

Activitats i Exercicis

1r Batxillerat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials I.

ÍNDEX:

1. Nombres reals. Potències i arrels. Notació científica	3
2. Àlgebra	10
3. Funcions	18
4. Límits i continuïtat	29
5. Derivades	34
6. Estadística	42
7. Probabilitat	52
8. Distribucions binomial i normal	59

Librosmareaverde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Marea Verde de Matemáticas

Il·lustracions: Banc d'imatges d'INTEF i dels autors

Traducció: IES Binissalem (Balears)

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02:AAA-044030.

Fecha y hora de registro: 2014-03-25 17:33:18.0

Licencia de distribución: CC BY-NC-SA



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.drights.com>



CAPÍTOL 1: NOMBRES REALS.

ACTIVITATS PROPOSADES

1. NOMBRES REALS

1. Mentalment decideix quins de les següents fraccions tenen una expressió decimal exacta i quins la tenen periòdica:
a) $1/9$ b) $7/5$ c) $9/50$ d) $2/25$ i) $1/8$ f) $3/22$
2. Troba l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teva deducció era correcta.
3. Calcula l'expressió decimal de les fraccions següents:
a) $1/5$ b) $1/3$ c) $5/9$ d) $2/25$ e) $11/400$ f) $1/11$
4. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueix-les, després comprova amb la calculadora si està bé:
a) $8'35$ b) $791'297835$ c) $0'47$
5. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:
a) $9'464646.....$ b) $91'02545454....$ c) $0'9999.....$ d) $3'267123123123.....$
6. Pots demostrar que $2'99999...$ és igual a 3? Calcula quant val $1'5999...$? *Ajuda:* Escriu-los en forma de fracció i simplifica.
7. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ és irracional.
8. Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de $\frac{1}{47}$?
9. Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? T'atreveixes a donar una raó?
10. Fes la divisió $999999:7$ i després fes $1:7$, és casualitat?
11. Ara divideix 999 entre 37 i després $1:37$, és casualitat?
12. Escriu 3 nombres reals que estiguin entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i 1.
13. Escriu 5 nombres racionals que estiguin entre $\sqrt{2}$ i $1'5$.
14. Escriu 5 nombres irracionals que estiguin entre $3'14$ i π .
15. Representa a la recta numèrica els següents nombres:
a) $\frac{9}{5}$ b) $-\frac{13}{4}$ c) $1'342,$ d) $-2'555555....$
16. Representa a la recta numèrica: a) $\sqrt{10}$ b) $-\sqrt{6}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
17. Troba el valor absolut dels següents nombres: a) 5 b) -5 c) $-\pi$
18. Representa les següents funcions: a) $f(x) = |x^2|$ b) $f(x) = |x^2 - 1|$ c) $f(x) = |\sqrt{x}|$
19. Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:
a) Dist(5, 9) b) Dist(-4'5, -2'3)
c) Dist(-1/5, 9/5) d) Dist(-3'272727...., 6'27272727....)
20. Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:
a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$
21. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:
a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$
22. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:
a) Un percentatge superior al 26 %.
b) Edat inferior o igual a 18 anys.
c) Nombres la galleda dels quals sigui superior a 8.
d) Nombres positius la part sencera dels quals té 3 xifres.
e) Temperatura inferior a 25 °C.
f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada (és un nombre real).
g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4.
23. Expressa en forma d'interval els següents entorns:
a) $E(1, 5)$ b) $E(-2, 8/3)$ c) $E(-10, 0'001)$

24. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:

- a) (4, 7) b) (-7, -4) c) (-3, 2)

25. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals? *Pista: 600'222333€ pot ser un sou?

26. Arrodoneix $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ fins a les dècimes i troba els errors absolut i relatiu comeses.

27. Troba una cota de l'error absolut en les següents aproximacions:

- a) 6'3 b) 562 c) 562'00

28. Una balança té un error inferior o igual a 50 g en les seves mesures. Usem aquesta balança per elaborar 5 paquets de cafè de mig quilogram cadascun que són un lot. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quin és la fita de l'error absolut per al·lot?

29. Copia aquesta taula en el teu quadern i arrodoneix amb el nombre de xifres indicat

Nombre	Xifres significatives			
	1	2	3	4
$\sqrt{16}$				
1/9				
3'7182				
42'27				

2. POTÈNCIES D'EXPONENT ENTER. PROPIETATS

30. Calcula les següents potències: a) -2^5 b) $(2 + 1)^4$ c) $-(-2x)^3$

31. Efectua les següents operacions amb potències:

- a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

- a) $2^5 \cdot 4^2$ b) $(3^3)^3$ c) $7^3 / 7^0$
d) $4^4 / 4^{-5}$ e) $5^{-5} \cdot 25^{-2}$ f) $(7^{-3})^{-3}$
g) $4^{-3} / 7^0$ h) $7^{-4} / 7^{-5}$

32. Calcula les següents operacions amb potències:

33. Simplifica: a) $\frac{a^2 \cdot b^3}{(a \cdot b)^4}$ b) $\frac{(2x - 1)^8 \cdot (2x - 1)}{(2x - 1)^7}$ c) $\frac{y^6 \cdot z^{-5} \cdot x^2}{y^8 \cdot z^{-6} \cdot x^3}$ d) $\frac{(3x - 1)^7 \cdot (3x - 1)^5}{(3x - 1)^0}$

3. POTÈNCIES D'EXPONENT RACIONAL. RADICALS

34. Calcula: a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x + 1)^3})^2$

35. Troba: a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

36. Realitza les següents operacions amb radicals: a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x + 3)^2})^3$

4. OPERACIONS AMB RADICALS: RACIONALITZACIÓ

37. Escriu sota un sol radical i simplifica: $\sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[2]{3 \cdot \sqrt[2]{4 \cdot \sqrt[2]{5 \cdot \sqrt[2]{6 \cdot \sqrt[2]{8}}}}}$

38. Calcula i simplifica: $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}$

39. Realitza la següent operació: $\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x}$

40. Calcula i simplifica: $\sqrt[2]{\frac{3}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$

41. Racionalitza l'expressió: $\frac{x + 3y}{\sqrt{x} - \sqrt{2y}}$

42. Racionalitza: $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

43. Racionalitza: $\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - 2}$

5. NOTACIÓ CIENTÍFICA

44. Calcula: a) $(7 \cdot 83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1 \cdot 84 \cdot 10^{13})$ b) $(5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}) : (3 \cdot 2 \cdot 10^{-6})$

45. Efectua i expressa el resultat en notació científica: a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7 \cdot 35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3 \cdot 2 \cdot 10^7$

46. Realitza les següents operacions i efectua el resultat en notació científica:
a) $(4 \cdot 3 \cdot 10^3 - 7 \cdot 2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7 \cdot 8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMES

47. Copia la taula adjunta en el teu quadern i aparella cada logaritme amb la seva potència:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

48. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

49. Calcula utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0'0001$

50. Calcula x utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

51. Calcula, utilitzant la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$
b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

52. Desenvolupa les expressions que s'indiquen: a) $\ln^5 \sqrt{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d} \right)$

53. Expressa els logaritmes dels nombres següents en funció de $\log 3 = 0'4771212$

a) 81 b) 27 c) 59049

54. Simplifica la següent expressió:

$$\frac{1}{2} \log m - 2 \log t - \log p + \frac{5}{2} \log h$$

Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals (Q) i els nombres irracionals	5, -4, 2/3, 7'5, π, e, Φ...
Valor absolut	$ x = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$ -32 = 32 = +32 $
Intervals	Obert: $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ Tancat: $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Semiobert(esq): $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ Semiobert(dre): $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Potències d'exponent natural i enterr	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propietats de les potències	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n / b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 \cdot 5^2 = 5^{2+1} = 5^4$ $(-3)^5)^2 = (-3)^{5 \cdot 2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = ((-2) \cdot (-5))^3$ $3^4 / 2^4 = (3/2)^4$
Potències d'exponent racional	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propietats dels radicals	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalització de radicals	Se suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2 \cdot 3 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5 - \sqrt{3}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})} = \frac{5 + \sqrt{3}}{5^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 + \sqrt{3}}{22}$
Notació científica	Se suprimeixen les arrels del denominador. Es multiplica numerador i denominador per l'expressió adequada (conjugat del denominador, radical del numerador, etc.)	$5'83 \cdot 10^9 + 6'932 \cdot 10^{12} - 7'5 \cdot 10^{10} =$ $(5'83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 =$ $6862'83 \cdot 10^9 = 6'86283 \cdot 10^{12}$ $(5'24 \cdot 10^6) \cdot (6'3 \cdot 10^8) = 33'012 \cdot 10^{14} = 3'32012 \cdot 10^{15}$
Logaritmes	Si $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3} \right)$

EXERCICIS I PROBLEMES:

