Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 2:

Potencias e raíces

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jose Antonio Encabo de Lucas

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Neste capítulo imos estudar as potencias de expoñente natural e enteiro coas súas propiedades. Aprenderemos a operar coas potencias aplicando as súas propiedades.

Estudaremos as potencias de expoñente racional, que son os radicais, as súas propiedades así como as operacións que podemos realizar con eles. Deterémonos na racionalización, que é unha operación moi utilizada en matemáticas que necesitaremos para operar con radicais.

Estudaremos a notación científica, as propiedades para poder operar con este tipo de notación e as vantaxes de operar con esta notación.

Por último estudaremos os logaritmos e as súas propiedades, que facilitan as operacións pois transforman, por exemplo, os produtos en sumas. Cando non había calculadoras nin ordenadores e querían multiplicar números de máis de dez cifras, como facían?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. POTENCIAS DE EXPOÑENTE ENTEIRO. PROPIEDADES

1.1. Potencias de expoñente natural

Recorda que:

Dado *a,* un número calquera, e *n,* un número natural, a potencia a^n é o produto do número *a* por si mesmo *n* veces.

En forma desenvolvida, a potencia de base *a* e expoñente *n* escríbese: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* veces, sendo *a* calquera número e *n* un número natural.

Exemplo:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 veces.

A base *a* pode ser positiva ou negativa. Cando a base é positiva o resultado é sempre positivo. Cando a base é negativa, se o expoñente é par o resultado é positivo, pero se é impar o resultado é negativo.

Se calculamos os exemplos de arriba teremos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplico un número negativo un número impar de veces, polo que o resultado é negativo. Cada vez que multiplicamos dúas veces dous números negativos dános un positivo, como temos 5 quedaría un signo menos sen multiplicar, logo $(+) \cdot (-) = (-)$.

Recorda que:

Base positiva: resultado sempre positivo.

Base negativa e expoñente par: resultado positivo.

Base negativa e expoñente impar: resultado negativo.

Actividades resoltas

- *Calcula as seguintes potencias:*

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Actividades propostas

1. Calcula as seguintes potencias:

a) -3^3 b) $(2+1)^3$ c) $-(-2x)^2$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Potencias de expoñente negativo

Definición de potencia de expoñente negativo $-n$ e base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Isto xustifícase xa que se desexa que se sigan verificando as propiedades das potencias:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Exemplo:

- 5^{-2} é o mesmo que $(1/5)^2$.

2. PROPIEDADES DAS POTENCIAS. EXEMPLOS

As propiedades das potencias son:

PROPIEDADES DAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

a) o produto de potencias da mesma base é igual a outra potencia da mesma base e como expoñente a suma dos expoñentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Exemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) O cociente de potencias da mesma base é igual a outra potencia que ten como base a mesma, e como expoñente a diferenza dos expoñentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Exemplo:

- $5^5/5^3=(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)/(5 \cdot 5 \cdot 5)=5^{5-3}=5^2$

c) A potencia dunha potencia é igual á potencia cuxo expoñente é o produto dos expoñentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) O produto de potencias de distinta base co mesmo expoñente é igual a outra potencia cuxa base é o produto das bases e cuxo expoñente é o mesmo:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) O cociente de potencias de distinta base e o mesmo expoñente é igual a outra potencia cuxa base é o cociente das bases e cuxo expoñente é o mesmo.

$$a^n/b^n = (a/b)^n$$

Exemplo:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8)/(7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Todas estas propiedades das potencias mencionadas para os expoñentes naturais seguen sendo válidas para outros expoñentes: negativos, fraccionarios…

Actividades resoltas

- *Calcula as seguintes operacións con potencias:*

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3/5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propostas

2. Efectúa as seguintes operacións con potencias:

a) $(x+1) \cdot (x+1)^3$ b) $(x+2)^3 : (x+2)^4$ c) $\{(x-1)^3\}^4$ d) $(x+3) \cdot (x+3)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPOÑENTE RACIONAL. RADICAIS

3.1. Potencias de expoñente racional. Definición.

Defínese a potencia de expoñente fraccionario e base *a* como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Exemplo:

- *Expoñentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

As propiedades citadas para as potencias de expoñente enteiro son válidas para as potencias de expoñentes fraccionarios.

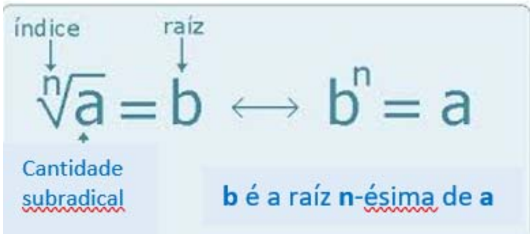
Exemplo:

- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

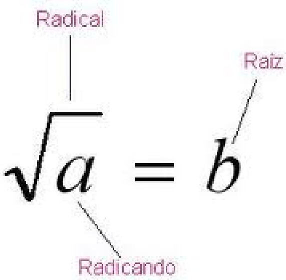
3.2. Radicais. Definición. Exemplos

Defínese **raíz *n*-ésima** dun número *a*, como o número *b* que verifica a igualdade $b^n = a$.



$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Sendo: *n* é o **índice**, *a* é a cantidade sub-radical ou **radicando** e *b* é a raíz ***n*-ésima** de *a.*



Importante: *n* sempre é positivo. Non existe a raíz –5.

A radicación de índice *n* é *a operación inversa da potenciación de expoñente n*.

Pola definición de raíz *n*-ésima dun número *a* verifícase que se *b* é raíz, entón:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \boldsymbol{b^n = a}$$

Observa que se pode definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ xa que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisfai a mesma propiedade que *b* deben ser considerados como o mesmo número.

Exemplos:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3.Propiedades dos radicais. Exemplos

As propiedades das potencias enunciadas anteriormente para o caso de expoñentes fraccionarios tamén se poden aplicar ás raíces:

a) Se multiplicamos o índice dunha raíz n por un número p e, á vez, elevamos o radicando a ese número p o valor da raíz non varía.

Verifícase $\forall p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{p\cdot n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{25}$. Verifícase xa que segundo acabamos de ver: $\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 2]{5^2}=\sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces do mesmo índice, multiplícanse os radicandos e calcúlase a raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

Demostración:

Segundo as propiedades das potencias de expoñentes enteiros verifícase que:

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces do mesmo índice, divídense os radicandos e calcúlase a raíz do índice común. Supoñemos que $b\neq 0$ para que teña sentido o cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Demostración:

Se escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}}=\sqrt[3]{a^{7-4}}=\sqrt[3]{a^3}=a$$

d) Para elevar un radical a unha potencia basta con elevar o radicando a esta potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Esta propiedade podémola demostrar como segue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$$

$m>0$ e $m\in Z$

e) A raíz dunha raíz é igual á raíz cuxo índice é o produto dos índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Demostración:

Verifícase que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15}\cdot y^{30}}}=\sqrt[15]{x^{15}\cdot y^{30}}=(x^{15}\cdot y^{30})^{\frac{1}{15}}=(x^{15})^{\frac{1}{15}}\cdot(y^{30})^{\frac{1}{15}}=x\cdot y^2$

Actividades resoltas

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- *Reduce a índice común* (6) *os seguintes radicais:* $\sqrt[3]{536}$; $\sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 67)^2};$$
$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3}.$$

- *Saca factores fóra da raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[2]{3} = 6 \cdot \sqrt[2]{3}$$

- *Escribe os seguintes radicais como unha soa raíz:*

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propostas

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Calcula:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza as seguintes operacións con radicais:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. OPERACIÓNS CON RADICAIS: RACIONALIZACIÓN

4.1. Operacións. Definición. Exemplos

Suma e resta de radicais

RECORDA:

Para sumar e restar radicais estes deben ser idénticos:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Para sumar estes radicais hai que sumar as súas expresións aproximadas.

Porén a expresión:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si se pode sumar e restar xa que os seus radicais son idénticos

PARA PODER SUMAR OU RESTAR RADICAIS CÓMPRE QUE TEÑAN O MESMO ÍNDICE E O MESMO RADICANDO.

SÓ CANDO SUCEDE ISTO PODEMOS SUMAR OU RESTAR OS COEFICIENTES OU PARTE NUMÉRICA DEIXANDO O MESMO RADICAL.

Exemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1\,250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$.

Polas propiedades dos radicais podemos sacar factores do radical deixando que todos os radicais sexan idénticos:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Produto de radicais

Para multiplicar radicais debemos convertelos en radicais de igual índice e multiplicar os radicandos:

1.- Calculamos o m.c.m. dos índices.

2.- Dividimos o m.c.m entre cada índice e multiplicámolo polo expoñente do radicando e simplificamos.

Exemplo:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

División de radicais

Para dividir radicais debemos conseguir que teñan igual índice, como no caso anterior, e despois dividir os radicais.

Exemplo:

- $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 4^2}{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot(2^2)^2}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^2\cdot 2^1} = \sqrt[6]{18}$

Raíz dunha raíz

É a raíz cuxo índice é o produto dos índices (segundo se demostrou na propiedade e), e despois simplificamos extraendo factores fóra do radical se se pode.

Exemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7\cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7\cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6\cdot x^1\cdot y^5} = x\cdot\sqrt[6]{x\cdot y^5}$

RECORDA:

Para extraer factores do radical débese cumprir que o expoñente do radicando sexa maior que o índice da raíz.

2 opcións:

- ✓ Divídese o expoñente do radicando entre o índice da raíz, o cociente indica o número de factores que extraio e o resto os que quedan dentro.
- ✓ Descompóñense os factores do radicando elevándoos ao mesmo índice da raíz, cada expoñente que coincida co índice, sairá o factor e os que sobren quedan dentro.

Exemplo:

- *Extrae factores do radical:*

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt[2]{\frac{2^2 7\cdot x^5}{3\cdot 5^2 y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} =$$

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

Os factores que poderiamos extraer serían o 2, *x*, *y* e o 5, da seguinte maneira:

Dividimos o expoñente do *x*, 5, entre 2, xa que o índice da raíz é 2, e temos de cociente 2 e de resto 1, polo que sairán dous *x* e queda 1 dentro.

De igual forma para o *y*, dividimos 3 entre 2 e obtemos 1 de cociente e un de resto, polo que sae 1y e queda outro dentro.

Vexamos: $\sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^{2}\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y^1}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

6. Escribe baixo un só radical e simplifica: $\sqrt[2]{2\cdot\sqrt[2]{3\cdot\sqrt[2]{4\cdot\sqrt[2]{5\cdot\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula e simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$

8. Realiza a seguinte operación: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula e simplifica: $\sqrt[2]{\dfrac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$

4.2. Racionalización. Exemplos

Racionalizar unha fracción alxébrica consiste en atopar outra equivalente que non teña radicais no denominador.

Para iso, hai que multiplicar numerador e denominador pola expresión adecuada.

Cando na fracción só hai monomios, multiplícase e divídese a fracción por un mesmo número para conseguir completar no denominador unha potencia do mesmo expoñente que o índice da raíz.

Exemplo:

- $\sqrt[4]{\dfrac{6}{x^3}}$.

Multiplicamos e dividimos por $\sqrt[4]{x}$ para obter no denominador unha cuarta potencia e quitar o radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cando na fracción aparecen no denominador binomios con raíces cadradas, multiplícase e divídese por un factor que proporcione unha diferenza de cadrados, este factor é o factor conxugado do denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, o seu conxugado é: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Outro exemplo: $(\sqrt{a}+b)$ o seu conxugado é: $(\sqrt{a}-b)$

Exemplo:

- $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. *Multiplicamos polo conxugado do denominador que neste caso é:* $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

10. Racionaliza a expresión: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACIÓN CIENTÍFICA

5.1. Definición. Exemplos

A notación científica utilízase para escribir números moi grandes ou moi pequenos.

A vantaxe que ten sobre a notación decimal é que as cifras se nos dan contadas, co que a orde de magnitude do número é evidente.

Un número posto en notación científica consta de:

- ✓ Unha parte enteira formada por unha soa cifra que non é o cero (a das unidades).
- ✓ O resto das cifras significativas postas como parte decimal.
- ✓ Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número.

N=a,bcd...·10^n

sendo: a súa parte enteira (só unha cifra).

b c d… a súa parte decimal .

10^n a potencia enteira de base 10

Se *n* é positivo, o número *N* é "grande".

E se *n é* negativo, entón *N* é "pequeno".

Exemplos:

- $2.48 \cdot 10^{14}$ (= 248 000 000 000 000): Número grande.
- $7.561 \cdot 10^{-18}$ (= 0.000000000000000007561): Número pequeno.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5.2. Operacións con notación científica

Para operar con números dados en notación científica procédese de forma natural, tendo en conta que cada número está formado por dous factores: a expresión decimal e a potencia de base 10.

O produto e o cociente son inmediatos, mentres que a suma e a resta esixen preparar os sumandos de modo que teñan a mesma potencia de base 10 e así poder sacar factor común.

Exemplos:

a) $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = (5.24 \cdot 6.3) \cdot 10^{6+8} = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.3012 \cdot 10^{15}$

b) $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$

RECORDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, multiplícanse as partes decimais e súmanse os expoñentes da potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, divídense as partes decimais e réstanse os expoñentes da potencia de base 10.
- ✓ Se fai falla multiplícase ou divídese o número resultante por unha potencia de 10 para deixar unha soa cifra na parte enteira.

c) $5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5.83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9 =$

$= 6\,862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$

RECORDA:

- ✓ Para **sumar ou restar** números en notación científica, hai que poñer os números coa mesma potencia de base 10, multiplicando ou dividindo por potencias de base 10.
- ✓ Sácase factor común a potencia de base 10 e despois súmanse ou réstanse os números decimais quedando un número decimal multiplicado pola potencia de 10.
- ✓ Por último se fai falla multiplícase ou divídese o número resultante por unha potencia de 10 para deixar na parte enteira unha soa cifra.

Actividades propostas

13. Calcula:

a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\frac{3.10^{-5} + 7.10^{-4}}{10^6 - 5.10^5}$ b) $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5.10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$

15. Realiza as seguintes operacións e efectúa o resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

6. LOGARITMOS

6.1. Definición

O **logaritmo** dun número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva e distinta de un, é o expoñente ao que hai que elevar a base para obter este número.

$$\text{Se } a > 0, \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Os logaritmos máis utilizados son os **logaritmos decimais** ou logaritmos de base 10 e os **logaritmos neperianos** (chamados así en honor de ***Neper***) ou logaritmos en base *e* (*e* é un número irracional cuxas primeiras cifras son: *e* = 2.71828182…). Ambos os dous teñen unha notación especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Exemplos:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1\,000} = 3 \Leftrightarrow 1\,000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** da definición dedúcese que:

- ✓ O logaritmo de 1 é cero (en calquera base).

Demostración:

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, temos que $\log_a 1 = 0$.

Exemplos:

- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_2 1 = 0$.
- $\log_3 1 = 0$.

- ✓ O logaritmo da base é 1.

Demostración:

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, temos que $\log_a a = 1$.

Exemplos:

- $\log_a a = 1$.
- $\log_3 3 = 1$.
- $\log_5 5 = 1$.
- $\log_3 3^5 = 5$.

- ✓ O logaritmo de 1 é cero (en calquera base).
- ✓ O logaritmo da base é 1.
- ✓ Só teñen logaritmos os números positivos.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- ✓ Só teñen logaritmos os números positivos, pero pode haber logaritmos negativos. Un logaritmo pode ser un número natural, enteiro, fraccionario e mesmo un número irracional.

Ao ser a base un número positivo, a potencia nunca nos pode dar un número negativo nin cero.

- $log_2 (-4)$ non existe.
- $log_2 0$ non existe.
- $log\ 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\ 0.1 = -1 \Leftrightarrow 0.1 = 10^{-1}$.
- $log \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\ 2 = 0.301030...$

Actividades resoltas

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Actividades propostas

15. Copia a táboa adxunta no teu caderno e emparella cada logaritmo coa súa potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

16. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

17. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2} (1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

18. Calcula x utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

19. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

6.2. Propiedades dos logaritmos

1. O logaritmo dun **produto** é igual á suma dos logaritmos dos seus factores:

$$\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$$

Demostración:

Chamamos $A = \log_a x$ e $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x.$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y.$$

Multiplicamos: $x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x \cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y.$

Exemplo:

- $\log_a (2 \cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$.

2. O logaritmo dun **cociente** é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor:

$$\boxed{\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y}$$

Demostración:

Chamamos $A = \log_a x$ e $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x.$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y.$$

Dividimos: $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a (x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y.$

Exemplo:

- $\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$.

3. O logaritmo dunha **potencia** é igual ao expoñente multiplicado polo logaritmo da base da potencia:

$$\boxed{\log_a x^y = y \,.\, \log_a x}$$

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{A \cdot y} \Leftrightarrow A \cdot y = \log_a x^y = y \cdot \log_a x.$$

Exemplo:

- $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$.

4. O logaritmo dunha **raíz** é igual ao logaritmo do radicando dividido polo índice da raíz:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

Demostración:

Tendo en conta que unha raíz é unha potencia de expoñente fraccionario.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- $log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

5. **Cambio de base:** O logaritmo en base *a* dun número *x* é igual ao cociente de dividir o logaritmo en base *b* de *x* polo logaritmo en base *b* de *a*:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esta expresión coñécese co nome de ***"fórmula do cambio de base"***. As calculadoras só permiten o cálculo de logaritmos decimais ou neperianos, polo que, cando queremos utilizar a calculadora para calcular logaritmos noutras bases, precisamos facer uso desta fórmula.

Exemplo:

- $log_2 11 = \frac{log\ 11}{log\ 2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162.$

Actividades resoltas

- *Desenvolve as expresións que se indican:*

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- *Escribe cun único logaritmo:*

$$3log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} .2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$$

- *Expresa os logaritmos dos seguintes números en función de log2=*0.301030*:*

a) 4 $\Rightarrow$ log4 = log 2^2 = 2 · log2 = 2 · 0.301030 = 0.602060

b) 1 024 $\Rightarrow$ log 1 024 = log 2^{10} = 10 · log2 = 10 · 0.301030 = 3.01030

Actividades propostas

20. Desenvolve as expresións que se indican:

a) $\ln\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 .d}\right)$

21. Expresa os logaritmos dos números seguintes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

22. Simplifica a seguinte expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

POTENCIAS DE 11

As potencias de 11

As potencias enteiras de 11 non deixan de chamar a nosa atención e poden ser incluídas entre os produtos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1 331

11 x 11 x 11 x 11 = 14 641

Disposición non menos interesante presentan os números 9, 99, 999, etc. cando son elevados ao cadrado:

$9^2 = 81$

$99^2 = 9\,801$

$999^2 = 998\,001$

$9\,999^2 = 99\,980\,001$

Paga a pena observar que o número de noves da esquerda é igual ao número de ceros da dereita, que se sitúan entre os díxitos 8 e 1.

Utiliza a calculadora ou o ordenador para calcular 26^{378}

Dá erro! non sae. É preciso usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimais á expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378*\log(26)$$

Iso si saben calculalo a calculadora ou o ordenador. Dá:

$$\log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534}\cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

Solución:

$$26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.$$

É un número tan grande que nin o ordenador nin a calculadora saben calculalo directamente e é necesario usar logaritmos. Repite o proceso con 50^{200} e comproba que che sae $6.3 \cdot 10^{339}$.

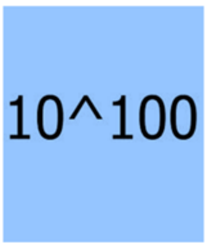
Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

NÚMEROS GRANDES

Os primeiros números que se achegan á nosa definición do que é infinito podémolos tomar da mesma natureza contando elementos moi pequenos que existen en abundancia como son as **pingas do mar** (1 x 10^{25} pingas), os **grans de area en todas as praias do mundo** (5.1 x 10^{23} grans) ou o **número de estrelas de todo o Universo coñecido** (3 x 10^{23} estrelas). Podemos mesmo tomar o número de partículas elementais do universo (1 x 10^{80}) se queremos obter un número máis grande.

Queremos calcular un número máis grande ***"Googol***", cuñado por un neno de 9 anos en 1939, que posúe 100 ceros e foi creado co obxectivo de darnos unha aproximación cara ao que significa o infinito. Pero hoxe en día coñécense cantidades (moito) máis grandes que o Gúgol.

Temos por exemplo, os **números primos da forma de Mersenne**, que puideron ser encontrados grazas á invención das computadoras. En 1952, o número primo de Mersenne máis grande era $(2 \cdot 10^{17}) - 1$, un número primo con 39 díxitos, e ese mesmo ano, as computadoras probaron que o número $(2 \cdot 10^{521}) - 1$ é tamén primo, e que este número posúe 157 díxitos, sendo este moito máis grande que un ***Googol***.



Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Potencias de expoñente natural e enteiro	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades das potencias	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n.m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n/b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de expoñente racional. Radicais	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades dos radicais	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3\cdot2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3\cdot2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\cdot2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicais	Suprímense as raíces do denominador. Multiplícase numerador e denominador pola expresión adecuada (conxugado do denominador, radical do numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} =$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Un número posto en notación científica consta dunha parte enteira formada por unha soa cifra que non é o cero (a das unidades). O resto das cifras significativas postas como parte decimal. Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número: $N = a.bcd... \cdot 10^n$	$5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} =$ $5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 - 75.10^9 =$ $(5.83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9 = 6\,862.83 \cdot 10^9 =$ $6.86283 \cdot 10^{12}$ $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = 33.012 \cdot 10^{14} =$ $3.32012 \cdot 10^{15}$ $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)}$ $= 0.8317 \cdot 10^{14}$ $= 8.317.10^{13}$
Logaritmos	Se $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y.\log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma exponencial:

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $(\frac{1}{z+1})^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicais

3. Expresar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a.\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propiedades dos radicais

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

7. Extraer factores do radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introducir factores no radical:

a) $2.\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3.\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2.\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Operacións con radicais

9. Efectúa:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

10. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalizar

11. Racionaliza os denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionaliza e simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}`-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectúa e simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})$ (3+2· $\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Logaritmos

14. Desenvolve os seguintes logaritmos:

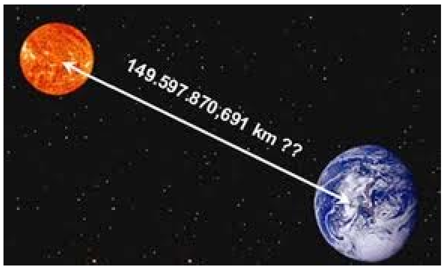
a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$; b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

15. Simplifica a seguinte expresión:

$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

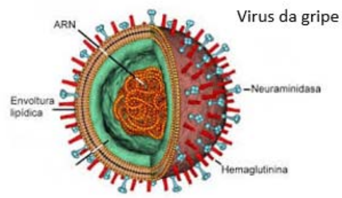
Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Notación científica

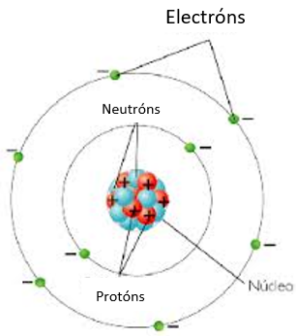


16. A masa do Sol é 330 000 veces a da Terra, aproximadamente, e esta é $5.98 \cdot 10^{21}$t. Expresa en notación científica a masa do Sol, en quilogramos.

17. O ser vivo máis pequeno é un virus que pesa arredor de 10^{-18} g e o máis grande é a balea azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. Cantos virus serían precisos para conseguir o peso da balea?



18. Os cinco países máis contaminantes do mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Xapón e Alemaña) emitiron 12 billóns de toneladas de CO_2 no ano 1995, cantidade que representa o 53.5 % das emisións de todo o mundo. Que cantidade de CO_2 se emitiu no ano 1995 en todo o mundo?



19. Expresa en notación científica:

a) Recadación das quinielas nunha xornada da liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitiron á atmosfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millóns.

c) Radio do átomo de osíxeno: 0.000000000066 m.

20. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d)$3.1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e)$(4 \cdot 10^{5})^{-2}$

21. Expresa en notación científica e calcula:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$ b) $\dfrac{0.000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0.00302}$ c) $(0.0073)^2 \cdot (0.0003)^2$ d) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0.00003 - 0.00015}$

22. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^{6} - 5 \cdot 10^{5}}$ b)$\dfrac{7.35 \cdot 10^{4}}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^{7}$ c)$(4.3 \cdot 10^{3} - 7.2 \cdot 10^{5})$

23. Que resultado é correcto da seguinte operación expresada en notación científica:

$(5.24 \cdot 10^{6}) \cdot (8.32 \cdot 10^{5})$:

a) $4.35968 \cdot 10^{12}$ b) $43.5968 \cdot 10^{13}$ c) $4.35968 \cdot 10^{11}$ d) $4.35968 \cdot 10^{13}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACION

1. O número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dezaseisavo b) Dous c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada un dos números que van entre paréntese e efectúa despois a operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. O resultado é:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. O número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ é igual a:

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Cal é o resultado da seguinte expresión se a expresamos como potencia única?: $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\dfrac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando e extraendo factores a seguinte expresión ten un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6.b^7.c^6}}$

a) $5^3.a.b.c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2.c}$ b) $5\cdot a^2.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$ c) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^3.b^2.c^3}$ d) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$

6. Cal dos seguintes valores é igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}\cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3\cdot a^{-2}$

7. Cal é o resultado desta operación con radicais?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\dfrac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

8. Unha expresión cun único radical de: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2.(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8.(x+2)^9.(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$

9. Para racionalizar a expresión: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hai que multiplicar numerador e denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. Cal é o resultado en notación científica da seguinte operación?: $5.83\cdot 10^9 + 6.932\cdot 10^{12} - 7.5\cdot 10^{10}$

a) $6.86283\cdot 10^{12}$ b) $6.86283\cdot 10^{13}$ c) $6.8623\cdot 10^{11}$ d) $6.8628\cdot 10^{12}$

11. Cal é o resultado da seguinte operación expresado en notación científica?: $\dfrac{5.24\cdot 10^{10}}{6.3\cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317\cdot 10^{17}$ b) $8.317\cdot 10^{16}$ c) $8.317\cdot 10^{15}$ d) $83.17\cdot 10^{16}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF