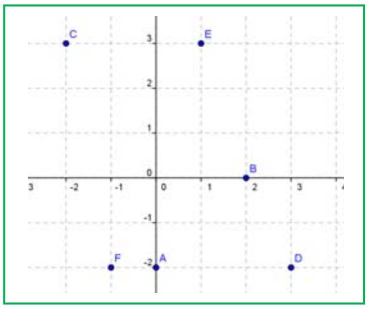
FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 3: FUNCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:



2. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

3. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida

b. Peso y edad de esa misma persona

c. Un número y su mitad

d. Un número y su cuadrado

e. Precio de la gasolina y el día del mes

f. Día del mes y precio de la gasolina

4. Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1,3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

5. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

6. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
$f(x)$	–3	0	5	4	0

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

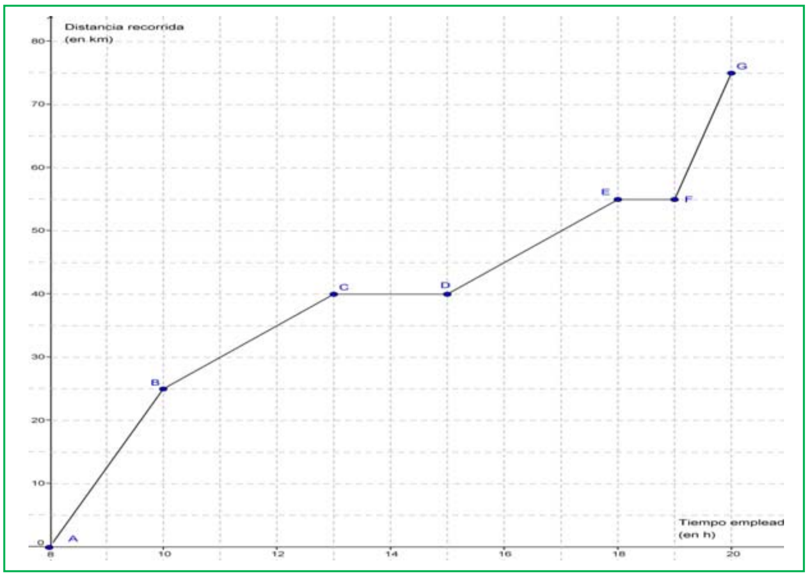
7. Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

8. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

10. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

11. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?

b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?

d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?

e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.

f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.

g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

12. La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

Autores: José Gallegos y David Miranda

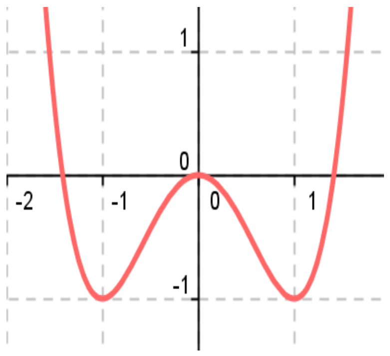
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Textos Marea Verde

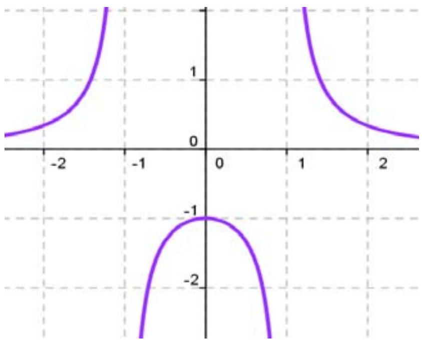
2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

14. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…

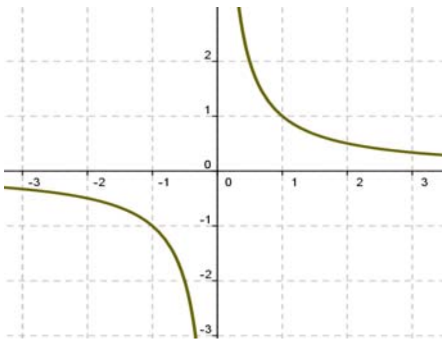
a)



b)



c)



