Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 1: Expresiones algebraicas y polinomios

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de Marea Verde. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

CAPÍTULO 3. Expresiones algebraicas. Polinomios. Identidades notables. de **4º A ESO** de autor: **Eduardo Cuchillo Ibáñez**.

ÍNDICE

Resumen

En Babilonia ya utilizaban el Álgebra, pero los egipcios y los griegos la trataban utilizando la Geometría. Los árabes recogieron el saber antiguo de Oriente y Occidente y trajeron el Álgebra a Europa. La palabra "*álgebra*" en árabe significa "*restaurar*" y en el Quijote aparecen algebristas que restauraban los huesos rotos. En el siglo XIII, *Fibonacci*, (Leonardo de Pisa) viajó y contactó con matemáticos árabes e hindúes. Su libro, *Liber abaci*, puede ser considerado el primer libro de Álgebra europeo. En el Renacimiento italiano ya hubo grandes algebristas que se ocupaban, principalmente, de la resolución de ecuaciones.

Luego, el punto de vista cambió. El *Álgebra Moderna* se ocupa de las estructuras algebraicas, que viene a ser el encontrar las propiedades comunes que puedan tener distintos conjuntos, como por ejemplo, encontrar similitudes entre los números enteros, que ya conoces, y los polinomios que vamos a trabajar en este capítulo.

Hoy los ordenadores son capaces de trabajar con expresiones algebraicas.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Llamaremos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números reales, letras y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división.

En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; unas veces deberemos obtener los valores que "resuelven" la expresión, y en otras, como la fórmula del área del triángulo, se verifican para cualquier valor. Según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, ***incógnita***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número real.

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

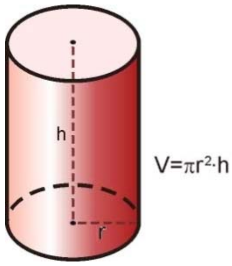
El **valor numérico** de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir las letras de esa expresión por determinados valores.

Ejemplo:

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a: $\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$



- El valor de la expresión 2*a* + 5 para el caso concreto de *a* igual a 3 lo calculamos sustituyendo *a* por 3. Así resulta 2 · 3 + 5 = 11, y se dice que el valor numérico de 2*a* + 5 para *a* = 3 es 11.

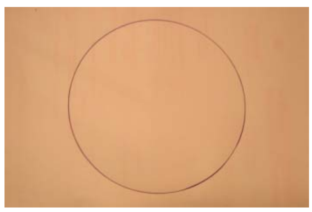
- Si en la expresión $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos las tres variables con los valores $x = 4$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$ surge el número real

$$7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z = 0$.

Actividades propuestas

1. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.



2. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: *x* e *y*:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos

c) El cubo de su suma

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

3. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

7. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

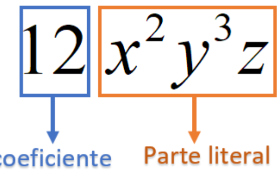
b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.



Un **monomio** viene dado por el producto de números reales y variables (o indeterminadas). Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la **parte literal**, indeterminada o indeterminadas.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el doble de una cantidad, 2·*x*, es un monomio con una única variable, *x*, y coeficiente 2.
- El volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2 + 3xy + 2x$ está formada por tres términos, tres monomios, cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal $x\,y^2$

  El segundo, $3xy$, tiene por coeficiente 3 y parte literal $x \cdot y$

  Y en el tercero, $2x$, el coeficiente es 2 y la parte literal *x.*

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Por ejemplo:

- Son monomios semejantes: $7xy^3$ y $3xy^3$.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- 3·*x* es un monomio de grado 1 en la variable *x*.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Un número real puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividades propuestas

8. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^2 7b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios.

El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Un polinomio está **ordenado** si sus monomios están escritos de menor a mayor grado o viceversa.

Un polinomio es **completo** si están los monomios de todos los grados, sin coeficientes nulos.

Ejemplos:

- $-8x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 23$ es un polinomio de grado 4 en la variable x. Está ordenado y no es completo.
- $7y^3 + 4y - 9$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y. Está ordenado y no es completo.
- $z^2 - 6z + 8$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico, ordenado y completo.
- $5x + 2$ es un polinomio de grado 1 en x. Además, es un polinomio ordenado y completo.

Valor numérico de un polinomio

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por , y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o indistintamente. De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real. En ese caso a $y = p(x)$ decimos que es una función polinómica.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ nos encontramos con el número
  - $p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$
- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es
  - $q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$
- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios, con la misma indeterminada, procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Para sumar monomios: se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio
  - $$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$ $$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$
- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6\,abx^2 - abx$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

$$\begin{array}{rrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x+4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x-6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x-2 \end{array}$$

Actividades propuestas

9. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3)$

b) $-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6)$

10. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x-4-(3x+2)+4x$

b) $3(x^2-4x+6)-(x^2-6x+5)$

c) $(-3)(2a+4b)-(2b-3a)$

d) $4(2a^2-2ab+2b^2)-(3a^2-4ab)$

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Para multiplicar monomios: se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de la parte literal.

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5\cdot(-4)\cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2-4x+6) = (3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6) = 6x^4-12x^3+18x^2$
- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x) = (-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x) = 2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10) =$
  $= 3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10 = 3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x) = (x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x) = (x^4-6x^3)+(-2x^2+12x) = x^4-6x^3-2x^2+12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Polinomio opuesto

Recordemos que el polinomio ***opuesto*** de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q \equiv p+(-q) \equiv p+(-1)\cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & -5x^2 & -3x & +2 \\
- & -2x^4 & +x^3 & +3x^2 & & +6 \\
\hline
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & -5x^2 & -3x & +2 \\
+ & 2x^4 & -x^3 & -3x^2 & & -6 \\
\hline
 & 2x^4 & -x^3 & -8x^2 & -3x & -4
\end{array}
$$

Actividades propuestas

11. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$

b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$

c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

12. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$

b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$

c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

13. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

14. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$

b) $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot \left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo: $6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$

Actividades propuestas

15. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x$ b) $60x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado la suma y el producto de polinomios. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

lo que tenemos es una **fracción algebraica**, que en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el caso particular en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número real. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x = 0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** cuando ambas tienen sentido.

3.2. División de polinomios

Antes de dividir polinomios, vamos a definir cómo dividir dos monomios.

Para dividir dos monomios: se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de la parte literal.

$$ax^n : bx^m = \frac{ax^n}{bx^m} = \left(\frac{a}{b}\right)x^{n-m}$$

Ejemplo: $12x^5 : 4x^3 = \frac{12x^5}{4x^3} = \left(\frac{12}{4}\right)x^{5-3} = 3x^2$

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

  Nos fijamos en el primer monomio del Dividendo $6x^4$ y el primer monomio del divisor $2x^2$.

  – Vamos a dividir estos dos monomios: $\frac{6x^4}{2x^2}=3x^2$

  – El monomio que nos ha dado como resultado se multiplica por el divisor:

  $3x^2\cdot(2x^2-x+3)=6x^4-3x^3+9x^2$

  – El resultado de esta multiplicación, se coloca debajo del Dividendo, haciendo coincidir los exponentes, y **cambiando el signo**. Por último, se realizan las operaciones de monomios, según los signos.

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \big|\ \underline{2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

  – $\frac{8x^3}{2x^2}=4x$

  – $4x\cdot(2x^2-x+3)=8x^3-4x^2+12x$

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \big|\ \underline{2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl} \text{Dividendo: } D(x) & \text{Divisor: } d(x) \\ \boxed{6x^4+5x^3+x^2+3x-2} & \big|\ \underline{\boxed{2x^2-x+3}} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & \ \boxed{3x^2+4x-2}\ \text{Cociente: } C(x) \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ \boxed{-11x+4}\ \text{Resto: } R(x)) & \end{array}$$

La división acaba cuando el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Actividades propuestas

16. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3-2x^2-2x+6$ entre x^2-3x+5

b) $-15x^3-3x^2+4x+5$ entre $5x^3-2x^2-2x+4$

c) $6x^4-7x^3+7x^2-4x-8$ entre $-2x^2+2x+5$

d) $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ entre $4x^3+2x^2+x-2$

e) $-7x^5+3x^2+2$ entre x^2+4

17. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

3.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas debemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Actividades propuestas

18. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

19. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+5x}-\dfrac{6}{x+5}$

20. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\dfrac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\dfrac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\dfrac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\dfrac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

21. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

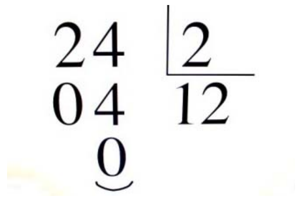
d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

22. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. Factorización de un polinomio