Nombres reals

2. Classifica els següents nombres en racionals i irracionals i pensa a fracció els racionals:

$$0; 0'2; \sqrt{5}; 3'72; \frac{-1}{7}; 2'321321\dots; -9'9; 9^1; \sqrt{\sqrt{4}}; 3'222; 5'034212121\dots$$

3. Representa, aproximadament, a la recta real els nombres:

$$0'3; -8; \sqrt{3}; 1'2222\dots; 3'5; \sqrt{7}; \frac{1}{7}; 3'777\dots$$

4. Escriu dos nombres en les condicions següents:

a) Majors que 0'12 i menors que 0'13

b) Compresos entre 2'35 i 2'36. Comprova que la diferència entre aquests nombres i 2'36 és menor que una centena

5. Donats els intervals:

$$A = \{x \in \mathbf{R}; 10 \leq x < 1\};$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}; 1/2 < x \leq 3\};$$

$$C = \mathbf{R} - (1, 2)$$

a) Representa'ls a la recta real

b) Calcula les seves longituds

c) Calcula:

$$A \cup B, A \cap B, A \cup C, (A \cap C) \cup B, A \cup B \cup C, A \cap B \cap C$$

6. Calcula x en les següents equacions: (Pista: x pot tenir dos valors)

$$a) |x| = 5 \quad b) |x - 4| = 0 \quad c) |3x + 9| = 21$$

7. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

$$a) |x| < 2 \quad b) |x| \leq 2 \quad c) |x| > 2 \quad d) |x| \geq 2$$

8. Troba dos nombres que distin 4 unitats de 2, i altres dues que distin 2'5 unitats de -3, calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

9. Escriu l'interval $[-2, 6] \cap (2, 9)$.

10. Escriu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x - 8| \leq 3$.

11. Quin és l'error absolut i l'error relatiu comeses en fer les següents aproximacions:

$$a) \sqrt{2} \rightarrow \text{per } 1'73$$

$$b) \pi + 1 \text{ per } 4'1$$

$$c) \text{Arrodoniment a quatre xifres del nombre } \pi$$

Potències

12. Expressa en forma de potència:

$$a) \frac{1}{64}$$

$$b) \frac{t}{t^5}$$

$$c) \left(\frac{1}{z+1}\right)^2$$

$$d) \frac{27^{-2}}{81^{-5}}$$

$$i) \frac{x^{-2} \cdot y^{-7}}{x^8 \cdot y^{-4}}$$

13. Calcula:

$$a) 4^{\frac{1}{2}}$$

$$b) 125^{\frac{1}{3}}$$

$$c) 625^{\frac{5}{6}}$$

$$d) (64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$$

$$e) (8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$$

14. Calcula:

$$a) \frac{(x+1)^2 \cdot (x+1)^3}{(x+1)^4}$$

$$b) \frac{(2x-3)^7 \cdot (2x-3)^5}{(2x-3)^6}$$

$$c) \frac{(5y+1)^6 \cdot (5y+1)^2}{(5y+1)^8}$$

$$d) \frac{(x-1)^4 \cdot (x-1)^0}{(x-1)^3}$$

Radicals

15. Expressa en forma de radical:

$$a) x^{\frac{7}{9}}$$

$$b) (m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$c) [(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$$

$$d) a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$$

16. Expressa en forma de radical:

$$a) (\sqrt[3]{x^2})^5$$

$$b) \sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$$

$$c) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$$

$$d) \sqrt[4]{x^2 \cdot x^3 \cdot x^5}$$

$$e) \sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$$

$$f) \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$$

17. Expressa com a potència única:

$$a) \frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$$

$$b) \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a \cdot \sqrt{a}}$$

$$d) 2 \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$e) a \sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$f) \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt[4]{2}$$

$$g) \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot a^3}{a^3 \cdot \sqrt{a}}$$

18. Simplifica:

$$a) \sqrt[9]{64} \quad b) \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} \quad c) \frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}} \quad d) \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}} \quad e) (\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8 \quad f) \frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}} \quad g) \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$$

19. Extreure factors del radical:

$$a) \sqrt[3]{32x^4} \quad b) \sqrt[3]{81a^3b^5c} \quad c) (\sqrt{\sqrt{2}})^{10} \quad d) \sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}} \quad e) \sqrt{\frac{8a^5}{b^4}} \quad f) \sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} \quad g) \sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$$

20. Introduir factors en el radical:

$$a) 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \quad b) 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad c) 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad d) 2\sqrt[3]{\frac{5}{12}} \quad e) \frac{1}{2}\sqrt{12} \quad f) \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

21. Calcula

$$a) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b^4} \cdot \sqrt[3]{b^2} \quad b) \sqrt{5a} \cdot \sqrt{10ab} \cdot \sqrt{8a^3b} \cdot \sqrt{a} \quad c) \frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} \quad d) \sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}} \quad e) \sqrt{\frac{3}{2}} : \sqrt{\frac{2}{3}} \quad f) \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}$$

22. Efectua:

$$a) \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} \quad b) \sqrt{50a} - \sqrt{18a} \quad c) \sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500} \quad d) \sqrt{\frac{7}{64}} + \sqrt{\frac{7}{4}} \\ e) 5\sqrt[5]{96} - \sqrt[5]{\frac{3}{32}} \quad f) \sqrt[3]{\frac{135}{8}} - \sqrt[3]{\frac{5}{8}} \quad g) \sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$$

23. Racionalitza els denominadors:

$$a) \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \quad b) \frac{3}{2 - \sqrt{3}} \quad c) \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad d) \frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad e) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \quad f) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

24. Racionalitza i simplifica:

$$a) \frac{11}{2\sqrt{5} + 3} \quad b) \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3} \quad c) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} \quad d) \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \quad e) \frac{4\sqrt{15} - 2\sqrt{21}}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}} \quad f) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

25. Efectua i simplifica:

$$a) \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}\right) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \quad b) \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{\sqrt{5} - 1} - 3\sqrt{5} \quad c) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right)$$

Logaritmes

26. Desenvolupa els següents logaritmes:

$$a) \ln \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2 \cdot z^{-4}} \right) \quad b) \log_3 \sqrt[4]{\frac{(xy)^5}{z^{-1/2} \cdot e^2}}$$

27. Simplifica la següent expressió:

$$\log_2 5 - 3\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 9$$

Notació científica:

28. La massa del Sol és 330000 vegades la de la Terra, aproximadament, i aquesta és $5'98 \cdot 10^{21}$ t. Expressa en notació científica la massa del Sol, en quilograms.

29. L'ésser viu més petit és un virus que pesa de l'ordre de 10^{-18} g i el més gran és la balena blava, que pesa, aproximadament, 138 t. Quants virus serien necessaris per aconseguir el pes de la balena?.

30. Els cinc països més contaminants del món (Estats Units, Xina, Rússia, Japó i Alemanya) van emetre 12 bilions de tones de CO_2 l'any 1995, quantitat que representa el 53'5 % de les emissions de tot el món. Quina quantitat de CO_2 es va emetre l'any 1995 a tot el món?

31. Expraquesta en notació científica:

a) Recaptació de les travesses en una jornada de la lliga de futbol: 1628000 €

b) Tones de CO_2 que s'emissionen a l'atmosfera en 1995 en Estats Units 5228'5 milers de milions.

c) Radio de l'àtom d'oxigen: 0'000000000066 m

32. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d) $3'1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e) $(4 \cdot 10^5)^{-2}$

33. Expressa en notació científica i calcula:

a) $(75800)^4 : (12000)^4$ b) $\frac{0'00054110318000}{1520000'0'00302}$ c) $(0'0073)^2 \cdot (0'0003)^2$ d) $\frac{2700000 - 1300000}{0,00003 - 0,00015}$

34. Efectua i expressa el resultat en notació científica:

a) $\frac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$ b) $\frac{7'35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3'2 \cdot 10^7$ c) $(4'3 \cdot 10^3 - 7'2 \cdot 10^5)$

35. Que resultat és correcte de la següent operació expressada en notació científica: $(5'24 \cdot 10^6) \cdot (8'32 \cdot 10^5)$:

a) $4'35968 \cdot 10^{12}$ b) $43'5968 \cdot 10^{13}$ c) $4'35968 \cdot 10^{11}$ d) $4'35968 \cdot 10^{13}$

AUTOAVALUACIÓ

1. El número $8^{-4/3}$ val:

a) un dieciseisavo b) Dues c) Un quart d) Un mitjà.

