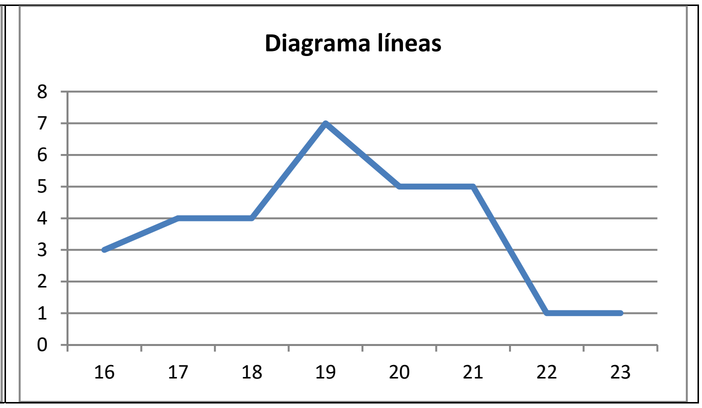
8. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los datos en un diagrama de rectángulos y en un diagrama de líneas.

Solución:





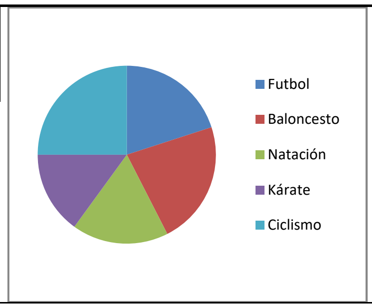
9. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

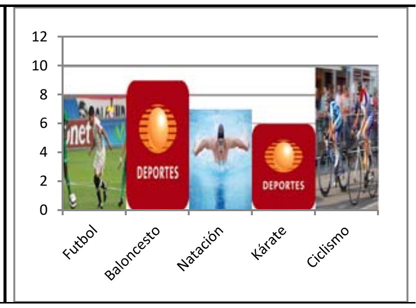
Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

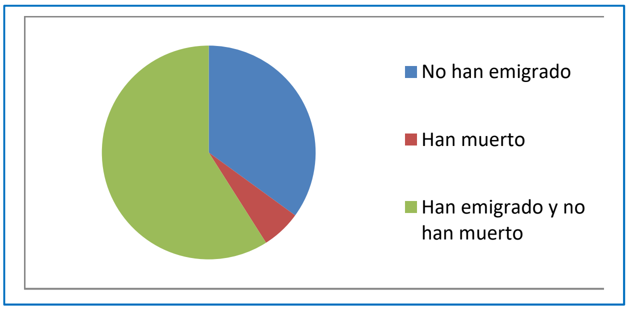
a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas.
b) Representa estos datos en un diagrama de sectores.
c) Haz un pictograma.

Solución:

Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	*9*	*7*	*6*	*10*
0,2	*0,225*	*0,175*	*0,15*	*0,25*







10. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sectores que describa esta situación.

Solución:

Medidas de centralización

11. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados: 6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4. Calcula la media aritmética.

Solución: Media = 3.

12. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.

Solución: Media = 6,57.

13. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente: 19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21. Calcula la media aritmética.

Solución: Media = 18,9 cm.

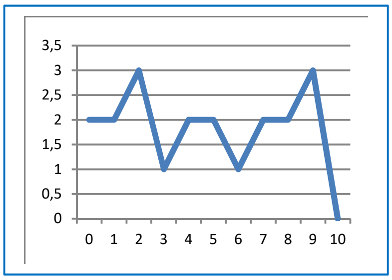
14. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son: 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
c) Calcula la media.

Solución:

xi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
fi	*2*	*2*	*3*	*1*	*2*	*2*	*1*	*2*	*2*	*3*	*0*

Media = 4,6.



15. Los jugadores de un equipo de baloncesto tiene las siguientes edades: 13, 12, 14, 11, 12, 12. Calcula la media.

Solución: 12,33 años.

16. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas hijos tienen. Los resultados son: 0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1. Calcula la media.

Solución: 1,5 hijos.

17. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados: 1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4
a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Solución: Media = 3,24. Mediana = 2,5. Moda = 1, y en este caso es única.

18. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9
a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Solución: Media = 8,25. Mediana = 8,2. Moda = 9. Es única.

19. Se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:
19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,
16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,
23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19
a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Solución: a) Media = 19 cm; b) Mediana = 18,5; c) Moda = 19. Es única

Tamaño manos (cm)	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*
Frecuencias absolutas	*3*	*4*	*4*	*7*	*5*	*5*	*1*	*1*
Frecuencias relativas	*0,1*	*0,1*	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0*	*0*	*0*
Frecuencias acumuladas absolutas	*3*	*7*	*11*	*18*	*23*	*28*	*29*	*30*
Frecuencias acumuladas relativas	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,6*	*0,8*	*1*	*1*	*1*

20. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,
3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.
b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.
c) Calcula la media g) Calcula la mediana h) Calcula la moda

Solución:

21. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1. Calcula la media, la mediana y la moda.

Solución: Media = 1,2. Mediana = 1. Moda = 0.

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a) Calcula la media aritmética. b) Calcula la mediana c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

Solución: Media = 12,5 cm. Mediana = 11,8 cm. Moda = 12 cm. Es única.

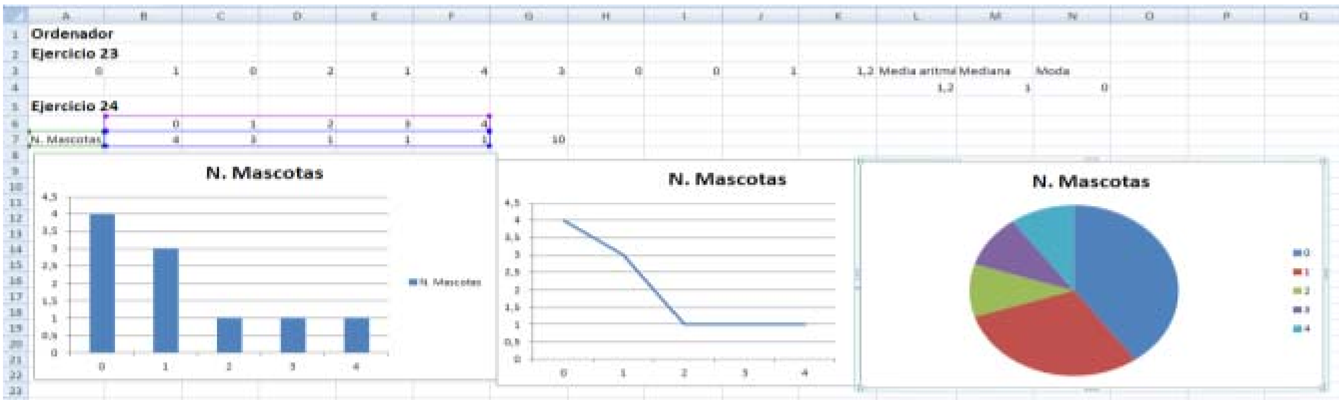
Ordenador

23. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de mascotas en el ordenado y vuelve a calcular la media, la mediana y la moda.

Solución:

Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

Solución:



24. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

Solución abierta y manipulativa:

25. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la sema que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o… Piensa sobre qué podrías preguntar.

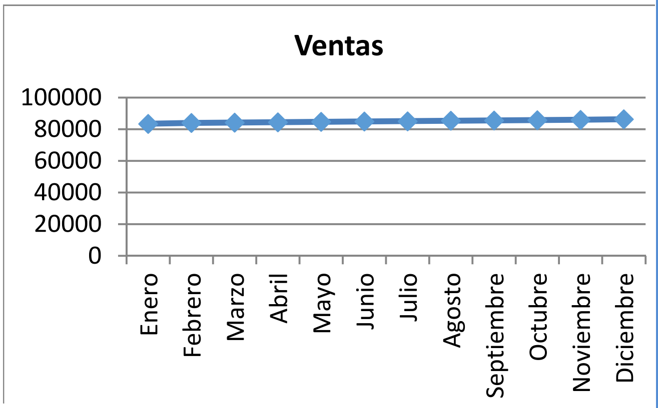
Solución abierta:

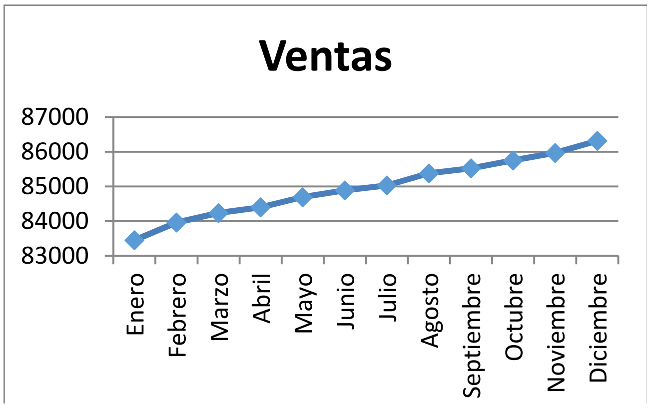
Problemas

26. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuanta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:





No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:
Ambos gráficos son correctos.
Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

Solución abierta:

27. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, x, …. Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, x, …Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

Solución abierta:

28. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño: 25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

    Calcula la media, la moda y la mediana.

Solución:

29. Con los datos del problema anterior:
    a) Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m^3: (21, 23), (23, 25), … (39, 41)
    b) Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas..
    c) ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que 31 m^3?
    d) ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que 35 m3?

Solución:

30. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:
    a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?
    b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?
    c) Comenta las gráficas.

Solución abierta:

31. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto suman estos dos números?

Solución: Suman 10.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica la respuesta correcta:
   a) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta
   b) La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores
   c) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.
   d) Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad

Solución: c)

2. Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:
   a) 1/40 b) 0,25 c) 4/40 d) 10/40

Solución: c)

3. Indica cual es la frase que falta en la siguiente definición:

En … … …. … … …. las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

a) Diagrama de líneas b) Diagrama de rectángulos c) Pictograma d) Diagrama de sectores

Solución: d)

4. Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0,125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:
   a) 45 º b) 30 º c) 60 º d) 72 º

Solución: a)

5. En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:
   a) 100 b) 1 c) Total de datos d) Suma de sus bases

Solución: b)

6. La media de los siguientes datos 7; 0; 9,5; 2; 4,1; 3,8, es:
   a) 6,3 b) 3,8 c) 4,4 d) 5,5

Solución: c)

7. La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:
   a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

Solución: a)

8. La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:
   a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

Solución: b)

9. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?
   a) 3/4 b) 1/6 c) 2/6 d) 5/6

Solución: d)

10. Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quien es una muestra:

a) Estudiantes de España y estudiantes de ese centro b) Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A
c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A d) Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A

Solución: c)