

# FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

## MATEMÁTICAS II

### CAPÍTULO 6: GEOMETRÍA DEL PLANO Y EL ESPACIO

#### ACTIVIDADES PROPUESTAS

#### 1. POLIEDROS

1. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos



2. Clasifica los siguientes poliedros



3. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.
4. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.
5. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?
6. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.
7. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
8. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.
9. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

#### 2. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

10. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 cm.
11. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es  $63 \text{ m}^2$  y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.
12. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
13. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.
14. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular, de 4 cm de lado de la base, es  $104 \text{ cm}^2$ , calcula la apotema de la pirámide y su altura.

## 3. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

15. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?
16. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
17. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.
18. La circunferencia de la base de un cono mide 6, 25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.
19. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

## 4. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

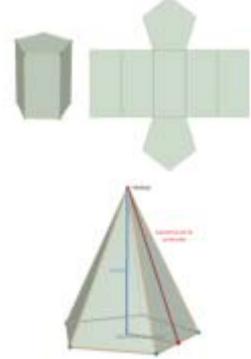
20. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.
21. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.
22. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
  - a. ¿Cuál es, en  $\text{dm}^3$ , el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de  $\pi$ ).
  - b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
23. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

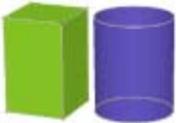
## 5. GLOBO TERRÁQUEO

24. Un avión recorre  $20^\circ$  en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de  $170^\circ$  Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?
25. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?
26. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.
27. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.



## RESUMEN

<p><b>Poliedro.</b> <b>Elementos de un poliedro.</b> <b>Tipos de poliedros</b></p>	<p>Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales. Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea. Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.</p>	
<p><b>Teorema de Euler:</b></p>	<p>En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.</p>	$C + V = A + 2$
<p><b>Poliedros regulares</b></p>	<p>Un poliedro regular es un poliedro que tiene todas sus caras polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro</p>	
<p><b>Prismas y pirámides</b></p>	<p>Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases. Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base.</p>	
<p><b>Áreas lateral y total de un prisma</b></p>	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2 Área_{Base}$	
<p><b>Áreas lateral y total de una pirámide regular</b></p>	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	
<p><b>Cuerpos de revolución</b></p>	<p>Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.</p>	
<p><b>Áreas lateral y total de un cilindro</b></p>	$A_{Lateral} = 2 \pi R H$ $A_{total} = 2 \pi R H + 2 \pi R^2$	

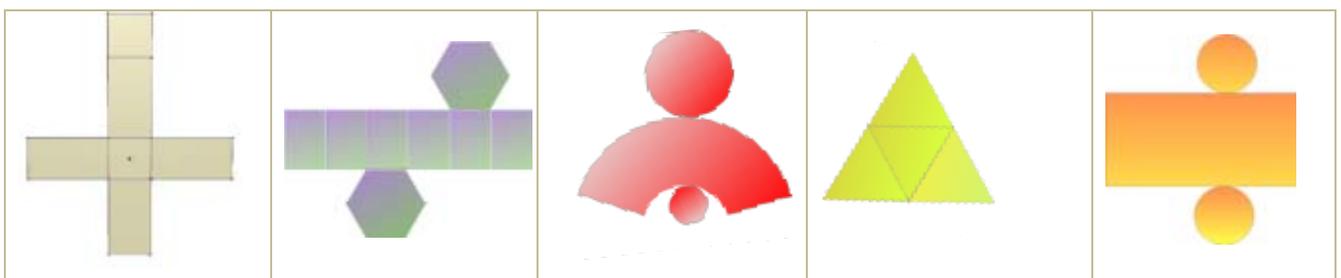
Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Área total de una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = \text{Área}_{base} \cdot \text{Altura}$	
Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \frac{\text{Área}_{base} \cdot \text{Altura}}{3}$	
Volumen de una esfera	$Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Coordenadas geográficas	<p><b>Latitud:</b> Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto.</p> <p><b>Longitud:</b> Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.</p>	
Husos horarios	Cada <b>huso horario</b> es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15° de longitud.	

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
- ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
- ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?
- Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.
- Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?
- Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?
- De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?
- Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?



- Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?
- Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



- Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
- Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.
- Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de  $30 \text{ cm}^2$  de área. Calcula su volumen.
- Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3,5 dm, 8,2 dm y 75 cm.

15. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5 cm de radio de la base.
16. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.
17. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de  $120 \text{ m}^2$  y su base es un hexágono de 5 m de lado.
18. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
19. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
20. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0,3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?
21. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?
22. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

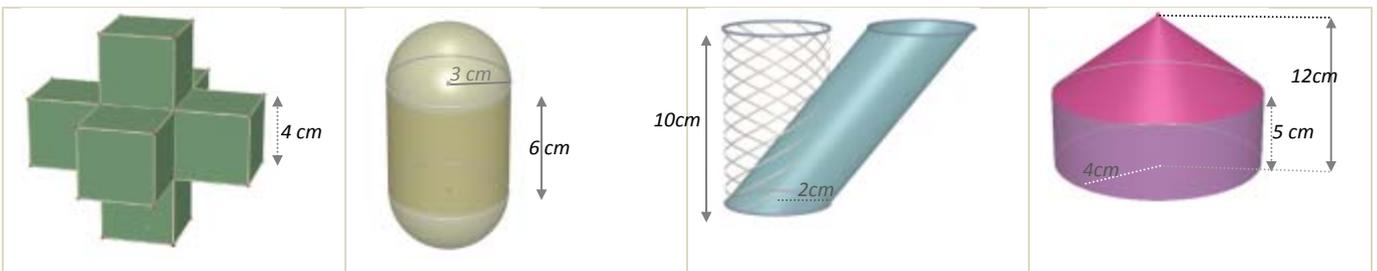
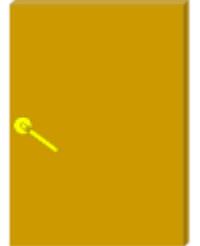


23. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y  $800 \text{ cm}^3$  de volumen.
24. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,20 m de alto y  $248 \text{ dm}^3$  de volumen?
25. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

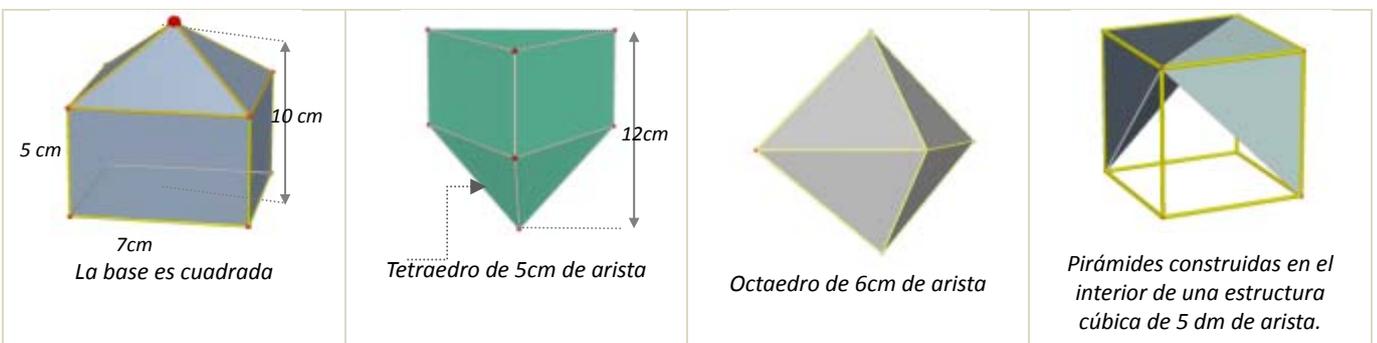
26. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un [anillo](#) de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.
27. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
28. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.
29. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
30. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14,5 m.



31. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y  $6 \text{ dm}^2$  de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
32. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de  $314 \text{ cm}^3$ , calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de  $\pi$ ).
33. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en  $\text{m}^3$ . (Tomar  $\pi=3,14$ ). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
34. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en  $\text{cm}^3$ , el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
35. Una circunferencia de longitud 2,24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar  $\pi=3,14$ ).
36. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por  $\text{m}^2$  en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada  $\text{m}^3$ . A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.
37. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
38. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
39. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31,40 m?
40. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

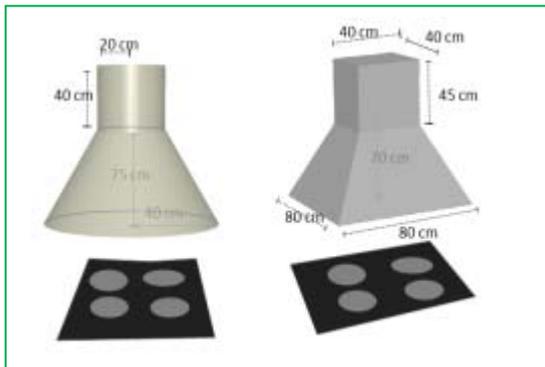
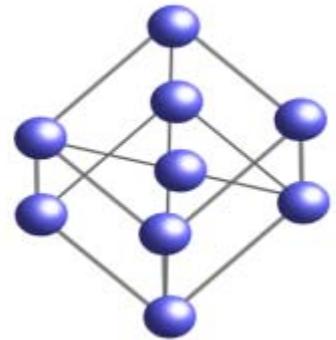


41. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



42. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2,5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/ $\text{m}^2$ . Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

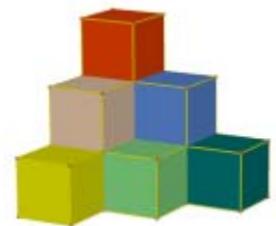
43. Calcula el radio de una esfera que tiene  $33,51 \text{ dm}^3$  de volumen.
44. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?
45. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de  $2\text{€}/\text{dm}^2$ , ¿cuánto dinero ha costado en total?
46. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
- ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
  - ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de  $20 \text{ €/m}^2$ ?



47. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?
48. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,3 metros el nivel del agua?
49. El precio de las tejas es de  $14,30 \text{ €/m}^2$ . ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8

metros de lado de la base?

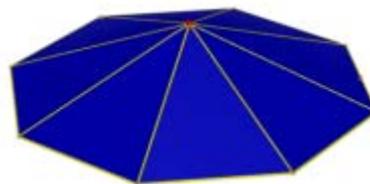
50. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
51. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de  $216 \text{ cm}^3$  de volumen?



52. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
53. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.
54. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.
55. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de  $120^\circ$  y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.



56. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?
57. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?
58. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?
59. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?
60. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira  $360^\circ$  alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.
61. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?



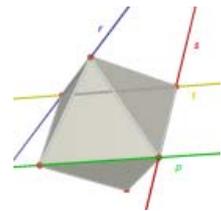
### Husos horarios

62. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?
63. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de  $45^\circ$  y el avión despegó del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?
64. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	$0^\circ$	$51^\circ 30'$ latitud N
PEKIN	$116^\circ$ longitud E	$40^\circ$ latitud N
SAO PAULO	$46^\circ 30'$ de longitud W	$23^\circ 30'$ de latitud S

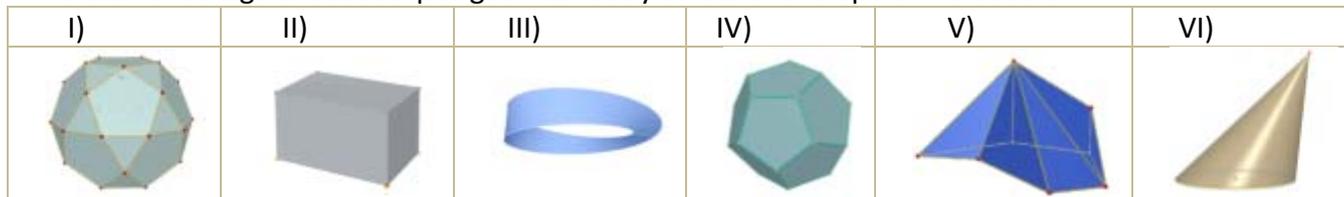
## AUTOEVALUACIÓN

1. Cada una de las rectas  $r$ ,  $s$ ,  $t$  y  $p$  pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:



- a) Las rectas  $r$  y  $s$  son coplanarias y secantes. b) Las rectas  $t$  y  $p$  no son coplanarias.  
c) Las rectas  $r$  y  $p$  se cruzan. d)  $r$  y  $s$  contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:



- a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. b) . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI).  
c) Son poliedros regulares II) y IV). d) Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

- a)  $160 \text{ cm}^2$  b)  $320 \text{ cm}^2$  c)  $400 \text{ cm}^2$  d)  $192 \text{ cm}^2$

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

- a) 13000 L b) 9750 L c) 3750 L d) 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

- a) 38 tejas b) 76 tejas c) 72 tejas d) 36 tejas

6. Una caja de dimensiones  $30 \times 20 \times 15 \text{ cm}$ , está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:

- a) 55 cm b) 65 cm c) 75 cm d) 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

- a)  $5\sqrt{3} \text{ dm}$  b)  $\sqrt[3]{75} \text{ dm}$  c) 150 cm d)  $\sqrt[3]{2250} \text{ cm}$

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

- a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

- a)  $2250 \pi \text{ cm}^2$  b)  $900 \pi \text{ cm}^2$  c)  $1125 \pi \text{ cm}^2$  d)  $450 \pi \text{ cm}^2$

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B, C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	$15^\circ \text{ E}$	$15^\circ \text{ N}$
B	$15^\circ \text{ W}$	$15^\circ \text{ N}$
C	$15^\circ \text{ E}$	$15^\circ \text{ S}$

- a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos.  
b) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más.  
c) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más.  
d) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.