2. Expressa com a potència de base 2 cadascun dels nombres que van entre parèntesi i efectua després l'operació:

$(16^{1/4}) \cdot (\sqrt[6]{4}) \cdot (\frac{1}{8})$. El resultat és: a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El nombre: $\sqrt[3]{4^3 \sqrt[6]{8}}$ és igual a: a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6} \cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Quàl és el resultat de la següent expressió si l'expressem com a potència única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificant i extrayendo factors la següent expresió té un valor: $\sqrt[2]{\sqrt[6]{625 a^6 \cdot b^7 \cdot c^6}}$

a) $5^3 \cdot a \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{a b^2 \cdot c}$ b) $5 a^3 \cdot b \cdot c^2 \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$ c) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$ d) $5 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt[4]{a^2 \cdot b^3 \cdot c^2}$

6. Quàl dels siguientes valors és igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2} \cdot a$ b) $a^{5/2} \cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3 \cdot a^{-2}$

7. Quàl és el resultat d'aquesta operació amb radicals?: $\sqrt{63} - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2 \cdot \sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{7}$ d) $-\frac{2}{5} \cdot \sqrt{7}$

8. Una expresió amb un únic radical de: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^3} \cdot \sqrt{(x+1)}$ està donada per:

a) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$ b) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8 \cdot (x+2)^9 \cdot (x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x+1)}$

9. Per racionalitzar l'expressió: $\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ cal multiplicar numerador i denominador per:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{5}$ d) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

10. Quàl és el resultat en notació científica de la següent operació?: $5'83 \cdot 10^9 + 6'932 \cdot 10^{12} - 7'5 \cdot 10^{10}$

a) $6'86283 \cdot 10^{12}$ b) $6'86283 \cdot 10^{13}$ c) $6'8623 \cdot 10^{11}$ d) $6'8628 \cdot 10^{12}$

11. Quàl és el resultat de la següent operació expressat en notació científica?: $\frac{5'24 \cdot 10^{10}}{6'3 \cdot 10^{-7}}$

a) $0'8317 \cdot 10^{17}$ b) $8'317 \cdot 10^{16}$ c) $8'317 \cdot 10^{15}$ d) $83'17 \cdot 10^{16}$

ACTIVITATS PROPOSADES

1. POLINOMIS.

1. Realitza la summa i resta dels següents polinomis:

a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

2. Realitza les següents summes de polinomis:

a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

3. Escriu el polinomi oposat de cadascun dels següents polinomis:

a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

b) $-7x^3 - 6x + 5$

c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

4. Considera els polinomis $p \equiv x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Troba els valors que adopta cadascun d'ells para $x = -2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si existeix alguna relació entre aquests tres valors.

5. Obten el valor del polinomi $p \equiv -x - 5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x = 3$?

6. Realitza les següents diferències de polinomis:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

7. Efectua els següents productes de polinomis:

a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$

d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

8. Multiplica cadascun dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgeixin polinomis mònics:

a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$

b) $-2x^3 + x^2 - 1$

c) $-x^2 + x - 7$

9. Calcula i simplifica els següents productes:

a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$

b) $(3x - 4)(4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b)(4b - 3a^2)$

d) $(3a - 6)(8 - 2a)(9a - 2)$

10. Realitza els següents productes de polinomis:

a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$

b) $(2x^2 - 3)(-3x^2 - 5x + 4)(-x)$

11. De cadascun dels següents polinomis extreu algun factor que sigui comú als seus monomis:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

b) $24x^4 - 30x^2$

12. Realitza els càlculs:

a) $(2 + 3a)^2$

b) $(-x + 3)^2$

c) $(-3x + 2)^2$

d) $(x^2 - 1)^3$

e) $(4x^2 + 2)^3$

13. Obtingues les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a) $(a + b + c)^2$

b) $(a + b - c)^2$

14. Desenvolupa les següents potències:

a) $(2x - 5y)^2$

b) $(3x + y/3)^2$

c) $(5x^2 - 5/x)^2$

d) $(3a - b)^2$

e) $(a^2 + b^2)^2$

f) $(3/5i - 2/y)^2$

15. Expressa com quadrat d'una summa o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$

b) $9x^2 - 6x + 1$

c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$

e) $a^4 - 2a^2 + 1$

f) $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectua aquests productes:

a) $(4x^2 + 3y) \cdot (4x^2 - 3y)$

b) $(2x^2 + 8) \cdot (2x^2 - 8)$

c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x)$

17. Divideix els següents polinomis:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

18. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparegui $q(x) = x^2 - x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 - 1$ com a resta.

19. Usa la regla de *Ruffini* per realitzar les següents divisions de polinomis:

- a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$ b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$
 c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$ d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

20. Estudia si és possible usar la regla de *Ruffini*, d'alguna forma, per dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre $2x + 3$.

21. Utilitza la regla de *Ruffini* per conèixer el valor del polinomi $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.

22. Empra la regla de *Ruffini* per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:

- a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$ b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
 c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$ d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins el són:

- a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
 c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$ d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comprova que $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

25. Per a cadascun dels següents polinomis indica què nombres racionals són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins el són:

- a) $3x^2 + 4x - 5$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

26. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α .

- a) Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x) + p_2(x)$?
 b) Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
 c) Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4 \cdot p_1(x)$?

27. Construeix un polinomi de grau 4 tal que posseeixi tres arrels diferents.

28. Determina un polinomi de grau 4 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

29. Construeix un polinomi de grau 4 de manera que tingui una única arrel.

30. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admet al número 0 com a arrel.

31. Demostra una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admet al número 1 com a arrel.

32. Determina les arrels de cadascun dels següents polinomis:

- a) $x + 5$ b) $-x + 3$ c) $7x - 5$ d) $-3x - 11$
 e) $-7x$ f) $x^2 - 8x$ g) $4x^2 - x - 3$ h) $x^3 - 4x$ i) $x^3 + 25x$

33. Simplifica, si és possible, les següents expressions:

- a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

34. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

- a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$ c) $\frac{x^2 y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2 b^2 + 3ab}{a^3 b - ab}$

35. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

- a) $\frac{5}{-3x + 12} + \frac{x + 2}{x^2 - 4x}$ b) $\frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$

36. Efectua els següents càlculs:

- a) $\frac{2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 1}$ c) $\frac{-x}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{x - 1}$ d) $\frac{x - 2}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x - 2}{x + 3}$

37. Realitza les següents operacions alterant, a cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

- a) $\frac{-x^2 + x - 1}{x^3} - \frac{3x + 2}{x^2}$ b) $\frac{x - 2}{x^2 + 3x} - \frac{8}{x + 3}$

38. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:

$$a) \frac{8a^4b^3}{2a^2b^2} = 4a^2b$$

$$b) \frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$$

$$c) \frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$$

$$d) \frac{6a^2b^2 + 8a^2b - 10ab}{2ab^2 + 16a^2b} = \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a}$$

2. EQUACIONS I INEQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU:

39. Resoldre les següents equacions:

$$a) \frac{2x - 4}{3x - 2} = \frac{4}{7}$$

$$b) \frac{x + 8}{x - 1} - \frac{x + 4}{x + 1} = \frac{12x}{x^2 - 1}$$

$$c) \frac{3(2x + 1)}{4} - \frac{5x + 3}{6} + 4x + \frac{x + 1}{3} = x + \frac{151}{12}$$

40. Resoldre:

$$a) \frac{x^2}{25} + \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$$

$$c) 4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$$

$$d) 80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$$

41. Sumant set unitats al doble d'un nombre més els 3/2 del mateix obtenim com resultat el sèxtuplo d'aquest nombre menys 23. Que nombre es tracta?

42. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 metre. Traçar una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quins són les longituds dels segments en què aquesta paral·lela divideix al costat de 54 m?

43. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca. Quant val cada cosa?

44. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 5 + 3x < 2x + 4$$

$$b) 3 + 4x \leq 8x + 6$$

$$c) 5 + 4x > 3x + 2$$

$$d) 1 + 3x \geq 5x + 7$$

45. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 4(3 + 2x) < -(6x + 8)$$

$$b) 7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$$

$$c) 9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$$

46. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 6 + 3x < x/3 + 1$$

$$b) 5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$$

$$c) (2 + 5x)/3 > 4x + 1$$

$$d) (1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$$

47. Escriu una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:

$$a) [2, \infty)$$

$$b) (-\infty, 3)$$

$$c) (4, \infty]$$

$$d) (-\infty, 2)$$

48. Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:

$$a) \sqrt{2x - 3}$$

$$b) \sqrt{-x - 9}$$

$$c) \sqrt{2 - 7x}$$

$$d) \sqrt{-2x + 7}$$

49. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) x^2 - 1 \geq 0$$

$$b) x^2 - 4 \leq 0$$

$$c) x^2 - 9 > 0$$

$$d) x^2 + 4 \geq 0$$

$$e) 2x^2 - 50 < 0$$

$$f) 3x^2 + 12 \leq 0$$

$$g) 5x^2 - 45 > 0$$

$$h) x^2 + 1 \geq 0$$

50. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) x^2 + x \leq 0$$

$$b) x^2 - 5x > 0$$

$$c) x^2 \leq 8x$$

$$d) x^2 \leq 3x$$

$$e) 2x^2 - 3x > 0$$

$$f) 5x^2 - 10x < 0$$

51. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$b) -x^2 - 2x + 8 \geq 0$$

$$c) x^2 + 9x + 14 > 0$$

$$d) x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$e) -x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$f) x^2 + 8x + 16 > 0$$

$$g) x^2 + x + 3 \geq 0$$

$$h) 2x^2 - 3x - 5 \leq 0$$

52. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) x^2 + x - 6 > 0$$

$$b) x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$c) x^2 - x - 20 < 0$$

$$d) x^2 + 5x - 14 \geq 0$$

$$e) -2x^2 + 3x + 2 > 0$$

$$f) 3x^2 + 2x - 1 \leq 0$$

$$g) 5x^2 - 7x - 6 \geq 0$$

$$h) 2x^2 + x - 15 < 0$$

53. Calcula els valors de x perquè sigui possible obtenir les següents arrels:

$$a) \sqrt{x^2 - 1}$$

$$b) \sqrt{-x^2 + 4}$$

$$c) \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

$$d) \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

54. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) (2x + 5)(2x - 5) \leq 11$$

$$b) (2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$$

$$c) \frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 3}$$

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS :

55. Resoldre pel mètode de Gauss els sistemes:

$$a) \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

56. Resol i discuteix si és possible el següent sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

57. Discutir i resoldre quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

a)
$$\begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t = -7 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 4x - y + 3z + 12t = 0 \end{cases}$$

58. Comprem 8 kg de cafè natural i 5 kg de cafè torrefactat, pagant 66 €. Calcula el preu del quilo de cada tipus de cafè, sabent que si barregem meitat i meitat resulta el quilo a 5 €.

59. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la de la seva germana. La suma de les edats dels nens i la de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?

60. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val quatre vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?

61. Les tres xifres d'un nombre sumen 18, si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és mitja aritmètica entre les altres dues. Troba aquest nombre.

62. Troba la regió factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resol els següents sistemes d'inequacions:

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$$

4. PROBLEMES DE MATEMÀTICA FINANCERA.

64. Un empresari incrementa el preu dels seus productes en un 5 % anual. Actualment, un dels seus productes val 18 €. Responde a les següents qüestions:

a. Quant costarà el producte dins de 4 anys?

b. Quant costava fa 4 anys?

c. Quants anys han de passar perquè el preu actual del producte es dupliqui?

65. Calcula el temps que deu estar col·locat un capital de 4500 € en un compte corrent al 2 % d'interès compost anual perquè el capital es dupliqui

66. Calcula el temps necessari perquè un capital impositat a interès compost al 3 % anual es dupliqui. I perquè es tripliqui?

67. Durant quant temps hem d'abonar mensualitats de 60 € al 4 % anual per aconseguir capitalitzar 6500 €?

68. L'avi de Luis, en néixer aquest, va decidir ingressar en un banc un capital de 3600 € a interès compost anual del 3 %. Quants doblers rebrà en complir 25 anys? Si la capitalització s'hagués fet semestral, Quants doblers hagués rebut?

69. Una persona lliura al principi de cada mes i durant 4 anys una quantitat fixa de 60 €. La capitalització és mensual al 3% anual. Quina capital tindrà al final dels 4 anys?

70. Una persona compra un pis en 90000 €. A la signatura del contracte lliura 18000 € i la resta ho paga una entitat financera que li ha concedit el préstec corresponent. Aquesta entitat li cobra el 2 % anual i les quotes d'amortització mensuals. A quant ascendeix cadascuna de aquestes quotes si ha de saldar el deute en 20 anys?

71. Una empresa maderera compra un camió, el qual es compromet a pagar en 13 anualitats al 3 %. Cada anualitat d'amortització ascendeix a 16200 €. Quant va costar el camió?

Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6$ $q = x^2 + 4$ $p + q = x^2 - 3x + 10$ $p - q = -x^2 - 3x + 2$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	
Fraccions algebraiques	És una fracció d'expressions algebraiques	$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Equacions de primer i segon grau	Són igualtats entre polinomis (de primer o segon grau).	$\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$
Desigualtats de primer o segon grau	Desigualtats entre polinomis de primer o segon grau	$x^2 - 6x + 5 > 0$ la seva solució és l'interval (1, 5).
Paràmetres econòmics i socials	Problemes financers que es donen en la realitat i la seva solució	Taxes Nombres índex. Interès simple i compost T.A.E
Anualitats de capitalització o d'amortització	Són pagaments que fem al principi de cada any per formar o amortitzar, juntament amb els seus interessos composts, un capital al cap d'un nombre determinat de t anys.	$C = \frac{a(1+r) \left[(1+r)^t - 1 \right]}{r}$ $a = \frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$

EXERCICIS I PROBLEMES

Polinomis:

1. Estudia si hi ha nombres reals en els quals les següents expressions no poden ser avaluades:

a) $\frac{7x-9}{(x+3)(2x-16)}$

b) $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

2. Calcular quant ha de valer m perquè el valor numèric de l'expressió algebraica següent $\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$ sigui -2 per a $x=0$.

3. Considerem els polinomis $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$, $q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$; $r(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Realitza les següents operacions:

a) $p+q+r$

b) $p-q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

4. Efectua les divisions de polinomis:

a) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ entre $3x^2 + 2x - 5$

b) $6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5$ entre $x^3 + 3x + 5$

5. Assenyala sense efectuar la divisió, si les següents divisions són exactes o no:

a) $\frac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x-3}$

b) $\frac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x-2}$

c) $\frac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x-1}$

6. Construeix un polinomi de grau 2 tal que el número 4 sigui arrel seva.

7. Escribe dos polinomis de graus diferents i que tinguin en comú les arrels 2 i 3.

8. Construeix un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.

9. Troba un polinomi $q(x)$ tal que en dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a residu el polinomi $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

10. Troba les arrels enteres o racionals dels següents polinomis:

a) $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$

b) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

c) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

11. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

b) $5x^3 + 5x^2 + x - 1$

c) $2x^3 + x^2 + 6x - 3$

d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

12. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

13. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^4 + 8x^2 + 16$

c) $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

f) $x^2 - 36$

g) $5x^2 + 1$

h) $5x^2 - 11$

i) $x^4 - 3y^2$

14. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)}$

b) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \frac{x+a}{x-a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b}$

16. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

$$a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{a-y}} \quad b) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) \quad c) \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{3}{x} - \frac{5}{y}}$$

Equacions, inequacions i sistemes:

17. Resoldre les equacions següents:

$$a) \frac{3x-1}{2x-4} = \frac{5}{9} \quad b) \frac{x}{2} + 5 = \frac{3x}{6} - 7 \quad c) \frac{5}{x+1} = \frac{5x}{x-1} - 2$$

18. Resoldre les següents equacions indicant quantes solucions tenen i cuales són:

$$a) \frac{16x^3 - 7}{2x^2 - 3} = 5 + 8x \quad b) x^4 + 8x^2 - 12 = 0 \quad c) 80x^4 - 48x^2 + 7 = 0 \quad d) \frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1$$

19. El catet major d'un triangle rectangle és una unitat major que el catet menor. La hipotenusa és tres unitats major que el catet menor. Es demana:

- a) Escriure l'expressió algebraica que resulta d'aplicar el Teorema de Pitàgores.
b) Calcular la hipotenusa i els catets.

20. En una competició de bàsquet a doble volta participen dotze equips. Cada partit guanyat val 2 punts i els partits perduts, 1 punt (no pot haver-hi empats). Al final de la competició, un equip té 36 punts. Quants partits ha guanyat?

21. Una caixa de forma cúbica s'omple amb cert nombre de glaçons d'un centímetre cúbic i sobren 71 glaçons; però si tots els glaçons que hi ha es posen en una altra caixa que té un centímetre més per cada aresta, falten 200 per omplir-la. Calcula les longituds de les arestes de les dues caixes i el nombre de glaçons que hi ha.

22. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obtenen 594; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica entre les altres dues. Troba el nombre.

23. Volem esbrinar les edats d'una família formada pels pares i els dos fills. Si sumim les seves edats de tres en tres, obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascun d'ells?

