Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 8: TRIGONOMETRÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Autoras: Mª Fernanda Ramos Rodríguez e

Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Etimoloxicamente *trigonometría* significa *medición de triángulos*. ou seu obxectivo é establecer as relacións matemáticas entre as medidas dos lados dun triángulo coas amplitudes dos seus ángulos, de maneira que resulte posible calcular unhas mediante as outras.

Os primeiros escritos relacionados con ela que aparecen na historia remóntanse á época babilónica da que se conservan unhas taboíñas con medicións de lados e ángulos de triángulos rectángulos. A trigonometría aplícase desde as súas orixes na agrimensura, na navegación e na astronomía xa que permite calcular distancias que é imposible obter por medición directa.

Neste capítulo estudarás as primeiras definicións trigonométricas e coñecerás algunhas das súa aplicacións.

Inscrición babilónica. Museo Pérgamo de Berlín

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.1. Sistema sesaxesimal

Recordarás que, no sistema sesaxesimal de medida de ángulos, a unidade é o **grao sesaxesimal** que se define como a trescentos sesentava parte dun ángulo completo. Ten dous divisores que son o **minuto** que é a sesentava parte dun grao e o **segundo** que é a sesentava parte dun minuto. Recorda a notación que se emprega neste sistema:

1º = 1 grao sesaxesimal; 1´ = 1 minuto sesaxesimal; 1´´ = 1 segundo sesaxesimal.

Como consecuencia da definición:

1 ángulo completo = 360º; 1 ou = 60´; 1´ = 60´´.

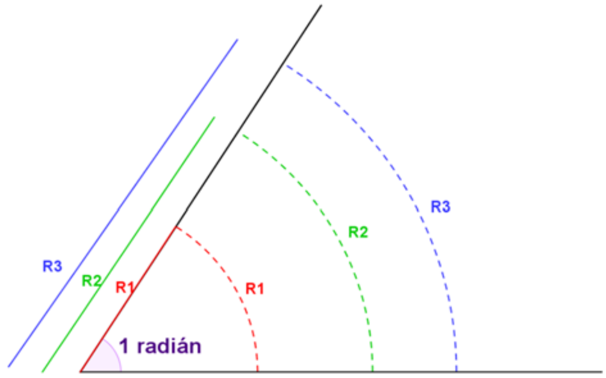
1.2. Sistema internacional

No sistema internacional, a unidade de medida de ángulos é o **radián.**

O **radián** é un ángulo tal que calquera arco que se lle asocie mide exactamente o mesmo que o radio utilizado para trazalo.

Denótase por **rad.**

A un ángulo completo correspóndelle un arco de lonxitude $2\pi R$, a un radián un arco de lonxitude R, entón:



Nº de radiáns dun ángulo completo = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad.**

E a relación co sistema sesaxesimal obtémola a partir do ángulo completo:

1 ángulo completo = 360º= 2π rad ⇔ 1 ángulo raso = 180 ou = π rad.

Por esta relación obtense que 1 rad ≅ 57.216º ≅ 57º 12´ 58´´.

Actividades propostas

1. Expresa en radiáns as seguintes medidas: 45º, 150º, 210º, 315º**.**

2. Expresa en graos sesaxesimais: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{8}$ radiáns.

3. Dous ángulos dun triángulo miden respectivamente 40º e $\frac{\pi}{3}$ radiáns. Calcula en radiáns o que mide o terceiro ángulo.

4. Un ángulo dun triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radiáns. Calcula en radiáns a medida dos outros dous.

5. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles e expresa en radiáns a medida de cada un dos seus ángulos.

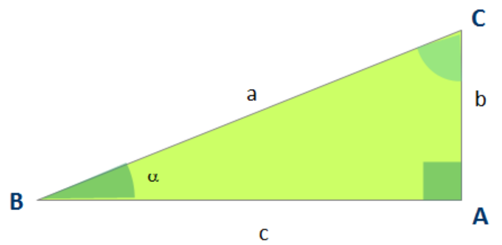
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

2.RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO

2.1. Razóns trigonométricas directas dun ángulo agudo

Comecemos por considerar un ángulo agudo calquera, utilizaremos unha letra grega α (alfa) para denotalo. É sempre posible construír un triángulo rectángulo de modo que α sexa un dos seus ángulos. Sexa $\overset{\Delta}{ABC}$ un destes triángulos e situemos nel o vértice *B*, o ángulo α.

Defínense as razóns trigonométricas directas do ángulo α:
seno, coseno e tanxente como:



$$seno\ \ de\ \ \alpha = sen\ \alpha = sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

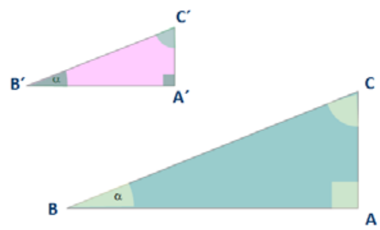
$$coseno\ \ de\ \ \alpha = \cos\alpha = \cos\ \hat{B} = \frac{cateto\ adxacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tanxente\ de\ \ \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adxacente} = \frac{b}{c}$$

Tamén se utilizan as expresións tgα e tag α como símbolos da tanxente de α.

A miúdo noméanse os ángulos dun triángulo coa mesma letra maiúscula có vértice correspondente.

Esta definición non depende do triángulo elixido. Imos demostralo. Para iso consideremos outro triángulo rectángulo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ con α no vértice *B´*.



Segundo o segundo criterio de semellanza de triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ son semellantes porque teñen dous ángulos iguais 90º e α. Polo tanto os lados de ambos os dous son proporcionais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'} \Rightarrow & \textbf{o}\text{ seno }\textbf{é}\text{ independente do triángulo np que se mide} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'} \Rightarrow & \textbf{o}\text{ coseno }\textbf{é}\text{ independente do triángulo no que se mide} \\ \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'} \Rightarrow & \textbf{a}\text{ tanxente }\textbf{é}\text{ independente do triángulo no que se mide} \end{cases}$$

Actividades resoltas

- *Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos agudos dun triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuxos catetos miden b = 30 cm e c = 40 cm.*

Calculamos en primeiro lugar o valor da hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500 \Rightarrow a = \sqrt{2\,500} = 50$ cm.

$$sen\ \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ cos\ \ \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ tg\ \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ cos\ \ \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ tg\ \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

2.2. Relacións fundamentais

Se coñecemos unha das razóns trigonométricas do ángulo α, é posible calcular as razóns trigonométricas restantes, grazas ás dúas relacións trigonométricas fundamentais seguintes:

PRIMEIRA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

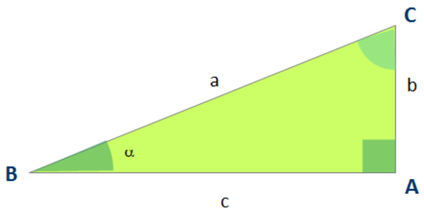
$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

que tamén verás escrita como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ dado que as potencias das razóns trigonométricas soen escribirse co seu expoñente sobre a última letra da súa notación e a continuación o nome do ángulo.

Demostración:

A demostración é sinxela. Volvamos ao triángulo inicial do parágrafo anterior: polo teorema de *Pitágoras* $a^2 = b^2 + c^2$. Dividamos a ambos os membros entre a^2:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \\ sen\ \alpha = \dfrac{b}{a} \\ cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2$$



SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Demostración:

No mesmo triángulo anterior: $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{b}{a} : \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}\,\dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{c} = tan\ \alpha.$

Actividades resoltas

- *Sabendo que α é un ángulo agudo, calcula as restantes razóns trigonométricas de α nos casos seguintes: a)* $sen\alpha = \dfrac{1}{5}$ *b)* $\tan \alpha = 3$

a. $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{25} + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{5} : \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{5}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b. $\left.\begin{array}{r} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ tan\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ sen\ \alpha = 3\ cos\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3\,cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow 10\,cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\dfrac{1}{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}, sen\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

2.3. Outras razóns trigonométricas. Outras relacións

Outras razóns trigonométricas dun ángulo α son a cosecante, a secante e a cotanxente de α e a súas notacións son *cosec*α, *sec*α, *cotan*α.

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}\,;\, sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}\,;\, cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}\,.$$

Coa súa definición, aparecen novas identidades trigonométricas, entre as que destacan:

a) $sen\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha = 1\,;\, cos\ \alpha\ .\ sec\ \alpha = 1\,;\, tan\ \alpha\ .\ cotan\ \alpha = 1\,.$

b) $sec^2\ \alpha = 1 + tan^2\alpha$

c) $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

A primeira delas é evidente por definición. A segunda e a terceira teñen unha demostración moi parecida polo que atoparás só unha das dúas e a outra como actividade proposta.

Demostración b):

A partir de $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, dividimos ambos os membros entre $cos^2\ \alpha$:

$$\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \frac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \Rightarrow tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha\ .$$

Actividades propostas

6. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula as razóns trigonométricas secante, cosecante e cotanxente de α.

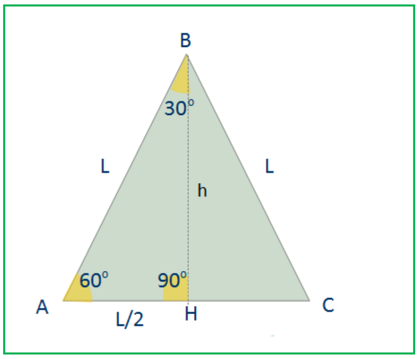
7. Se *cotan*α = 2, calcula as cinco razóns trigonométricas do ángulo α.

8. Demostra que $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

2.4. Razóns trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 30º e 60 º

Consideramos un triángulo equilátero de lado *L.* Trazamos a altura correspondente ao lado sobre o que se apoia. Con iso queda dividido en dous triángulos rectángulos iguais cuxos ángulos miden 90º, 30 º e 60 º. Ademais a hipotenusa mide *L* e un dos seus catetos L/2. Polo teorema de *Pitágoras* podemos obter o que nos falta:



$$h=\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{4}}=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculamos as razóns trigonométricas de 30º e 60 º no triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$sen\,60^o = \frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}\;L}{2}:L=\frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen30^o = \frac{L}{2}:L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{L}{2}:L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^o = \frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}\;L}{2}:L=\frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

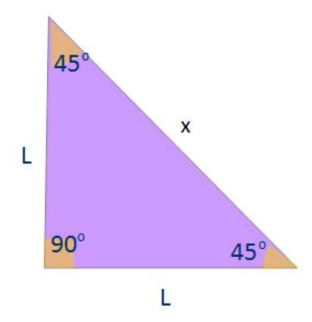
$$tag\,60^o = h:\frac{L}{2}=\frac{2h}{L}=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2}:L=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2L}=\sqrt{3} \qquad tag\,30^o = \frac{L}{2}:h=\frac{L}{2}:\frac{\sqrt{3}\;L}{2}=\frac{2L}{2\sqrt{3}\,L}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 45º

Agora imos traballar cun triángulo rectángulo isósceles. Poñamos que os dous catetos teñen unha lonxitude *L*. Utilizamos de novo o teorema de *Pitágoras* e obtemos o valor da hipotenusa *x* en función de *L*:

$$x=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=L\sqrt{2}$$

Agora podemos calcular xa as razóns trigonométricas de 45º



$$sen\,45^o = \frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\,45^o = \frac{L}{L}=1$$

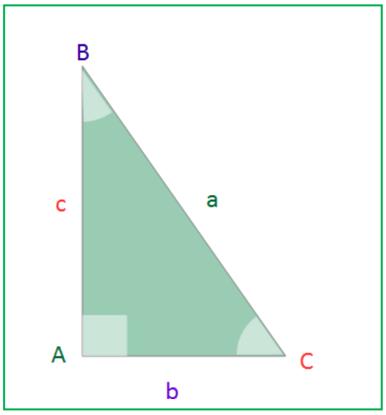
	Seno	Coseno	Tanxente
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

2.5. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo é calcular as amplitudes dos tres ángulos e as lonxitudes dos tres lados.

No caso de que o triángulo sexa rectángulo podemos considerar tres casos dependendo das hipóteses ou datos iniciais. En cada un deles existen varias formas de obter a solución. Imos describir unha en cada caso:

Primeiro caso: Coñécense un ángulo $\hat{B}$ e a hipotenusa *a*:



$$\text{Como } \hat{A} = 90^\circ \; \hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$

Agora a partir das razóns trigonométricas de $\hat{B}$ ou $\hat{C}$, obtemos os lados que nos faltan. Tamén cabe utilizar o teorema de *Pitágoras* cando coñezamos un dos dous catetos.

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,sen\,\hat{B}; \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$

Segundo caso: Coñécense un ángulo $\hat{B}$ e un cateto *b*:

$$\text{Como } \hat{A} = 90^\circ \; \hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$

Tamén neste caso as razóns trigonométricas de $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ serven para obter polo menos un dos lados e pode utilizarse o teorema de *Pitágoras* cando calculemos o valor dun lado máis. Unha forma de resolución é:

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\,\hat{B}}; \qquad sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Terceiro caso: Coñécense dous lados:

Neste caso utilizaremos en primeiro lugar o teorema de *Pitágoras* para calcular o terceiro lado, tanto se o que falta é un cateto como se é a hipotenusa. Seguindo co triángulo da figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obter o primeiro dos ángulos agudos, calcularemos en primeiro lugar unha das súas razóns trigonométricas, por exemplo $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ e para coñecer o valor do ángulo, despexamos escribindo:

$\hat{B} = arc\,sen\,\frac{b}{a}$, que significa *"ángulo cuxo seno é B"* e que se obtén coa calculadora activando o comando ***sin***$^{-1}$ o que conseguiremos coa secuencia 

$\frac{b}{a}$.

Analogamente, se partimos de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ ou ben $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ o ángulo *B* é $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ ou $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$ que obteremos coas secuencias 

$\frac{c}{a}$ ou ben 

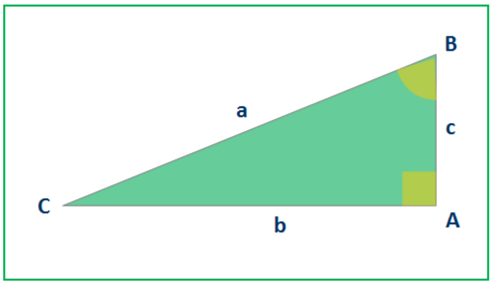
$\frac{b}{c}$.

Actividades resoltas

- *Resolver o triángulo ABC con ángulo recto en A nos dous casos seguintes:*

a) $\hat{B} = 42^o$ *e a hipotenusa a = 12 m.*

b) os catetos miden 12 dm e 5 dm.



a) Cálculo dos ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Cálculo dos lados: $sen\ 42^o = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12\ sen\ 42^o \approx 8.03$ m.

$cos\ 42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\ cos\ 42^o \approx 8.92$ m.

b) Cálculo da hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Cálculo dos ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\ \tan \frac{12}{5} = 67^o22'\ 48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o22'\ 48'' = 22^o37'\ 12''$.

2.6. Aplicacións da resolución de triángulos rectángulos ao cálculo de distancias

Resolución de triángulos rectángulos

A resolución de triángulos rectángulos pode aplicarse directamente nalgúns casos ao cálculo de distancias.

Actividades resoltas

- Calcular a altura dunha árbore sabendo que determina unha sombra de 3.5 metros cando os raios *de sol forman un ángulo de 30º co chan.*

A razón trigonométrica de 30º que relaciona o lado coñecido e o que nos piden é a tanxente:

$$tan\ \ 30^o = \frac{h}{3.5} \Rightarrow h = 3.5\ \ tan\ \ 30^o = 3.5\ .\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.02 \text{ m.}$$

Técnica da dobre observación

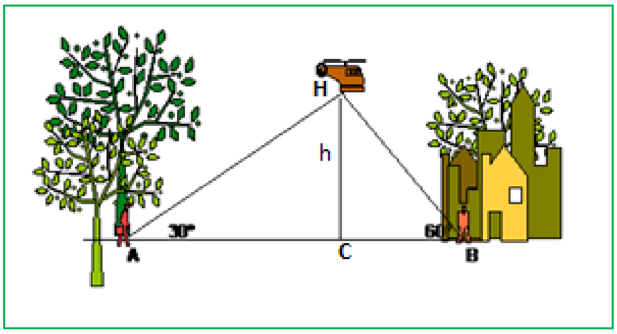
Utilízase para calcular alturas de obxectos aos que resulta difícil chegar como por exemplo, edificios, montañas, obxectos no extremo oposto dunha rúa, etc.

Precisamos dun instrumento para medir ángulos. Habitualmente utilízase o chamado **teodolito**. A técnica consiste en tomar a medida do ángulo que forma unha visual dirixida ao punto máis alto do obxecto a medir coa horizontal, desde dous puntos distintos e situados a unha distancia coñecida para nós.

Aparecen entón dous triángulos rectángulos cun lado común que é a altura a medir. É posible propor un sistema de ecuacións en cuxa formulación é clave a definición das razóns trigonométricas dun ángulo agudo. Vexamos algúns exemplos:

Actividades resoltas

- *Dúas persoas, separadas* ***30*** *metros ven un helicóptero. A persoa situada en A dirixe unha visual á base do mesmo que forma co chan un ángulo de* ***30º****. Tamén a persoa situada en B dirixe a súa vista ao mesmo punto obtendo un ángulo de* ***60º****. A que altura voa o helicóptero?*



Sexa h esta altura. As visuais e o chan determinan dous triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AHC}$ e $\overset{\Delta}{BHC}$ nos que:

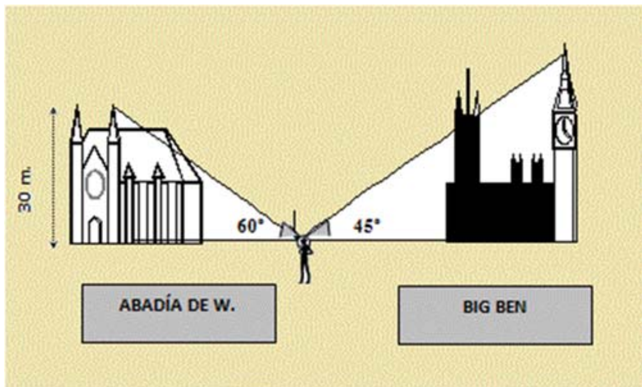
AC + CB = 30 ⇒ *CB = 30 – AC* e se facemos *AC = x*

$$\tan\ 30° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\ \tan\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x$$

$$\tan\ 60° = \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\ \ \tan\ 60° = \sqrt{3}\ (30-x) \Rightarrow x = (30-x)\cdot 3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22.5\ m$. Substituíndo, chegamos á solución $h = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x\ = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx\ 13\ m$

- Nunha viaxe *de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algúns dos viaxeiros fixeron prácticas de trigonometría (xa sabes, sempre hai un teodolito a man).*

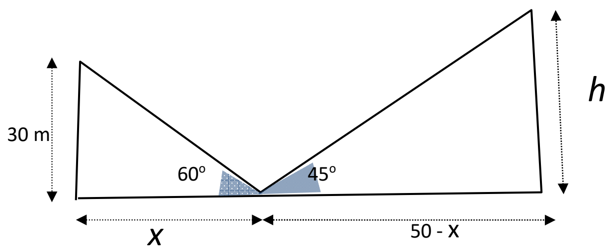


Ao coñecer que as torres da Abadía de Westminster teñen **30** metros de altura, decidiron aproveitar os seus coñecementos para calcular a altura da coñecida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos os edificios divísase o punto máis alto da Abadía cun ángulo de **60**° e o Big Ben cun ángulo de **45**°. Se a distancia entre as bases das torres dos dous edificios é de **50** metros, cal foi o resultado dos seus cálculos?, a que distancia se encontraba de cada edificio? (Nota: os datos son totalmente ficticios)

No triángulo esquerdo determinado pola *Abadía*:

$$\tan\ \ 60° = \frac{30}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{30}{\tan 60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$$



No triángulo que determina o *Big Ben*:

$$\tan\ \ 45° = \frac{h}{50-10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50-10\sqrt{3}\right)\tan 45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50 - 10\sqrt{3}\ \ m \approx 32.7\ \ m$$

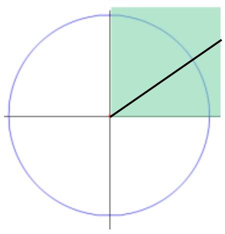
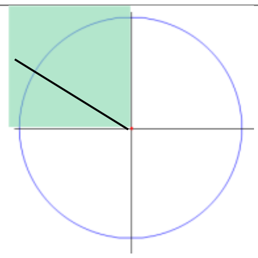
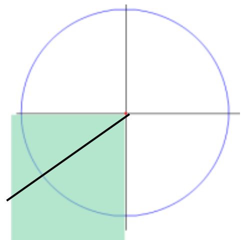
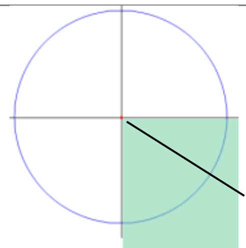
3. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO CALQUERA

3.1. Circunferencia trigonométrica. Cuadrantes

Chámase **circunferencia trigonométrica** ou **goniométrica** a unha circunferencia de radio unidade centrada na orixe de coordenadas.

É posible representar calquera ángulo na circunferencia trigonométrica. Para iso sempre se toma un lado fixo que é a semirrecta definida pola parte positiva do eixe de abscisas; o segundo lado é a semirrecta variable que corresponda segundo a súa medida. O sentido dun ángulo mídese de OX^+ á semirrecta variable que determina a súa amplitude. Enténdese que para un ángulo negativo coincide co das agullas dun reloxo analóxico e para un ángulo positivo, o contrario.

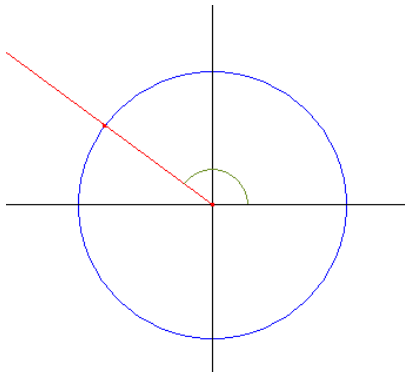
A circunferencia trigonométrica divide o plano en catro rexións que se denominan cuadrantes.

			
PRIMEIRO CUADRANTE	SEGUNDO CUADRANTE	TERCEIRO CUADRANTE	CUARTO CUADRANTE

3.2. Razóns trigonométricas dun ángulo calquera

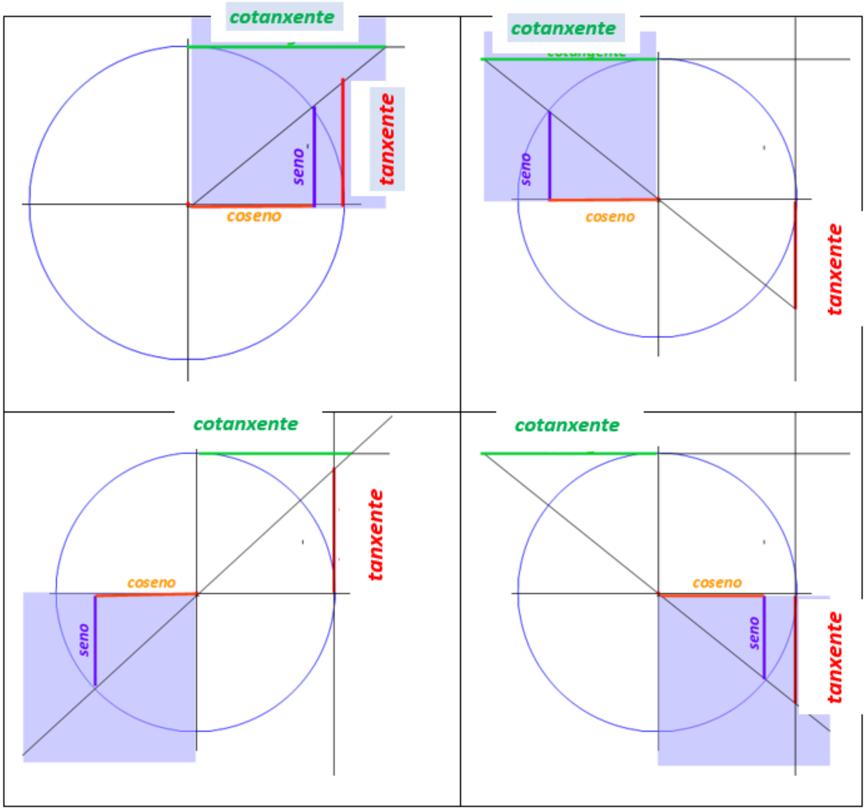
A semirrecta variable que define un ángulo α na circunferencia trigonométrica é clave para a definición dun ángulo calquera. Esta semirrecta corta á circunferencia nun punto $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ a partir do que se define:

$$sen\ \alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha\ ;\ cos\ \alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha\ ;\ tag\ \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$



Consérvase a definición para ángulos agudos que son ángulos do primeiro cuadrante e amplíase a ángulos de calquera signo e amplitude.

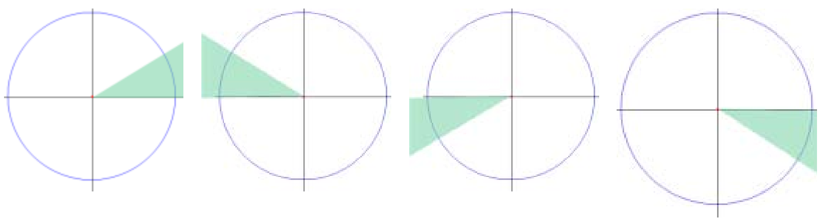
Ademais, esta definición permite ter unha representación xeométrica do seno e o coseno dun ángulo que coincide cos segmentos y_α, x_α, ordenada e abscisa do punto P_α. As rectas tanxentes á circunferencia goniométrica nos puntos $(1,0)$ e $(0,1)$ proporcionan tamén representacións xeométricas da tanxente e cotanxente que son os segmentos determinados por estas tanxentes xeométricas, o eixe OX e a semirrecta correspondente a cada ángulo.



3.3. Redución ao primeiro cuadrante

Os ángulos α dos cuadrantes segundo, terceiro ou cuarto poden relacionarse con ángulos agudos β que podemos situar no primeiro cuadrante e que teñen razóns trigonométricas cos mesmos valores absolutos que os ángulos α iniciais.

Estas relacións permiten obter as razóns trigonométricas de calquera ángulo α en función dun do primeiro cuadrante β. En cada caso calcularemos a amplitude da zona sombreada.



Nos casos nos que desexemos obter que ángulos corresponden a unha razón trigonométrica dada, resulta especialmente importante xa que, aínda que fagamos uso da calculadora, esta devolveranos un único valor e, porén, existen infinitos ángulos solución deste problema. Grazas ao que describiremos neste epígrafe, poderemos encontralos sen dificultade.

Debes pensar que os ángulos destes cuadrantes non sempre son positivos nin teñen un valor absoluto menor que 360º.

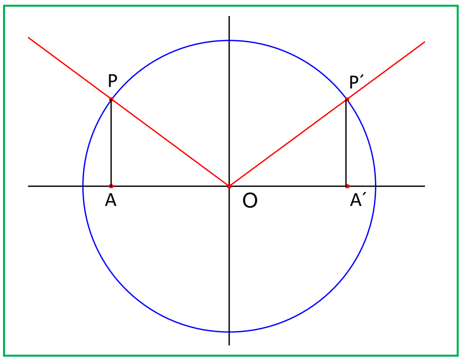
Observa que, se o seu valor absoluto é maior que 360º, equivale ao número de voltas que indique o cociente enteiro da división de α entre 360º máis o resto da división.

O signo dun ángulo depende só da forma de percorrelo (medido desde a parte positiva do eixe *OX* cara á semirrecta que o define).

Para facer máis cómoda a explicación consideraremos que a partir de P se miden as razóns trigonométricas do ángulo α e a partir de P´ as do ángulo β.

ÁNGULOS DO SEGUNDO CUADRANTE

Construímos os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A´* iguais de forma que a hipotenusa sexa en ambos os casos o radio da circunferencia goniométrica e ademais β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



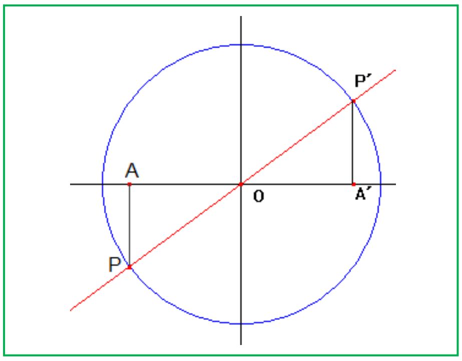
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

E dividindo membro a membro, obtemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{sen\,\beta}{-cos\,\beta} = -tan\,\beta$

ÁNGULOS DO TERCEIRO CUADRANTE

Tamén neste caso os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A´* son iguais. A súa hipotenusa é o radio da circunferencia goniométrica e os seus catetos os segmentos determinados polas coordenadas dos puntos *P* e *P´*. A construción realízase ademais de modo que β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



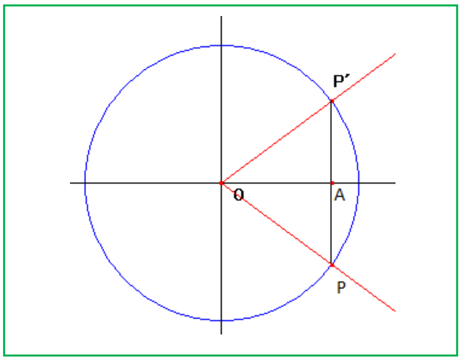
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

E dividindo membro a membro, obtemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-sen\,\beta}{-cos\,\beta} = tan\,\beta$

ÁNGULOS DO CUARTO CUADRANTE

Por último, construímos os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A* iguais de modo análogo ao descrito nos dous casos anteriores, observando que, neste caso, *A* = *A´*.



$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sen\,\beta$$

$cos\,\alpha = \overline{AO} = cos\,\beta$ en ambos os casos.

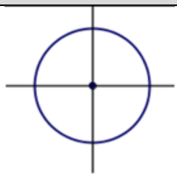
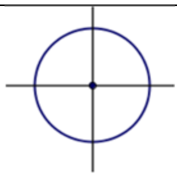
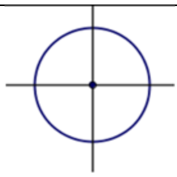
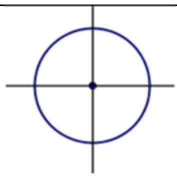
E dividindo membro a membro, obtemos:

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-sen\,\beta}{cos\,\beta} = -tan\,\beta$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

Actividades propostas

9. Sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, coseno e tanxente dos seguintes ángulos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*
165 º				
–230 º				
315 º				
3 625 º				

10. Utiliza a calculadora e o aprendido neste epígrafe para encontrar todos os ángulos positivos menores que 360º cuxo seno é de 0.4.

11. Ídem todos os ángulos negativos menores en valor absoluto que 360º cuxa tanxente vale 2.

12. Ídem todos os ángulos comprendidos entre 360º e 720º cuxo coseno vale 0.5.

ÁNGULOS DETERMINADOS POLOS SEMIEIXES

Os ángulos $0^o + 360^o n$; $90^o + 360^o n$; $180^o + 360^o n$; $270^o + 360^o n$ están determinados por semieixes de coordenadas e as súas razóns trigonométricas mídense a partir de puntos dos eixes. Estes puntos son, respectivamente $P_1\ (1,\ 0)$,$P_2\ (0,\ 1)$, $P_3\ (-1,\ 0)$e $P_4\ (0,\ -1)$ co que se obtén con facilidade:

$sen\ \ (0^o + 360^o n) = 0$; $cos\ \ (0^o + 360^o n) = 1$; $tan\ \ (0^o + 360^o n) = 0$.

$sen\ \ (90^o + 360^o n) = 1$; $cos\ \ (90^o + 360^o n) = 0$; $tan\ \left(90^o + 360^o n\right)$ non existe.

$sen\ \ (180^o + 360^o n) = 0$; $cos\ \ (180^o + 360^o n) = –1$; $tan\ \ (180^o + 360^o n) = 0$

$sen\ \ (270^o + 360^o n) = –1$; $cos\ \ (270^o + 360^o n) = 0$; $tan\ \left(270^o + 360^o n\right)$ non existe.

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA

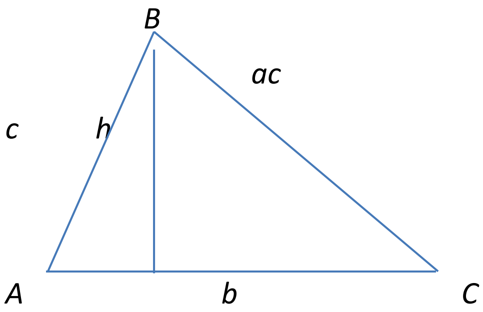
As definicións de seno, coseno e tanxente que aplicamos en triángulos rectángulos non se poden aplicar en triángulos non rectángulos. Para resolver triángulos non rectángulos aplícanse dous teoremas moi importantes en trigonometría: o teorema dos senos e teorema dos cosenos.

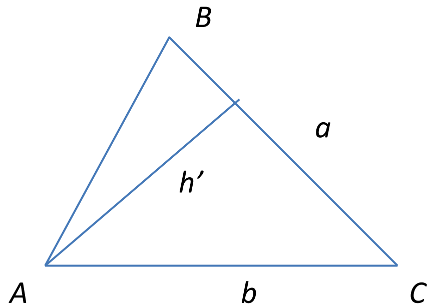
4.1. Teorema dos senos

O **teorema dos senos** afirma que en todo triángulo se cumpre que os lados son proporcionais aos senos dos ángulos opostos. É dicir,

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Consideremos o triángulo *ABC* e tracemos dúas alturas calquera *h* e *h´* que dividen ao triángulo non rectángulo en dous triángulos rectángulos.





Aplicando a definición de seno aos triángulos nos que intervén *h*:

$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{c} \longrightarrow h = c\, sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{a} \longrightarrow h = c\, sen\ \hat{C}$$

Polo tanto:

$$c\, sen\,\hat{A} = a\, sen\ \hat{C} \longrightarrow \frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Aplicando a definición de seno aos triángulos nos que intervén *h'*:

$$sen\,\hat{B} = \frac{h'}{c} \longrightarrow h' = c\, sen\,\hat{B}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h'}{b} \longrightarrow h' = b\, sen\,\hat{C}$$

Polo tanto:

$$c\, sen\hat{B} = b\, sen\hat{C} \longrightarrow \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Entón, dedúcese que: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$

Notas

Se o triángulo é obtusángulo, un razoamento análogo lévanos ás mesmas fórmulas.

Podemos resolver facilmente triángulos utilizando o teorema dos senos se coñecemos:

a) dous ángulos (é dicir, tres ángulos) e un lado

b) dous lados e o ángulo oposto a un deles.

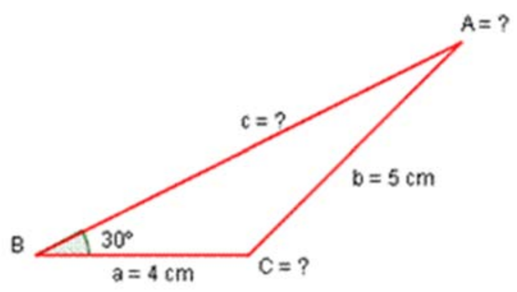
Actividades resoltas

- *Resolver o seguinte triángulo B = 30°, a = 4 cm e b = 5 cm.:*

Coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles, *b.*

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{5}{sen\,30º} \rightarrow$$

$$sen\hat{A} = \frac{4 \cdot (1/2)}{5} = 0.4.$$



Polo tanto: $\hat{A}$ = *arcsen* 0.4 = 23.58°

O ángulo $\hat{C}$ = 180° – (23.58° + 30°) = 126.42°.

Para calcular o lado *c* volvemos aplicar o teorema dos senos:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{5}{sen 30°} = \frac{c}{sen 126.42°}$$

Entón: $c = \frac{5 \cdot sen 126.42°}{sen 30°} = 8.1$ cm.

4.2. Teorema dos cosenos

O **teorema dos cosenos** afirma que nun triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ calquera se cumpre que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

O próximo ano estudarás a demostración deste teorema. De momento só veremos algunhas das súas aplicacións.

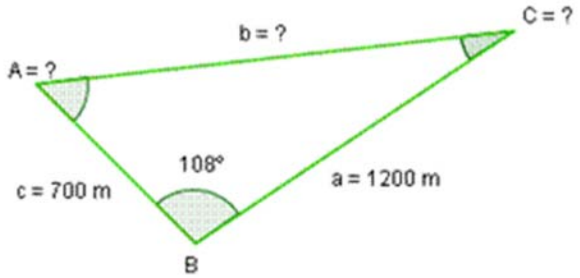
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

Notas

- Si te fixas, o teorema dos cosenos é unha **xeneralización do teorema de *Pitágoras***. É dicir, cando o triángulo é rectángulo, o teorema dos cosenos e o teorema de *Pitágoras* son o mesmo.
- Podemos utilizar o teorema dos cosenos se nun triángulo coñecemos:
  a) os tres lados
  b) dous lados e o ángulo oposto a un deles
  c) dous lados e o ángulo que forman.

Actividades resoltas

- *Resolve o seguinte triángulo do que coñecemos B = 108 º, c = 700 m e a = 1 200 m:*



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ logo $b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108} \to b$ = 1 564.97 m.

Con *a, b e c* coñecidos, calculamos o ángulo *C*:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \longrightarrow \widehat{\cos C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\cdot a\cdot b} = \frac{700^2 - 1\,200^2 - 1\,564.97^2}{-2\cdot 1\,200\cdot 1\,564.97} = 0.9 \longrightarrow \hat{C}$ = 25.18º.

O ángulo $\hat{C}$ tamén se podería calcular utilizando o teorema dos senos.

Para calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$ = 180º – (108º + 25.18º) = 46.82º.

Actividades propostas

13. Calcula a lonxitude do lado *a* dun triángulo, sabendo que *C* = 25, *b* = 7 cm e *c* = 4 cm.

14. Calcula os ángulos do triángulo de lados: *a* = 6, *b* = 8 e *c* = 5.

4.3. Resolución de triángulos calquera

As ferramentas básicas para resolver triángulos calquera son os teoremas dos senos e dos cosenos vistos anteriormente. O próximo curso ampliarase brevemente a resolución destes triángulos, estudando casos nos que non existirá solución ou casos nos que haxa dúas solucións.

Tamén se formularán problemas de cálculo de distancias entre puntos inaccesibles.

CURIOSIDADES. REVISTA

OS NOSOS SENTIDOS ENGÁNANNOS?

A foto amosa un tramo de estrada cara ao horizonte. Todas as liñas son rectas, a fotografía non engana pero os nosos sentidos, si. Segundo a nosa percepción, estas liñas córtanse no punto do horizonte, aínda que nós, cando estamos nesa situación, sabemos que non é así. Entón, por que o vemos así? Por dúas razóns: porque a luz viaxa en liña recta e porque a nosa percepción visual se basea nos ángulos, o que fai que a anchura da estrada diminúa coa distancia.

Pero agora que coñeces as relacións entre ángulos e lados dun triángulo, saberás razoar se os obxectos diminúen o seu tamaño de forma inversamente proporcional á distancia á que se atopan.

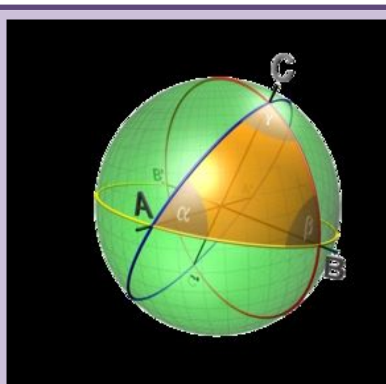
Sabías que...?

O teorema dos senos utilizouse no século XIX para medir de forma precisa o meridiano de París e así poder definir o metro.

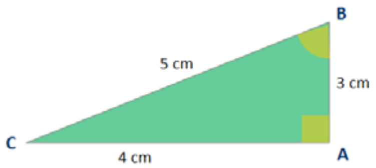
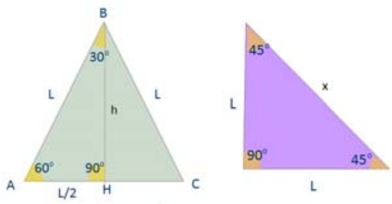
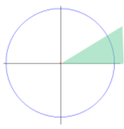
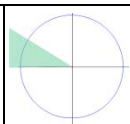
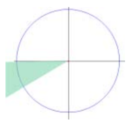
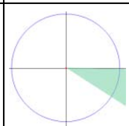
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

A trigonometría esférica estuda os triángulos que se forman sobre unha superficie esférica

- Na trigonometría esférica a distancia más curta entre dous puntos non é unha recta senón un arco.
- Os ángulos dun triángulo esférico suman máis de 180º.
- É a base da navegación e a astronomía. Curioso, non?



RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Radián</td><td>É un ángulo tal que calquera arco que se lle asocie mide exactamente o mesmo que o radio utilizado para trazalo. Denótase por rad.
Nº de radiáns dun ángulo completo = 2π rad</td><td>90 ou son $\pi/2$ rad
1 radián = 57.216 ou =
57 ou 12′ 58 ″</td></tr>
<tr><td>Razóns trigonométricas dun ángulo agudo</td><td>$sen\ \alpha = \frac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$
$cos\ \ \alpha = \frac{cateto\ \ adxacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$
$\boldsymbol{tan\alpha = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adxacente} = \frac{b}{c}}$</td><td>
$sen\,C = \frac{3}{5}$, $cos\,C = \frac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Relacións fundamentais</td><td>$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \ \alpha)^2 = 1$
$tan\ \ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \ \alpha}$</td><td>$(sen\,30^o)^2 + (cos\,30^o)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$</td></tr>
<tr><td>Outras razóns trigonométricas</td><td>$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$ $sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$ $cotan\alpha = \frac{1}{tan\alpha}$</td><td>cosec 90º =1
sec 90º non existe
cotan 45º=1</td></tr>
<tr><td>Razóns trigonométricas de 30º, 45º e 60º</td><td><table>
<tr><th></th><th>seno</th><th>coseno</th><th>tanxente</th></tr>
<tr><td>30º</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45 º</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60º</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>Redución ao primeiro cuadrante</td><td>As razóns trigonométricas de calquera ángulo α poden expresarse en función das dun ángulo agudo β.
2º CUADRANTE: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
3º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
4º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$</td><td> 
$sen\ 135^o = sen\ 45^o$
 
$sen\ 200^o = -sen\ 20^o$ $cos\left(-60^o\right) = cos\ 60^o$</td></tr>
<tr><td>Teorema dos senos</td><td>$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Teorema dos cosenos</td><td>$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ cosA;\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac\ cosB;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\ cosC;$</td><td></td></tr>
</table>

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Expresa as seguintes medidas de ángulos en radiáns:

   a) 30º b) 60º c) 100º d) 330º

2. Canto mide en graos sesaxesimais un ángulo de 1 rad? Aproxima o resultado con graos, minutos e segundos.

3. Calcula a medida en graos dos seguintes ángulos expresados en radiáns:

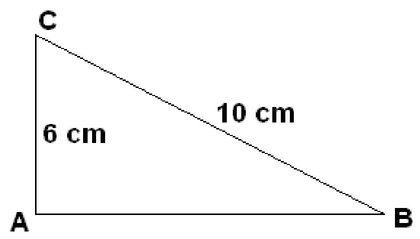
   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de :

   a) 28º b) 62º

Encontras algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?

5. Calcula o seno e o coseno dos ángulos *B* e *C* do debuxo. Que relación atopas?



6. Nun triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en A, se *tan B* = 1.2 e *b* = 3 cm, canto mide *c*?

7. Traballando con ángulos agudos, é certo que a maior ángulo lle corresponde maior seno?
   E para o coseno?

8. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de 9º e 81º. Atopas algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?

9. Se *a* é un ángulo agudo e *cos a* = 0.1, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

10. Comprobar as relacións trigonométricas fundamentais con 30º, 45º e 60º sen utilizar decimais nin calculadora.

11. Se *a* é un ángulo agudo e *tan a* = 0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

12. Completa no teu caderno o seguinte cadro sabendo que α é un ángulo agudo.

$sen\ \alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$
	0.7	
1/3		
		2

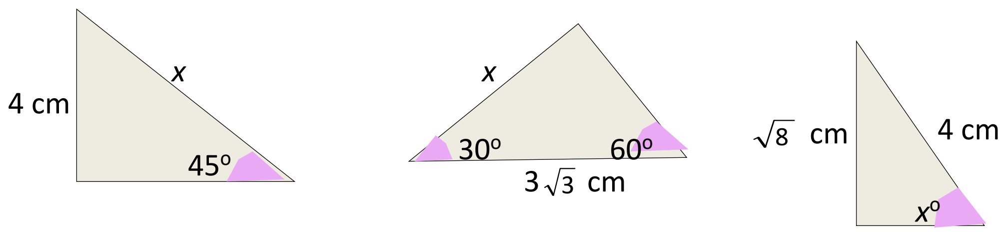
13. É rectángulo un triángulo cuxos lados miden 12, 13 e 5 cm? En caso afirmativo determina o seno, coseno e tanxente dos dous ángulos agudos.

14. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 5 e 12 cm. Calcula as razóns trigonométricas dos seus ángulos agudos. Que amplitude teñen?

15. Se α é un ángulo agudo tal que $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

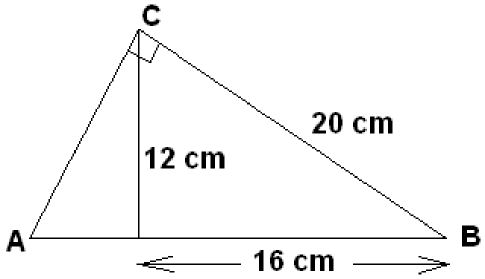
i) As restantes razóns trigonométricas de α.
ii) As razóns trigonométricas de $180° - \alpha$.
iii) As razóns trigonométricas de $180° + \alpha$.
iv) As razóns trigonométricas de $360° - \alpha$.

16. Sen utilizar calculadora, calcula o valor de *x* nos seguintes triángulos rectángulos:



17. Beatriz suxeita un papaventos cunha corda de 42 m. A que altura se atopa este no momento no que o cable tenso forma un ángulo de 52° 17' co chan?

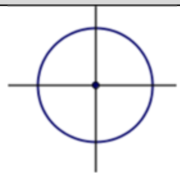
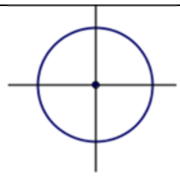
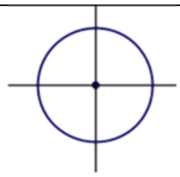
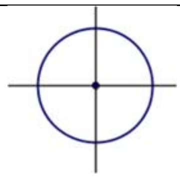
18. Calcula o seno, coseno e tanxente do ángulo *A* no seguinte debuxo:



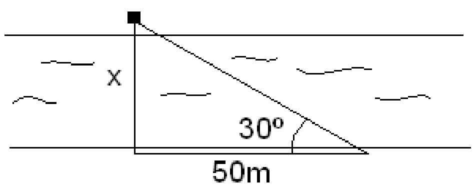
19. Se *a* é un ángulo do segundo cuadrante e *cos a* = –0.05, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

20. Se *a* é un ángulo obtuso e *sen a* =0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

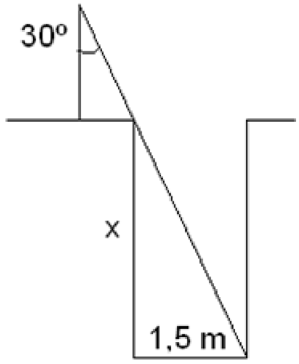
21. Debuxa no teu caderno a táboa seguinte e sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, coseno, tanxente, secante, cosecante e cotanxente dos seguintes ángulos. Se podes, calcúlaos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*	*secante*	*cosecante*	*cotanxente*
–225°							
150°							
–60°							
3 645°							

22. Calcula a anchura do río representado na figura seguinte:



23. Pescuda a altura da torre dunha igrexa se a unha distancia de 80 m, e medido cun teodolito de altura 1.60 m, o ángulo de elevación do pararraios que está no alto da torre é de 23º.



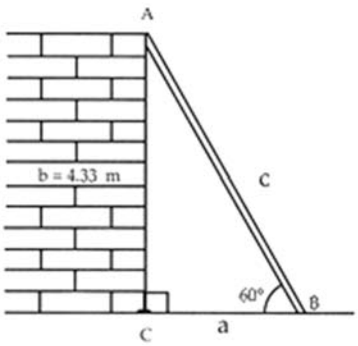
24. Calcula a área dun hexágono regular de lado 10 cm.

25. Calcula a profundidade dun pozo de 1.5 m de diámetro sabendo o ángulo indicado na figura da dereita.

26. Cal é a altura dunha montaña cuxa cima, se nos situamos a unha distancia de 3 000 m do pé da súa vertical e medimos cun teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49°.

27. Cal é o ángulo de inclinación dos raios solares no momento no que un bloque de pisos de 25 m de altura proxecta unha sombra de 10 m de lonxitude?

28. Calcula a altura e a área dun triángulo isósceles cuxa base mide 20 cm e cuxo ángulo desigual vale 26°.



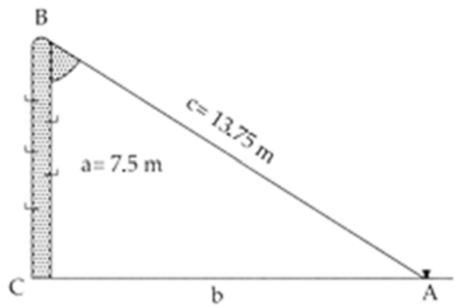
29. Calcula a área dun dodecágono regular de lado 16 cm.

30. Obter a lonxitude dunha escaleira apoiada nunha parede de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60° con respecto ao chan.

31. O fío dun papaventos totalmente estendido mide 150 m e forma un ángulo co chan de 40° mentres o suxeito a 1.5 m do chan. A que altura do chan está o papaventos?

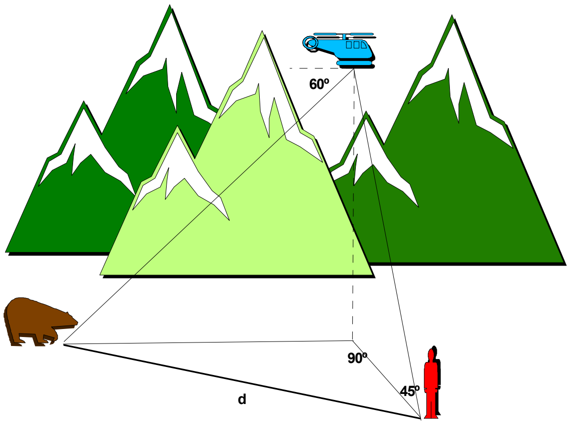
32. Para medir a altura dun campanario a cuxa base non podemos acceder, tendemos unha corda de 30 m de longo desde o alto da torre ata tensala no chan, formando con este un ángulo de 60°. Cal é a altura do campanario?

33. Obter o ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto cun cable tirante que vai, desde a punta do primeiro ata o piso, e que ten un longo de 13.75 m.



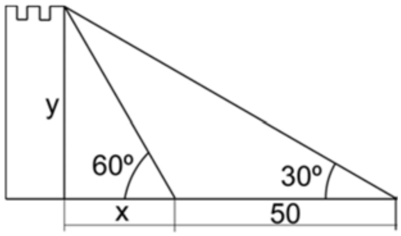
34. Dous amigos observan desde a súa casa un globo que está situado na vertical da liña que une as súas casas. A distancia entre as súas casas é de 3 km. Os ángulos de elevación medidos polos amigos son de 45º e 60º. Calcula a altura do globo e a distancia deles ao globo.

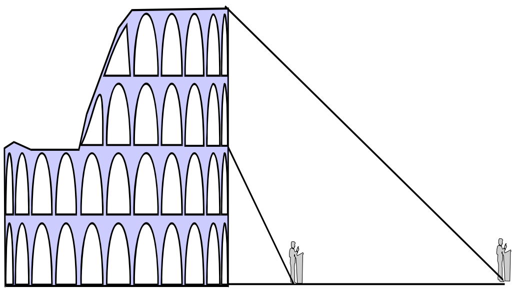
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos



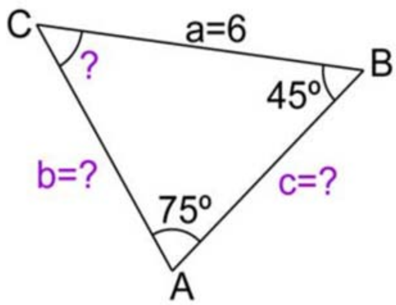
35. Un biólogo encóntrase no porto de Somiedo facendo un seguimento dos osos pardos. Conta coa axuda dun cámara e dun piloto que voan nun helicóptero, manténdose a unha altura constante de $\mathbf{40\sqrt{3}}$ m. No momento que describe a figura, o cámara ve desde o helicóptero ao oso cun ángulo de depresión (ángulo que forma a súa visual coa horizontal marcado no debuxo) de **60**°. O biólogo dirixe unha visual ao helicóptero que forma co chan un ángulo de **45**°. Calcula a distancia **d** entre o biólogo e o oso.

36. Desde certo lugar do chan vese o punto máis alto dunha torre, formando a visual un ángulo de 30° coa horizontal. Se nos achegamos 50 m á torre, ese ángulo faise de 60°. Calcula a altura da torre.





37. Cun teodolito de 1 metro de altura, dúas persoas pretenden medir a altura do *Coliseo de Roma.* Unha delas achégase ao anfiteatro, separándose **40 m**. da outra. Esta última obtén que o ángulo de elevación do punto máis alto é de **30**°**.** A outra non divisa o Coliseo completo polo que mide o ángulo de elevación ao punto que marca a base do terceiro piso, obtendo **60**° como resultado**.** Calcular a altura do Coliseo e a distancia dos dous observadores á base do mesmo.

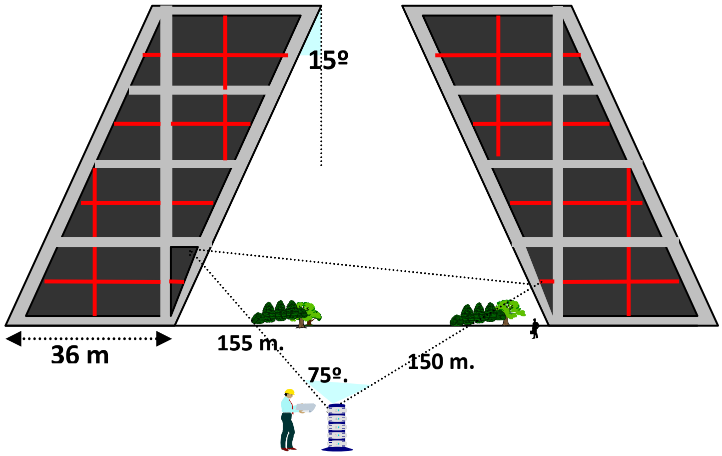


38. Resolve o triángulo: $a = 6$; $B = 45°$; $A = 75°$

39. Os pais de Pedro teñen unha parcela no campo de forma triangular cuxos lados miden 20, 22 e 30 m. Pedro quere calcular os ángulos. Cales son eses ángulos?

40. Estando situado a 100 m dunha árbore, vexo a súa copa baixo un ángulo de 30°. O meu amigo ve a mesma árbore baixo un ángulo de 60°. A que distancia está o meu amigo da árbore?

41. As coñecidas *torres Kio* de *Madrid* son dúas torres xemelgas que están no *Paseo da Castellana*, xunto á *Praza de Castilla*. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.
    a. Cos datos que aparecen na figura, determina a súa altura.
    b. Desde dúas oficinas situadas en torres distintas estendéronse dous cables ata un mesmo punto que miden 155 e 150 metros e que forman un ángulo de 75° no seu punto de encontro. Que distancia en liña recta hai entre ambas as dúas?



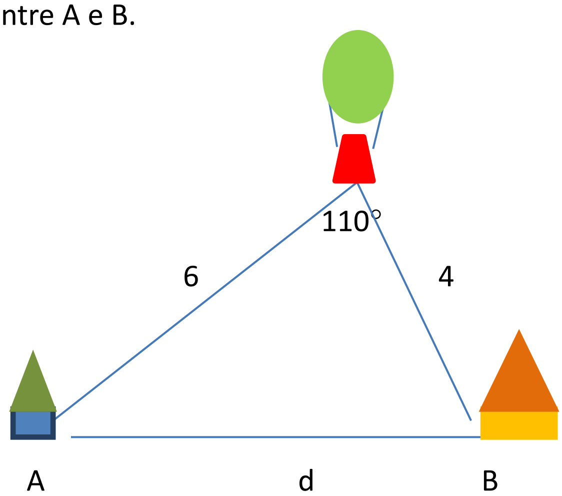
42. Tres vilas están unidas por estradas: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km e o ángulo formado por *AB* e *BC é* de 120°. Canto distan *A* e *C*.

43. Van construír un túnel do punto *A* ao punto *B*. Tómase como referencia unha antena de telefonía (*C*) visible desde ambos os puntos. Mídese entón a distancia *AC* = 250 m. Sabendo que o ángulo en A é de 53° e o ángulo *B* é de 45° calcula cal será a lonxitude do túnel.

44. Calcula o lado dun pentágono regular inscrito nunha circunferencia de radio 6 m.

45. O punto máis alto dun repetidor de televisión, situado na cima dunha montaña, vese desde un punto do chan *P* baixo un ángulo de 67°. Se nos achegamos á montaña 30 m vémolo baixo un ángulo de 70° e desde ese mesmo punto vemos a cima da montaña baixo un ángulo de 66°. Calcular a altura do repetidor.

46. Desde o alto dun globo obsérvase unha vila A cun ángulo de 50°. Outra vila, B situada ao lado e en liña recta obsérvase desde un ángulo de 60°. O globo atópase a 6 km da vila A e a 4 km de B. Calcula a distancia entre A e B.



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

47. Resolve os triángulos:
    a) a =20 m; B = 45°; C = 65°
    b) c = 6 m, A = 105°, B = 35°
    c) b = 40 m; c = 30 m, A = 60°.

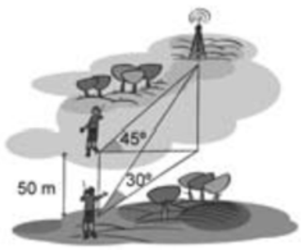
48. Dado o triángulo de vértices *A*, *B*, *C*, e sabendo que A = 60°, B = 45° e que b = 20 m. Resolvelo e calcular a súa área.

49. Calcula a lonxitude dos lados dun paralelogramo cuxas diagonais son de 20 e 16 m. E as diagonais forman entre si un ángulo de 37°.

50. Un triángulo isósceles con base 30 m ten dous ángulos iguais de 80°. Canto miden os outros dous lados?

51. Tres amigos sitúanse nun campo de fútbol. Entre Álvaro e Bartolo hai 25m e entre Bartolo e César, 12 metros. O ángulo formado na esquina de César é de 20°. Calcula a distancia entre Álvaro e César.

52. Un home que está situado ao oeste dunha emisora de radio observa que o seu ángulo de elevación é de 45º. Camiña 50 m cara ao sur e observa que o ángulo de elevación é agora de 30º. Calcula a altura da antena.



53. Os brazos dun compás miden 12 cm e forman un ángulo de 60°. Cal é o radio da circunferencia que pode trazarse con esa abertura?

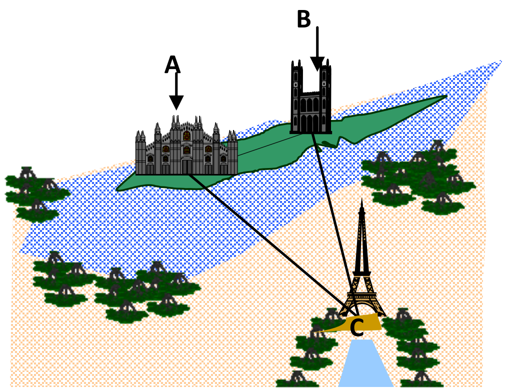
54. Escribe catro ángulos co mesmo seno que 135º.

55. Encontra dous ángulos que teñan a tanxente oposta á de 340º.

56. Busca dous ángulos co mesmo seno que 36º e coseno oposto.

57. Que ángulos negativos, comprendidos entre –360º e 0º, teñen o mesmo seno que 60º?

58. En París e na *l' Île da Cité* atópanse *Nôtre Dame* e a *Sainte Chapelle* a unha distancia de **200** metros. Imaxinemos que un observador situado en A ve *B* e *C* cun ángulo de **56**° e que outro, situado en *B,* ve *A* e *C* cun ángulo de **117°.** Calcular as distancias entre a torre *Eiffel* (*C*) e *Nôtre Dame* (*B*), así como entre a torre *Eiffel* (*C) e* a *Sainte Chapelle* (A).



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

AUTOAVALIACIÓN

1. A expresión en radiáns de 65º é:

   a) 1.134 rad b) 1.134π rad c) 2.268 rad d) 2.268π rad

2. O valor da hipotenusa nun triángulo rectángulo cun ángulo de 25º e cun dos catetos de 3 cm é:

   a) 3.3 cm b) 7.1 cm c) 6.4 cm d) 2.2 cm

3. Se α é un ángulo agudo e $sen\,\alpha$ =0.8, a tanxente de α é:

   a) 0.6 b) –0.6 c) –1.33 d) 1.33

4. Selecciona a opción correcta:

a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $sen\,\hat{A} = 2$ e $\cos\hat{A} = 3$

b) a secante dun ángulo sempre está comprendida entre –1 e 1

c) No segundo e cuarto cuadrantes a tanxente e cotanxente dun ángulo teñen signo negativo .

d) O seno dun ángulo é sempre menor cá súa tanxente.

5. Se o seno dun ángulo do segundo cuadrante é $\frac{4}{5}$, entón as súas tanxente e secante son respectivamente:

   a) $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ e $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$

6. A altura dun edificio é de 50 m, a medida da súa sombra cando os raios do sol teñen unha inclinación de 30º coa horizontal é de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. O ángulo de –420º é un ángulo que se sitúa en

a) o primeiro cuadrante b) o segundo cuadrante c) o terceiro cuadrante d) O cuarto cuadrante

8. Se α é un ángulo agudo e β é o seu suplementario, cúmprese:

   a) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$ b) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$

   c) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$ d) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$

9. Para calcular a altura dunha montaña mídese cun teodolito desde *A* o ángulo que forma a visual á cima coa horizontal, que é $\hat{A}$ = 30 º. Avanzando 200 m, vólvese medir e o ángulo resulta ser $\hat{B}$ = 35.2º. A altura da montaña é de:

   a) 825 m b) 773 m c)595 m d) 636 m

10. Se o radio dun pentágono regular é 8 cm, a súa área mide

   a) 305.86 cm^2 b) 340.10 cm^2 c) 275.97 cm^2 d) 152.17 cm^2