Tal y como ocurre con la división entera, la división de polinomios también puede ser **exacta**, es decir, el resto puede ser el polinomio cero.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -3x^4 & -4x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & +3x^4 & -2x^3 & & & & -x^3+2x-4 \\ \cline{1-3}
 & & -6x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & \\
 & & 6x^3 & -6x^2 & +4x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x^2 & -12x & +8 & \\
 & & & -12x^2 & +12x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

En este caso escribimos $\dfrac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

y diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optamos por una igualdad polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que el haber obtenido como resto el polinomio 0 nos permite expresar el polinomio dividendo, $p(x)$, como producto de otros dos polinomios, los polinomios divisor y cociente, $q(x)\cdot c(x)$ Hemos alcanzado una **factorización** del polinomio $p(x)$, o una **descomposición en factores** de $p(x)$.

En general, un polinomio concreto puede ser factorizado, o descompuesto, por medio de diferentes grupos de factores. Si continuamos con el polinomio $p(x)$ anterior, una manera de obtener una descomposición alternativa consiste en, a su vez, alcanzar una factorización de alguno de los polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que el polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & +2x & -4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & +2x & & x+2 \\ \cline{1-3}
 & -2x^2 & +4x & -4 & \\
 & 2x^2 & -4x & +4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

En efecto, la división es exacta y ello nos lleva a la siguiente igualdad:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la trasladamos a la descomposición que teníamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Actividades propuestas

23. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

Diremos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Es claro que los polinomios de grado 1 no pueden ser descompuestos como producto de otros dos polinomios de menor grado. Son polinomios irreducibles. En el siguiente apartado constataremos que hay polinomios de grado 2 que también son irreducibles.

De las diferentes factorizaciones que puede admitir un polinomio la que más información nos proporciona es aquella en la que todos los factores que intervienen son polinomios irreducibles, puesto que *no es mejorable*. Conviene advertir que, en general, no es fácil alcanzar ese tipo de descomposiciones. Seguidamente vamos a ahondar en esta cuestión.

4.2. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

$$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Actividades propuestas

24. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x = 3$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

b) $x = -2$ de $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

c) $x = 1$ de $x^3 - 3x^2 + x + 1$

d) $x = 0$ de $x^3 - 3x^2 + 1$

e) $x = -1$ de $x^3 - 3x^2 - x + 3$

En el siguiente ejercicio vamos a recoger algunas conexiones entre las raíces de un polinomio y las operaciones de suma y producto de polinomios.

Actividades propuestas

25. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

El que un número real sea raíz de un polinomio está fuertemente conectado con la factorización de dicho polinomio:

Teorema del factor. Un número real concreto α es raíz de un polinomio $p(x)$ si y solo si el polinomio $x - \alpha$ divide a $p(x)$, es decir, si y solo si el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

Ejemplo:

- Volvamos con el polinomio $s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$.

Sabemos que el número 2 es una raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x - 2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & \;x-2 \\ \cline{5-5} \underline{-2x^3} & \underline{+4x^2} & & & 2x^2+6x+4 \\ & 6x^2 & -8x & -8 & \\ & \underline{-6x^2} & \underline{+12x} & & \\ & & 4x & -8 & \\ & & \underline{-4x} & \underline{+8} & \\ & & & 0 & \end{array}$$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Podemos descomponer $s(x)$ de la siguiente forma: $2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$

- Vimos que otra raíz de $s(x)$ es el número -1. Si observamos la precedente factorización de $s(x)$, es evidente que este número -1 no es raíz del factor $x-2$, por lo que necesariamente debe serlo del otro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

  Al haber constatado que -1 es raíz del polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos va a ayudar a descomponer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\ \ x+1\quad} \\ \underline{-2x^2-2x} & 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

  Luego:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunimos lo hecho en los apartados precedentes de este ejemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

  Se ha descompuesto $s(x)$ como producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. A la vista de ellos conocemos todas las raíces de $s(x)$, los números 2, -1 y -2.

Los resultados teóricos que hemos establecido nos conducen a este otro:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca:

Ejemplos:

- El polinomio $t(x)=x^2+1$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1\ >\ 0$$

  Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+1$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces es

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

  Sin embargo, $u(x)=x^4+2x^2+1$ es un polinomio reducible puesto que, obviamente, puede ser expresado como producto de dos polinomios de inferior grado.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Aunque no sea posible demostrarlo, por su dificultad, sí se puede anunciar que todo polinomio de grado impar posee, al menos, una raíz real.

Actividades propuestas

26. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

27. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

28. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

29. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

30. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

31. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$ e) $-3x$

f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

4.3. Regla de Ruffini

En el apartado anterior se probó la equivalencia entre que un número real α sea raíz de un polinomio $p(x)$ y el hecho de que el polinomio mónico de grado uno $x-\alpha$ divida a $p(x)$, esto es, que exista otro polinomio $c(x)$ tal que sea posible una factorización de $p(x)$ del tipo:

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot c(x)$$

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$. Si el resto es 0 el número -2 será una raíz de $p(x)$; si no es 0 el resto, entonces -2 no será raíz de $p(x)$.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

$$\begin{array}{rl}
3x^3-4x^2+x+3 & \left|\ \underline{\;x+2\;}\right. \\
\underline{-3x^3-6x^2} \qquad\qquad & 3x^2-10x+21 \\
-10x^2+\ x\ +3 & \\
\underline{10x^2+20x} \quad & \\
21x+3 & \\
\underline{-21x-42} & \\
-39 &
\end{array}$$

Puesto que el resto no es cero, -2 no es una raíz de $p(x)$.

Vamos a utilizar el método de Ruffini dividiendo el polinomio $P(x)=3x^3-4x^2+x+3$, de grado 3, entre el polinomio mónico $(x+2)$, es decir, de grado 1. Este polinomio es de la forma $(x-\alpha)$, siendo α una posible raíz.

En estos gráficos se muestran las zonas que se utilizan en el método de Ruffini. A la izquierda, las operaciones que se realizan, y a la derecha, cómo coincide con el método de división normal.

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{Coeficientes Dividendo} \\
-\alpha & \text{Multiplicaciones} \\ \hline
 & \text{Sumas o Restas}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \text{Coeficientes Dividendo} \\
\text{Raiz} & \text{Restos intermedios} \\ \hline
 & \text{Cocientes}
\end{array}$$

- Paso 1

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & \downarrow & & & \\ \hline
 & 3 & & &
\end{array}$$

– En la primera fila se escriben los coeficientes del Dividendo.
– En la columna de la izquierda, se escribe el término independiente del divisor (raíz) cambiado de signo
– El primer coeficiente del dividendo se baja a la última fila.

- Paso 2

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
 & & -2\cdot 3 & & \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & & &
\end{array}$$

Se multiplica la raíz por el valor de la última fila que se ha bajado. El resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente en la zona de Multiplicaciones. En este caso es **– 6.**

- Paso 3

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & \boxed{-4} & 1 & 3 \\
-2 & & \boxed{-6} & & \\ \hline
 & & -4-6 & & \\
 & 3 & -10 & &
\end{array}$$

Se operan los valores que aparecen en la misma columna, y el resultado se escribe debajo de la línea en la zona del cociente.

En este caso es **– 10.**

- Paso 4

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ & & -2\cdot 3 & -2\cdot -10 & -2\cdot 21 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & & -4-6 & 1+20 & 3-42 \\ & 3 & -10 & 21 & \boxed{-39} \end{array}$$

Se repite el mismo proceso con los coeficientes que quedan.

- Elección del Cociente C(x) y del Resto R(x)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \boxed{-39} \end{array}$$

Al final nos queda algo así. Al dividir un polinomio por otro mónico, el cociente tendrá un grado menos que el Dividendo, es decir, grado 2.

El cociente será $C(x) = 3x^2 - 10x + 21$ y el resto es el número que está recuadrado, es decir Resto = **– 39**.

Estamos ante la llamada **regla de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x - \alpha$.

Ejemplo:

- Dividamos el polinomio $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x + 4$ entre $x - 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

El cociente es $-x^3 - x^2 - 3x - 4$ y el resto -8. Como el resto no es 0 deducimos que el número 3 no es raíz de $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x + 4$. La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto es, como siempre:

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x + 4 = (x-3)\cdot(-x^3 - x^2 - 3x - 4) + (-8)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x = 3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(3) = (3-3)\cdot(-3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 - 4) + (-8) = 0 + (-8) = -8$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior. Este hecho viene recogido en el denominado teorema del resto.

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x = \alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.

Actividades propuestas

32. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2 + 2x + 2$ entre $x + 1$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$

d) x^3-8x+2 entre $x-3$

33. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

34. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

35. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este tema la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Ejemplos:

- Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para conocer las raíces del polinomio x^2-2 debemos estudiar si hay algún número real α tal que lo anule, es decir, para el que se tenga

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo x^2+4.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo apartado destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

4.4. Cálculo de las raíces de un polinomio

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:
  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  Puede comprobarse que los números enteros 2 y -3 son raíces; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ también son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  En este caso ninguno de esos números es una raíz del polinomio.

Actividades propuestas

36. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

4.5. Factorización de polinomios y fracciones algebraicas

La factorización de polinomios puede ser utilizada para simplificar algunas expresiones en las que intervienen fracciones algebraicas. Veámoslo a través de un par de ejemplos:

Ejemplo:

- Una fracción algebraica como:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, es decir, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Ejemplo:

- En una suma de fracciones polinómicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en los cocientes a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

37. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

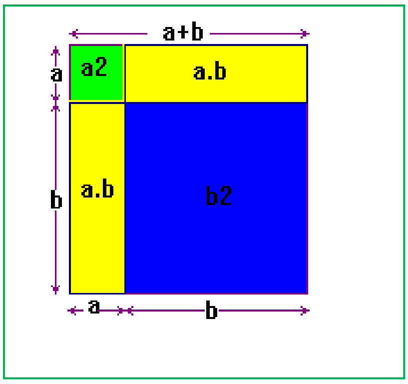
a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

38. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.



Potencias de un binomio.

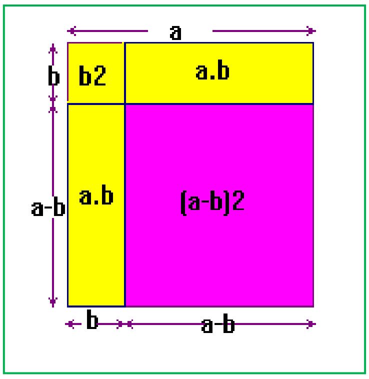
Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Observa los cuadrados de la ilustración y comprueba cómo se verifica.

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Observa los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2x) \cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

39. Realiza los cálculos:

a) $(1+4a)^2$

b) $(-x+5)^2$

c) $(-2x-3)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(5x+3)^3$

40. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

41. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

42. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

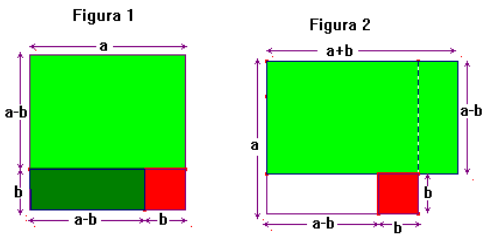
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Observa la ilustración.

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.



Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7) = a^2 - 7^2 = a^2 - 49$
- $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x) =$

  $= (-1)\cdot(5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Actividades propuestas

43. Efectúa estos productos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$

b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$

c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, constituyen una factorización de un polinomio.

Ejemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propuestas

44. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) x^2-4x+4

b) $3x^2+18x+27$

c) $3x^5-9x^3$

45. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

46. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

47. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

CURIOSIDADES. REVISTA

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es **2**!

Analiza cómo tú, el mago, has podido conocer el resultado.

Pasatiempo

A B A

A B A

A B A

B C B

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Demostró dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Trabajó en estructuras algebraicas y en la actualidad el calificativo ***noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra: anillos *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espacios topológicos *noetherianos*, etc.

Cuando intentó dar clases en la Universidad de *Göttingen* el reglamento indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que *Noether* no pudo acceder a la docencia universitaria. Se cuenta, como anécdota, que *Hilbert* dijo en un Consejo de dicha Universidad:

> *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un estable*
> *baños"*

De ella dijo Albert Einstein:

> *"En el reino de Álgebra en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que se ha demostrado que tienen una importancia enorme... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales para conseguir una penetración más profunda en las leyes de*

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

RESUMEN

Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente –5 $7\cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio *p*(*x*) entre *q*(*x*) se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, *c*(*x*), y resto, *r*(*x*), tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 3
iii. Que al resultado anterior le sume 18
iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
v. Que divida entre 6 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.

7. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ y $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p + q + r$

b) $p - q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0,3x – 0,2y + 0,1z) · (0,1x + 0,2y – 0,3z) c) (x – 1) (x – a) (x – b)

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$

b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula los cocientes:

a. a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.

17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$

c $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$

b) $3x^3+5x^2+x-1$

c) $2x^3+x^2-6x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

x^2-36 $5x^2+1$

$5x^2-11$ x^2-3y^2

x^2-6x+9 x^4-8x^2+16

$x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$ $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

$x^4-2x^3+x^2+2x+1$

23. Descompón en factores:

a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio x^4-5x^2+6.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) –3 y $\frac{1}{3}$ d) –3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales; b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.