24. Resol:

$$a) \frac{x}{3} - 9 < 2 \quad b) \frac{5x}{7} - 7 \leq -5x \quad c) 4(2x-3) > 1 - 7x \quad d) \frac{3(x+4)}{5} < 2x \quad e) \frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6} \quad f) \frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$$

25. Calcula els valors de x perquè sigui possible calcular les següents arrels:

$$a) \sqrt{3x-6} \quad b) \sqrt{-x+3} \quad c) \sqrt{15-3x} \quad d) \sqrt{-6x-24}$$

26. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) 2x^2 - 8 < 0 \quad b) -x^2 + 25 \leq 0 \quad c) -x^2 + 49 \geq 0 \quad d) 5x^2 - 45 \geq 0 \\ e) 9x^2 - 1 > 0 \quad f) 16x^2 - 9 < 0 \quad g) 49x^2 - 36 < 0 \quad h) 121x^2 + 100 \leq 0$$

27. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) -2x^2 + 50x \leq 0 \quad b) 7x^2 + 3x \geq 0 \quad c) 2x^2 < 8x \\ d) -2x^2 - 24x \geq 0 \quad e) -7x^2 + 14x < 0 \quad f) -5x^2 - 30x \geq 0$$

28. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) 5x^2 \leq 0 \quad b) 7x^2 > 0 \\ c) -2x^2 < 0 \quad d) 6x^2 \geq 0$$

29. Calcula els valors de x perquè sigui possible obtenir les següents arrels:

$$a) \sqrt{2x^2+x-3} \quad b) \sqrt{x^2+2x+1} \quad c) \sqrt{-1+2x-x^2} \quad d) \sqrt{x^2+3x+5} \quad e) \sqrt{-x^2+12x+36} \quad f) \sqrt{x^2+6x-27} \quad g) \sqrt{1-4x^2}$$

30. Resol els següents sistemes pel mètode de Gauss i discuteix el resultat:

$$a) \begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases} \\ d) \begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$$

Problemes de Matemàtiques Financeres

31. Una persona lliura al principi de cada mes i durant 4 anys una quantitat fixa de 100 €. La capitalització és mensual al 5 % anual. Quina capital tindrà al final dels 4 anys?
32. L'àvia de Maria, en néixer aquest, va decidir ingressar en un banc un capital de 6000 € a interès compost anual del 7,5 %. Quant diners rebrà en complir 25 anys? Si la capitalització s'hagués fet semestral, quants diners hagués rebut?
33. Taxa Anual Equivalent (T.A.E.). Si col·loquem 600 € al 8 % anual amb capitalització trimestral, en un any, què muntant genera? Al fet que tant per cent hem de col·locar el mateix capital per generar el mateix muntant si la capitalització és anual.
34. Calcula el T.A.E. en els següents casos:
- Partint del muntant que es genera en el problema anterior, quan els interessos es reporten mensualment al 3% anual.
 - Els interessos es reporten trimestralment al 4 % anual.
 - Els interessos es reporten diàriament al 5 % anual.
 - Troba la fórmula general per calcular el T.A.E.
35. Una persona compra un pis per 150000 €. A la signatura del contracte lliura 30000 € i la resta ho paga una entitat financera que li ha concedit el préstec corresponent. Aquesta entitat li cobra un 9 % anual i les quotes d'amortització mensuals. A quant ascendeix cadascuna d'aquestes quotes si ha de saldar el deute en 20 anys?
36. La teva germana s'ha comprat una moto el valor de la qual és de 18000 €. La va a pagar mitjançant quotes trimestrals de 75 € al 6 % anual. Quants anys trigarà a pagar la moto?
37. Al començament de cadascun de 4 anys consecutius dipositem en una llibreta d'estalvi 2000 €. En començar el cinquè any, traiem 6000 € de la llibreta. Quina quantitat de diners queda en la llibreta si sabem que els interessos són composts al 4,5 % anual?
38. A què tant per cent anual ha de prestar-se un capital posat a interès compost perquè en 20 anys es dupliqui? I perquè es dupliqui en 10 anys?
39. Quin és la quota mensual d'amortització d'un préstec hipotecari de 54000 € a 15 anys al 5 % anual? Quina quantitat de diners paguem durant els 15 anys?

AUTOAVALUACIÓ

- Completa adequadament les següents frases:
- La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- Considera el polinomi $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3$. Quin dels següents nombres enters és un candidat *raonable* per ser una arrel seva? a) 3 b) 2 c) -11 d) -7
- La desigualtat $2 < x < 7$ es verifica per als valors: a) 2, 3 i 6 b) 3, 4, 7 i 6 c) 3, 5, 2 i 7 d) 4, 5 i 8
- La solució de la inequació $3^4 + 5^2x - 8^1x < 9^4 + 7^3x$ és: a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10^2$ c) $x > -10/1^7$ d) $x < +6/10^2$
- La suma de les edats de dues persones és major de 40 anys i la seva diferència menor o igual que 8 anys. Quin dels següents sistemes d'inequacions ens permet calcular les seves edats?
- a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$
- El perímetre d'un rectangle és menor que 14 cm. Si la base és major que el doble de l'altura menys 3 cm, algun valor que verifica és sistema és: a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4cm d) base = 9 cm, altura = 2 cm
- Una inequació la solució de la qual sigui l'interval $(-\infty, 5)$ és: a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$
- La solució de la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ és: a) (1, 2) b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (-1, 2)
- Quin és la solució del següent sistema d'equacions?: $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$ a) $x = 5 \ y = 0 \ z = -2$ b) $x = 5 \ y = 0 \ z = 1$ c) $x = -2 \ y = 0 \ z = 5$ d) $x = 0 \ y = - \ z = -2$
- Al mercat d'ocasió del cotxe usat ens venen un cotxe per 3000 €. L'empresa té una entitat financera que cobra un 8 % anual. Quin ha de ser l'amortització mensual per saldar el deute en 2 anys? a) 136'382 € b) 136'482 € c) 135'383 € d) 136'385 €

ACTIVITATS PROPOSADES

1. TIPUS DE FUNCIONS

1. Realitza una taula de valors i representa la funció identitat.
2. Calcula les imatges dels nombres $-3; \frac{-1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$ per la funció $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.
3. Utilitza la recta anterior ($y = 3,5x + 42$) per obtenir el percentatge de curacions esperat per a una dosi de 7'3 mg.
4. Còpia en el teu quadern les següents gràfiques de funcions i indica si l'índex és parell o imparell en les representacions de les següents funcions arrel:
5. Realitza en el teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas similar, suposant que el nombre de bacteris es duplica cada hora.
6. Torna a repetir una altra vegada l'exercici anterior suposant que el nombre de bacteris queda dividit per 2 cada hora. Observaràs que, en el primer cas, els valors de "y" augmenten molt més de pressa i de seguida se surten del paper. Mentre que els valors de "x" augmenten d'1 en 1 els valors d'y es van multiplicant per 2. Això es diu **creixement exponencial**. En el segon cas, com en lloc de multiplicar es tracta de dividir, tenim un **decreixement exponencial**.
7. En el teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $f(x) = x^2$ (funció potencial) i $f(x) = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 5. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.
8. Utilitzant la calculadora, fes en el teu quadern una taula de valors i representa les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = e^{-x}$.
9. Una persona ha ingressat una quantitat de 5000 euros a interès del 2 % en un banc, de manera que cada any la seva capital es multiplica per 1'02.
 - a. Escribe en el teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.
 - b. Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.
 - c. Representa en el teu quadern gràficament aquesta funció. Pensa ben quines unitats hauràs d'utilitzar en els eixos.
10. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multipliqui per 1/3 cada hora. Si la quantitat a les 9 del matí és de 10 milions de bacteris:
 - (a) Fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 3 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap a enrere").
 - (b) Representa gràficament aquestes dades.
11. Representa en el teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les següents funcions:

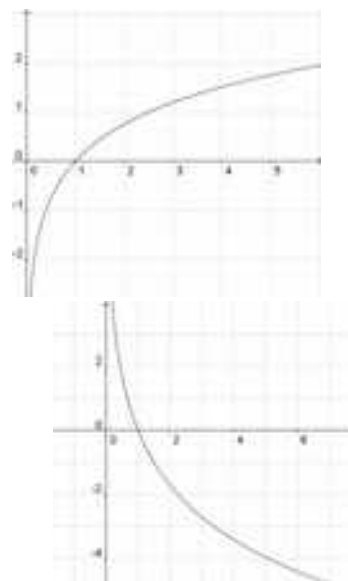
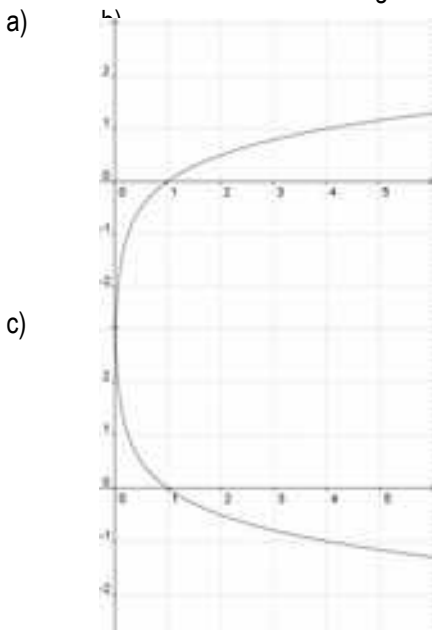
a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log_{1,5} x$

12. Comprova que en tots els casos passen pels punts (1, 0), (a, 1) i (1/a, -1), on a és la base.

13. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seves gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:



14. Representa gràficament la funció valor absolut.

15. Representa les següents funcions a trossos. S'indiquen els punts que has de calcular.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -4 \\ -x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \quad \text{Punts: } -6; -4; -\frac{1}{2}; -0'2; 0; 1; \frac{3}{2}; 4$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -3 \\ x & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad \text{Punts: } -5; -3; -\frac{1}{2}; -0'2; 0; 2; \frac{9}{4}; 4$$

16. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, per sac de taronges, en la segona fila, les quantitats demandades de taronges per setmanes, i en la tercera fila, les quantitats ofertes:

Preu per sac (euros)	8	6	4	2
Quantitat demandada (milers de sacs per setmana)	50	100	200	400
Quantitat oferta (milers de sacs per setmana)	300	250	200	100

a) Dibuixa una gràfica amb les dades d'aquesta taula, representant en l'eix vertical els preus, i en l'eix horitzontal les quantitats demandades i ofertes. Uneix amb un traç continu ambdues corbes.

17. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, del lloguer d'un pis de 70 m², en la segona fila, la quantitat de persones que desitgen llogar un pis, i en la tercera fila, els pisos buits en una determinada ciutat:

Preu d'un pis (euros)	1500	1000	500
Quantitat demandada (persones que desitgen llogar)	10	100	500
Quantitat oferta (pisos lliures)	600	200	50

a) Dibuixa una gràfica de les corbes d'oferta i demanda.

b) Determina de forma aproximada el punt d'equilibri

2. OPERACIONS AMB FUNCIONS

18. Realitza les operacions indicades amb les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a)	$(p+q)(x)$	b)	$(q+r)(x)$
c)	$(q+r+s)(x)$	d)	$(s-q)(x)$
e)	$(q-r)(x)$	f)	$(r-p)(x)$
g)	$(f+p)(x)$	h)	$(j-f)(x)$
i)	$(g+k)(x)$	j)	$(m-a)(x)$
k)	$(b+d)(x)$	l)	$(r+m)(x)$
m)	$(p \cdot q)(x)$	n)	$(q \cdot r)(x)$
o)	$(q : r : s)(x)$	p)	$(p : q)(x)$
q)	$(f \cdot p)(x)$	r)	$(j \cdot f)(x)$
s)	$(g : k)(x)$	t)	$(a \cdot b)(x)$
u)	$(p \circ q)(x)$	v)	$(a \circ b)(x)$
w)	$(r \circ s)(x)$	x)	$(f \circ p)(x)$
y)	$(j \circ f)(x)$	z)	$(g \circ k)(x)$

19. Calcula en el teu quadern les inverses que existeixen de les funcions de l'exercici anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

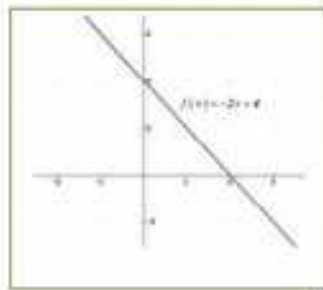
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{j}} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

FUNCIO		INVERSA	FUNCIO		INVERSA
a)	p(x)		b)	q(x)	
c)	r(x)		d)	s(x)	
e)	f(x)		f)	g(x)	
g)	h(x)		h)	j(x)	
i)	k(x)		j)	l(x)	
k)	m(x)		l)	n(x)	
m)	a(x)		n)	b(x)	
o)	c(x)		p)	d(x)	

20. Calcula la funció inversa de:



3. CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS I LES SEVES GRÀFIQUES

21. Calcula en el teu quadern el domini de les següents funcions:

FUNCIO		DOMINI	FUNCIO		DOMINI
a)	$f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-3}$		b)	$j(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
c)	$g(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		d)	$k(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-4}$	
e)	$h(x) = \frac{x+1}{x-1}$		f)	$l(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
g)	$i(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$		h)	$m(x) = \frac{x+1}{x-1}$	

22. Calcula en el teu quadern el domini de cadascuna de les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{j}} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x+2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-5)$$

FUNCIÓ	DOMINI	FUNCIÓ	DOMINI
a) p(x)		b) q(x)	
c) r(x)		d) s(x)	
e) f(x)		f) g(x)	
g) h(x)		h) j(x)	
i) k(x)		j) l(x)	
k) m(x)		l) n(x)	
m) a(x)		n) b(x)	
o) c(x)		p) d(x)	

23. Calcula en el teu quadern els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x} \quad ; \quad f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$$

$$g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 4} \quad ; \quad k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+1}{x}}$$

$$n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} \quad ; \quad a(x) = L(x + 2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3 - 5)$$

FUNCIÓ	PUNTS TALLI EIXOS		FUNCIÓ	PUNTS TALLI EIXOS	
	Ordenades	Abscisses		Ordenades	Abscisses
a) p(x)			b) q(x)		
c) r(x)			d) s(x)		
e) f(x)			f) g(x)		
g) h(x)			h) j(x)		
i) k(x)			j) l(x)		
k) m(x)			l) n(x)		
m) a(x)			n) b(x)		
o) c(x)			p) d(x)		

24. Estudia les simetries i els punts de tall amb els eixos de les següents funcions:

$$f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{-x-1} - 1$$

$$h(x) = x^3 + 4x$$

$$k(x) = e^{-2x} - 22$$

$$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1$$

$$j(x) = \sqrt{15x - 3} \sqrt{-x - 9}$$

$$l(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

25. Calcula en el teu quadern el signe de les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

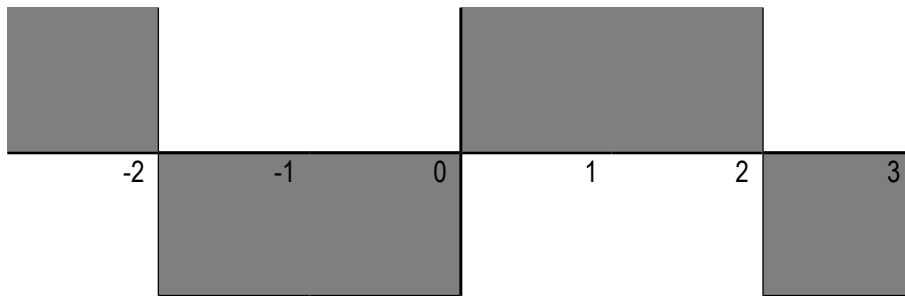
$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+1}{x}} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x + 2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3 - 5)$$

FUNCIO	SIGNE		FUNCIO	SIGNE	
	POSITIU	NEGATIU		POSITIU	NEGATIU
a) p(x)			b) q(x)		
c) r(x)			d) s(x)		
e) f(x)			f) g(x)		
g) h(x)			h) j(x)		
i) k(x)			i) l(x)		
k) m(x)			l) n(x)		
m) a(x)			n) b(x)		
o) c(x)			p) d(x)		

26. Interpreta gràficament els intervals de signe de l'exercici anterior, seguint l'exemple:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Polos: } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) & - \\ f(-1) & + \\ f(1) & - \\ f(3) & + \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{la gràfica de la funció ha} \\ \text{d'anar per la zona no} \\ \text{ombrejada:} \end{array}$$



TIPUS DE FUNCIONS		FÓRMULA
ALGEBRAIQUES	Polinòmiques	Polinomi
	Racionals	Quocient de polinomis
	Irracionals	Arrel d'una racional
TRASCENDENTES	Exponencials	Exponencial (variable en l'exponent)
	Logarítmiques	Logaritme (variable com a argument d'un logaritme)
	Trigonomètriques	Trigonomètrica (variable com a argument d'una raó trigonomètrica)
DEFINIDES A TROSSOS		Diverses fórmules depenent dels valors de la variable

