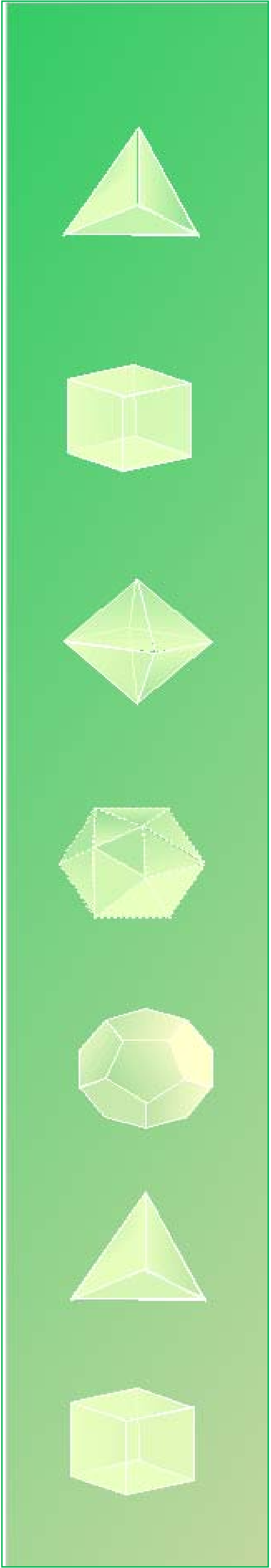


Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 11

Funcións polinómicas, definidas a anacos e de proporcionalidade inversa

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez

Revisora: María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

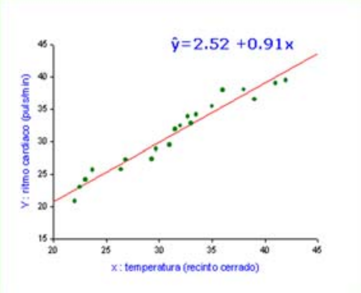
Resumo

Na nosa vida diaria facemos uso continuamente das relacións de proporcionalidade, como cando imos comprar calquera produto ao supermercado, ou se queremos comparar dúas tarifas de luz distintas para saber cal nos convén elixir. Nestes casos, a representación gráfica facilítanos a toma de decisións. O lanzamento de obxectos a certas distancias, como tirar un papel ao lixo, encher o vaso de auga ou dar un salto: a traxectoria que describe é unha curva que recibe o nome de *parábola*.

Neste capítulo estudaremos as propiedades máis importantes das *relacións de proporcionalidade directa e inversa* e as *funcións polinómicas*, así como os seus elementos e representacións gráficas no plano cartesiano.

Comprender estas funcións é moi útil para a ciencia, xa que se utilizan para comparar datos e para saber se eses datos teñen algunha relación lineal (os datos compórtanse como unha recta) ou doutro tipo (polinómica, exponencial…).

Ao estudo destes datos e das súas curvas dedícase a estatística mediante *a análise de regresión*. Coa aproximación de datos a rectas ou curvas coñecidas, realízanse estudos e predicións, de aí a súa importancia para a vida real.



Exemplo de Recta de regresión

Antes de comezar

Actividades resoltas

Antes de comezar, imos representar mediante gráficas as seguintes situacións:

- *Situación 1:* A gráfica *s* - *t* dun movemento rectilíneo uniforme: o espazo percorrido, en función do tempo, por un ciclista que se despraza cunha velocidade de 5 m/s.

Ao tratarse dun movemento rectilíneo uniforme, podemos describir o espazo percorrido en función do tempo mediante a fórmula $s = v \cdot t$ onde *v* = 5 m/s.

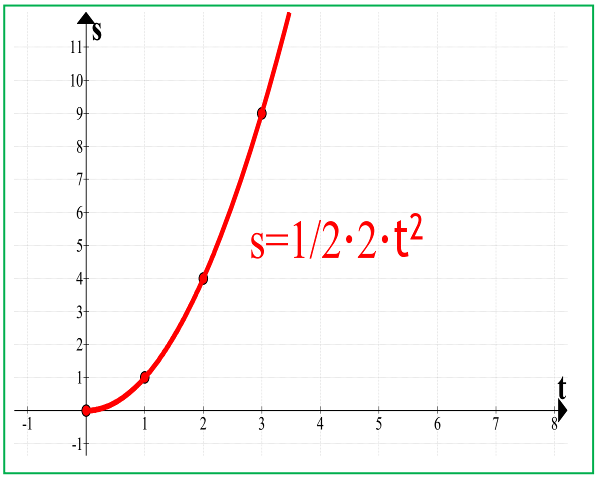
Tempo (*t*)	Espazo (*s*)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50

- *Situación 2*: a gráfica *v* - *t* dun movemento rectilíneo uniformemente acelerado: o espazo percorrido por un ciclista que se despraza cunha aceleración de 2 m/s^2.

Neste caso trátase dun movemento rectilíneo uniformemente acelerado, logo podemos describir o espazo percorrido pola fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, onde o espazo inicial e a velocidade inicial son 0.

Representamos a función $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

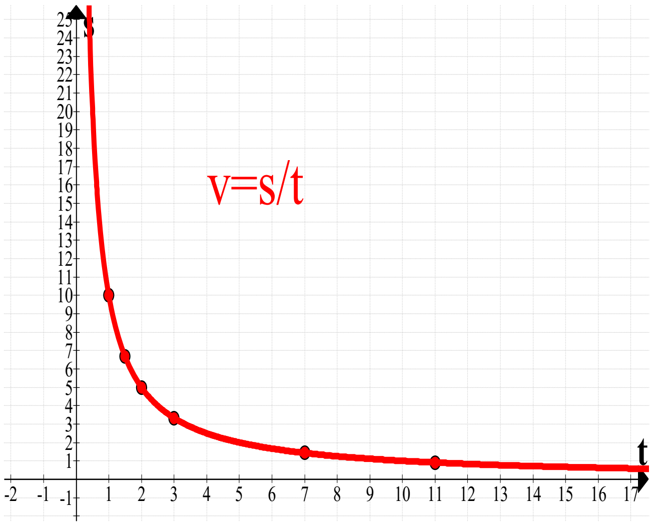
Tempo (*t*)	Espazo (*s*)
0	0
1	1
2	4
3	9



- *Situación 3*: Representamos a velocidade dun ciclista, con respecto ao tempo, cando percorre un espazo de 10 m.

O movemento que describe é un movemento rectilíneo uniforme, logo a fórmula que representamos é $v=\frac{s}{t}$, e como o espazo que percorre o ciclista é de 10 metros, $v=\frac{10}{t}$

Tempo (t)	Velocidade (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91



1. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. Proporcionalidade directa

Recorda que dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Ao realizar o cociente de calquera dous valores dunha variable e os correspondentes doutra, obtemos a **razón de proporcionalidade directa *k***.

Exemplo:

- Na situación 1, as magnitudes espazo e tempo son directamente proporcionais

Tempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espazo (*s*)	0	5	10	25	50

e a razón de proporcionalidade é $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$

Se observamos a súa gráfica, podemos comprobar que se trata dunha semirrecta cuxa orixe é a orixe de coordenadas. Nesta situación non é interesante considerar tempos negativos, razón pola cal a representación é unha semirrecta.

A representación gráfica no plano cartesiano de dúas **magnitudes directamente proporcionais** é unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas.

Pódese escribir a relación entre a magnitude A (a) e a magnitude B (b) como $b = k \cdot a$ onde k é a **razón de proporcionalidade**.

Para representar estas relacións de proporcionalidade directa, basta con situar os valores de cada magnitude no plano cartesiano e unilos mediante unha recta.

Actividades resoltas

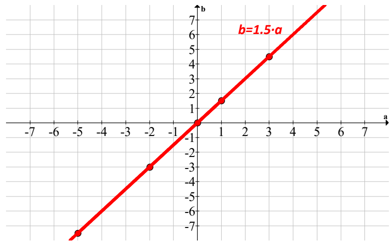
- Representa graficamente a seguinte relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa:

Magnitude A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitude B (b)	–7.5	–3	0	1.5	4.5

Ao calcular a razón de proporcionalidade obtense:

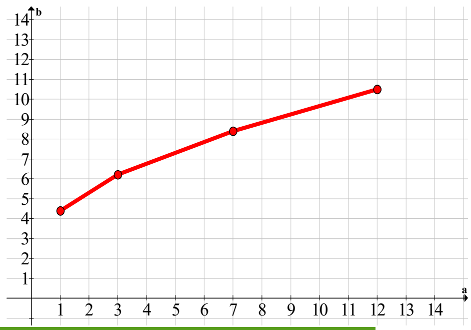
$$k = \frac{-7.5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1.5}{1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

A relación defínese así: $b = 1.5 \cdot a$



- A seguinte táboa mostra o peso dun bebé os primeiros meses de crecemento. Utilizando unha gráfica, decidir se son magnitudes directamente proporcionais.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4.4	6.2	8.4	10.5



Ao representar os puntos no plano, obsérvase que a gráfica non é unha recta, entón **non son directamente proporcionais**.

Actividades propostas

1. O consumo medio de auga ao día por habitante (en 2011) é de 142 litros. Representa graficamente o consumo dunha persoa nunha semana.

2. A auga virtual é a auga necesaria para crear un produto. Representa graficamente as seguintes relacións:

a. 71 litros para producir unha mazá.

b. 10.850 litros para producir uns vaqueiros.

c. 4.000 litros para producir unha camisola.

1.2. Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x$

A representación gráfica de dúas magnitudes directamente proporcionais é unha recta que pasa pola orixe. Logo a relación de proporcionalidade directa é unha función lineal.

Una **función lineal** é unha función polinómica de primeiro grao. A súa representación no plano cartesiano é unha recta.

Existen dous tipos de funcións lineais:

- Rectas cuxa expresión alxébrica é $\boldsymbol{y = m \cdot x}$
- Rectas cuxa función vén dada por $y = m \cdot x + n$

Neste apartado imos estudar as funcións lineais do primeiro tipo, é dicir, as rectas da forma $y=m\cdot x$

Exemplo:

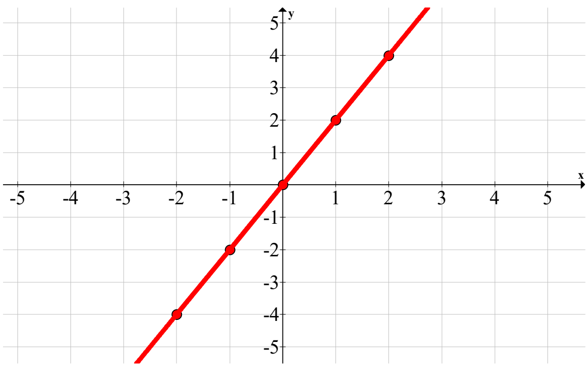
- As proporcións represéntanse como rectas da forma $b = k \cdot a$
  - onde k é a razón de proporcionalidade, $k = \frac{b}{a}$
  - a e b son os valores que toman as magnitudes A e B respectivamente.
- A relación peso – custe de calquera produto é unha proporcionalidade e represéntase con rectas da forma $y = m \cdot x$.
- Moitas das relacións en física son proporcionais e represéntanse mediante rectas como espazo – tempo, peso – densidade, forza – masa, …

Actividades resoltas

- Representa a recta $y = 2 \cdot x$

  Para iso, hai que construír unha táboa de valores e representar os puntos. A recta é a consecuencia de unir os puntos.

  Pódese observar que a variable y se define dando valores á variable x. Por esta razón x é a variable independente (pode ser calquera valor que se lle dea) e y é a variable dependente (depende do valor do x).



  Nota: para definir unha recta é suficiente con dar dous puntos dela.

As rectas $y = m \cdot x$ teñen os seguintes compoñentes:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

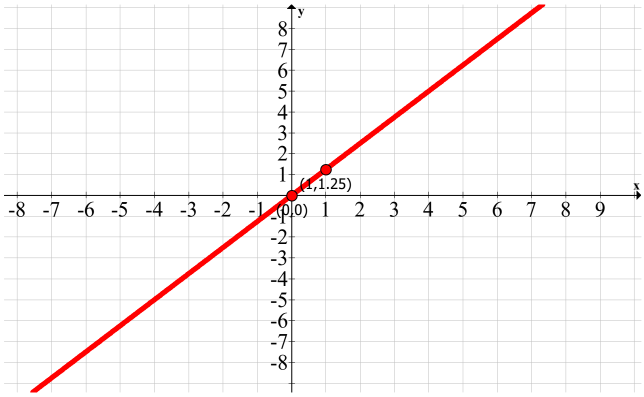
- x é a variable **independente**.
- y é a variable **dependente**.
- m é a **pendente** da recta, e é o que diferencia unha recta doutra.

As características máis importantes:

- Pasan pola orixe de coordenadas, é dicir, o punto (0, 0) pertence á recta.
- O seu dominio e o seu percorrido son todos os reais: tanto x como y aceptan calquera valor.
- Son simétricas respecto á orixe, ou o que é o mesmo, son funcións impares.

Actividades resoltas

- Estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías da función lineal $y = 1.25 \cdot x$



Ao tratarse dunha recta, pódese observar que o dominio son todos os reais, posto que se admite calquera valor do x .

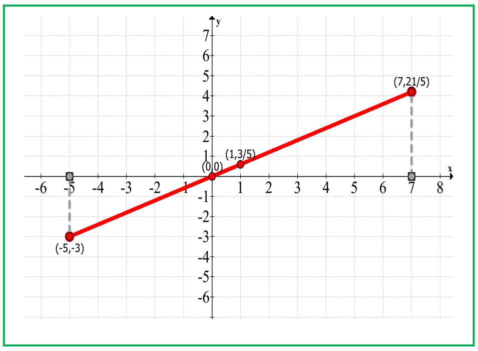
Se non se considera ningún intervalo, a recta non ten máximos nin mínimos absolutos e relativos.

Para ver a simetría, tomamos a función $y = f(x) = 1.25 \cdot x$

$$f(-x) = 1.25 \cdot (-x) = -1.25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ é } impar$$

É dicir, é simétrica respecto á orixe de coordenadas.

- Estuda a función $y = \frac{3}{5} \cdot x$ no intervalo $[-5, 7]$.



O dominio é todo o intervalo [-5, 7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ é } impar$, simétrica respecto á orixe.

Nos extremos do intervalo, existen mínimo (–5, –3) e máximo (7, 21.5).

Actividades propostas

3. Calcula o dominio, máximos e mínimos e a simetría das seguintes rectas:

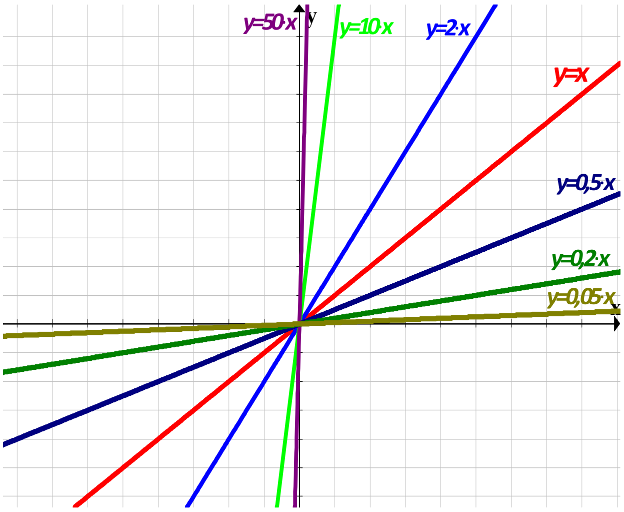
a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2.65 \cdot x$

1.3. Estudo da pendente

Como vimos con anterioridade, a pendente m é o que diferencia unas rectas doutras. Mide a inclinación da recta respecto ao eixe de abscisas.

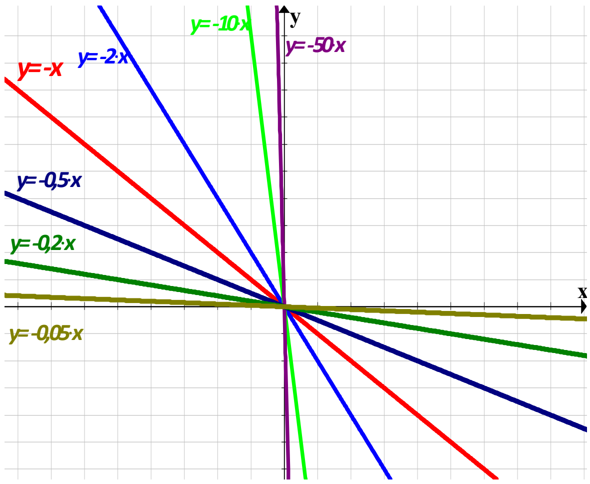
Nas relacións de proporcionalidade directa, a pendente vén dada pola razón de proporcionalidade *k*.

Observa no seguinte gráfico como varía a recta segundo imos aumentando ou diminuíndo a pendente. Partimos da recta $y = x$, onde $m=1$.



- se aumenta m , entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.
- se diminúe m , entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe x

Agora observa o que ocorre cando a pendente m toma valores negativos.



- se aumenta m , entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe x .
- se diminúe m , entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.

Como se pode observar, ao variar a pendente a inclinación da recta tamén varia, segundo se van dando valores a m .

A pendente da recta é o valor que mide a inclinación da recta, é dicir, mide o crecemento ou decrecemento da función lineal:

- se $m > 0$, a recta é crecente.
- se $m < 0$, a recta é decrecente.

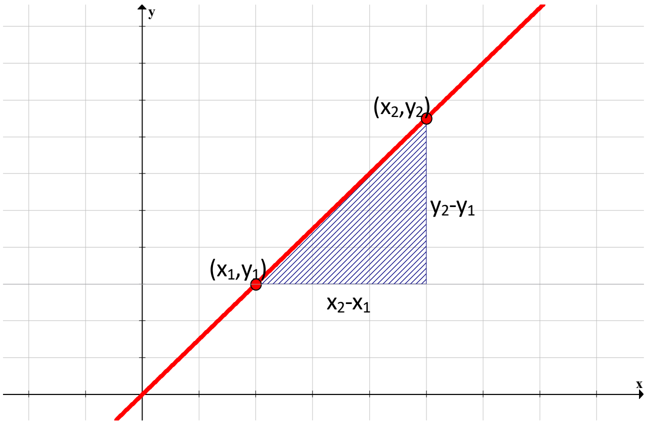
A pendente é o coeficiente que acompaña á variable independente x .

Interpretación xeométrica da pendente

A pendente da recta non só indica o crecemento e decrecemento da función, senón que tamén mide canto crece ou canto decrece. Pódese dicir que a pendente mide o crecemento da recta en función do que avanza:

- Se $m > 0$:
  - Para valores altos de m a recta crece con maior rapidez, isto é, a recta "sobe" moito e avanza pouco.
  - Para valores pequenos de m a recta crece con menos rapidez, é dicir, "sobe" pouco e avanza moito.
- Se $m < 0$:
  - Para valores altos de m a recta decrece con menos rapidez, é dicir, baixa pouco e avanza moito.
  - Para valores pequenos de m a recta decrece con maior rapidez, isto é, a recta "baixa" moito e "avanza" pouco.

Unha maneira de calcular a pendente, é dividindo o valor do que sobe a recta entre o que avanza, como se amosa no seguinte debuxo:



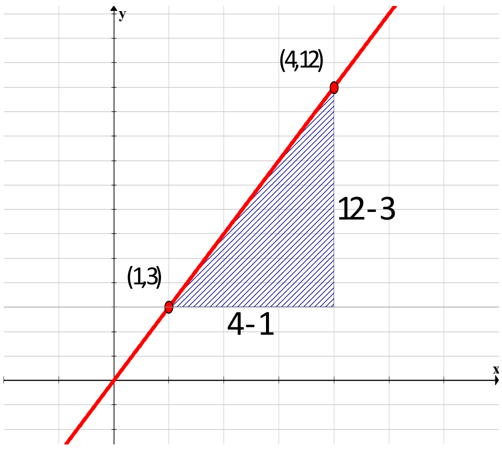
Dados dous puntos calquera da recta, a pendente calcúlase da seguinte forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

é dicir,

$$m = \frac{o\ que\ sobe}{o\ que\ avanza}$$

Exemplo:

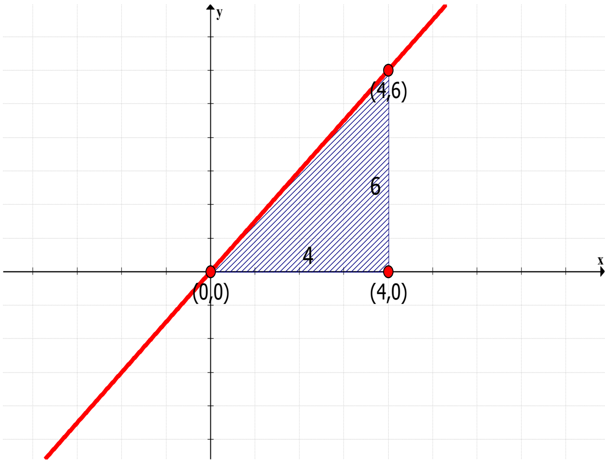


A recta sobe 12 – 3 = 9 e avanza 4 – 1 = 3, entón

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Actividades resoltas

- Calcula a pendente da seguinte recta e a súa expresión alxébrica.



Tomamos dous puntos calquera que pertenzan á recta, o (0, 0) e o (4, 6).

Neste caso a altura do triángulo sombreado indícanos o valor que sobe a recta, 6, e a base é o valor que a recta avanza, 4.

$$m = \frac{6}{4} = 1.5$$
$$y = 1.5 \cdot x$$

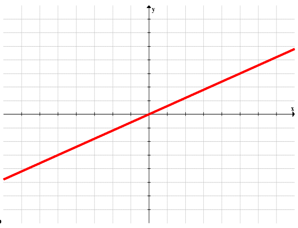
Ao dividir estes valores, obtemos a pendente e a expresión alxébrica da recta.

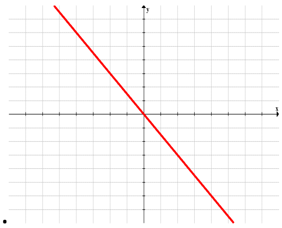
Nestes exemplos, a recta sempre sobe, é dicir, a función é crecente. Que ocorrería se a recta fose decrecente? Para non equivocarnos cos cálculos, sempre avaliamos a función de esquerda a dereita, é dicir, o primeiro punto estará máis á esquerda, será máis pequeno.

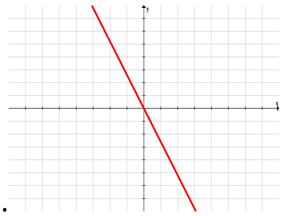
Isto é así porque a pendente mide a cantidade de crecemento (ou decrecemento) segundo a función vai aumentando ou o que é o mesmo, avanzando.

Actividades propostas

4. Calcula a pendente e a expresión alxébrica das seguintes rectas:

a. 

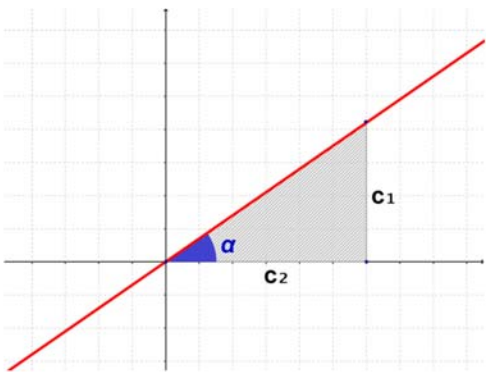
b. 

c. 

Outra expresión da pendente

Para calcular a pendente tómase como referencia a base e a altura do triángulo rectángulo que forman os vértices dos puntos da recta.

O cociente entre a altura e a base é a pendente. Como o triángulo construído é un triángulo rectángulo, a pendente é o cociente entre os seus dous catetos, ou o que é o mesmo, a pendente é a tanxente do ángulo que forma a recta co eixe horizontal.



$$tan\,\alpha = \frac{C_{oposto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = tan\,\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

A pendente é a tanxente do ángulo que forma a recta co eixe de abscisas, é dicir, a recta coa horizontal.

1.4. Rectas da forma $y = m \cdot x + n$

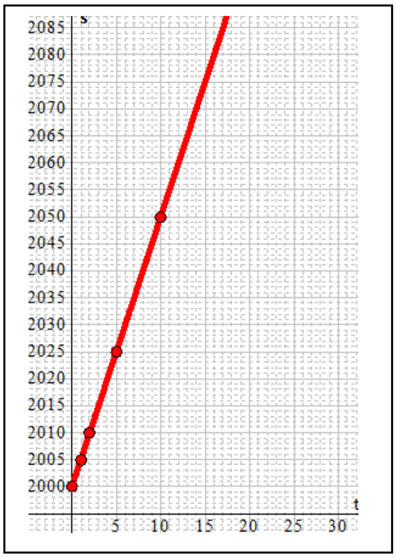
Volvemos á situación 1 ao principio do capítulo. Nese caso, queriamos calcular o espazo que percorría o ciclista. Agora supoñamos que o ciclista, antes de empezar coa súa ruta, tivo que desprazarse 2 Km ata o inicio do seu camiño.

Actividades resoltas

- *A gráfica s - t dun movemento rectilíneo uniforme*: o espazo percorrido, en función do tempo, por un ciclista que se trasladou 2 Km antes de empezar o percorrido e se despraza cunha velocidade de 5 m/s.

  Neste caso, a fórmula do MRU, como temos un espazo inicial, é $s = s_0 + v \cdot t$. Cos datos do exercicio, a expresión queda $s = 2\,000 + 5t$.

  Construímos a nova táboa e debuxamos a gráfica:



Tempo(t)	Espazo(s)
0	2 000
1	2 005
2	2 010
5	2 025
10	2 050

  Podemos observar que tivemos que adaptar os eixes para poder pintar a gráfica xa que a recta se desprazou 2 000 posicións no eixe y.

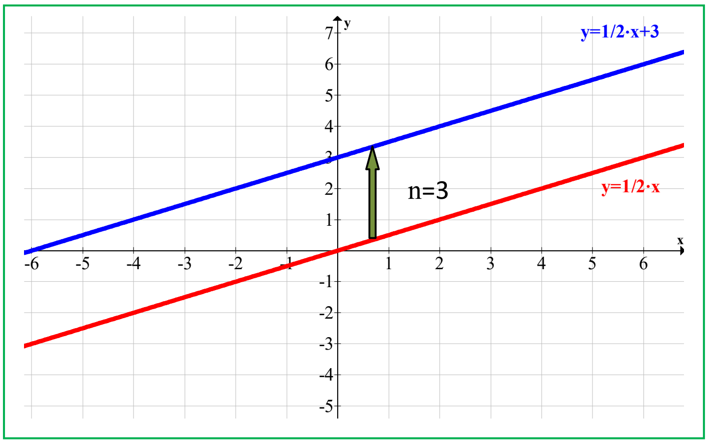
  A gráfica desta recta ten como expresión alxébrica e $= 5x+ 2\,000$, onde x corresponde ao tempo t e y ao espazo s , e 2 000 é o espazo inicial s_0.

  A **pendente** é 5 pero a recta non pasa polo punto (0, 0) senón que corta ao eixe de ordenadas no punto (2 000, 0). Dise que a **ordenada na orixe** é 2 000.

As rectas da forma $y = m \cdot x + n$ teñen a mesma pendente que as rectas $y = m \cdot x$ pero desprázanse no eixe de abscisas (eixe y) n posicións. Por esta razón, a n chámaselle **ordenada na orixe**, xa que é o valor da recta no punto de partida, é dicir, cando $x = 0$.

Exemplo:

- Comparemos a recta $y = \frac{1}{2} \cdot x$ coa recta $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$



As dúas rectas teñen a mesma forma, é dicir, a mesma inclinación ou a mesma pendente. En ambos casos $m = \frac{1}{2}$. Son dúas rectas paralelas.

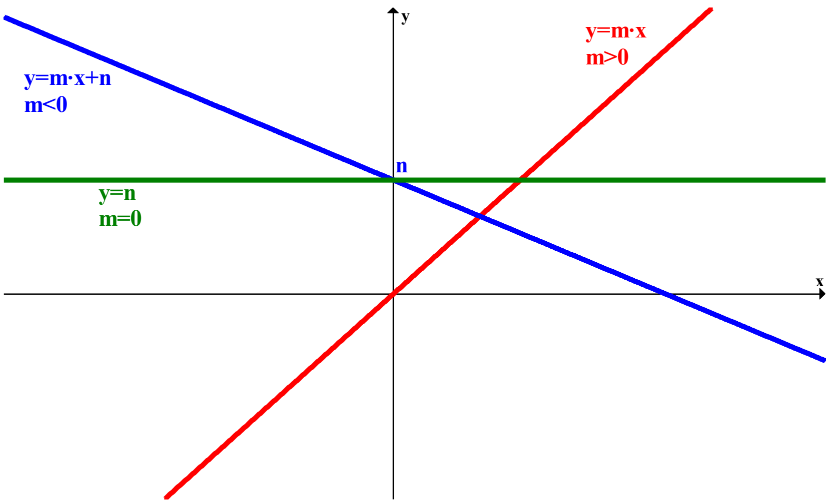
A diferenza está no valor de n : a recta $y = 1/2 \cdot x$ (onde $n = 0$) desprazouse 3 posicións no eixe y para converterse na recta $y = \frac{1}{2} \cdot x + 3$ (onde $n = 3$).

As funcións polinómicas de primeiro grao, ou funcións lineais, descríbense alxebricamente da forma $y = m \cdot x + n$ e represéntanse mediante rectas.

Ademais da variable independente x , a variable dependente y, e a pendente m , engádese o valor n que é a ordenada na orixe.

A recta $y = m \cdot x + n$ é paralela á recta $y = m \cdot x$ (teñen a mesma pendente, m) desprazada verticalmente n posicións. Por esta razón, o crecemento ou decrecemento destas funcións compórtanse da mesma maneira:

- Se $m > 0$, a función é **crecente**.
- Se $m < 0$, a función é **decrecente**.
- Se $m = 0$, a función é **constante**, nin crece nin decrece. É paralela ao eixe x , e pasa polo punto $y = n$.



Ás funcións $y = m \cdot x$ e $y = m \cdot x + n$ chámaselles **funcións lineais**, aínda que ás segundas tamén se lles llama **funcións afíns**.

Actividades propostas

5. Representa as seguintes funcións lineais:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

c. $2x + \cdot 4y = 5$

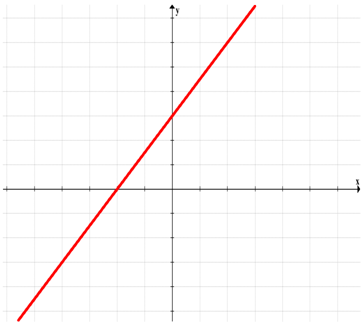
d. $y = 5$

e. $y = 0$

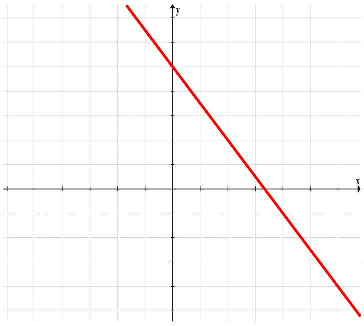
f. $y = -3$

6. Calcula a expresión das seguintes rectas:

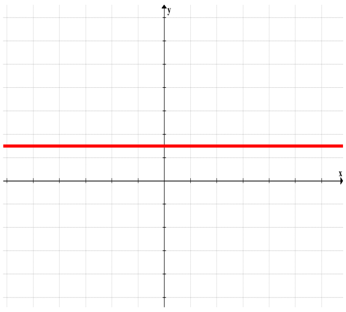
a.



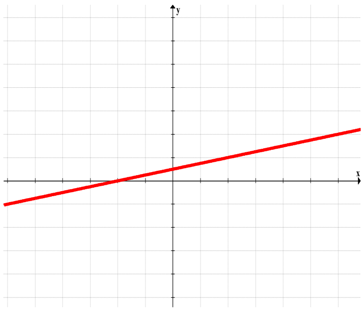
b.



c.



d.



2. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRAO

2.1. Funcións polinómicas de segundo grao. Parábola $y = a \cdot x^2$

No apartado anterior representamos as gráficas das funcións polinómicas de primeiro grao. Agora imos estudar a representación das funcións polinómicas de segundo grao. A gráfica deste tipo de funcións será semellante á representación da *situación 2* ao principio do capítulo.

As funcións polinómicas de segundo grao son aquelas que teñen como expresión alxébrica un polinomio de grao 2, é dicir, a súa expresión é da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Represéntanse mediante **parábolas.**

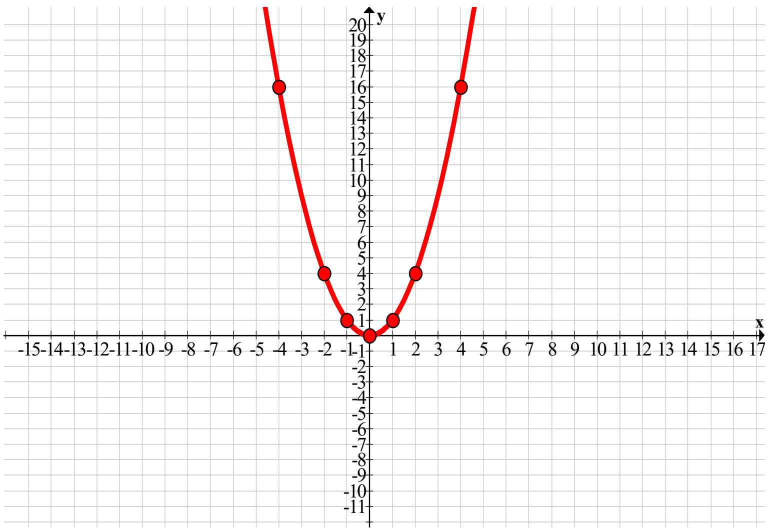
Exemplo:

- En Física, a traxectoria de moitos movementos represéntase mediante parábolas, e por iso recibe o nome de tiro parabólico: lanzar un proxectil con certo ángulo, a aterraxe dun avión nun portaavións, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Imos representar a parábola $y = x^2$. Para iso, construímos unha táboa de valores e representamos os pares de puntos no plano cartesiano.

x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



Na táboa e na gráfica pódense observar algunhas características:

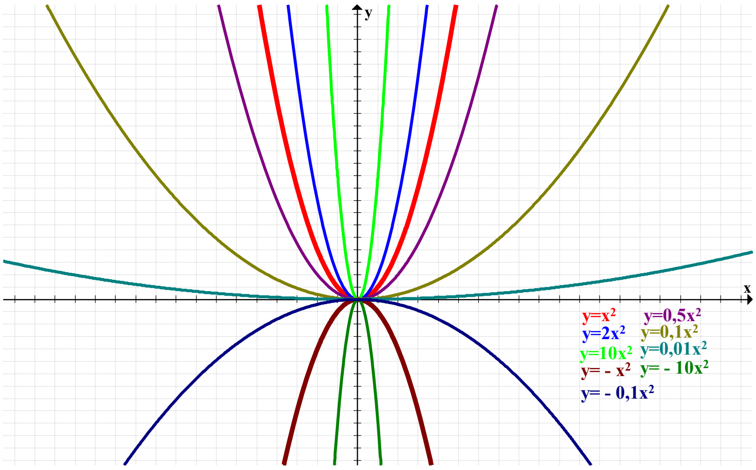
- O dominio é toda a recta real. O percorrido son os reais positivos e o cero.
- A función é continua porque non presenta saltos.
- É simétrica respecto ao eixe y, é dicir, é unha función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- É decrecente ata o 0, e despois crecente, logo ten un mínimo absoluto no (0, 0).

Neste caso, $a = 1$, e sabemos que se $a = -1$, a parábola ten a mesma forma, pero está aberta cara abaixo, e en vez dun mínimo, ten un máximo no (0, 0).

Vexamos o que sucede cando aumentamos ou diminuímos o coeficiente a :



- Se $a > 0$:
  - o ao aumentar a , a parábola faise máis estreita, e vaise achegando ao eixe y .
  - o ao diminuír a , a parábola faise máis ancha (plana), e vaise achegando ao eixe x .
- Se $a < 0$:
  - o ao aumentar a , a parábola faise máis ancha (plana), e vaise achegando ao eixe x .
  - o ao diminuír a , a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y .

En xeral, as parábolas cuxa expresión alxébrica é $\boldsymbol{y = a \cdot x^2}$ teñen as seguintes características:

- Son **continuas** en todo o dominio.
- O dominio é toda a recta real.
- se $a > 0$, a parábola está aberta cara arriba, o percorrido son os reais positivos e o cero. Ten un **mínimo absoluto** no punto (0, 0).
- se $a < 0$, a parábola está aberta cara abaixo, o percorrido son os reais negativos e o cero. Ten un máximo absoluto no punto (0, 0).

  A este punto chámaselle **vértice** da parábola.
- Son funcións pares, é dicir, simétricas respecto ao eixe y .

Actividades propostas

7. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

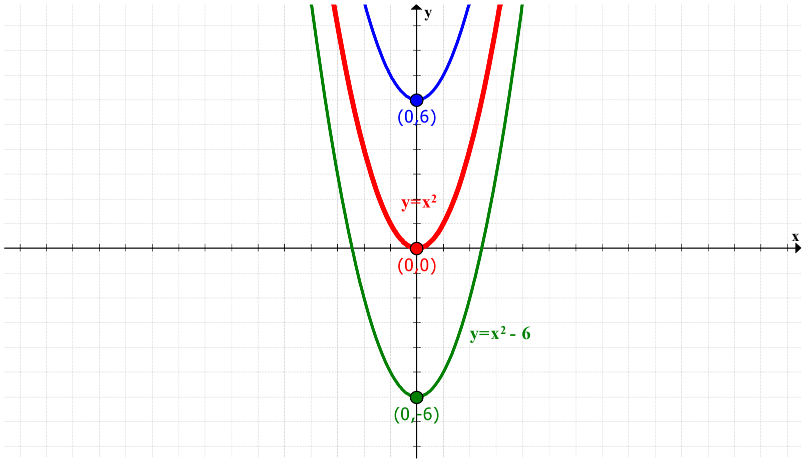
a. $y = \frac{5}{3}x^2$	b. $y = -3x^2$	c. $y = -\frac{15}{3}x^2$
d. $y = 4.12x^2$	e. $y = -\frac{6}{10}x^2$	f. $y = \frac{7}{8}x^2$

2.3. Translacións no plano

Utilizando como modelo a gráfica de $y = x^2$, pódense obter as gráficas doutras parábolas máis complexas, dependendo do tipo de desprazamento que utilicemos.

Desprazamentos verticais: translacións na dirección do eixe y : $y = x^2 + k$.

Neste caso, trátase de mover a parábola en dirección vertical, é dicir, cara arriba ou cara abaixo. Comparemos as parábolas $y = x^2 + 6$ e $y = x^2 - 6$ co noso modelo:



Pódese observar que, ao sumar 6 á parábola x^2 , a gráfica é idéntica pero desprazada 6 unidades en sentido positivo no eixe y, é dicir, a parábola subiu 6 unidades. O novo vértice pasa ser o punto (0,6).

Algo parecido ocorre cando se resta 6 unidades a x^2 . Neste caso a gráfica desprazouse 6 unidades en sentido negativo ata o vértice (0, –6), é dicir, baixa 6 unidades.

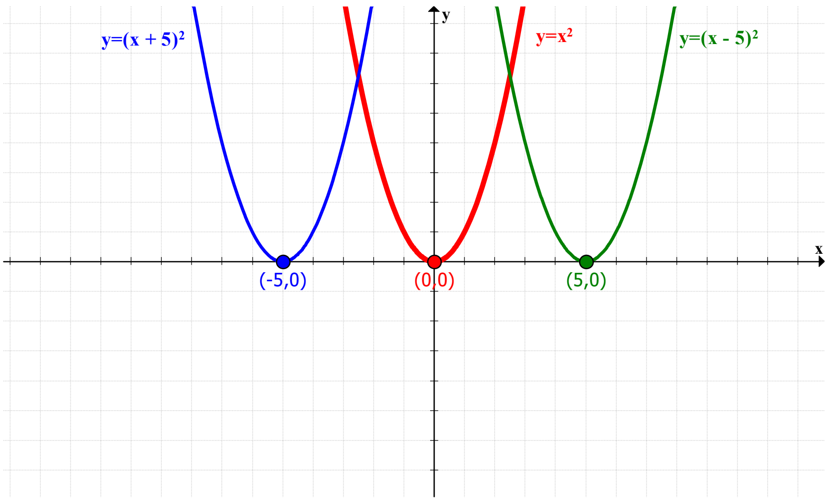
En xeral, a parábola $\boldsymbol{y = x^2 + k}$ ten a mesma gráfica que $y = x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente no eixe y. Se k é positivo, a translación é cara arriba e se k é negativo, cara abaixo.

O **vértice** da parábola sitúase no punto (0, k).

Desprazamentos horizontais: translacións na dirección do eixe x: $y = (x - q)^2$.

Agora trasladamos a parábola en dirección horizontal. Cara á dereita ou cara á esquerda.

Comparemos as parábolas $y=(x+5)^2$ e $y=(x-5)^2$ co modelo:



Neste caso, ao aumentar a variable que se eleva ao cadrado, é dicir, sumar 5 unidades, a gráfica trasládase horizontalmente cara á esquerda 5 unidades, sendo o novo vértice o punto (–5, 0). Ao diminuír esta variable, é dicir, restar 5 unidades, a parábola desprázase cara á dereita sendo o novo vértice o punto (5, 0).

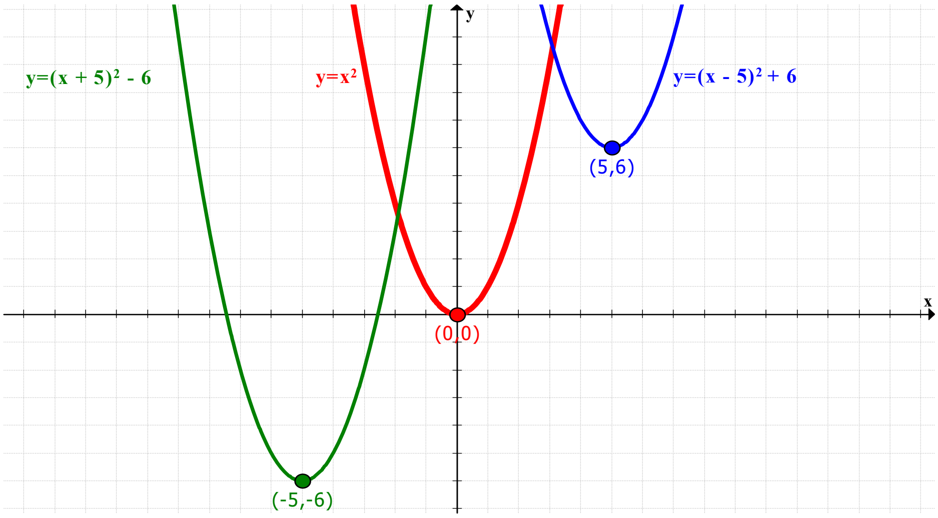
En xeral, a parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ ten a mesma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades no eixe x cara á dereita se $q > 0$ e cara á esquerda se $q < 0$.

O **vértice** da parábola sitúase no punto $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{0})$.

Desprazamentos oblicuos: translacións en ambos os eixes: $y = (x - q)^2 + k$.

O último movemento é o que combina os dous anteriores, é dicir, movemos o modelo k posicións de maneira vertical e q posicións de maneira horizontal, resultando un movemento oblicuo no plano.

Comparemos a parábola $y=(x-5)^2+6$ e $y=(x+5)^2-6$ co modelo $y=x^2$.



A parábola $y=(x-5)^2+6$ trasládase 5 unidades á dereita e 6 unidades cara arriba, mentres que a parábola $y=(x+5)^2-6$ trasládase 5 unidades cara á esquerda e 6 unidades cara abaixo.

É dicir, é a combinación dos dous movementos anteriores.

En xeral, a parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ t na mesma gráfica que $y=x^2$ trasladádaa da seguinte forma:

$$q \ unidades \begin{cases} cara \ á \ dereita \ se \ q > 0 \\ cara \ á \ esquerda \ se \ q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \ unidades \begin{cases} cara \ arriba \ se \ k > 0 \\ cara \ abaixo \ se \ k < 0 \end{cases}$$

O **vértice** da parábola sitúase no punto (q, k) .

Representación de parábolas da forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar as parábolas da forma $y=(x-q)^2+k$ mediante translacións. Como podemos pintar a gráfica das parábolas cuxa expresión alxébrica é $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con converter esa expresión nunha cuxa función saibamos representar:

Actividades resoltas

- Representa a gráfica da función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$

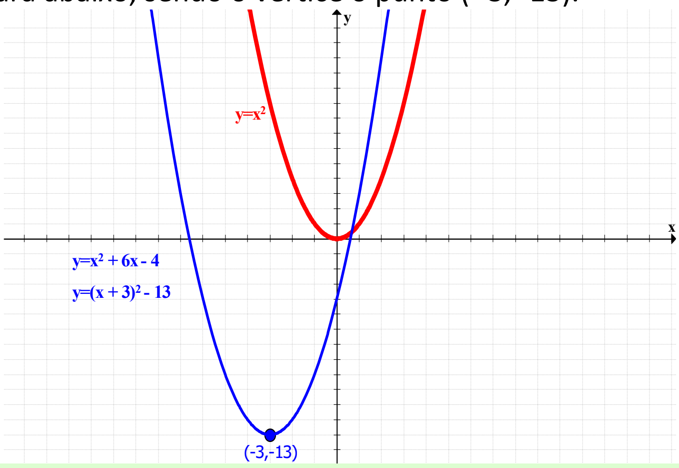
  A función vén dada da forma $y=x^2+r\cdot x+s$, e queremos convertela en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, onde xa nos aparece x^2+6x. Agora temos que axustar o resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

  Coa parábola expresada desta maneira, basta con trasladar a gráfica de $y=x^2$, 3 unidades á esquerda e 13 unidades cara abaixo, sendo o vértice o punto (–3,–13).



En xeral, o vértice da parábola está no punto $x=\frac{-r}{2}$. A outra coordenada obtense substituíndo x na expresión da función.

Exemplo:

- No caso anterior, $y=x^2+6\cdot x-4$, o vértice está no punto (–3,–13).

Como r = 6, a primeira coordenada do vértice é $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Substituíndo o valor na expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

Actividades propostas

8. Representa a gráfica das seguintes parábolas e localiza o vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+17$ h. $y=-x^2+2x-4$ i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

As funcións polinómicas de segundo grao reciben o nome de **funcións cuadráticas**.

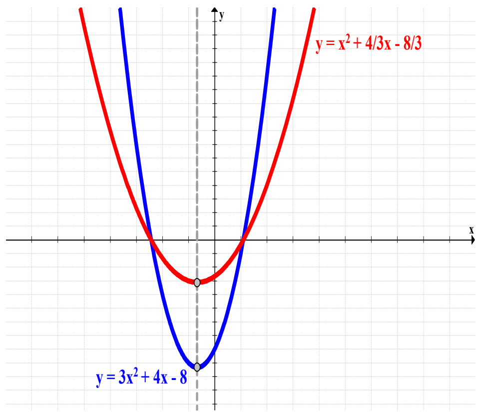
Ata agora só estudamos as funcións de tipo $y = x^2 + rx + s$, que é unha parábola aberta cara arriba, ou $y = -x^2 + rx + s$, aberta cara abaixo.

Sabemos como afecta o valor do coeficiente a na gráfica da parábola $y = a \cdot x^2$, facéndoa máis estreita ou máis ancha.

Para representar as funcións cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ convértese esta expresión nunha máis familiar que sabemos representar:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resoltas



- Representa a parábola $y = 3x^2 + 4x - 8$:

  Convertemos a función nunha expresión máis doada de representar:

  $$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

  e comparámola con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

  $$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16}{36} - \frac{8}{3} =$$
  $$(x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16+96}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{112}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{28}{9}$$

  As dúas parábolas teñen o vértice no mesmo punto de abscisa, e a coordenada y queda multiplicada por 3.

  En canto á forma, a parábola é máis estreita, como se pode ver no punto 2.1.

En xeral, a representación da función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pódese aproximar representando a parábola $y = x^2 + rx + s$, tendo o vértice no mesmo punto de abscisa e a forma dependerá do valor absoluto do coeficiente a, sendo máis ancha para valores grandes máis estreita para valores máis pequenos.

A orientación da parábola será:

- cara arriba se $a > 0$
- cara abaixo se $a < 0$

Elementos da parábola

Os elementos máis característicos da parábola axudan a representar a súa gráfica no plano cartesiano.

Coeficiente a:

Se $a>0$ a parábola está aberta cara arriba.

Se $a<0$ a parábola está aberta cara abaixo.

Vértice:

O **vértice** da parábola está no punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Viramos que para a parábola da forma $y=x^2+rx+s$, a primeira coordenada é $\frac{-r}{2}$.

A parábola no caso xeral é $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, é dicir, $r=\frac{b}{a}$,

entón a primeira coordenada do vértice é $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

A segunda coordenada sae ao substituír $x=\frac{-b}{2a}$ na función cuadrática.

Puntos de corte co eixe OX:

Son os puntos onde a parábola corta o eixe x, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $y=0$. Indica cando a parábola é positiva ou negativa.

Para calculalos, resólvese a ecuación de segundo grao $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte co eixe OY:

É o punto onde a parábola corta o eixe y, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $x = 0$.
Cando $x=0$ a parábola toma o valor de c, logo o punto de corte é o punto $(0, c)$.

Eixe de simetría:

A parábola é simétrica na recta paralela o eixe y que pasa polo vértice da parábola, é dicir, o **eixe de simetría** da parábola é a recta $x=\frac{-b}{2a}$.

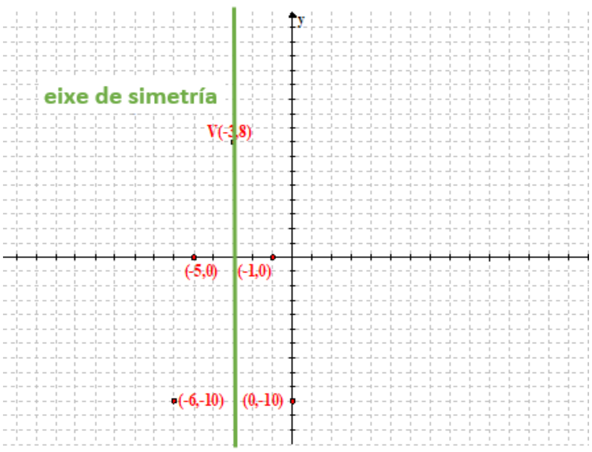
O eixe de simetría tamén pasa polo punto medio do segmento formado polos dous puntos de corte co eixe x.

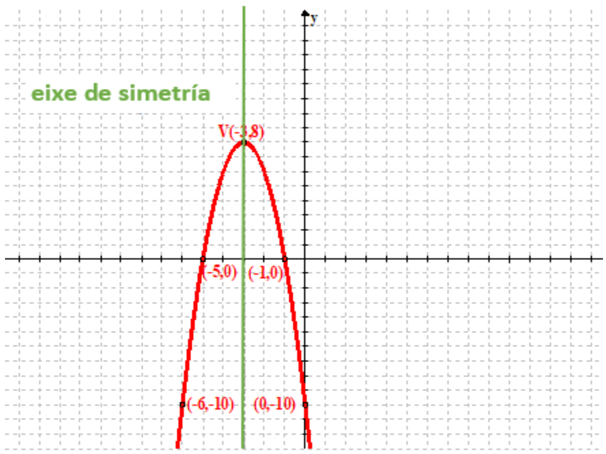
A partir destes elementos, pódese representar a gráfica dunha función cuadrática.

Actividades resoltas

- Determina os elementos da parábola $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entón a parábola está aberta cara abaixo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eixe OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$
    - Eixe OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

      A parábola tamén pasa polo seu simétrico: $(-6, -10)$.
  - Eixe de simetría: recta $x = -3$.





Actividades propostas

9. Calcula os elementos característicos e representa as seguintes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIÓNS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

3.1. Función de proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}$

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k* é o produto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Exemplo

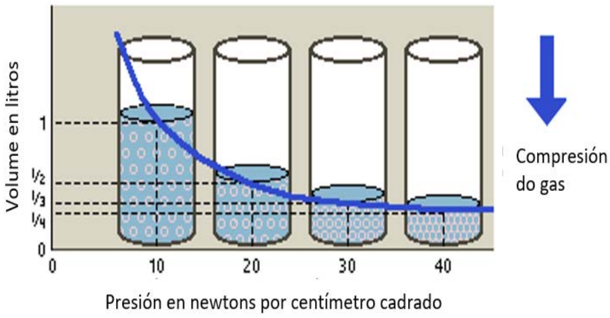
- Pódese comprobar na *situación 3* no inicio do capítulo que a velocidade e o tempo son magnitudes inversamente proporcionais. Neste caso, o espazo mantense constante, sendo a razón de proporcionalidade inversa $s = v \cdot t$.
- En Física encontramos moitos exemplos de magnitudes inversamente proporcionais: a densidade e o volume, a potencia e o tempo, a presión e a superficie…

Actividades resoltas

- Representa no plano a lei de *Boyle-Mariotte*: "a temperatura constante, o volume dunha masa fixa de gas é inversamente proporcional á presión que este exerce."

  A fórmula que describe esta lei é $P \cdot V = k$

  Se despexamos o volume final V, obtemos a seguinte expresión: $V = \frac{k}{P}$.



  A gráfica describe unha curva que a medida que aumenta a presión inicial, diminúe o volume e se vai aproximando ao eixe x e, ao contrario, se diminúe a presión, o volume que ocupa o gas é maior.

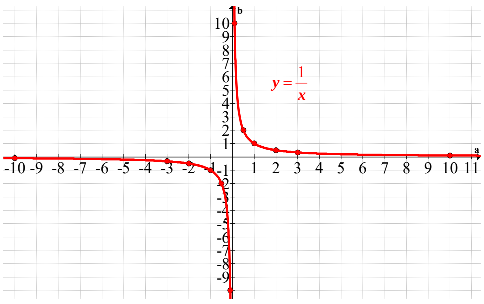
A función de proporcionalidade inversa defínese mediante a expresión $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$, onde k é a razón de proporcionalidade inversa e as variables x e y son os distintos valores que teñen as dúas magnitudes.
A súa representación gráfica no plano cartesiano é unha **hipérbole**.

Exemplo

- Representa a hipérbole $y = \frac{1}{x}$

  Damos unha táboa de valores e representamos os puntos no plano:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3



Pódese observar que a gráfica nunca corta aos eixes de coordenadas, xa que o 0 non pertence ao dominio e tampouco ao percorrido da función.

É fácil comprobar que a función é simétrica respecto da orixe, e continua en todo o dominio, é dicir, en $\Re - \{0\}$.

A hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$

Actividades propostas

10. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa no mesmo sistema de coordenadas:

a. $y = \dfrac{-1}{x}$ b. $y = \dfrac{5}{x}$ c. $y = \dfrac{1}{2x}$

d. $y = \dfrac{3}{8x}$ e. $y = \dfrac{-5}{3x}$ f. $y = \dfrac{-12}{5x}$

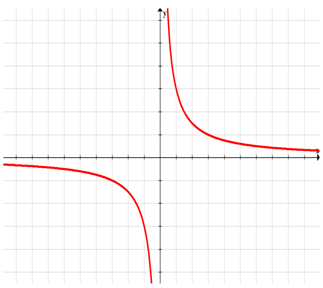
11. Describe o que sucede cando varía o valor de k. Axúdate das gráficas do exercicio anterior.

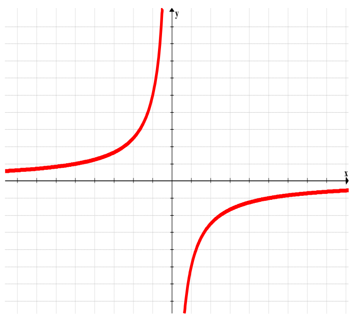
12. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles que pasan por cada un destes puntos. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a. $(4, 2)$ b. $(3, -1)$ c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$ e. $(a, 1)$ f. $(1, b)$

13. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:


a)


b)

14. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles, así como as hipérboles que pasan polos puntos:

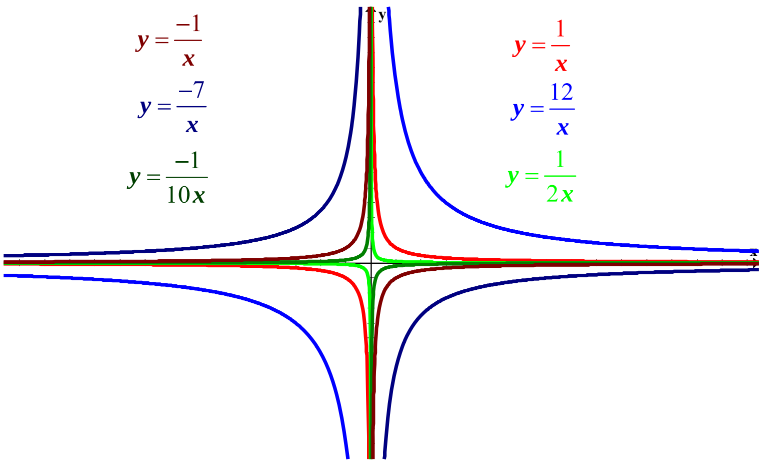
a. $y = \dfrac{9}{2x}$ b. $y = \dfrac{-5}{3x}$ c. $y = \dfrac{-0.3}{x}$

d. $(-5, 2)$ e. $(4, -9)$ f. $(1, 1/2)$

En xeral, as hipérboles cuxa expresión é $y = \frac{k}{x}$ teñen as seguintes propiedades:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - Se o valor absoluto de k aumenta, a curva afástase da orixe de coordenadas.
  - Se o valor absoluto de k diminúe, a curva aproxímase á orixe de coordenadas.
- **Dominio:** son todos os reais menos o 0: $\Re - \{0\}$
- **Percorrido:** o seu percorrido son todos os reais menos o 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuidade:** a función de proporcionalidade inversa é continua en todo o seu dominio, pero descontinua na recta real, xa que o 0 non está no dominio, e polo tanto, hai un salto.
- **Simetría:** son funcións impares, isto é, son simétricas respecto á orixe de coordenadas.
- **Asíntotas:** Cando os valores de x e os de y se fan moi grandes, a curva aproxímase aos eixes, pero sen tocalos, polo tanto, os eixes de coordenadas son as asíntotas das funcións de proporcionalidade inversa: as rectas $x=0$ e $y=0$.
- **Crecemento:** depende do signo de k :
  - Se $k>0$: a función é **decrecente** en todo o seu dominio de definición.
  - Se $k<0$: a función é **crecente** en todo o seu dominio de definición.

As asíntotas dividen á hipérbole en dúas curvas que reciben o nome de **ramas da hipérbole**.



3.2. A hipérbole $y = \dfrac{k}{x-b} + a$

A partir da representación da función $y = \dfrac{k}{x}$, é posible representar outro tipo de hipérboles? Ao igual que ocorre coas parábolas, podemos trasladar as hipérboles no plano en dirección horizontal ou vertical, segundo os valores que tomen os parámetros a e b.

Actividades propostas

15. Representa nos mesmos eixes de coordenadas, as seguintes hipérboles:

a. $y = \dfrac{5}{x}$ $\quad y = \dfrac{5}{x} + 3$ $\quad y = \dfrac{5}{x} - 3$

b. $y = \dfrac{-12}{x}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x-3}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x+3}$

c. $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad y = \dfrac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \dfrac{5x-2}{x-1}$

16. Describe o que sucede cando varían os parámetros a e b nas hipérboles do exercicio anterior.

En xeral, a representación gráfica das hipérboles cuxa expresión alxébrica é $y = \dfrac{k}{x-b} + a$ é unha translación no plano dependendo dos valores de a e b.

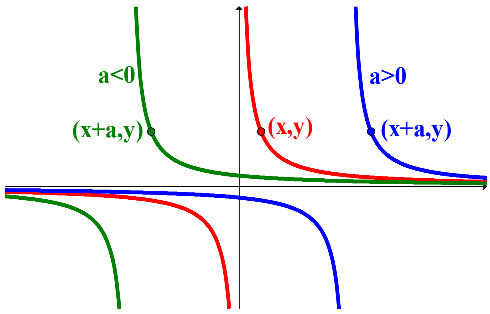
Desprazamentos horizontais

Ao variar o valor de $\boldsymbol{a}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase horizontalmente a unidades:

- Se $\boldsymbol{a > 0}$: a hipérbole desprázase cara á dereita.
- Se $\boldsymbol{a < 0}$: a hipérbole desprázase cara á esquerda.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y)$:

$$(x, y) \to (x+a, y)$$

- O vector de translación é o vector $(a, 0)$



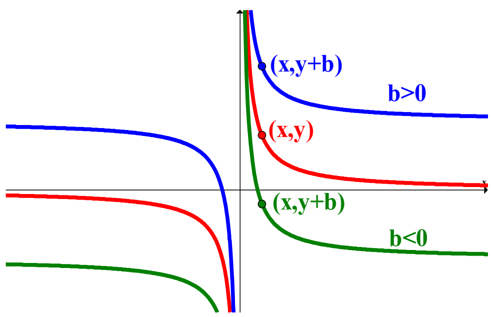
Desprazamentos verticais

Ao variar o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase verticalmente b unidades:

- Se $\boldsymbol{b > 0}$: a hipérbole desprázase cara arriba.
- Se $\boldsymbol{b < 0}$: a hipérbole desprázase cara abaixo.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x, y+b)$:

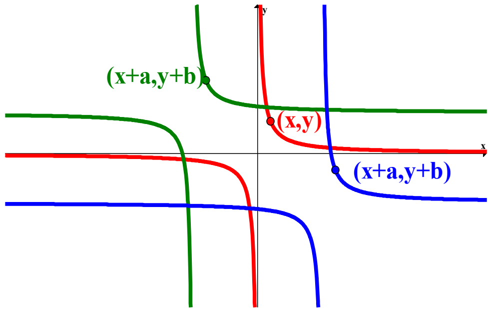
$$(x, y) \to (x, y+b)$$

- O vector de translación é o vector $(0, b)$



Desprazamentos oblicuos

Ao variar tanto o valor de a como o valor de b, a representación gráfica da hipérbole desprázase diagonalmente tantas unidades como sexa o valor dos parámetros:



- As direccións cara a onde se traslada dependerán dos signos de a e b.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x + a, y + b)$:
  $$(x, y) \to (x + a, y + b)$$
- O vector de translación é o vector (a, b)

Actividades propostas

17. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa a partir da hipérbole $y = \dfrac{5}{x}$:

a. $y = \dfrac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \dfrac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \dfrac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \dfrac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \dfrac{4}{x}$ f. $y = \dfrac{20}{5-x} - 2$

18. Estuda o dominio, percorrido, continuidade, simetría, asíntotas e crecemento das funcións de proporcionalidade inversa do exercicio anterior.

19. Escribe unha regra para expresar como se trasladan as asíntotas segundo os parámetros a e b.

Hipérbole $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

As funcións que se definen mediante esta expresión tamén son funcións de proporcionalidade inversa e represéntanse mediante hipérboles. Para iso, necesitamos facer o cambio nunha expresión como a estudada no apartado anterior que nos resulte máis fácil de manexar e representar:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \to \text{Dividindo } (mx+n):(px+q) \to y = \frac{k}{x-a} + b$$

Actividades resoltas

- Converter a función $y = \dfrac{3x+2}{x-7}$ nunha función cuxa expresión sexa máis sinxela de representar.

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2) = 3(x-7) + 23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

  Esta última expresión é fácil de representar.

Actividades propostas

20. Representa as seguintes hipérboles:

a. $y = \dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \dfrac{4x-12}{x-3}$

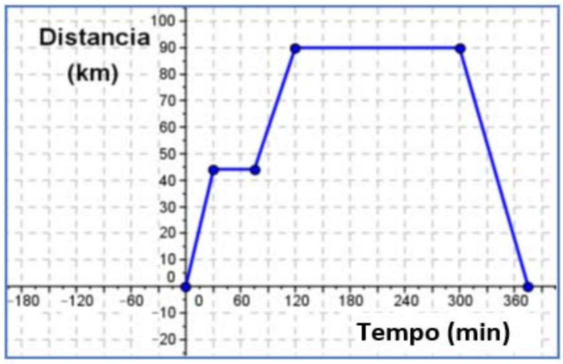
d. $y = \dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \dfrac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIÓNS DEFINIDAS A ANACOS

Hai gráficas que non podemos representar cunha única fórmula, como a da marxe:

Actividades resoltas

- *A gráfica da marxe representa unha excursión en autobús dun grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca unha expresión que a represente.*

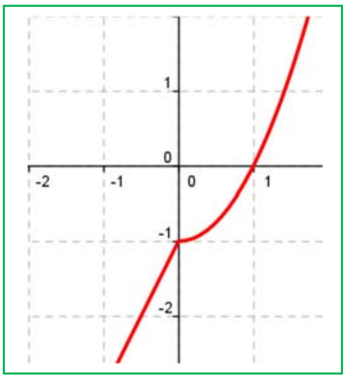


Este tipo de función denomínase **función definida a anacos** pois cada trozo ten unha expresión alxébrica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular as súas ecuacións pois coñecemos os puntos polos que pasan: ((0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) e (0, 360).

A súa expresión é:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30 \\ 45 & si\ 30<x\le 75 \\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120 \\ 90 & si\ 120<x\le 300 \\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360 \end{cases}$$

- *Representa graficamente a función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & se\ x<0 \\ x^2-1 & se\ x>0 \end{cases}$.



Está definida de distinta maneira antes de 0, que é unha recta, que despois de 0, que é unha parábola. Simplemente debuxamos estas funcións nos intervalos indicados.

Actividades propostas

21. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & se\ x<0 \\ x-1 & se\ x>0 \end{cases}$.

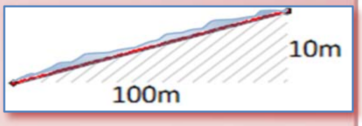
22. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & se\ x<0 \\ 2x+2 & se\ x>0 \end{cases}$.

23. Representa graficamente a función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & se\ x<1 \\ x+3 & se\ x>1 \end{cases}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

Coñeces este sinal?

Seguramente o viches nalgunha estrada, pero que indica? Mide a pendente da estrada con respecto á horizontal e significa que a pendente é do 10 %, é dicir, $\frac{10}{100}$. Quere dicir que subimos 10 metros de altura mentres que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet o perfil do *L'Angliru* e comproba a pendente das súas ramplas.

Arquímedes e o raio de calor

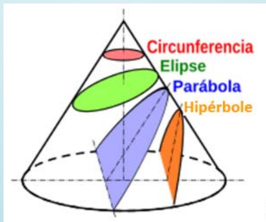
Arquímedes é un dos personaxes que máis achegaron a ciencia na historia. Este enxeñeiro, físico, inventor, astrónomo e matemático naceu en *Siracusa* (287 a.C. – 212 a.C.) e é o responsable de moitos teoremas e invencións que seguramente terás oído, como o famoso principio de *Arquímedes* ou o parafuso de *Arquímedes* utilizado nas cadeas de produción de moitas empresas.

Cando os romanos atacaron *Siracusa*, conta a lenda que *Arquímedes* construíu un sistema que concentraba os raios de sol nun raio de calor que provocou o incendio dos barcos inimigos. Este sistema estaba composto por espellos (ou escudos ben pulidos) colocados de tal forma que debuxasen unha superficie parabólica.

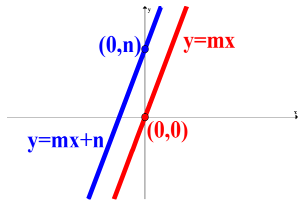
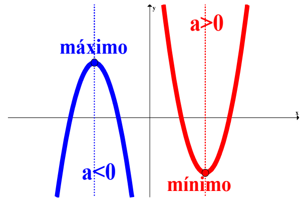
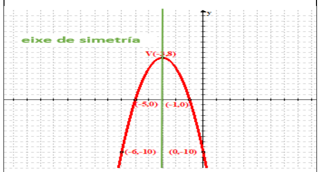
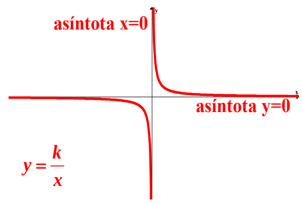
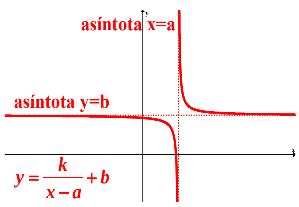
Mito ou realidade? Non se sabe, pero na actualidade, este sistema é a base do funcionamento dos fornos solares.

Apolonio de Pergue

Estivemos falando de parábolas e hipérboles pero, de onde veñen esas palabras e formas? O nome destas curvas debémosllo a *Apolonio de Pergue* (262 a.C.- 190 a.C.) que estudou este tipo de funcións na súa obra *As Cónicas*. As curvas xorden dos cortes dun cono: dependendo do ángulo de corte, obtemos unhas curvas ou outras. É como cortar unha barra de pan.



RESUMO

Función polinómica de primeiro grao: Rectas $\boldsymbol{y=m\cdot x}$ $\boldsymbol{y=m\cdot x+n}$	A súa expresión son polinomios de grao un. Represéntanse mediante **rectas**: Hai dous tipos: - **Funcións lineais ou de proporcionalidade directa**: $y=m\cdot x$, pasan pola orixe de coordenadas. - **Funcións afíns**: $y=m\cdot x+n$, son translacións no eixe y, n unidades. Pasan polo punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grao: Parábolas $\boldsymbol{y=a\cdot x^2+b\cdot x+c}$	A súa expresión son polinomios de grao dous. Represéntanse mediante **parábolas**: **Vértice:** $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ **Puntos de corte co eixe OX:** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. **Punto de corte co eixe OY:** $x=0$, é o punto $(0,c)$. **Eixe de simetría**: é a recta $x=\dfrac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidade inversa: Hipérboles $\boldsymbol{y=\dfrac{k}{x}}$	$\lvert k\rvert$: afasta ou achega a curva á orixe de coordenadas. **Dominio e percorrido:** son todos os números reais menos o 0. **Continuidade:** continua en todo o seu dominio, descontinua en $x=0$. **Simetría:** impar, simétricas respecto á orixe de coordenadas. **Asíntotas:** as rectas $x=0$ e $y=0$. **Crecemento:** - Se $k>0$: **decrecente** en $(-\infty,0)$ e **crecente** en $(0,+\infty)$. - Se $k<0$: **crecente** en $(-\infty,0)$ e **decrecente** en $(0,+\infty)$.	
Hipérboles $\boldsymbol{y=\dfrac{k}{x-a}+b}$	Son o resultado de trasladar a hipérbole $y=\dfrac{k}{x}$ polo vector de translación (a,b): - Dominio: $\Re-\{a\}$ Percorrido: $\Re-\{b\}$ - Puntos: $(x,y)\rightarrow(x+a,y+b)$ - Asíntotas: $\{x=0\rightarrow x=a\};\{y=0\rightarrow y=b\}$	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa graficamente a seguinte relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa e escribe a súa ecuación. Describe que tipo de relación é.

Magnitude A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitude B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa as rectas a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2.3x$.

3. Estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías das funcións lineais a) $y = 1.5x$, b) $y = -0.5x$.

4. Estuda a función $y = 0,7x$ no intervalo [–2, 5].

5. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (0, 0) e determina a súa expresión alxébrica.

6. Representa as seguintes funcións lineais:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.

7. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (2, 1) e determina a súa expresión alxébrica.

8. Calcula a pendente das rectas que pasa polos puntos que se indican e determina a súa expresión alxébrica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dúas empresas de telefonía móbil lanzan as súas ofertas: a empresa StarTo ofrece por cada chamada pagar 50 céntimos máis 2 céntimos por minuto falado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por chamada e minutos ilimitados. Que oferta é máis económica? Para dar a resposta, realiza os seguintes pasos, expresando os resultados analítica e graficamente:

a. Hai algún momento no que as dúas ofertas sexan iguais?

b. Se falo unha media de 15 minutos ao día, que oferta me convén?

c. Se falo unha media de 35 minutos ao día, que oferta me convén?

d. Se fago unha media de 10 chamadas ao día de 3 minutos de duración, que oferta me convén?

e. Se fago unha media de 2 chamadas ao día de 30 minutos de duración, que oferta é a mellor?

f. Que oferta é máis económica?

10. O escritor Xaime Joyce ten distintas ofertas editoriais para publicar a súa última novela. A editorial Dole ofrécelle 100 €, ademais do 20 % de cada libro que venda; a editorial Letrarte ofrécelle 350 €; e a editorial Paco ofrécelle segundo a venda dos libros: 50 € se vende ata 250 libros, 100 € se vende ata 500 libros, 300 € se vende ata 1 000 libros e 500 € se vende máis de 1 000 libros. Entre todas as editoriais, cal cres que é mellor oferta para Xaime?

Funcións cuadráticas

11. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x-2)^2$ d) $y = (-x-3)^2$.

12. A partir da parábola e = x^2, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a) $y = 2.5x^2$ b) $y = -1.2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0.7x^2$.

13. Representa a gráfica das funcións parabólicas seguintes e indica o vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x-2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina os elementos das parábolas seguintes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x-2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funcións de proporcionalidade inversa

15. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles e = k/x que pasan polos puntos que se indican. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:

a) $y = 2.3/x$ b) $y = -1.7/x$ c) $y = 3.2/x$ d) $y = -2.1/x$.

18. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x-2)$ d) $y = -2/(x-3)$.

20. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funcións definidas a anacos

21. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x < -1 \\ x^2 - 1 & se\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina os puntos de intersección cos eixes coordenados da función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica os intervalos onde a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x < 2 \\ -x^2 + 4 & se\ x > 2 \end{cases}$ é crecente.

24. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & se\ x < 1 \\ 1/x & se\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALIACIÓN

1. A recta $y = 4x + 2$ ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. A recta que pasa polos puntos (1, 6) e (–2, 4) ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cal das seguintes funcións lineais é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$

4. Indica cal das seguintes funcións cuadráticas é simétrica respecto do eixe de ordenadas:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Indica o vértice da función cuadrática e = $3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas é *máis estreita* que $y = x^2$:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7. Indica cal das seguintes hipérboles é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = -15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$

8. Sinala cal das seguintes hipérboles ten como asíntotas ás rectas $x = 2$ e $y = 3$:

a) $y = -15/(x-3) - 2$ b) $y = 3/(x-2) + 3$ c) $y = 4/(x+2) - 3$ d) $y = -12/(x+3) + 2$

9. Se traslado a hipérbole e = $3/x$ mediante o vector de translación (1, 3) obteño a hipérbole:

a) $y = 3/(x-1) + 3$ b) $y = 3/(x-3) + 1$ c) $y = 3/(x+3) - 1$ d) $y = -3/(x+1) - 3$

10. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas acada un mínimo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$