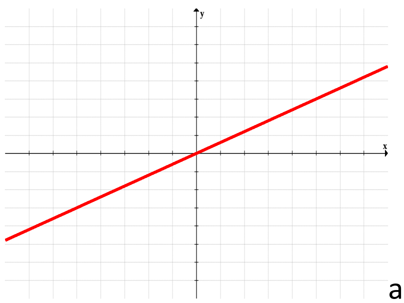
3. TIPOS DE FUNCIONES

15. El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

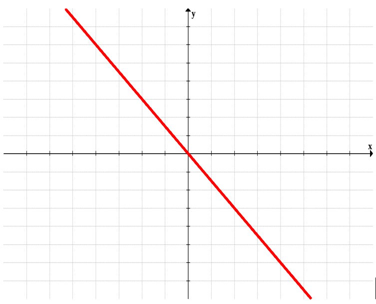
16. Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 1{,}25\cdot x$; b) $y = (3/5)\cdot x$; c) $y = 3\cdot x$; d) $y = 0{,}5\cdot x$;

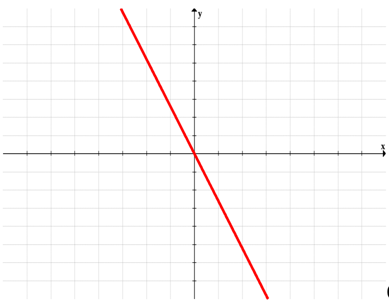
17. Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:



a.

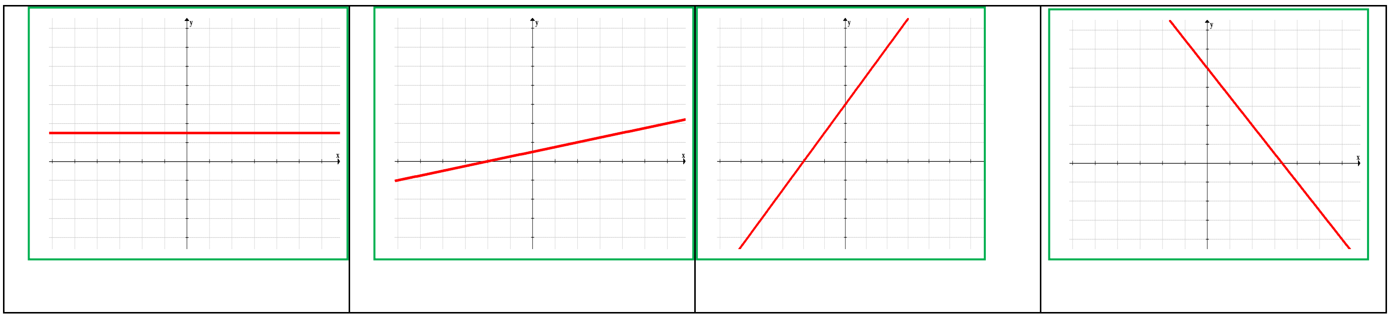


b.



c.

18. Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:



Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

19. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

20. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

21. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

22. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

23. Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan "*x*" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

24. Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.

b) Tomando valores de abscisa negativa.

c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "*x*"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?

d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.

e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.

f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

25. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

26. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿?? b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??

c) Si $a < -1$ entonces ¿¿?? d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

27. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

28. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.

29. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

30. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

31. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y=2x^2+4x-6$ b. $y=6x^2-24x$ c. $y=-2x^2+4x-2$

d. $y=2x^2+5x-12$ e. $y=3x^2+6x-9$ f. $y=-2x^2+7x+3$

g. $y=7x^2+21x-28$ h. $y=5x^2-9x+4$ i. $y=-4x^2-4x-1$

32. Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntala gráficamente.

33. Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).

34. Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35. Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

38. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y=\frac{-1}{x}$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{2x}$

d. $y=\frac{3}{8x}$ e. $y=\frac{-5}{3x}$ f. $y=\frac{-12}{5x}$

39. Describe lo que sucede cuando varía el valor de *k*. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

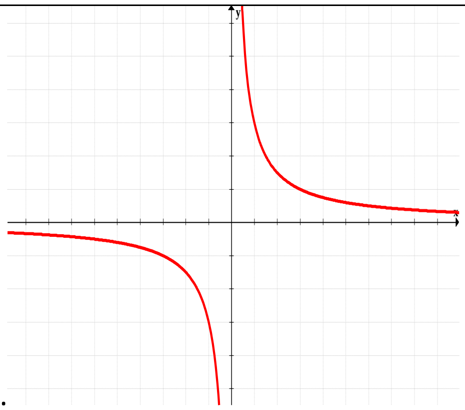
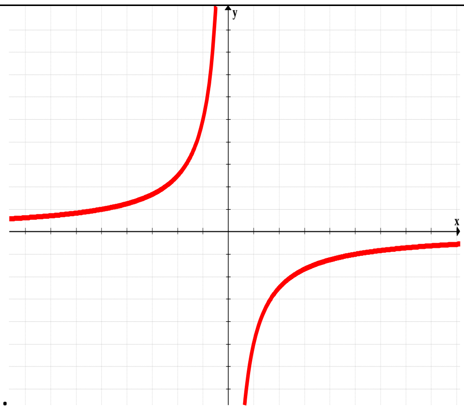
40. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. (5, 3) b. (2, –1) c. (1/2, 6)

d. (10, 4) e. (*a*, 1) f. (1, *b*)

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

41. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

 a.	 b.	
c. $y=\dfrac{9}{2x}$	d. $y=\dfrac{-5}{3x}$	e. $y=\dfrac{-0,3}{x}$
f. $(-5,2)$	g. $(4,-9)$	h. $(1,1/2)$

42. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$$y=\frac{5}{x} \qquad y=\frac{5}{x}+3 \qquad y=\frac{5}{x}-3$$

$$y=\frac{-12}{x} \qquad y=\frac{-12}{x-3} \qquad y=\frac{-12}{x+3}$$

$$y=\frac{3}{x} \qquad y=\frac{3}{x-1}+4 \qquad y=\frac{5x-2}{x-1}$$

43. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros *a* y *b* en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y=\dfrac{k}{x-b}+a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

44. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y=\dfrac{5}{x}$:

a. $y=\dfrac{10}{x-5}+3$ b. $y=\dfrac{1}{x+4}+8$ c. $y=\dfrac{100}{x+10}+1$

d. $y=\dfrac{10}{2x-4}-7$ e. $y=6-\dfrac{4}{x}$ f. $y=\dfrac{20}{5-x}-2$

45. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

47. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y=\dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y=\dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\dfrac{6x+10}{2x-1}$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

48. Representa la gráfica de la función: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, "*y*" tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): ***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): ***y***	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

49. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.

Observa que los valores de "*y*" aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de "*x*" aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

50. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "*x*" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

51. Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

53. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

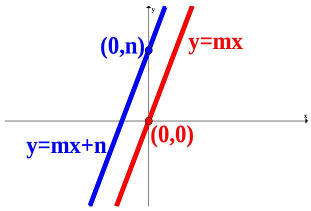
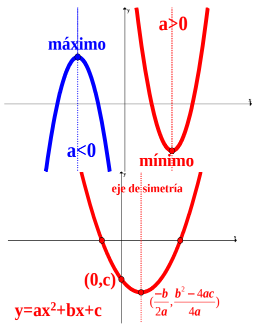
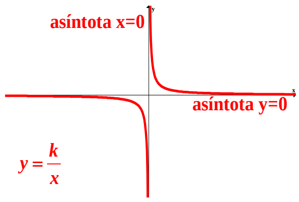
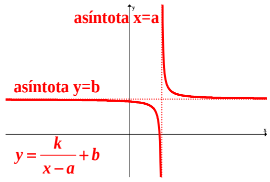
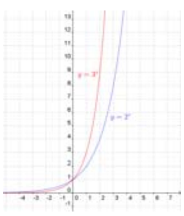
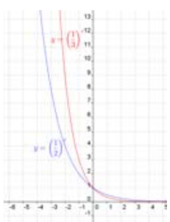
Cultivo de la bacteria *Salmonella*

54. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

RESUMEN

Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: $y = mx$ $y = mx + n$	Se representan mediante rectas. Hay dos tipos: - Funciones lineales o de proporcionalidad directa: $y = mx$, pasan por el origen de coordenadas. - Funciones afines: $y = mx + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto $(0, n)$.	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Se representan mediante parábolas: Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ Puntos de corte con el eje OX: $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: x = 0, es el punto (0, c) Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = k/x$	$\lvert k \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. Dominio y recorrido: $\Re - \{0\}$ Continuidad: Discontinua en $x = 0$. Simetría: Función impar. Asíntotas: Las rectas $x = 0$ e $y = 0$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x-a} + b$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Recorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ es creciente  Si $0 < b < 1$ es decreciente 	

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: *A*(2, 4); *B*(0, 1); *C*(–3, 0); *D*(2, –1'5); *E*(1'5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3).

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:

A(0, 3); *B*(0, 1'7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). ¿Qué tienen en común todos ellos?

4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.

b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.

c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.

7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

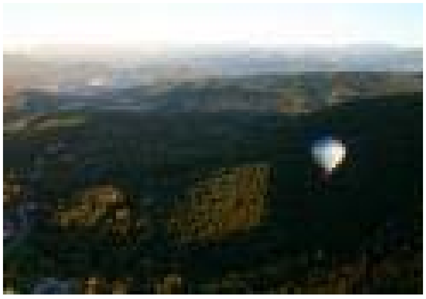
a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Dibuja la gráfica.

c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).

d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:



a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?

c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?

d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

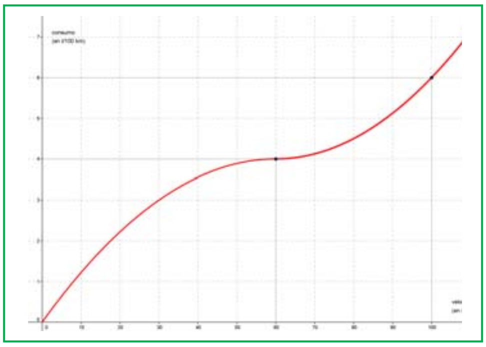
9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a x, así, por ejemplo, E(2'3) = 2.

10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.



14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la independiente?

c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?

d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo

b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo

c) A partir del día 45: altura = 135.

Características de una función

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

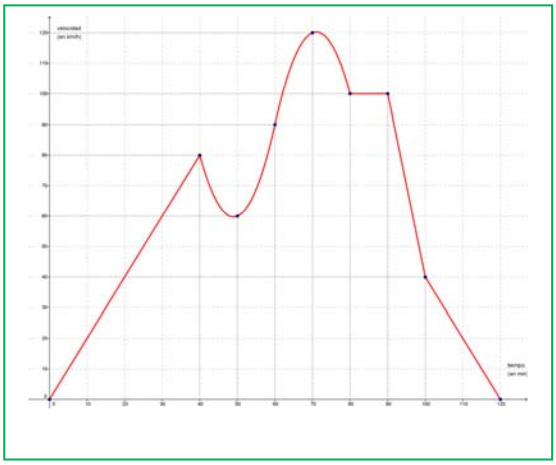
17. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1'20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?

b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

18. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

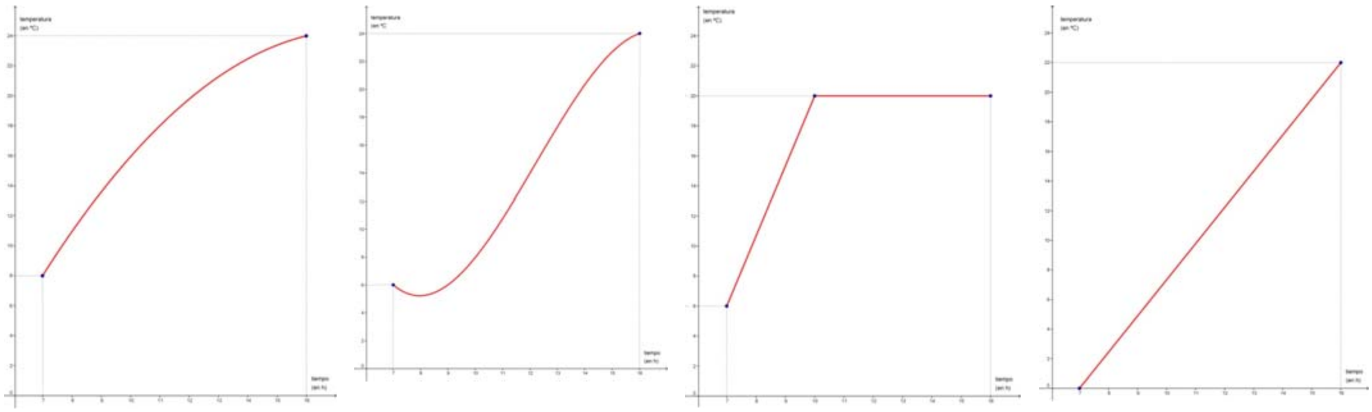
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

19. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



a) Explica la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

20. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).

b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.

c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?

d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?

e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.

g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

21. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.

b) Opuesto e inverso del número *x*: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.

23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.

24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = –2x$; $y = 3x$; $y = –3x$.

25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x – 1$; $y = 2x – 2$; $y = 2x – 3$. ¿Cómo son?

26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.

27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.

b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.

c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

d) Pasa por los puntos $C(–2, 7)$ y $D(–3, 10)$.

e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente *m*.

28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.

b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.

c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x – 13$ b) $y = –x^2 + 8x – 13$ c) $y = x^2 – 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = –x^2 + 4x – 7$

30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x – 12$ b) $y = –2x^2 + 8x – 10$ c) $y = 2x^2 – 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x – 12 = 2(x^2 + 4x – 6) = 2((x + 2)^2 – 4 – 6) = 2((x + 2)^2 – 10)$. Vértice $(–2, –10)$

31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.

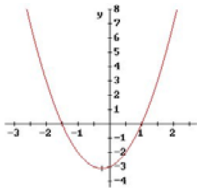
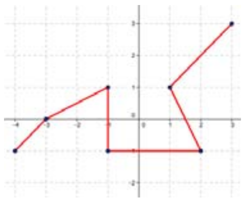
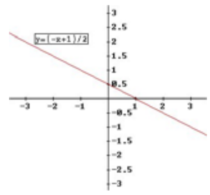
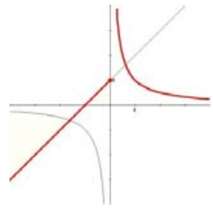
33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{–x}$; $y = (1/3)^{–x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Autores: José Gallegos y David Miranda

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	*y*
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	*y*
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

c)

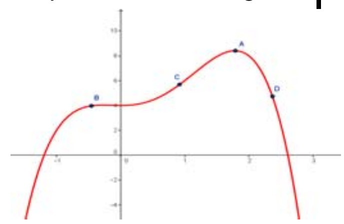
x	*y*
–3	1
–1	2
0	3
2	4

d)

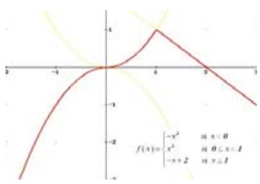
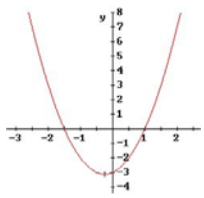
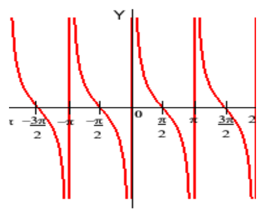
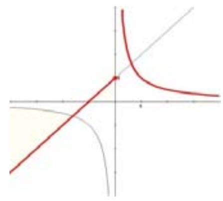
x	*y*
0	1
1	2
4	3
0	4

3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

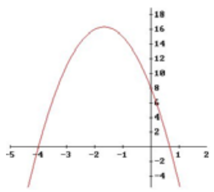
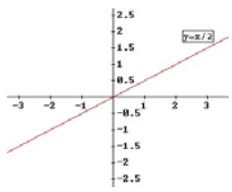
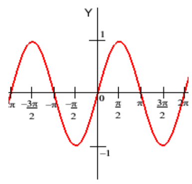
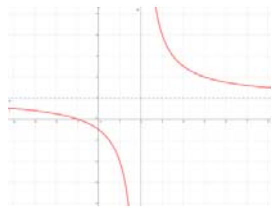
a) b) c) d



4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d) 

6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. La única función cuadrática es:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF