FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

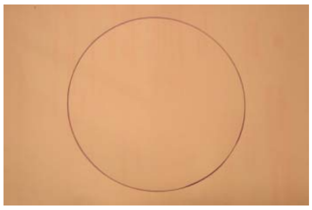
CAPÍTULO 1: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (*N*) así como la cantidad total de minutos de conversación (*M*). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \quad €$$



2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: *x* e *y*:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos c) El cubo de su suma

d) El inverso de su suma e) La suma de sus inversos

4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$. b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$. c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

8. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = 5$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

9. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

$$(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3)$$

$$-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6)$$

11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x-4-(3x+2)+4x$ b) $3(x^2-4x+6)-(x^2-6x+5)$

c) $(-3)(2a+4b)-(2b-3a)$ d) $4(2a^2-2ab+2b^2)-(3a^2-4ab)$

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $4x^4+6x^3+2x^2+5x-2$ b) $9x$ c) $-2x^4+4x^2$

13. Considera los polinomios $p\equiv -2x^3-6x+3$, $q\equiv 2x^2+2x+9$, así como el polinomio suma $s\equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

14. Obtén el valor del polinomio $p\equiv -2x^3-6x+3$ en $x=3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x=3$?

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$ b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$ c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$ d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$ b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$ c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $3x^3-2x^2+x$ b) $-4x^4+2x-5$ c) $-x^2+2x-6$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(-3x^2-4x+2)\cdot 3x^3$ b) $(3x-4)\cdot(-4x^2-6x+5)\cdot(-2x)$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3-40x^2+10x$ b) $60x^4-30x^2$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rl|l}
& 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
\bullet & \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 \\
& 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 &
\end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rl|l}
& 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
& \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 4x \\
\bullet & 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
& \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\
& -4x^2 - 9x - 2 &
\end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl|l}
& 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
& \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 4x - 2 \\
& 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\bullet & \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\
& -4x^2 - 9x - 2 & \\
& \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
& -11x + 4 &
\end{array}$$

22. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$

b) $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

c) $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$

d) $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$

e) $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = -2x^2 + 3$ como resto.

24. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$

b) $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\frac{3}{2}y$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12}=\frac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\frac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

27. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1

b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2

c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1

e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

32. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admite al número 0 como raíz.

37. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admite al número 1 como raíz.

38. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$

e) $-3x$ f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

39. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$

b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$

d) x^3-8x+2 entre $x-3$

40. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

41. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

42. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

43. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2

b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

c) $2x^3+x^2-18x-9$

d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

44. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

45. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2+4x+1$

b) $2x^3-9x^2+12x-4$

46. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

47. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

48. Realiza los cálculos:

a) $(1+4a)^2$

b) $(-x+5)^2$

c) $(-2x-3)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(5x+3)^3$

49. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

50. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

51. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 – 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

52. Efectúa estos productos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$

b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$

c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

53. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) x^2-4x+4

b) $3x^2+18x+27$

c) $3x^5-9x^3$

54. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x – 1)$ b) $(2a – 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 – 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 – 5)$

55. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 – 25$ b) $4a^4 – 81b^2$ c) $49 – 25 x^2$ d) $100 a^2 – 64$

56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente –5 $7\cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio *p*(*x*) entre *q*(*x*) se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, *c*(*x*), y resto, *r*(*x*), tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 3
iii. Que al resultado anterior le sume 18
iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
v. Que divida entre 6 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.

7. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ y $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p + q + r$

b) $p - q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0{,}3x - 0{,}2y + 0{,}1z) \cdot (0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}3z)$ c) $(x - 1)\,(x - a)\,(x - b)$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$

b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula los cocientes:

a. a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.

17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$

c $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$

b) $3x^3+5x^2+x-1$

c) $2x^3+x^2-6x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

x^2-36 $\quad$ $5x^2+1$

$5x^2-11$ $\quad$ x^2-3y^2

x^2-6x+9 $\quad$ x^4-8x^2+16

$x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$ $\quad$ $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

$x^4-2x^3+x^2+2x+1$

23. Descompón en factores:

a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio x^4-5x^2+6.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\dfrac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\dfrac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\dfrac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\dfrac{-1}{2}$ c) –3 y $\dfrac{1}{3}$ d) –3 y $\dfrac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales; b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF