Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 2: Ecuaciones y sistemas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es)**.

Para los apartados 1 y 2, el capítulo 9 del libro de 2º de ESO de “Álgebra” de autora Raquel Caro.

Para los apartados 3, 4 y 5, el capítulo 5 del libro de 3º A de ESO sobre “Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales” de autora Raquel Hernández.

ÍNDICE

Resumen

En la época de El Quijote, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: “ALGEBRISTA Y SANGRADOR” ¿Y eso, por qué?

La palabra “Álgebra” es una palabra árabe que utilizó el matemático Al-Khwarizmi. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: “algoritmo”.

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w’almuqabalah* La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $6x - 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $4x + 2y = 1$ o $3x - 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $2x - 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

1.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, –, –, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -5 - 9$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

- Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x: $6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3$,

2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3;\ 2\cdot 3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

4. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

6. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

7. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

2.1. Procedimiento

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 – 1= 9 – 1$, luego $x + x = 9 – 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

8. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

9. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 – x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 – x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 – 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 – 2x – 68 = 54 – 68.$$

Opera:

$$– x = – 14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por –1:

$$x = – 14/– 1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay 34 – 14 = 20 habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2·20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 – x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 – x)$ patas.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Actividades propuestas

10. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

11. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

12. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

13. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

2.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.
Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x – 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x – 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x – 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.
Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x – 5 = 25$.
Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, 10 + 20 + 25 = 55, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 – 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 – 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

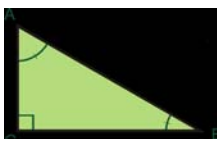
Resuelve la ecuación: $2x +3 –2 – x – 3 + 2= x– x – 3 + 2 + 5$; $2x – x = 4$; $x = 4$

Solución: x = 4 cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, 4 + 5 = 9, y a la base le restamos 2, 11 – 2 = 9, se obtiene un cuadrado.

Actividades propuestas



14. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

15. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

16. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

2.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: 5 · x + 10 (21 – x) = 170

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: 5x + 210 – 10x = 170
Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: 5x – 10x + 210 – 210 = – 210 + 170
Haz operaciones: – 5x = – 40
Despeja la incógnita: x = (– 40) : (– 5) = + 8
Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y 21 – 8 = 13 es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que 8 · 5 = 40 € y 13 · 10 = 130 €. Y que, en efecto, 40 + 130 = 70 €.
Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

Actividades propuestas

17. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado
Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

18. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

19. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

20. Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

21. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

22. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

23. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

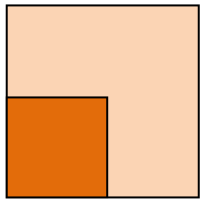
Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = –1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

3.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$3x^2 - 7x + 1= 0; \qquad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Ejemplo 2:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0\,; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0\,; \quad -2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propuestas

24. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

25. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c.*

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1= 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

26. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, (una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

- a) La ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 36 = 52 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas.

- b) La ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1.

  Comprobación: $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

- c) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

  Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 1$.

- d) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

  Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

27. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo:

La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.

La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente b = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente c = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Ejemplo:

En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la b. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3. En efecto, $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$, y $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la *c*. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las raíces son 4 y -4.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común:

$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$

y obtenemos las dos soluciones:

$$x = 0 \text{ y } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Actividades propuestas

28. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

29. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

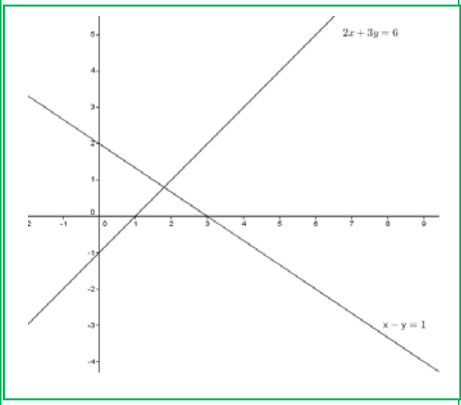
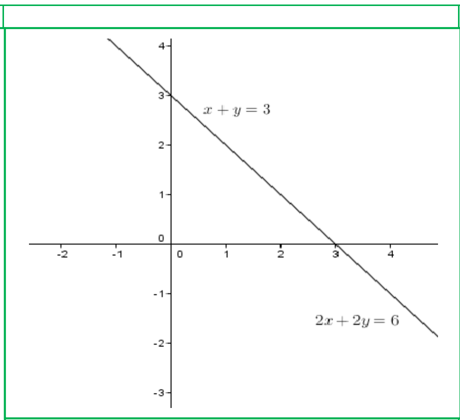
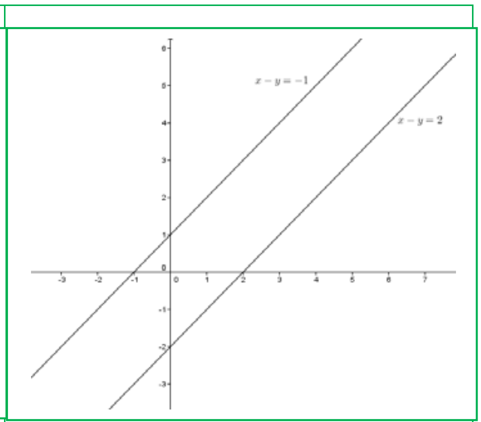
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

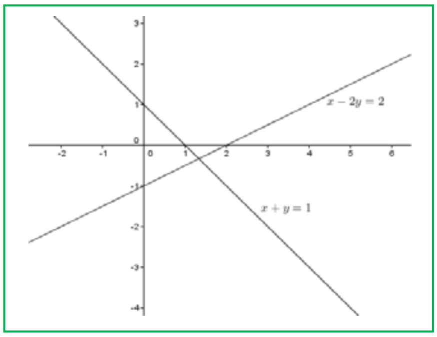
- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

  c) Compatible indeterminado

Solución:

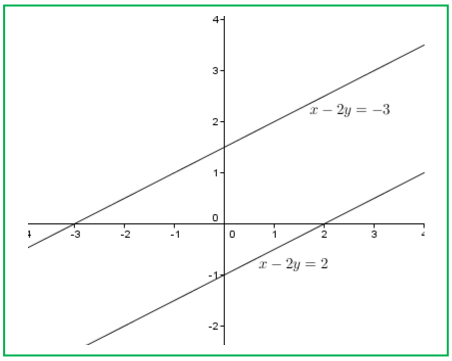


a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.

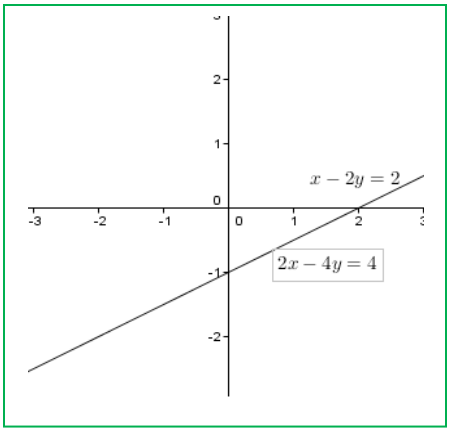
Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

30. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1.$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3-2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

32. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

33. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6\,; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice “número natural” el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

34. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

35. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

36. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

37. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

38. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

39. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

40. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

CURIOSIDADES. REVISTA

CUADRADOS MÁGICOS

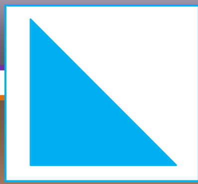
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

Dos ecuaciones de segundo grado interesantes



$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≈ 1,618… que es el número de oro, otro número irracional.

DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

¡Caminante! Aquí yacen los restos de *Diofanto*. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla!

La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte, *Diofanto* descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió *Diofanto*.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x – 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x – 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x – 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x – 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	**$3x – 1 = 2x + 5$** $3x – 2x –1 + 1 = 2x – 2x + 5 +1; x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x – 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x – x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin *x* en el otro. Operar Despejar la *x*.	**$(3x – 1) = 7/2$** 1. $6x – 2 = 7/2$ 2. $12x – 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x – 3$ 3) $x – 2x = – 3 – 7; –x =–10; x = 10$ 4) $10 + 7 = 2· 10 – 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.	$–3x^2 + 7x + –8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 – 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 – 15x = 0 \Rightarrow 3x(x – 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.

Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y=3 \\ 7x-3y=4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Encuentra el número que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

2. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	***Edad en años***
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

3. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

4. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación 3x – 6 = x + 9.

a) $x + 10 = 17,5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2,5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h) 3x = 15* *j) x = 7,5*

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

6. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

7. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

8. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

9. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

13. Resuelve:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

14. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$
6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$
16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$
26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10= 3/2$
36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$
45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x +1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$
48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 -2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$
55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$
59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$
63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$
65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1)= 17 - 3x$
67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$
69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$
75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$
79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemas

15. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

16. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

17. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

18. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.

19. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

20. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

21. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

22. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

23. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

24. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

25. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

26. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

27. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

28. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

29. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

30. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

31. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

32. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

33. Cuadrados mágicos: En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

34. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

38. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0.$

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

39. Cuando el coeficiente *b* es par (*b* = 2*B*), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

40. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x-2)\cdot(x-6) = 0$ b) $(x+1)\cdot(x-3) = 0$ c) $(x-9)\cdot(x-3) = 0$

d) $(x-1)\cdot(x+4) = 0$ e) $(x+7)\cdot(x-2) = 0$ f) $(x-4)\cdot(x+6) = 0$

41. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

42. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

43. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

44. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

45. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Sistemas lineales de ecuaciones

46. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

47. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$

48. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

49. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

50. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

51. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

52. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

53. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

54. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

55. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

56. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

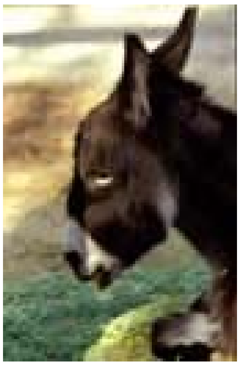
57. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

58. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

59. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

60. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



61. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

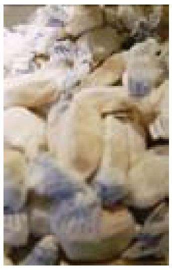
62. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

63. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

64. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

65. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

66. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?



67. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

68. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

69. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

70. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

71. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

72. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

73. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

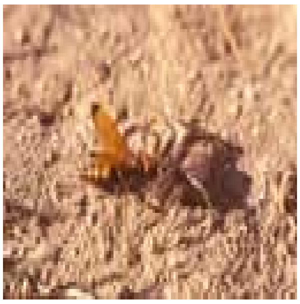
74. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

75. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

76. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

77. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

78. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?



79. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

80. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

81. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3,4 + 5,2x - 8,1x = 9,4 + 7,3x$ es:

a) –10/17 b) +6/–10,2 c) – 10/1,7 d) 0,58

2. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2

3. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$

4. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20

5. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$

6. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$

7. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

8. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

9. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

10. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF