Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A da ESO

Capítulo 3: Sucesións

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso

Revisores: Javier Rodrigo e Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Que teñen en común conceptos tan dispares como o número de coellos fillos concibidos por unha parella de coellos, a estrutura dunha folerpa ou o interese que obtemos ao depositar determinada cantidade de diñeiro nunha entidade financeira?

Detrás destes casos atopamos o concepto de sucesión. As sucesións numéricas teñen gran importancia e utilidade en moitísimos aspectos da vida real, algúns deles irás descubríndoos ao longo deste tema.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

1.1. Definicións

Unha **sucesión** de números reais é unha secuencia ordenada de números.

Exemplo:

- As seguintes secuencias son sucesións:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Chámase **termo dunha sucesión** a cada un dos elementos que constitúen a sucesión.

Para representar os diferentes termos dunha sucesión úsase unha mesma letra con distintos subíndices. Estes subíndices indican o lugar que ocupa ese termo na sucesión.

Exemplo:

- Na sucesión a) teriamos que: $a_5 = 5$, xa que é o termo da sucesión que ocupa o quinto lugar.
- Na sucesión b), o terceiro termo, denotaríase b_3 e correspondería ao 6.
- Na sucesión c), por exemplo, $c_2 = \frac{1}{2}$

  O realmente importante á hora de nomear os termos dunha sucesión é o subíndice porque denota o lugar que ocupan na sucesión. As letras coas que se designa a sucesión son distintas para sucesións distintas e soen ser letras minúsculas.

Chámase **termo xeral dunha sucesión** ao termo que ocupa o lugar *n*-ésimo e escríbese coa letra que denote á sucesión (por exemplo *a*) co subíndice *n*: (a_n)

Exemplo:

- Nos casos que estamos considerando, os termos xerais das sucesións serían: a_n, b_n e c_n.

Se nos fixamos, os valores que toman os subíndices son números naturais, pero os termos da sucesión non teñen por que selo, é dicir, os valores que toma a sucesión son números reais. Por iso, podemos definir sucesión de números reais de forma máis rigorosa como:

Definición:

Chámase **sucesión de números reais** a unha aplicación que fai corresponder a cada número natural un número real.

Actividades resoltas

- *Nas sucesións anteriores, observamos que:* $a_{1003} = 1\,003$, $b_{12} = 24$ *e* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

1. Escribe os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) −1, −2, −3, −4,…

b) 1, 4, 9, 16,…

c) 1, 3, 5, 7,…

2. Escribe o termo que ocupa o lugar 100 de cada unha das sucesións anteriores.

3. Sabemos que un corpo con densidade suficiente que cae libremente sobre a Terra ten unha velocidade que aumenta 9.8 m/s (aproximadamente 10 m/s). Se no primeiro segundo a súa velocidade é de 15 m/s, escribe no teu caderno a velocidade nos segundos indicados na táboa. Observas algunha regra que che permita coñecer a velocidade ao cabo de 20 segundos? Representa graficamente esta función.

Tempo en segundos	1	2	3
Velocidade en m/s	15		

1.2. Formas de definir unha sucesión

Existen varias formas de definir unha sucesión:

1. **Dando unha propiedade que cumpran os termos desa sucesión**

Exemplo:

- Sucesión dos números pares: 2, 4, 6, 8, 10…
- Sucesión dos números primos: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Sucesión dos números naturais acabados en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Sucesión dos cadrados dos números naturais: 1, 4, 9, 16,…

2. **Dando o seu termo xeral ou termo *n*-ésimo**:

É unha expresión alxébrica en función de *n.*

Exemplo:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabendo isto, podemos construír os termos da sucesión sen máis que substituír n polos números naturais. Así, teriamos:

$$a_1 = 1^2 + 3 = 4$$

$$a_2 = 2^2 + 3 = 7$$

$$a_3 = 3^2 + 3 = 12$$

$$a_4 = 4^2 + 3 = 19$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. **Por unha lei de recorrencia**:

É unha expresión que permite obter un termo a partir dos anteriores.

Exemplo:

- A sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...

coñecida como sucesión de *Fibonacci* obtense coa seguinte lei de recorrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

É dicir, cada termo, agás os dous primeiros, obtense como suma dos dous anteriores.

Actividades resoltas

- *Sexa a sucesión de termo xeral:* $a_n = 2n + 3$.

  Os seus cinco primeiros termos son: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

- *Dada a sucesión en forma recorrente:* $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Os seus catro primeiros termos son:

  $a_1 = 1$ (xa vén dado),

  $a_2 = 1 + 3 = 4$,

  $a_3 = 4 + 3 = 7$,

  $a_4 = 7 + 3 = 10$

Actividades propostas

4. Escribe os catro primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = 2n^2 + 1$

b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1,\ c_n = 3c_{n-1} + 5$

d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe a expresión do termo xeral das seguintes sucesións:

a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…}

b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

c) {2, 4, 6, 8, 10,…}

d) $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{9}{8}, \ldots\right\}$

6. Nunha sucesión o primeiro termo é 2 e os demais obtéñense sumando 4 ao termo anterior. Calcula os 6 primeiros termos da sucesión.

7. Un satélite artificial foi posto en órbita ás 17 horas e 30 minutos. Tarda en dar unha volta completa á súa órbita 87 minutos. A) Completa no teu caderno a táboa adxunta. B) Escribe unha expresión xeral que che permita coñecer a hora na que completou a volta *n*-ésima. C) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da hora da órbita anterior. D) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da hora doutra órbita anterior. E) Cantas voltas completas terá dado 20 días máis tarde ás 14 horas?

Nº de órbitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora na que a completou						

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS

Exemplo:

- *Alicia ten en sete días un exame de Matemáticas. Decide preparalo facendo cada día tres exercicios máis que o día anterior. Empeza hoxe facendo dous exercicios. Se escribimos os exercicios que vai facendo Alicia a medida que pasan os días son:* 2, 5, 8, 11, 14,…

Observamos que os termos da sucesión van aumentando nunha cantidade constante: 3. Estas sucesións chámanse *progresións aritméticas*.

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión de números reais na que a diferenza entre dous termos consecutivos da sucesión é constante. A esta constante chámaselle **diferenza da progresión e** soe denotarse coa letra *d*.

Doutra forma, nunha progresión aritmética verifícase:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

sendo *i* calquera número natural.

É dicir, cada termo obtense sumando ao anterior a diferenza, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Exemplo:

- A sucesión formada polos números naturais: {1, 2, 3, 4, 5,…} é unha progresión aritmética, xa que cada termo se obtén sumando 1 ao termo anterior.

Actividades resoltas

- Se $a_1 = 3$ e $d = 2$, imos ver como se escriben os cinco primeiros termos da progresión aritmética:

  $a_1 = 3$,

  $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$

  $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$

  $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$

  $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Actividades propostas

8. Sinala razoadamente se a seguinte sucesión é unha progresión aritmética:

{1, 10, 100, 1 000, 100 000 …}.

9. Calcula os tres primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que o primeiro é 1 e a diferenza é –2.

2.1. Termo xeral dunha progresión aritmética

Unha progresión aritmética, ao igual que ocorre con todas as sucesións, queda perfectamente definida se coñecemos o seu termo xeral. Imos calculalo utilizando a definición que vimos de progresión aritmética e supoñendo coñecidos o primeiro termo a_1 e a diferenza da sucesión, d.

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma xeral:

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2) \cdot d + d = a_1 + (n-1)d$

Polo tanto, o **termo xeral dunha progresión aritmética** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\, d}$$

Xeneralizando este resultado, podemos calcular o termo xeral dunha progresión aritmética coñecendo d e outro termo da progresión, non necesariamente o primeiro:

Máis xeral, o **termo xeral dunha progresión aritmética** é:

$$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)\, d}$$

Sendo a_k o termo da progresión que ocupa o lugar k.

NOTAS

Dependendo do valor de *d*, podemos encontrar distintos tipos de progresións aritméticas:

a) Se $d > 0$, a progresión é crecente, é dicir, cada termo é maior cós anteriores. Por exemplo: {2, 4, 6, 8, …}

b) Se $d < 0$, a progresión é decrecente, é dicir, cada termo é menor cós anteriores. Por exemplo: {12, 9, 6, 3, …}

c) Se $d = 0$, a progresión é constante, é dicir, todos os seus termos son iguais. Por exemplo: {4, 4, 4, 4, …}

Dependendo dos datos que teñamos, calcularemos o termo xeral dunha progresión aritmética dunha forma ou doutra:

a) Se coñecemos a_1 e d, vimos que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

b) Se coñecemos un termo calquera a_i e d, sabemos que: $a_n = a_k + (n-k)\, d$

c) Se coñecemos dous termos calquera a_r e a_s, faltaríanos a diferenza d para poder aplicar a fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n-r) \cdot d \text{ e que } \quad a_n = a_s + (n-s) \cdot d$$

podemos despexar d en función de r, s, a_r e a_s e quédanos: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso

Actividades resoltas

- *Calcular o termo xeral dunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é* 7 e a súa *diferenza tamén é* 7.

  Basta con substituír na fórmula dada: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 7 + (n-1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.

- *Calcula o termo que ocupa o lugar* 15 *nunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é* 2 *e a diferenza é* 3.

  Neste caso, $a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot d = 2 + 14 \cdot 3 = 2 + 42 = 44$.

- *Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética con* $a_5 = 6$ e $d = -2$.

  $a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d$. Despexamos $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4 \cdot (-2) = 14$.

Actividades propostas

10. Dada unha progresión aritmética dous de cuxos termos son: $a_3 = 4$ e $a_{10} = 18$:

a) Calcula a súa diferenza.

b) Calcula o seu termo xeral.

11. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética con diferenza 2 e $a_{30} = 60$.

12. Cal é o termo xeral dunha progresión aritmética con $a_{22} = 45$ e $d = 3$?

13. Os lados dun pentágono están en progresión aritmética de diferenza 5. Sabendo ademais que o seu perímetro é 65, calcula o valor dos lados.

14. Calcula os 5 primeiros termos dunha progresión aritmética de primeiro termo 2 e de diferenza 3. Represéntaos graficamente. Observa que a súa representación gráfica é un conxunto de puntos illados que están sobre unha recta.

15. Calcula a expresión xeral das progresións aritméticas:

a) De diferenza $d = 2.5$ e de primeiro termo 2.
b) De diferenza $d = -2$ e de primeiro termo 0.
c) De diferenza $d = 1/3$ e de segundo termo 5.
d) De diferenza $d = 4$ e de quinto termo 1.

16. Cantos múltiplos de 7 están comprendidos entre o 4 e o 893?

2.2. Suma dos termos dunha progresión aritmética

Nunha progresión aritmética, a suma de dous termos equidistantes é constante.

É dicir, se os subíndices naturais p, q, r e s verifican que $p + q = r + s$, entón: $a_p + a_q = a_r + a_s$

A ***demostración*** desta propiedade é moi sinxela:

$$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$$

$$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$$

E como: $p + q = r + s$, entón: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Queremos calcular a suma dos n termos dunha progresión aritmética, S_n. É dicir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicando a propiedade conmutativa da suma, temos que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando estas dúas igualdades termo a termo obtemos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Como se observa, os subíndices correspondentes a cada par de termos entre parénteses suman $n + 1$, polo que a suma dos seus termos será sempre a mesma, entón:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$

Despexando S_n :

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

A **suma** dos n primeiros termos dunha **progresión aritmética** vén dada por:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}.$$

Actividades resoltas

- *Suma os* 30 *primeiros termos da progresión aritmética:* a_n = {17, 13, 9, 5, 1, …}.

  Observamos que $d = -4$. Para aplicar a fórmula da suma temos que calcular primeiro o termo que ocupa o lugar 30, a_{30}:

  $a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1) \cdot (-4) = 17 + 29 \cdot (-4) = -99$

  Entón: $S_{30} = 30 \cdot \dfrac{17 + (-99)}{2} = -1230$

- *Calcula a suma dos números impares menores que* 1 000.

  Temos que ter en conta que os números impares forman unha progresión aritmética de diferenza 2 e ademais: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Entón: $S_{500} = 500 \cdot \dfrac{1 + 999}{2} = 250\,000$.

Actividades propostas

17. Suma os 10 primeiros termos da progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}

18. Calcula a suma dos 50 primeiros múltiplos de 3.

19. Nunha sucesión aritmética dun número impar de termos o central vale 12, canto valerá a suma do primeiro máis o último?

20. O dono dun pozo contrata a un rabdomante para coñecer a profundidade á que se atopa a auga e este ditamina que a 5 m hai auga en abundancia. Pide un orzamento a un contratista, que lle di que o primeiro metro lle custará 50 euros e por cada medio metro máis 6 euros máis que polo medio metro anterior. Canto lle custará o pozo se se cumpren as predicións?

21. Antón comprou un móbil, pero non pode pagalo ao contado. Paga 60 euros cada semana, pero o vendedor sóbelle 5 euros cada semana en concepto de pagamento aprazado. Logra pagalo en 10 semanas. Canto lle custou? Canto pagou de máis? Que porcentaxe supón esta recarga sobre o prezo de venda?

22. Un nadador adestra nunha piscina de 50 m e quere controlar as perdas de velocidade por cansazo. Cronometra en cinco días consecutivos os tempos que tarda en facer 2, 5, 8, 11, 14 longos. A) Calcula o termo xeral da sucesión a_n que dá os metros percorridos no día n. B) Cantos metros terá nadado nas cronometraxes?

Propóñoche agora ver este vídeo sobre progresións aritméticas

Copia este enderezo en, por exemplo, Google para velo:

https://youtu.be/GiwteW-_sns

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

Exemplo:

- *Un pai quere meter nun peto* 1 € *o día que o seu fillo recén nado cumpra un ano e duplicar a cantidade en cada un dos seus aniversarios.*

  É dicir, a sucesión cuxos termos son o diñeiro que mete no peto cada ano é: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observamos que os termos da sucesión van aumentando de forma que cada termo é o anterior multiplicado por 2. Estas sucesións chámanse progresións xeométricas.

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión de números reais na que o cociente entre cada termo e o anterior é constante. A esta constante chámaselle **razón da progresión** e soe denotarse coa letra *r*. É dicir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sendo *i* un número natural e sempre que a_i sexa distinto de cero.

Ou o que é o mesmo, cada termo obtense multiplicando o anterior pola razón *r*:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Exemplo:

- A sucesión:{1, 3, 9, 27, 81…} é unha progresión xeométrica, xa que tomando dous termos calquera consecutivos, sempre se obtén o mesmo cociente, que é 3, razón da progresión.

  3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.1. Termo xeral dunha progresión xeométrica

Unha progresión xeométrica, por ser unha sucesión, queda totalmente definida se coñecemos o seu termo xeral. Imos obtelo sen máis que aplicar a definición de progresión xeométrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

………

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Polo tanto, o **termo xeral dunha progresión xeométrica** é:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Xeneralizando este resultado, podemos calcular o termo xeral dunha progresión xeométrica coñecendo r e outro termo da progresión, non necesariamente o primeiro:

Máis xeral, o **termo xeral dunha progresión xeométrica** é:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

sendo a_k o termo da progresión que ocupa o lugar k.

Exemplo:

- A sucesión $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ é unha progresión xeométrica.

NOTAS

1. **Dependendo do valor de *r*, podemos encontrar distintos tipos de progresións xeométricas:**
   a) Se $r > 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é crecente, é dicir, cada termo é maior cós anteriores. Por exemplo: se $r = 2$, {2, 4, 8, 16, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é decrecente: {–2, –4, –8, –16, …},
   b) Se $0 < r < 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é decrecente, é dicir, cada termo é menor cós anteriores. Por exemplo: se $r = 1/3$, {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é crecente: {–90, –30, –10, –10/3, –10/9, …},
   c) Se $r < 0$, a progresión é alternada, é dicir, os seus termos van cambiando de signo segundo o valor de n. Por exemplo: se $r = –2$, {–2, 4, –8, 16, …}, ou ben: {2, –4, 8,–16, …}.
   d) Se $r = 0$, a progresión é a progresión formada por ceros a partir do segundo termo. Por exemplo: {7, 0, 0, 0, }
   e) Se $r = 1$, a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: {2, 2, 2, 2 …}.

2. **Dependendo dos datos que teñamos, calcularemos o termo xeral dunha progresión xeométrica dunha forma ou doutra:**
   a) Se coñecemos a_1 e r, vimos que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
   b) Se coñecemos un termo calquera a_k e r, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$
   c) Se coñecemos dous termos calquera a_p e a_q, con a_p non nulo, fáltanos coñecer a razón r para poder aplicar a fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

   $$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \text{ e que } \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$

   podemos despexar r en función de p, q, a_p e a_q e quédanos: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

NOTAS

3. **Dependendo do valor de *r*, podemos encontrar distintos tipos de progresións xeométricas:**
   f) Se $r > 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é crecente, é dicir, cada termo é maior cós anteriores. Por exemplo: se $r = 2$, {2, 4, 8, 16, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é decrecente: {–2, –4, –8, –16, …},
   g) Se $0 < r < 1$, e o primeiro termo é positivo, a progresión é decrecente, é dicir, cada termo é menor cós anteriores. Por exemplo: se $r = 1/3$, {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}, pero se o primeiro termo é negativo, é crecente: {–90, –30, –10, –10/3, –10/9, …},
   h) Se $r < 0$, a progresión é alternada, é dicir, os seus termos van cambiando de signo segundo o valor de n. Por exemplo: se $r = -2$, {–2, 4, –8, 16, …}, ou ben: {2, –4, 8,–16, …}.
   i) Se $r = 0$, a progresión é a progresión formada por ceros a partir do segundo termo. Por exemplo: {7, 0, 0, 0, }
   j) Se $r = 1$, a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: {2, 2, 2, 2 …}.

4. **Dependendo dos datos que teñamos, calcularemos o termo xeral dunha progresión xeométrica dunha forma ou doutra:**
   d) Se coñecemos a_1 e r, vimos que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
   e) Se coñecemos un termo calquera a_k e r, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$
   f) Se coñecemos dous termos calquera a_p e a_q, con a_p non nulo, fáltanos coñecer a razón r para poder aplicar a fórmula anterior. Pero, como sabemos que:
   $$a_n = a_p \cdot r^{n-p} \text{ e que } \quad a_n = a_q \cdot r^{n-q}$$
   podemos despexar r en función de p, q, a_p e a_q e quédanos: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.2. Produto dos termos dunha progresión xeométrica

Nunha progresión xeométrica, o produto de dous termos equidistantes é constante.

É dicir, se os subíndices naturais p, q, t e s verifican que $p + q = t + s$, entón: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

A demostración desta propiedade é moi sinxela:

$$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$$
$$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$$

E como: $p + q = t + s$, entón: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Queremos calcular o produto dos n termos dunha progresión xeométrica, P_n. É dicir:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Aplicando a propiedade conmutativa do produto, temos que:

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicando estas dúas igualdades:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Como se observa, os subíndices correspondentes a cada par de termos entre paréntese suman $n+1$, polo que o produto será sempre o mesmo en cada factor, entón: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

Despexando P_n: $P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

O signo será positivo ou negativo dependendo da progresión.

O **produto** dos n primeiros termos dunha progresión **xeométrica** vén dado por:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Actividades resoltas

- *Calcula o produto dos sete primeiros termos dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* $a_1 = -1/8$ e a razón $r = 2$

  Observamos que todos os termos da sucesión son negativos, polo que o produto dun número par de termos é positivo e o produto dun número impar é negativo. Calculamos a_7 para poder utilizar a fórmula deducida anteriormente:

  $$a_7 = a_1 r^{n-1} = -\frac{1}{8} \cdot 2^{7-1} = (-1/8) \cdot 2^6 = -8$$

  Entón: $P_7 = \pm\sqrt{[(a_1)\cdot(a_7)]^7} = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Actividades propostas

23. O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 3 e o oitavo 384. Calcula a razón e o produto dos 8 primeiros termos.

24. Calcula o produto dos 5 primeiros termos da progresión: 3, 6, 12, 24…

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A) Suma dun número limitado de termos consecutivos dunha progresión xeométrica

Exemplo:

- Xoán comprou 20 libros, polo 1º pagou 1 €, polo 2º, 2 €; polo 3º, 4 €; polo 4º, 8 € e así sucesivamente. Como podemos saber o que pagou en total sen necesidade de facer a suma?

Trátase dunha progresión xeométrica con $a_1 = 1$ e $r = 2$. Habería que calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Imos velo en xeral, para unha progresión xeométrica calquera:

Queremos calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Para isto, multiplicamos esta igualdade por r:

$r \cdot S_n = r\cdot a_1 + r\cdot a_2 + r\cdot a_3 + \ldots + r\cdot a_{n-1} + r\cdot a_n$

Pero como: $a_2 = r\cdot a_1$

$a_3 = r\cdot a_2$

$a_4 = r\cdot a_3$

....

$a_n = r\cdot a_{n-1}$

A igualdade anterior queda:

$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

Restando:

$r \cdot S_n = \quad a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$

$-S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$

$(r-1)\cdot S_n = r\cdot a_n - a_1 \rightarrow S_n = \dfrac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$, e como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entón:

$S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ sempre que $r \neq 1$.

A **suma** dos n primeiros termos dunha progresión **xeométrica** vén dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ sempre que } r \neq 1.$$

Considérase $r \neq 1$ xa que ser $= 1$ a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ e $S_n = n \cdot a_1$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Analicemos a suma segundo os distintos valores de r:

a) Se $|r| > 1$, os termos en valor absoluto medran indefinidamente e o valor de S_n vén dado pola fórmula anterior.

b) Se $|r| < 1$, a suma dos seus termos cando n é grande aproxímase a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, xa que se en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, elevamos a razón $|r| < 1$ a unha potencia, canto maior sexa o expoñente n, menor será o valor de r^n e se n é suficientemente grande, r^n aproxímase a 0. Por iso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

c) Se $r = -1$, os termos consecutivos son opostos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ e S_n é igual a cero se n é par, e igual a a_1 se n é impar. A suma da serie oscila entre eses dous valores.

Actividades resoltas

- *Calcular a suma dos* 11 *primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o primeiro termo é* –2 *e a razón* –3.

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)\,[(-3)^{11} - 1]}{-3 - 1} = -88\,574.$$

- *Calcular a suma dos* 7 *primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o sétimo termo é* 20 480*, o primeiro é* 5 *e a razón é* 4.

Agora utilizamos a fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$

Substituíndo:

$$S_7 = \frac{r\, a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20\,480 \cdot 4 - 5}{4 - 1} = 27\,305.$$

Actividades propostas

25. Un agricultor na súa granxa ten 59 049 litros de auga para dar de beber aos animais. Un día utiliza a metade do contido, ao seguinte a metade do que lle quedaba e así sucesivamente cada día. Cantos litros de auga utilizou ata o sexto día?

26. Suma os quince primeiros termos dunha progresión xeométrica na que $a_1 = 5$ e $r = ½$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

B) Suma dun número ilimitado de termos consecutivos dunha progresión xeométrica

Que ocorrerá se repetimos o proceso anterior indefinidamente? É dicir, que ocorrerá se sumamos un número ilimitado de termos?

Dependendo do valor de r será posible ou non obter a suma dun número ilimitado de termos:

a) Se $r = 1$, a progresión é a progresión constante formada polo primeiro termo: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ e se a_1 é positivo a suma dos termos será cada vez maior (se fose a_1 negativo sería a suma cada vez maior en valor absoluto, pero negativa). Polo tanto, se o número de termos é ilimitado, esta suma será infinita.

b) Se $|r| > 1$, os termos medran indefinidamente e o valor de S_n para un número ilimitado determos, tamén será infinito.

c) Se $|r| < 1$, a suma dos seus termos aproxímase cando n é grande a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

Observamos que a suma non depende do número de termos, xa que ao facerse cada vez máis pequenos, chega un momento no que non se consideran.

d) Se $r = -1$, os termos consecutivos son opostos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ e S_n é igual a cero se n é par, e igual a a_1 se n é impar. A suma da serie oscila entre eses dous valores para un número finito de termos. Para un número de termos ilimitado non sabemos se é par ou impar, co que a suma non se pode realizar a non ser que $a_1 = 0$, caso no que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. No resto dos casos dicimos que a suma de infinitos termos non existe pois o seu valor é oscilante.

e) Se $r < -1$, os termos oscilan entre valores positivos e negativos, medrando en valor absoluto. A suma dos seus infinitos termos non existe pois o seu valor tamén é oscilante.

En resumo,

A **suma** dun número **ilimitado** de termos dunha **progresión xeométrica** só toma un valor finito se $|r| < 1$, e entón vén dada por: $S = \frac{a_1}{1-r}$. No resto dos casos, ou vale infinito, ou non existe pois oscila.

Actividades resoltas

- *Calcula a suma de todos os termos da progresión xeométrica cuxo primeiro termo é* 4 *e a razón* 1/2.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

- *Nunha progresión xeométrica a razón é ¼ e a suma de todos os seus termos é* 8. *Canto vale o primeiro termo?*

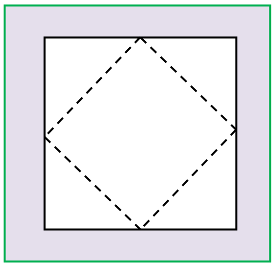
Despexamos a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ e: $a_1 = S\,(1-r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

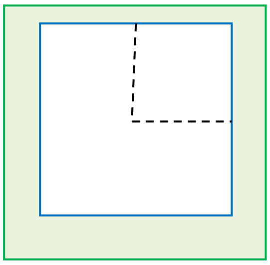
Actividades propostas

27. Calcula a suma dos infinitos termos da sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…

28. Temos na man un cadrado de área 1. Cortamos as catro esquinas polos puntos medios dos lados. O novo cadrado, que área ten? Deixamos os recortes enriba da mesa. Que área de recortes hai sobre a mesa? Co novo cadrado que temos na man efectuamos a mesma operación de cortar as catro esquinas e deixalas sobre a mesa, e así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? E os recortes que quedan sobre a mesa? Calcula a suma das infinitas áreas de recortes así obtidas.



29. De novo temos un cadrado de área 1 na man, e cortámolo polas liñas de puntos como indica a figura. O anaco maior deixámolo sobre a mesa e quedamos na man co cadrado, que volvemos cortar da mesma maneira. E así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? Medran ou diminúen? Escribe o termo xeral da sucesión de áreas que temos na man. E os recortes que quedan sobre a mesa? Medra a área ou diminúe? Imos sumando áreas, calcula a suma destas áreas se fixeramos infinitos cortes.



3.4. Aplicacións das progresións xeométricas

Fracción xeratriz

O curso pasado estudaches como pasar dun decimal periódico puro ou periódico mixto a unha fracción. Agora imos utilizar as progresións xeométricas para que comprendas mellor o proceso.

Exemplo:

- *Se temos un **número decimal periódico puro**, podémolo escribir como:*

$$2.\widehat{37} = 2 + 0.37 + 0.0037 + 0.000037\ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

onde os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuxa suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Polo tanto:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- *Se temos un **número decimal periódico mixto**, utilízase un proceso similar:*

$$1.32\overset{\frown}{8} = 1.32 + 0.008 + 0.0008 + \ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$1.32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000 \cdot 10} + \frac{8}{1000 \cdot 10 \cdot 10} + \ldots$$

Neste caso, os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{10} < 1$.

Polo tanto:

$$1.32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + 0.32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Con este proceso estamos ilustrando o concepto de fracción xeratriz como aplicación das progresións xeométricas, pero a efectos prácticos é máis cómodo efectualo segundo o proceso visto.

Capitalización composta

O interese composto estudaralo detidamente no capítulo 6, pero agora é interesante que saibas que entón vas usar as progresións xeométricas para calculalo e que tes unha folla de cálculo para facer as operacións.

Se depositamos nunha entidade financeira unha cantidade de diñeiro C_0 durante un tempo t e un rédito r, dado en tanto por un, obteremos un beneficio: $I = C_0 \cdot r \cdot t$ chamado **interese.**

A principal característica da capitalización composta é que os intereses que se xeran nun ano, pasan a formar parte do capital inicial e producen intereses nos períodos seguintes.

Entón:

- Ao final do *primeiro ano*, o capital será o capital inicial C_0 xunto cos intereses producidos durante ese ano. É dicir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Ao final do *segundo ano*, o capital que teremos será o capital que tiñamos ao finalizar o primeiro ano máis os intereses producidos ese segundo ano. É dicir:

  $C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$

Observando os capitais obtidos: C_1, C_2, …, C_n concluímos que se trata dunha progresión xeométrica de razón $(1 + r)$. Polo tanto:

- O *ano n-ésimo*, teremos:

O capital final obtido despois de n anos dado un capital inicial C_0 e un rédito r dado en tanto por un é:

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Vexamos a fracción xeratriz de* $23.\overline{45}$ *como aplicación das progresións xeométricas.*

$$23.\overline{45} = 23 + 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$$

Ou o que é o mesmo:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$$

onde os sumandos a partir do segundo forman unha progresión xeométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuxa suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Polo tanto:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositamos nun banco* 1 500 € ao 3.5 % *de capitalización composta durante tres anos. Canto diñeiro teriamos ao finalizar o terceiro ano?*

  Utilizamos a expresión: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)$ onde $C_0 = 1\,500$ €, $r = 0.035$ pois é o tanto por un e $t = 3$ anos. Polo tanto: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t = 1\,500(1 + 0.035)^3 = 1\,663.08$ €.

Actividades propostas

30. Calcula a fracción xeratriz do número $4.5\widehat{61}$

31. Un empresario acode a unha entidade financeira para informarse sobre como investir os 6 000 € de beneficios que tivo nun mes. Ofrécenlle dúas opcións.

a) Manter ese capital durante 5 anos ao 3.5 % anual ou

b) Recibir o 5 % do capital durante os dous primeiros anos e o 3 % os tres anos restantes. Que opción lle interesa máis?

Propóñoche agora ver este vídeo sobre progresións xeométricas.

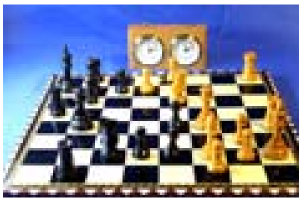
Copia este enderezo en, por exemplo, Google para velo:

https://youtu.be/d_DfQuusVQI

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

A) O inventor do xadrez



Xa vimos no capítulo sobre potencias a lenda sobre o xadrez. Agora podes utilizar os teus coñecementos sobre progresións para facer os cálculos:

Conta a lenda como o inventor do xadrez o presentou a un príncipe da India. O príncipe quedou tan impresionado que quixo premialo xenerosamente, para o cal lle dixo: "Pídeme o que queiras, que cho darei".

O inventor do xadrez formulou a súa petición do modo seguinte:

"Desexo que me entregues un gran de trigo pola primeira casa do taboleiro, dous pola segunda, catro pola terceira, oito pola cuarta, dezaseis pola quinta, e así sucesivamente ata a casa 64".

A sorpresa foi cando o secretario do príncipe calculou a cantidade de trigo que representaba a petición do inventor, porque toda a Terra sementada de trigo era insuficiente para obter o que pedía o inventor.

Que tipo de progresión se utiliza? Aritmética ou xeométrica? Cal é a razón?

Cantos trillóns de grans de trigo pedía aproximadamente?

Poderías calcular o total de grans de trigo utilizando fórmulas e usando a calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 no tenis

As potencias de 2 tamén aparecen nos torneos de tenis. En moitos torneos enfróntanse os xogadores da seguinte forma: na final xogan dous xogadores; na semifinal hai catro; nos cuartos de final hai oito xogadores. Así, en cada ronda adicional a cantidade de xogadores duplícase, tal e como ocorría cos grans de trigo no taboleiro de xadrez. Se o torneo tivese 25 rondas, imaxinas cantos habería? Pois, poderían participar case todos os habitantes de España!! e con 33 rondas, poderían participar todos os habitantes do planeta!!

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Sucesión de *Fibonacci*

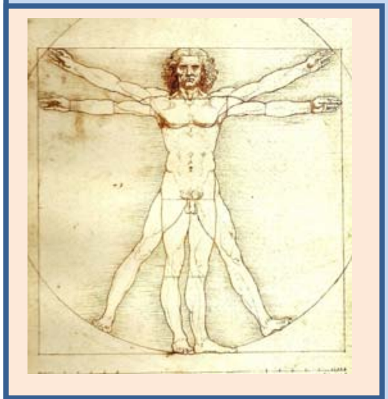
Para os que pensades que é imposible ver Matemáticas fóra da aula e moito menos na natureza, presentámosvos un dos máis fermosos conceptos matemáticos estreitamente relacionado coa natureza e a arte.

Trátase dunha sucesión moi simple, na que cada termo é a suma dos dous anteriores.

- A sucesión comeza polo número 1.
- E segue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584…, xa que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Unha das propiedades máis curiosas, é que o cociente de dous números consecutivos da serie se aproxima á chamada **"sección áurea" ou "divina proporción".**

Este número, descuberto polos renacentistas, é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1.61803… e noméase coa letra grega ϕ. A sucesión formada polos cocientes de números consecutivos da sucesión de *Fibonacci* achégase rapidamente cara ao número áureo. Os gregos e renacentistas estaban fascinados con este número e considerábano o ideal da beleza.



De feito, *Leonardo da Vinci* na súa obra "*O home de Vitrubio*" utiliza este número para conseguir as perfectas proporcións da súa obra.

Como pode ser que o cociente de dous números dunha secuencia inventada polo home se relacione coa beleza? Pois porque a sucesión de *Fibonacci* está estreitamente relacionada coa natureza. Crese que Leonardo encontrou estes números cando estudaba o crecemento das poboacións de coellos. Supoñamos que unha parella de coellos tarda un mes en acadar a idade fértil e a partir dese momento cada vez enxendra outra parella de coellos, que á súa vez enxendrarán cada mes unha parella de coellos.

Cantos coellos haberá ao cabo dun determinado número de meses?

Pois si, cada mes haberá un número de coellos que coincide con cada un dos termos da sucesión de *Fibonacci*. Parece maxia, verdade?

Pois moitas plantas, como os ananás ou as margaridas seguen unha disposición relacionada tamén coa sucesión de *Fibonacci*, o que ilustra a famosa frase de Galileo

"A naturaleza está escrita en linguaxe matemática".

RESUMO

Progresión aritmética	É unha sucesión de números reais na que a diferenza entre dous termos consecutivos da sucesión é constante. A esta constante chámaselle diferenza da progresión e soe denotarse coa letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Termo xeral	$a_n = a_k + d \cdot (n - k)$ sendo a_k o termo que ocupa o lugar *k*	$a_n = 2 + 3n$
Suma dos *n* primeiros termos	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progresión xeométrica	É unha sucesión de números reais na que o cociente entre cada termo e o anterior é constante. A esta constante chámaselle razón da progresión e soe denotarse coa letra *r*. É dicir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Termo xeral	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ sendo a_k o termo da sucesión que ocupa o lugar *k*	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	-Para $r \neq 1$, e un <u>número finito</u> de termos: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ - Para $r \neq 1$, e unha <u>cantidade ilimitada</u> de termos: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765.$ $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Produto dos *n* primeiros termos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula o termo que ocupa o lugar 100 dunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é igual a 4 e a diferenza é 5.
2. O décimo termo dunha progresión aritmética é 45 e a diferenza é 4. Calcula o primeiro termo.
3. Sabendo que o primeiro termo dunha progresión aritmética é 4, a diferenza 7 e o termo n-ésimo 88, calcula n.
4. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética e a diferenza, sabendo que $a_3 = 24$ e $a_{10} = 66$.
5. O termo sexto dunha progresión aritmética é 4 e a diferenza 1/2. Calcula o termo 20.
6. Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que as súas medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferenza 3.
7. Calcula tres números que estean en progresión aritmética e tales que, aumentados en 5, 4 e 7 unidades respectivamente, sexan proporcionais a 5, 6 e 9.
8. Calcula a suma dos múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 e 2 000.
9. O produto de tres termos consecutivos dunha progresión aritmética é 80 e a diferenza é 3. Calcula estes termos.
10. Cantos termos hai que sumar da progresión aritmética 2, 8, 14... para obter como resultado 1 064?
11. A suma de n números naturais consecutivos tomados a partir de 11 é 1 715. Cantos termos sumamos?
12. Sabendo que o quinto termo dunha progresión aritmética é 18 e a diferenza é 2, calcula a suma dos nove primeiros termos da sucesión.
13. A suma de tres números en progresión aritmética é 33 e o seu produto 1 287. Calcula estes números.
14. Tres números en progresión aritmética teñen por produto 16 640; o máis pequeno vale 20. Calcula os outros dous.
15. O produto de cinco números en progresión aritmética é 12 320 e a súa suma 40. Calcula estes números sabendo que son enteiros.
16. Calcula tres números sabendo que están en progresión aritmética, que a súa suma é 18 e que a suma do primeiro e do segundo é igual ao terceiro diminuído en dúas unidades.
17. A suma dos once primeiros termos dunha progresión aritmética é 176 e a diferenza dos extremos é 30. Calcula os termos da progresión.
18. Calcula catro números en progresión aritmética, coñecendo a súa suma, que é 22, e a suma dos seus cadrados, 166.
19. A diferenza dunha progresión aritmética é 4. O produto dos catro primeiros termos é 585. Calcula os termos.
20. Calcula os seis primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que os tres primeiros suman –3 e os tres últimos 24.
21. Nunha progresión aritmética o onceavo termo excede en 2 unidades ao oitavo, e o primeiro e o noveno suman 6. Calcula a diferenza e os termos mencionados.
22. Nunha progresión aritmética, os termos segundo e terceiro suman 19, e os termos quinto e sétimo suman 40. Calcúlaos.
23. Sabendo que as medidas dos tres ángulos dun triángulo están en progresión aritmética e que un deles mide 100°, calcula os outros dous.
24. Calcula as dimensións dun ortoedro sabendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m e que o volume do ortoedro é de 15 470 m^3.
25. Os seis ángulos dun hexágono están en progresión aritmética. A diferenza entre o maior e o menor é 60°. Calcula o valor de cada ángulo.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

26. As lonxitudes dos tres lados dun triángulo rectángulo están en progresión aritmética e suman 36 metros. Canto mide cada lado?

27. Un coronel manda 5 050 soldados e quere formar con eles un triángulo para unha exhibición, de modo que a primeira fila teña un soldado, a segunda dous, a terceira tres, etc. Cantas filas ten que haber?

28. Polo aluguer dunha casa acórdase pagar 800 euros ao mes durante o primeiro ano, e cada ano aumentarase o aluguer en 50 euros mensuais. Canto se pagará mensualmente ao cabo de 12 anos?

29. As idades de catro irmáns forman unha progresión aritmética, e a súa suma é 32 anos. O maior ten 6 anos máis que o menor. Calcula as idades dos catro irmáns.

30. Un esquiador comeza a pretempada de esquí facendo pesas nun ximnasio durante unha hora. Decide incrementar o adestramento 10 minutos cada día. Canto tempo deberá adestrar ao cabo de 15 días? Canto tempo en total terá dedicado ao adestramento ao longo de todo un mes de 30 días?

31. Nunha sala de cine, a primeira fila de butacas dista da pantalla 86 dm, e a sexta, 134 dm. En que fila estará unha persoa se a súa distancia á pantalla é de 230 dm?

32. Calcula o termo onceavo dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é igual a 1 e a razón é 2.

33. O quinto termo dunha progresión xeométrica é 81 e o primeiro é 1. Calcula os cinco primeiros termos da progresión.

34. Nunha progresión xeométrica de primeiro termo 7 e razón 2, un certo termo é 28 672. Que lugar ocupa este termo?

35. Sabendo que o sétimo termo dunha progresión xeométrica é 1 e a razón 1/2, calcula o primeiro termo.

36. Nunha progresión xeométrica sábese que o termo décimo quinto é igual a 512 e que o termo décimo é igual a 16. Calcula o primeiro termo e a razón.

37. Descompón o número 124 en tres sumandos que formen progresión xeométrica, sendo 96 a diferenza entre o maior e o menor.

38. O volume dun ortoedro é de 3 375 cm^3. Calcula a lonxitude das súas arestas, sabendo que están en progresión xeométrica e que a aresta intermedia mide 10 cm máis cá menor.

39. Calcula o produto dos oito primeiros termos da progresión 3, 6, 12, 24,...

40. Calcula a suma dos dez primeiros termos da progresión xeométrica 3, 6, 12, 24,...

41. A suma dos oito primeiros termos dunha progresión xeométrica é 16 veces a suma dos catro primeiros. Calcula o valor da razón.

42. Calcula a suma dos termos da progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...

43. Calcula tres números en progresión xeométrica sabendo que a súa suma é 26 e o seu produto 216.

44. Calcula o produto dos once primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o termo central vale 2.

45. Tres números en progresión xeométrica suman 525 e o seu produto vale un millón. Calcula estes números.

46. Determina catro números en progresión xeométrica de maneira que os dous primeiros sumen 0.5 e os dos últimos 0.125.

47. Cantos termos se tomaron nunha progresión xeométrica, sabendo que o primeiro termo é 7, o último 448 e a súa suma 889?

48. A suma dos sete primeiros termos dunha progresión xeométrica de razón 3 é 7651. Calcula os termos primeiro e sétimo.

49. Calcula tres números en progresión xeométrica cuxo produto é 328509, sabendo que o maior excede en 115 á suma dos outros dous.

50. Tres números están en progresión xeométrica; o segundo é 32 unidades maior que o primeiro, e o terceiro, 96 unidades maior que o segundo. Calcula os números.

51. Calcula os catro primeiros termos dunha progresión xeométrica, sabendo que o segundo é 20 e a suma dos catro primeiros é 425.

52. Calcula os ángulos dun cuadrilátero, se se sabe que están en progresión xeométrica e que o maior é 27 veces o menor.

53. As dimensións dun ortoedro están en progresión xeométrica. Calcula estas dimensións sabendo que as súas arestas suman 420 m e o seu volume 8 000 m^3.

54. Divide o número 221 en tres partes enteiras que forman unha progresión xeométrica tal que o terceiro termo excede ao primeiro en 136.

55. A suma de tres números en progresión xeométrica é 248 e a diferenza entre os extremos 192. Calcula estes números.

56. Calcula catro números en progresión xeométrica sabendo que a suma dos dous primeiros é 28 e a suma dos dous últimos 175.

57. Nunha progresión xeométrica, os termos primeiro e décimo quinto son 6 e 54, respectivamente. Calcula o termo sexto.

58. Unha progresión xeométrica ten cinco termos, a razón é igual á cuarta parte do primeiro termo e a suma dos dous primeiros termos é 24. Calcula os cinco termos.

59. Calcula x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estean en progresión xeométrica.

60. A unha corda de 700 m de lonxitude dánselle dous cortes, de modo que un dos anacos extremos ten unha lonxitude de 100 m. Sabendo que as lonxitudes dos anacos están en progresión xeométrica, determina a lonxitude de cada anaco.

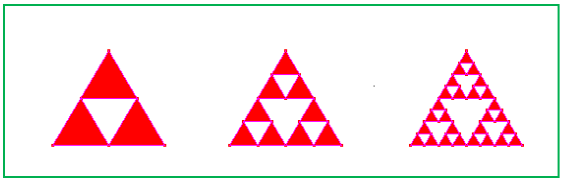
61. Calcula a fracción xeratriz do número decimal 0.737373... como suma dos termos dunha progresión xeométrica ilimitada.

62. Temos un bocoi de viño que contén 1 024 litros. O 1 de outubro baleirouse a metade do contido; ao día seguinte volveuse baleirar a metade do que quedaba, e así sucesivamente todos os días. Que cantidade de viño se sacou o día 10 de outubro?

63. Dado un cadrado de 1 m de lado, unimos dous a dous os puntos medios dos seus lados; obtemos un novo cadrado, no que volvemos efectuar a mesma operación, e así sucesivamente. Calcula a suma das infinitas áreas así obtidas.

64. Tres números cuxa suma é 36 están en progresión aritmética. Calcula estes números sabendo que se se lles suma 1, 4 e 43, respectivamente, os resultados forman unha progresión xeométrica.

65. *Triángulo de Sierspinky*: Imos construír un fractal. Pártese dun triángulo equilátero. Únense os puntos medios dos lados e fórmanse catro triángulos. Elimínase o triángulo central. En cada un dos outros tres triángulos repítese o proceso. E así sucesivamente. A figura formada por iteración infinita denomínase *Triángulo de Sierspinky* e é un fractal. Imaxina que o primeiro triángulo ten unha área A. Cando aplicamos a primeira iteración, a área é (3/4)A. E na segunda? Escribe a sucesión das áreas. É crecente ou decrecente? Imaxina agora que a lonxitude de cada lado do triángulo inicial é L. Escribe a sucesión das lonxitudes. É crecente ou decrecente?



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Cal é a razón da seguinte progresión xeométrica: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?

a) 5 b) 3 c) 2 d) Non é unha progresión xeométrica

2. Na sucesión de múltiplos de 13, o 169 ocupa o lugar:

a) 1 b) 2 c) 13 d) 169

3. A suma dos dez primeiros termos da progresión aritmética: 7, 13, 19, 31, … é:

a) 170 b) 34 c) 19 d) 340

4. A sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:

a) é unha progresión xeométrica de razón 5 b) é unha progresión aritmética de diferenza 5

c) é unha progresión xeométrica de razón 3 d) é unha progresión aritmética de diferenza 3.

5. Sexa a sucesión: 2, 10, 50, 250, 1 250... o seu termo xeral é:

a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ d) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

6. Canto suman as potencias de 2 comprendidas entre 2^1 e 2^{10}?

a) 1 022 b) 2 046 c) 1 024 d) 2 048

7. A progresión aritmética cuxo primeiro termo é 1 e a súa diferenza 2, ten como termo xeral:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n – 1$ d) $a_n = 2n – 2$

8. Cal é o valor da suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?

a) 500 000 b) 250 000 c) 50 000 d) 25 000

9. María está preparando o exame de selectividade. Para non deixar toda a materia para o final decidiu estudar cada día o dobre de páxinas que o día anterior. Se o primeiro día estudou tres páxinas, cantas terá estudado ao cabo de 7 días?

a) 381 b) 192 c) 765 d) 378

10. A Roberto tócanlle 6 000 € na lotería e decide depositalos no banco a un tipo de interese composto do 4 %. Canto diñeiro terá ao cabo de 5 anos?

a) 6 240 € b) 6 104 € c) 7 832.04 € d) 7 299.92 €

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF