Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

3º B da ESO
Capítulo 5:
Ecuacións e sistemas

Propiedad Intelectual
El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031748

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:35:47.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

BY NC SA

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

BY NC SA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández
Revisores: Sergio Hernández e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. A LINGUAXE DAS ECUACIÓNS
1.2. ECUACIÓNS EQUIVALENTES. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS

2. ECUACIÓNS DE 2º GRAO

2.1. CONCEPTO DE ECUACIÓN DE 2º GRAO
2.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS DE 2º GRAO COMPLETAS
2.3. NÚMERO DE SOLUCIÓNS DUNHA ECUACIÓN DE 2º GRAO COMPLETA
2.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS DE 2º GRAO INCOMPLETAS
2.5. SUMA E PRODUTO DAS RAÍCES
2.6. RESOLUCIÓN DE ECUACIÓNS SINXELAS DE GRAO SUPERIOR A DOUS

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS
3.2. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIÓNS
3.3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE SUBSTITUCIÓN
3.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE IGUALACIÓN
3.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POLO MÉTODO DE REDUCIÓN

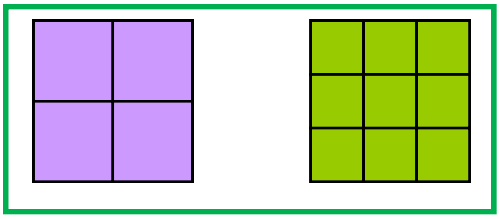
4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO
4.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIÓNS DE 2º GRAO
4.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

Resumo

Xa sabes resolver algunhas ecuacións de segundo grao. Se a área dun cadrado é 4 coñeces que o seu lado é 2, e se a área é 9, coñeces que o lado mide 3.

Sabes resolver $x^2 = 4$, cuxas solucións son 2 y –2, porque $(2)^2 = 4$, y $(-2)^2 = 4$.



Para resolver $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$, observas que as solucións son 3 e –4 pois $(3 - 3) \cdot (3 + 4) = 0$, e$((-4) - 3)\cdot((-4) + 4) = 0$.

Neste capítulo aprenderemos a resolver as ecuacións de segundo grao, xa sexan completas ou incompletas, e a utilizar ou aprendido para resolver problemas da vida cotiá por medio das ecuacións.

Veremos ademais que son os sistemas de ecuacións lineais, como se resolven por diferentes métodos e a súa aplicación para resolver problemas que nos rodean.

Recorda

Se o produto de dous factores é cero, un dos factores debe ser cero.
Polo tanto na ecuación:

$$(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

ou ben $x + 4 = 0$ ou ben $x - 3 = 0$, polo que $x = -4$ e $x = 3$.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

1. ECUACIÓNS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. A linguaxe das ecuacións

Xa sabes que:

Unha **ecuación** é unha igualdade entre dúas expresións alxébricas.

Exemplo:

- Se temos dúas expresións alxébricas: $7x + 3$ e $5x + 2$, e as unimos co signo igual obtemos unha ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

As expresións que hai a cada lado do igual chámanse **membros** da ecuación. Todas as ecuacións teñen dous membros: a expresión que está á esquerda do signo igual chámase **primeiro membro** e a que está á dereita, **segundo membro**.

As letras que conteñen as ecuacións alxébricas (as "partes literais" das súas dúas expresións) chámanse **incógnitas**, que significa literalmente "*descoñecidas*". Se todas as letras son iguais, dise que a ecuación ten unha soa incógnita.

Exemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ é unha ecuación cunha soa incógnita, mentres que
- $3x + y = 5$ ou $5x - 9 = 3y$ son ecuacións con dúas incógnitas: x e y.

O **grao** dunha ecuación é ou maior expoñente que aparece nalgunha das súas incógnitas.

Exemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ é unha ecuación de primeiro grao, mentres que $2x + 4xy^2 = 1$ é unha ecuación de terceiro grao xa que o monomio $5xy^2$ ten grao 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propostas

1. Copia no teu caderno a seguinte táboa e complétaa:

Ecuación	Primeiro membro	Segundo membro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica o número de incógnitas das seguintes ecuacións:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica o grao das seguintes ecuacións:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

1.2. Ecuacións equivalentes. Resolución de ecuacións

Xa sabes que:

Unha **solución** dunha ecuación é un número que, cando a incógnita toma ese valor, se verifica a igualdade, é dicir, os dous termos da ecuación valen o mesmo.

Algunhas ecuacións só teñen unha solución, pero outras poden ter varias.

Resolver unha ecuación é encontrar todas as súas posibles solucións numéricas.

Para resolver unha ecuación o que se fai habitualmente é transformala noutra ecuación **equivalente** máis sinxela.

Ecuacións equivalentes son as que teñen as mesmas solucións.

Exemplo:

- $2x – 9 = 15$ é equivalente a $2x = 24$, pois a solución de ambas as ecuacións é $x = 12$.

Para obter ecuacións equivalentes téñense en conta as seguintes propiedades:

Se lle se **suma** ou se lle **resta** aos dous membros dunha ecuación unha mesma cantidade, obtense unha ecuación equivalente.

Se se **multiplican** ou **dividen** os dous membros dunha ecuación por unha mesma cantidade (distinta de cero), obtense unha ecuación equivalente.

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación $5x + 7 = x – 3$ transformándoa noutra máis sinxela equivalente.

Transformar unha ecuación ata que as súas solucións se fagan evidentes chámase "*resolver a ecuación*". Seguindo estes pasos intentaremos resolver a ecuación: $5x + 7 = x – 5$.

1) Sumamos aos dous membros $–x$ e restamos aos dous membros 7: $5x – x + 7 – 7 = x – x – 5 – 7$.

2) Facemos operacións e conseguimos outra ecuación que ten no primeiro membro os termos con x e no segundo os termos sen x: $5x – x = – 5 – 7$.

3) Efectuamos as sumas no primeiro membro e no segundo: $4x = –12$.

4) Despexamos x dividindo os dous membros por 4: $\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$ de onde $x = –3$.

5) Comproba que todas as ecuacións que obtivemos neste proceso son equivalentes e que a súa solución é $x = –3$.

O procedemento utilizado nas actividades é un método universal para **resolver** calquera ecuación de grao 1, é dicir, onde x aparece sen elevar a outro expoñente como en x^2. As ecuacións de primeiro grao teñen sempre unha única solución pero, en xeral, as solucións non teñen porque ser números enteiros como nos exemplos.

Actividades propostas

4. Resolve as seguintes ecuacións: a) $2x – 3 = 4x – 5$ b) $3x + 6 = 9x – 12$ c) $4x + 8 = 12$

Textos Marea Verde

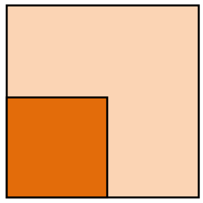
2. ECUACIÓNS DE 2º GRAO

Hai ecuacións de segundo grao que xa sabes resolver. Neste capítulo imos afondar e aprender a resolver este tipo de ecuacións. Por exemplo, o seguinte problema xa sabes resolvelo:

Actividades resoltas

- Auméntase o lado dunha baldosa cadrada en 3 cm e a súa área queda multiplicada por 4, que lado tiña a baldosa?

Propoñemos a ecuación:



$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Esta ecuación sabes resolvela! $x + 3 = 2x$, logo o lado é de 3 cm.

Hai outra solución, $x = -1$, que non ten sentido como lado dun cadrado.

Imos estudar de forma ordenada estas ecuacións.

2.1. Concepto de ecuación de 2º grao

Unha **ecuación de segundo grao** é unha ecuación polinómica na que a maior potencia da incógnita é 2. As ecuacións de segundo grao pódense escribir da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.

Exemplo:

- Son ecuacións de 2º grao por exemplo

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \qquad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Exemplo:

- Os coeficientes das ecuacións de 2º grao son números reais, polo tanto poden ser fraccións ou raíces. Por exemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0\,; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0\,; \quad -2.7x^2 + 3.5x - 0.2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propostas

5. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c*.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

2.2. Resolución de ecuacións de 2º grao completas

Chámase **ecuación de segundo grao completa** a aquela que ten valores distintos de cero para *a*, *b* e *c*.

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas, usaremos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula permítenos calcular as dúas solucións da nosa ecuación.

Chamaremos **discriminante** á parte da fórmula que está no interior da raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de segundo grao $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primeiro debemos saber quen son *a*, *b* e *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Substituíndo estes valores na nosa fórmula, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Polo tanto, as nosas dúas solucións son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, e $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, logo 3 e 2 son solucións da ecuación.

Actividades propostas

7. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

Textos Marea Verde

2.3. Número de solucións dunha ecuación de 2º grao completa

Antes definimos o que era o **discriminante**, lémbraste?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cantas solucións ten unha ecuación de 2º grao, imos fixarnos nos signos do discriminante.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten dúas solucións reais e distintas.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten unha única solución real (as dúas solucións son iguais, é polo tanto unha solución dobre).

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten ningunha solución real.

Exemplo:

- a) A ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ ten como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 36 = 52 > 0$$

  Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas.

- b)A ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ ten como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

  Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas, 5 e –1.

  Comprobación: $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ e $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$.

- c) A ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ ten como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

  Polo tanto, a ecuación ten dúas solucións reais iguais. Pódese escribir como:

  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que ten a solución dobre $x = 1$.

- d)A ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ ten como discriminante

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

  Polo tanto, a ecuación non ten solución real. Ningún número real verifica a ecuación.

Actividades propostas

8. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

2.4. Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas

Chamamos **ecuación de 2º grao incompleta** a aquela ecuación de segundo grao na que o coeficiente *b* vale 0 (falta *b*) ou o coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Exemplo:

- A ecuación de 2º grao $2x^2 - 18 = 0$ é incompleta porque o coeficiente $b = 0$, é dicir, falta *b*.
- A ecuación de 2º grao $3x^2 - 15x = 0$ é incompleta porque non ten *c*, é dicir, $c = 0$.

As ecuacións de 2º grao incompletas resólvense dunha maneira ou doutra dependendo do tipo que sexan.

Se o coeficiente *b* = 0: Despexamos a incógnita normalmente, como faciamos nas ecuacións de primeiro grao:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Se o coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que o produto de dous factores valla cero, un dos factores debe valer cero.

Polo tanto, $x = 0$, ou $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumo

Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{-b}{a}.$$

Exemplo:

- Na ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta o *b*. Para resolvela despexamos a incógnita, é dicir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Unha vez que chegamos aquí, fáltanos quitar ese cadrado que leva a nosa incógnita. Para iso, faremos a raíz cadrada nos 2 membros da ecuación:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Así obtivemos as dúas solucións da nosa ecuación, 3 e –3. En efecto, $2\cdot3^2 - 18 = 2\cdot9 - 18 = 0$, e $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot9 - 18 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Na ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta o c. Para resolvela, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Unha vez que chegamos aquí, temos dúas opcións

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así obtivemos as dúas solucións da ecuación $x = 0$ e $x = 5$

Unha ecuación de segundo grao incompleta tamén se pode resolver utilizando a fórmula das completas pero é un proceso máis lento e é máis fácil equivocarse.

Actividades resoltas

- Resolve a ecuación de 2º grao $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o b. Polo tanto, despexamos a incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. As raíces son 4 e –4.

- Resolve a ecuación de 2º grao $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o c. Polo tanto, sacamos factor común:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$$

e obtemos as dúas solucións:

$$x = 0 \text{ e } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Actividades propostas

9. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

2.5. Suma e produto de raíces

Se nunha ecuación de segundo grao: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, coñecemos as súas solucións: x_1 e x_2 sabemos que podemos escribir a ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Facemos operacións:

$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$,

polo que o coeficiente c é igual ao produto das solucións e a suma das solucións é igual ao oposto do coeficiente b, é dicir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Se a ecuación é $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a, xa temos unha de coeficiente $a = 1$, e obtemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedade permítenos, en ocasións, resolver mentalmente algunhas ecuacións de segundo grao.

Actividades resoltas

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dous números cuxo produto sexa 6 e cuxa suma sexa 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, e $2 + 3 = 5$, logo as solucións da ecuación son 2 e 3.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

O produto debe ser 9. Probamos con 3 como solución e, en efecto, $3 + 3 = 6$. As solucións son a raíz 3 dobre.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

As solucións son -1 e 2, pois o seu produto é -2 e a súa suma 1.

- Resolve mentalmente a ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son 1 e -2, pois o seu produto é -2 e a súa suma -1.

Actividades propostas

10. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 3 e 7.

12. O perímetro dun rectángulo mide 16 cm e a súa área 15 cm^2. Calcula as súas dimensións.

13. Se 3 é unha solución de $x^2 - 5x + a = 0$, canto vale a?

2.6. Resolución de ecuacións sinxelas de grao superior a dous

Durante séculos os alxebristas buscaron fórmulas, como a que xa coñeces da ecuación de segundo grao, que resolveran as ecuacións de terceiro grao, de cuarto, de quinto… sen éxito a partir do quinto grao. As fórmulas para resolver as ecuacións de terceiro e cuarto grao son complicadas. Só sabemos resolver de forma sinxela algunhas destas ecuacións.

Exemplo:

- Resolve: $(x - 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 9) \cdot (x - 6) = 0$.

É unha ecuación **polinómica** de grao cinco pero, ao estar factorizada, sabemos resolvela pois para que o produto de varios factores sexa cero, un deles debe valer cero. Igualando a cero cada factor temos que as solucións son 5, 3, –2, 9 e 6.

Ecuacións bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha ecuación da forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Para resolvela, facemos o cambio $x^n = t$, converténdoa así nunha ecuación de segundo grao de fácil resolución.

Cando teñamos calculado o valor de t, desfacemos o cambio efectuado, $x = \sqrt[n]{t}$ para obter a solución x.

As ecuacións bicadradas máis comúns son as de cuarto grao.

Exemplo:

- *Para resolver a ecuación bicadrada* $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, facemos o cambio obtendo a ecuación de segundo grao $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Resolvemos a devandita ecuación de segundo grao:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = 9 \quad y \quad t_2 = \frac{10-8}{2} = 1$$

Desfacemos o cambio para obter os valores de x:

$$Si\ t_1 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$Si\ t_2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades resoltas

- *A ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é unha ecuación polinómica de cuarto grao pero cunha forma moi especial, é unha ecuación **bicadrada** porque podemos transformala nunha ecuación de segundo grao chamando a x^2, por exemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Unha solución da ecuación de segundo grao é $t = 4$, e a outra é $t = 1$.

Polo tanto se $t = x^2 = 4$, entón $x = 2$ e $x = -2$.

E se $t = x^2 = 1$, entón $x = 1$ e $x = -1$.

A nosa ecuación de cuarto grao ten catro solucións:

2, –2, 1 e –1.

Actividades propostas

14. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$

b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

Textos Marea Verde

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. Concepto de sistema de ecuacións lineais

Un **sistema de ecuacións lineais** con dúas incógnitas pódese expresar da forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Onde *a, b, a'* e *b'* son números reais que se denominan **coeficientes** e *c* e *c'* tamén son números reais chamados **termos independentes**.

Chamamos **solución** do sistema ao par de valores (*x*, *y*) que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Dise que dous sistemas de ecuacións son **equivalentes** cando teñen a mesma solución.

Exemplo 7:

- Son sistemas de ecuacións lineais, por exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Exemplo 8:

- **Non** é un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque ten termos en *xy*.

Tampouco o é $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque ten un termo en x^2.

Actividades propostas

17. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Textos Marea Verde

3.2. Clasificación de sistemas de ecuacións

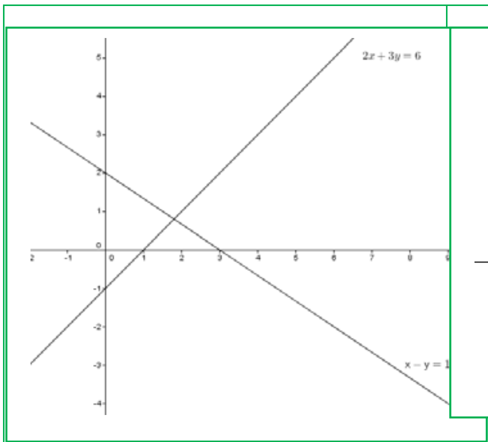
Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada unha das ecuacións representa unha recta nun plano.

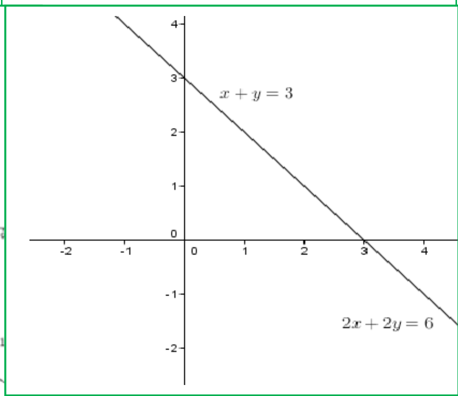
Estas rectas poden estar posicionadas entre si de tres maneiras distintas, o que nos axudará a clasificar o noso sistema en:

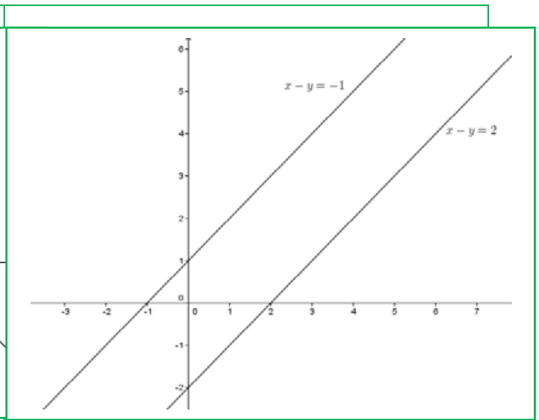
1) **Compatible determinado**: o sistema ten unha única solución polo que as rectas son **SECANTES**, córtanse nun punto.

2) **Compatible indeterminado**: o sistema ten infinitas solucións polo que as rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: o sistema non ten solución polo que as rectas son **PARALELAS.**







Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades resoltas

- Engade unha ecuación a $x - 2y = 2$ para que o sistema resultante sexa:

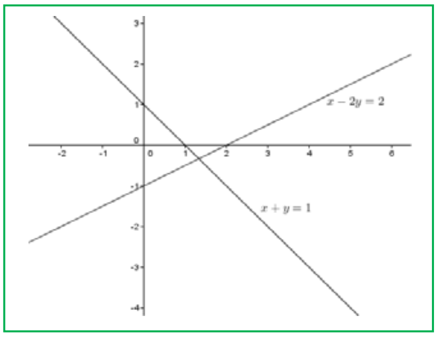
    a) Compatible determinado

    b) Incompatible

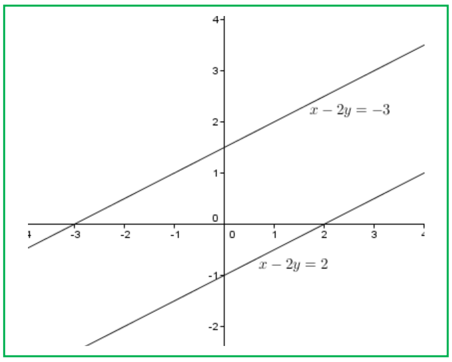
    c) Compatible indeterminado

Solución:

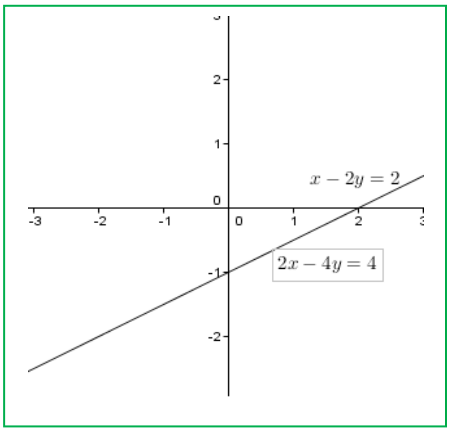
a) Para que o sistema sexa compatible determinado, engadiremos unha ecuación que non teña os mesmos coeficientes que a que nos dan. Por exemplo, *x* + e = 1.



b) Para que sexa incompatible, os coeficientes das incógnitas teñen que ser os mesmos (ou proporcionais) pero teren diferente termo independente. Por exemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sexa compatible indeterminado, poñeremos unha ecuación proporcional á que temos. Por exemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propostas

18. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

Textos Marea Verde

3.3. Resolución de sistemas polo método de substitución

O **método de substitución** consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións do sistema e substituír a expresión obtida na outra ecuación.

Así obtemos unha ecuación de primeiro grao na que podemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo 8:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ polo método de substitución:

Despexamos *x* da segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

e substituímolo na primeira:

$$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1.$$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

19. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas polo método de igualación

O **método de igualación** consiste en despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema e igualar os resultados obtidos.

Así obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, calculamos o valor da outra incógnita.

Exemplo 8:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ polo método de igualación:

Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos agora os resultados obtidos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propostas

20. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

3.5. Resolución de sistemas polo método de redución

O **método de redución** consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícanse unha ou ambas as ecuacións por un número de modo que os coeficientes de *x* ou *y* sexan iguais pero de signo contrario.

Exemplo 9:

- Imos resolver o sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ polo método de redución:

Multiplicamos a segunda ecuación por –2 para que os coeficientes do *x* sexan iguais pero de signo contrario e sumamos as ecuacións obtidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$2x-3\cdot 1=-1 \Rightarrow 2x=-1+3=2 \Rightarrow x=2/2=1$$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propostas

21. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Resolución de problemas mediante ecuacións de primeiro grao

Xa sabes que:

Moitos problemas poden resolverse mediante unha ecuación.

Actividades resoltas

- Busca un número que sumado co seu seguinte dea como resultado 15.

Para resolvelo imos seguir técnicas xerais de resolución de problemas:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema

Le con moito coidado o enunciado e pregúntate:

Que che piden? Que datos tes?

Pídennos un número. A **incógnita** é ese número. Chama a ese número x. O seu seguinte será $x + 1$. Dinnos que a suma de ambos é 15.

Paso 2: Busca unha boa estratexia.

É un problema que queremos resolver mediante unha ecuación. Escribe en linguaxe alxébrica o enunciado do problema e propón unha ecuación:

$$x + (x + 1) = 15.$$

Pregúntate se efectivamente resolve o problema relendo o enunciado.

Paso 3: Leva adiante a túa estratexia

Agora si, resolve a ecuación. Para resolver unha ecuación convén seguir unha orde de actuación que nos axuda a non cometer erros, para iso seguimos o procedemento que acabamos de aprender.

- Quita, se os hai, parénteses e denominadores: $x + x + 1 = 15$.
- Para poñer no primeiro membro os termos con x, e no segundo os que non o teñen, **fai o mesmo aos dous lados**, resta 1 aos dous membros: $x + x + 1 - 1 = 15 - 1$, logo $x + x = 15 - 1$. Opera: $2x = 14$. Despexa:
- Para despexar o x, faise o mesmo aos dous lados, divídense por 2 ambos os membros:

$$2x/2 = 14/2, \text{ polo tanto, } x = 7.$$

Paso 4: Comproba o resultado. Pensa se é razoable.

En efecto, comproba que: 7 + 8 = 15.

Actividades propostas

22. Nun pequeno hotel hai 47 habitacións simples e dobres. Se en total ten 57 camas, cantas habitacións son simples e cantas son dobres?

23. Nunha granxa hai 100 animais entre galiñas e coellos, e entre todos os animais suman 280 patas. Cantas galiñas hai na granxa?

4.2. Resolución de problemas mediante ecuacións de 2º grao

Para resolver problemas por medio de ecuacións de 2º grao, do mesmo modo que os problemas de ecuacións de primeiro grao, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar a incógnita.

3.- Traducir o enunciado á linguaxe alxébrica.

4.- Propor a ecuación e resolvela.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *Cal é o número natural cuxo quíntuplo aumentado en 6 é igual ao seu cadrado?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos a incógnita que, neste caso, é o número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos agora o problema á linguaxe alxébrica:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos a ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como o enunciado di "número natural" o número buscado é o 6.

5.- ***Comprobación***: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propostas

24. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor que o seu cadrado?

25. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

26. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?

27. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.

4.3. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuacións, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar as incógnitas.

3.- Traducir o enunciado a linguaxe alxébrica.

4.- Propor o sistema e resolvelo.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *A suma das idades dun pai e do seu fillo é 39 e a súa diferenza 25. Cal é a idade de cada un?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos as incógnitas que, neste caso, son a idade do pai e a do fillo

2.- Idade do pai = x

Idade do fillo = y

3.- Pasamos o enunciado a linguaxe alxébrica:

A suma das súas idades é 39:

$$x + y = 39$$

E a súa diferenza 25:

$$x - y = 25$$

4.- Propoñemos o sistema e resolvémolo polo método que nos resulte máis sinxelo. Neste caso, facémolo por redución:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7.$$

Solución: O pai ten 32 anos e o fillo ten 7 anos.

5.- *Comprobación:* En efecto, a suma das idades é 32 + 7 = 39 e a diferenza é 32 – 7 = 25.

Actividades propostas

28. A suma das idades de Raquel e Luís son 65 anos. A idade de Luís máis catro veces a idade de Raquel é igual a 104. Que idade ten cada un?

29. A suma das idades de María e Alberte é 32 anos. Dentro de 8 anos, a idade de Alberte será dúas veces a idade de María. Que idade ten cada un na actualidade?

30. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 123.

Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención da fórmula para resolver ecuacións de segundo grao

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$ax^2 + bx = -c$$
$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$
$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$
$$\Downarrow \text{ Completamos cadrados}$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$\Downarrow \text{ Calculamos a raíz cadrada}$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\Downarrow \text{Despexamos o } x$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuacións de segundo grao interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación aparece ao aplicarlle o Teorema de *Pitágoras* a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguais a 1, ou ao calcular a diagonal dun cadrado de lado 1. A súa solución é a lonxitude da hipotenusa ou da diagonal. Ten de interesante que se demostra que a solución NON é un número racional, un número que poida escribirse como cociente de dous números enteiros.

$x + 1 = x^2$

Tamén se pode escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que é unha proporción onde x toma o valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1.618… que é o número de ouro, outro número irracional.

$x^2 = -1$

A terceira ecuación non ten solución real, ningún número real ao elevalo ao cadrado pode dar un número negativo pero, se ampliamos o campo real coa súa raíz $\sqrt{-1}$ = i, resulta que xa todas as ecuacións de segundo grao teñen solución, e aos números a + b·i chámaselles **números complexos**.

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía cuxos traballos en Álxebra permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

RESUMO

Ecuación de primeiro grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 1.	$-5x + 6 = 0$
Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 2. Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$ onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuacións de 2º grao completas	Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de solucións dunha ecuación de 2º grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, ten dúas solucións 5 e -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. Non ten solución real.
Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: unha única solución, o punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: Non ten solución, as rectas son **paralelas:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas polos números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Raquel Hernández e Banco de Imaxes de INTEF

Textos Marea Verde

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de primeiro grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de primeiro grao:

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resolve as seguintes ecuacións de primeiro grao con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Ecuacións de segundo grao

3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$ h) $x \cdot (x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-5) = 0$.

Observa que se p coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

7. Cando o coeficiente b é par ($b = 2B$), podes simplificar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta dicir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, logo as súas solucións son 2 e 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x-2)\cdot(x-6) = 0$ b) $(x+1)\cdot(x-3) = 0$ c) $(x-9)\cdot(x-3) = 0$

d) $(x-1)\cdot(x+4) = 0$ e) $(x+7)\cdot(x-2) = 0$ f) $(x-4)\cdot(x+6) = 0$

9. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.

11. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.

12. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.

13. Poderías escribir unha ecuación de segundo grao con unicamente unha solución real que non fose dobre?

Sistemas lineais de ecuacións

14. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

15. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

16. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

17. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método que creas máis apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

19. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

A súa solución sexa x = 2 e *y* = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

A súa solución sexa *x* = –1 e *y* = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

20. Escribe tres sistemas lineais que sexan incompatibles.

21. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles indeterminados.

22. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles determinados.

23. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

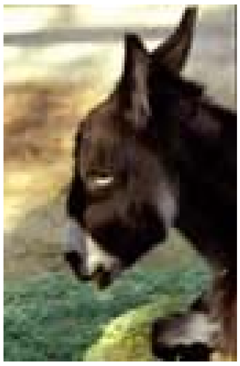
24. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 51 vehículos cun total de 133 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

25. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15 lle faltan 100 unidades para completar o seu cadrado?

26. Descompón 8 en dous factores cuxa suma sexa 6.

27. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Que número é?

28. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 394. Determina estes números.



29. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti, pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?

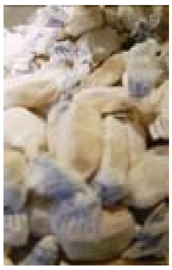
30. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor có seu cadrado?

31. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 365.

32. Dentro de 11 anos, a idade de Mario será a metade do cadrado da idade que tiña hai 13 anos. Que idade ten Mario?

33. Dous números naturais diferéncianse en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580. Cales son estes números?

34. A suma de dous números é 5 e o seu produto é –84. De que números se trata?



35. María quere formar bandexas dun quilogramo con mazapáns e polvoróns. Se os polvoróns lle custan a 5 euros o quilo e os mazapáns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 6 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 25 bandexas, que cantidade de polvoróns e de mazapáns vai precisar?

36. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 7 cm e a hipotenusa mide 5 cm.

37. O produto de dous números é 4 e a suma dos seus cadrados 17. Calcula estes números.

38. A suma de dous números é 20. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 45. De que números se trata?

39. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 100 rodas, cantos coches e motos haino garaxe?

40. A idade actual de Pedro é o dobre da de Raquel. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 65. Cantos anos teñen actualmente Pedro e Raquel?

41. Na miña clase hai 35 persoas. Regaláronnos a cada rapaza 2 bolígrafos e a cada rapaz 1 caderno. Se en total había 55 regalos. Cantos rapaces e rapazas somos na clase?

42. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 56 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis có meu irmán, que idade ten cada un?

43. Dous bocadillos e un refresco custan 5 €. Tres bocadillos e dous refrescos custan 8 €. Cal é o prezo do bocadillo e mais o refresco?

44. Nunha granxa hai polos e vacas. Se se contan as cabezas, son 50. Se se contan as patas, son 134. Cantos polos e vacas hai na granxa?

45. Un rectángulo ten un perímetro de 172 metros. Se o longo é 22 metros maior que o ancho, cales son as dimensións do rectángulo?

46. Nunha bolsa hai moedas de 1 € e 2 €. Se en total hai 40 moedas e 53 €, cantas moedas de cada valor hai na bolsa?

47. Nunha pelexa entre arañas e avespas hai 70 cabezas e 488 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?

48. Unha clase ten 32 estudantes e o número de alumnos é o triplo có de alumnas, cantos rapaces e rapazas hai?

49. Iolanda ten 6 anos máis có seu irmán Paulo e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?

AUTOAVALIACIÓN

1. As solucións da ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ e $x = 1$ b) $x = 1$ e $x = -3$ c) $x = 1$ e $x = -2/3$ d) $x = 2$ e $x = -6/5$

2. As solucións da ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ e $x = -13$ b) $x = 13$ e $x = -12$ c) $x = 10$ e $x = 14$ d) $x = -12$ e $x = -11$

3. As solucións da ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ e $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ e $x = 4$ c) $x = 1$ e $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ e $x = 3$

4. As solucións da ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ e $x = 8$ b) $x = 21$ e $x = 3$ c) $x = 5$ e $x = 19$ d) $x = 23$ e $x = 2$

5. As solucións da ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ e $x = 5$ c) non ten solución d) $x = 1$ e $x = 4$

6. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) Non ten solución

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ é:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

9. Nunha granxa, entre polos e porcos hai 27 animais e 76 patas. Cantos polos e porcos hai na granxa?

a) 16 polos e 11 porcos b) 15 polos e 12 porcos c) 13 polos e 14 porcos

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15, lle faltan 100 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 16 anos b) 17 anos c) 20 anos d) 18 anos