OPERACIÓ	EXEMPLE: $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{-3x}{x+1}$		
<p>Funció summa $f + g$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$</p> <p>$(f + g)(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$</p>	<p>Funció resta $f - g$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$</p> <p>$(f - g)(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$</p>	<p>Funció producte $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$</p> <p>$(f \cdot g)(x) = \frac{-6}{x + 1}$</p>	<p>Funció quocient f/g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$</p> <p>$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 2}{-3x^2}$</p>
Funció composta	<p>$f \circ g \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)$ <small>donde ponga x en f, ponemos g(x) = $\frac{-3x}{x+1}$</small> $= \frac{2}{\frac{-3x}{x+1}} = \frac{2(x+1)}{-3x} = \frac{2x+2}{-3x}$</p> <p><small>g compuesto con f (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)</small></p> <p>$g \circ f \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right)$ <small>donde ponga x en g, ponemos f(x) = $\frac{2}{x}$</small> $= \frac{-3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{-6}{\frac{2+x}{x}} = \frac{-6}{\frac{2+x}{x}} = \frac{-6x}{2+x} = \frac{-6}{x+2}$</p> <p><small>f compuesto con g (se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)</small></p>		
<p>Funció inversa f^{-1}:</p> <p>$\begin{cases} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} \circ f = I \end{cases}$</p> <p>Si existeix, la inversa és única i la seva gràfica i la de la funció són simètriques respecte a la de la funció identitat</p>	<p>1º Cridem i a $f(x)$ 2º Buidem x en funció d'y. 3º Canviem els papers de x i y</p> <p>$g(x) = y = \frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = -3x \Rightarrow$ $\Rightarrow yx + y = -3x \Rightarrow yx + 3x = -y \Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+3) = -y \Rightarrow x = \frac{-y}{y+3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{x+3}$</p>		

CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS			
1) Domini	Conjunt de valors que tenen imatge.		
2) Punts de tall amb els eixos	Ordenades (OY)	$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$	Operació numèrica
		$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay	Gens
	Abscisses (OX) -ZEROS-	$f(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots \Rightarrow (x_1, 0); (x_2, 0); \dots$	Equació
3) Simetria	Parell	$f(-x) = f(x)$	Operació algebraica
	Imparell	$f(-x) = -f(x)$	

FAMÍLIES DE FUNCIONS		Racional	Irracional		Exponencial	Logarítmica	Definida a trossos
Domini (D)		R -{pols}	Índex parell $\{x \in \mathbb{R}; \text{radicant} \geq 0\}$	Índex ímparell R -{punts problemàtics radicant}	R -{punts problemàtics exponent}	$\{x \in \mathbb{R}; \text{argument} > 0\}$	-Valors de la variable -Punts problemàtics de cada fórmula R -{valors que no pren la variable i punts problemàtics inclosos en el rang}
Punts de tall amb els eixos	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$ substituïnt en la fórmula el rang de la qual conté al 0
	OX	Numerador = 0	Radicant = 0	Radicant = 0	No hi ha	Argument = 1	-Cada fórmula = 0 -Solucions que pertanyen al seu rang
Signe		-Zeros i pols -Estudi del signe a la recta real	Positiu sempre excepte en els zeros	Signe del radicand	Positiu en tot el seu domini	$0 < a < 1$: argument < 1: argument > 1: - $a > 1$: argument < 1: - argument > 1:	-Zeros, pols i punts on canvia la definició -Estudi del signe a la recta real
Simetria	PARELL	Tots els graus paris o ímparells	Mai	Simetria del radicand	Argumento parell	Argumento parell	És tan infreqüent la simetria en aquest tipus de funcions que no mereix la pena estudiar-la
	IMPARELL	Tots els graus del N parells i del D ímparells o viceversa			Mai	Mai	

CARACTERÍSTIQUES	$0 < a < 1$		$a > 1$	
	a^x	$\log_a x$	a^x	$\log_a x$
Domini	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
Recorregut	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Punts de tall amb els eixos	Ordenades	$(0, 1)$	$(0, 1)$	
	Abscisses		$(1, 0)$	$(1, 0)$
Signe	Positiu	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$(0, 1)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
	Negatiu		$(1, \infty)$	$(1, \infty)$
Simetria				
DIBUIX				

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Esbossa la gràfica de la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \leq -1, \\ x^3 - x & \text{si } x > -1. \end{cases}$

2. Còpia en el teu quadern i realitza les operacions indicades amb les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

$(s+q)(x)$	$(r+p)(x)$
$(p-q)(x)$	$(p+q+r+s)(x)$
$(q-r-s)(x)$	$(p-q+r-s)(x)$
$(g+h)(x)$	$(s-g)(x)$
$(n-k)(x)$	$(g+d)(x)$
$(b-d)(x)$	$(c+s)(x)$
$(s \cdot q \cdot r)(x)$	$(r \cdot p)(x)$
$(q : p)(x)$	$(s : q)(x)$
$(g \cdot h)(x)$	$(s : g)(x)$
$(n \cdot k)(x)$	$(g : d)(x)$
$(s \circ q)(x)$	$(r \circ p)(x)$
$(q \circ p)(x)$	$(g \circ h)(x)$
$(s \circ g)(x)$	$(n \circ k)(x)$

3. Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Determina els següents elements: el seu domini, punts de tall amb els eixos, signe i simetries.

4. Dibuixa el recinte limitat pels semieixos positius de coordenades i les corbes $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{x}$ i $y = x - 1$.

5. Considerem les següents funcions:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad h(x) = 2^{-x+1} \quad k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1} \quad m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \quad j(x) = L(x^5 - 1) \quad l(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} \quad n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

a) Calcula les següents composicions: $f \circ h$; $g \circ h$; $g \circ j$; $k \circ h$; $g \circ h \circ j$; $m \circ j$; $l \circ h$; $m \circ h$; $j \circ h$; $l \circ m$

b) Calcula $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ i verifica que són les inverses de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. Per què $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no són inverses?

c) Calcula tots els dominis.

d) Calcula els punts de tall amb els eixos de totes les funcions.

6. Un objecte es llança verticalment cap amunt des d'un determinat punt. L'altura en metres aconseguida a el cap de t segundos, ve donada $h(t) = 5 + 4t - t^2$. per Calcula l'altura des de la qual es llança l'objecte i a la qual es troba després d'1 segon. Determina en quin instant aconseguirà l'altura màxima i quin és. Finalment, calcula l'instant en què caurà al sòl i representa gràficament la situació amb les dades obtingudes anteriorment.

7. Considera les funcions $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \sin(x)$ i $g(x) = \sin(2x)$. Dibuixa la regió del plànol limitada per les

gràfiques de f i de g .

8. Sigui la funció donada $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ per . Determina a , b i c sabent que és imparell i que passa pel punt $(1, -2)$.

9. Sigui les funcions definides mitjançant $f(x) = |x(x-2)|$ i $g(x) = x + 4$. Esbossa les gràfiques de f i g sobre els mateixos eixos i calcula els punts de tall entre ambdues.

10. La despesa pel consum de llum (en cèntims d'euro) d'un habitatge, en funció del temps transcorregut (en hores), ens ve donat per l'expressió $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10$ $0 \leq t \leq 12$.

a) Representa gràficament la funció. b) Quin és el consum a les 6 hores? I després de 12 hores?

11. Considera la funció definida per $f(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$. Calcula el seu domini.

12. Dibuixa el recinte limitat per les corbes $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ i $x = 0$.

13. Els guanys d'una empresa, en milions de pessetes, s'ajusten a la funció $f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$, on x representa els anys de vida de l'empresa, quan $x \geq 0$. Calcula el domini, cort amb els eixos, signe i simetries d'aquesta funció.

14. Considera la funció definida per $g(x) = |\ln(x)|$ (on \ln denota el logaritme neperià). Esbossa el recinte limitat per la gràfica de g i la recta $y = 1$. Calcula els punts de tall entre elles.

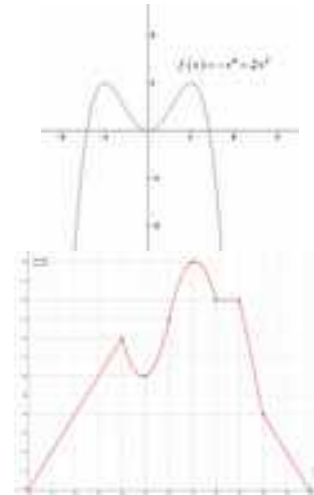
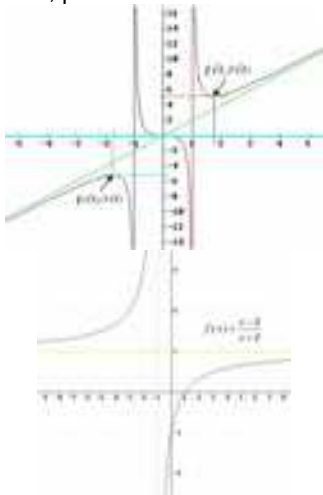
15. Calcula el domini de les següents funcions: $f(x) = \frac{Lx}{x^2}$ (Lx indica logaritme neperià de x); $g(x) = (1 - x^3) \cos x$ i

$$h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$$

16. Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Dibuixa la seva gràfica i, a la vista d'ella, indica el seu domini, els

seus punts de tall amb els eixos i el seu signe.

17. Estudia el domini, punts de tall amb els eixos i signe de les següents funcions:



18. L'estudi de la rendibilitat d'una empresa revela que una inversió de x milions de pessetes produeix un guany de $f(x)$ milions

de €, sent: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$. Raona quin és el rang de valors de la variable, els punts problemàtics de

cadascuna de les fórmules i, finalment, el domini de la funció.

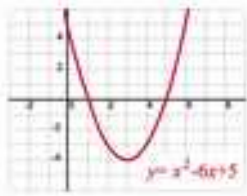
19. Un objecte es llança verticalment cap amunt de manera que l'altura " h " (en metres) a la qual es troba en cada instant " t " (en segons) ve donada per l'expressió $h(t) = -5t^2 + 40t$.

- a) En quin instant aconseguix l'altura màxima? Quin és aquesta altura?
 b) Representi gràficament la funció $h(t)$.
 c) En quin moment de la seva caiguda es troba l'objecte a 60 metres d'altura?
 d) En quin instant arriba al sòl?

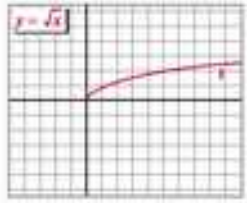
AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina de les següents gràfiques no correspon a una funció:

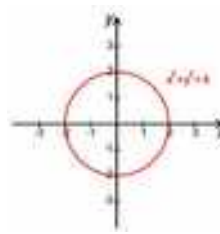
a)



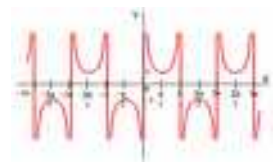
b)



c)



d)



2. La fórmula de la composició fog de les funcions $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = -x^2 + 2$ és:

a) $-2x^2 + 3$

b) $2x^2 - 3$

c) $-4x^2 + 4x + 1$

d) $4x^2 - 4x - 1$

3. La fórmula de la funció inversa o recíproca d'és: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

a) $\frac{x+2}{x-1}$

b) $\frac{-x+1}{x+2}$

c) $\frac{2x+1}{x-1}$

d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

4. La gràfica de la funció $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ és:

a)



b)



c)



d)



5. El domini de la funció $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ és:

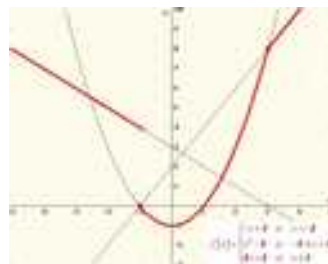
a) \mathbb{R}

b) $\mathbb{R} - \{1\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d) $\mathbb{R} - \{0\}$

6. El recorregut de la funció



és:

a) $[-1, \infty[$

b) $] -1, \infty [$

c) $] -\infty, -1 [$

d) $\mathbb{R} - \{4\}$

7. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses de la funció $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ són:

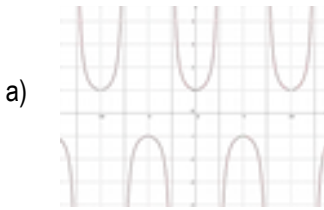
a) No té

b) $(1,0); (2,0)$

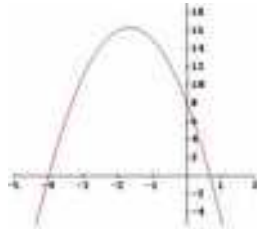
c) $(-1,0); (2,0)$

d) $\{1, 2\}$

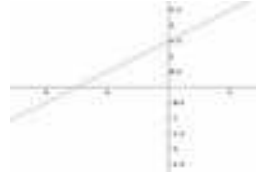
8. L'única funció imparell entre les següents és:



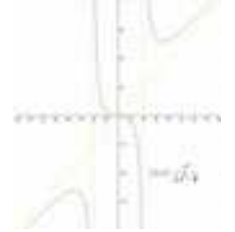
b)



c)



d)



9.L'interval on la funció

és negativa és:



a)

$$]-1,1[$$

b)

$$]-\infty, -1[$$

c)

$$]-\infty, 1]$$

d)

$$]-\infty, 0[$$

ACTIVITATS PROPOSADES

1. LÍMITS

1. Utilitza la definició de límit per provar que $\lim_{x \rightarrow +1} x = 1$.

2. Calcula els límits laterals i determina si existeix el límit en les funcions següents definides a trossos, en els punts en els quals s'uneixen dues branques:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{-2x + 3}{x + 5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{5x^2}{x + 3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2 + 4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x - 1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Classifica els següents límits en finits o infinits, i calcula'ls:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$$

4. Calcula els següents límits, indicant el signe:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$$

5. Calcula els següents límits, indicant el signe:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x - 3} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x - 3}$$

$$\text{6. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$$

$$\text{7. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\text{8. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$$

$$\text{9. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x - 2}{x + 2} - \frac{x}{x^2 - 4} \right)$$

$$\text{10. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \right)$$

$$\text{11. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 1} \right)$$

$$\text{12. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6 + x} - 3}{x^2 - 9} \right)$$

$$\text{13. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1} \right)$$

$$\text{14. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}{x} \right)$$

$$\text{15. Calcula el límit: } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - \sqrt{2 + x}}{x - 2} \right)$$

16. Escriu, sense fer càlculs, el valor dels límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 3}{5x^2 + 2x - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^7 + 2x - 1} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{2x^3 + x^2 - x}$$

17. Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2 - 1} - \frac{x + 1}{x} \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{x - 1} - 3x \right) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right) \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} \right)$$

18. Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\text{senx}) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 - 7x}{x^5 + 100x^2} \right) \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))$$

19. Determina els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$$

20. Determina els límits següents (observa que *no* són tipus e):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5} \right)^{3x^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$$

2. ASÍMPTOTES

21. Determina les asímptotes verticals de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)} \quad \text{d) } f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$$

22. Determina l'asímtota horitzontal de cadascuna de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)} \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)} \quad \text{d) } f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$$

23. Determina l'asímtota obliqua, si existeix, de cadascuna de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1)} \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^2+4}{2(x-1)} \quad \text{d) } f(x) = \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$$

24. Analitza el comportament en l'infinit de cadascuna de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = (x+4)^2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} \quad \text{c) } f(x) = x^3+4 \quad \text{d) } f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}$$

3. CONTINUÏTAT D'UNA FUNCIÓ

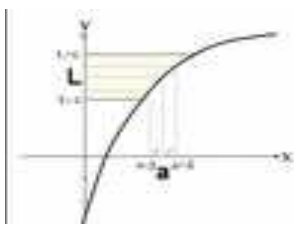
25. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-5} \quad \text{c) } f(x) = \log_2(x-3) \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1+e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

26. Determina el valor de k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en tota la recta real.

27. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = x - \sqrt{x-2} \quad \text{c) } f(x) = |x-3| - 1$$

Definició de límit	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow$ Per tot $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que, sempre que $ x - a < \delta$, es compleix $ f(x) - L < \varepsilon$	
Límit lateral a la dreta	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ quan x tendeix a a , sempre que es compleixi la condició $x > a$	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
Límit lateral a l'esquerra	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ quan x tendeix a a , sempre que es compleixi la condició $x < a$	
Existència de límit	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	La funció té de límit lateral a l'esquerra 8, i de límit lateral a la dreta també 8, doncs $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
Asímptotes	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K$ hi ha una asímptota horitzontal $y = K$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ hi ha una asímptota vertical $x = a$.	$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asímptota horitzontal, $y = 0$ i asímptota vertical $x = 0$
Propietats dels límits	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$.	
Continuïtat d'una funció en un punt	Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$, si per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que sempre que $ x - a < \delta$, es compleix que $ f(x) - f(a) < \varepsilon$.	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ La funció és contínua en $x = 2$
Propietats de les funcions contínues	La suma i el producte de funcions contínues és una funció contínua. El quocient de funcions contínues és una funció contínua si no s'anula el denominador.	Els polinomis són funcions contínues en \mathbf{R} $f(x) = \frac{1}{x}$ és contínua en $\mathbf{R} - \{0\}$
Tipus de discontinuïtat	Evitable. De primera espècie de salt finit. De primera espècie de salt infinit. De segona espècie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = 1/x$ de primera espècie amb salt infinit en $x = 0$

EXERCICIS I PROBLEMES.

Límits

1. Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{-x-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$$

2. Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x})$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$$

Asíntotes

3. Determina les asíntotes de les funcions següents:

$$a) f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$$

$$b) f(x) = \frac{5}{x^2-4}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$$

$$e) f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2}$$

$$f) f(x) = \frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$$

$$g) f(x) = \ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$$

$$h) f(x) = \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$$

Continuïtat

4. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases} \quad c) h(x) = |x^2-5x|$$

5. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = |x^2-25|$$

$$b) g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$$

$$c) h(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$$

6. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}$$

$$b) g(x) = \frac{7x+2}{x^2+x}$$

$$c) h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$$

7. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$$

$$b) g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$$

$$c) h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$$

8. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = \ln \left(\frac{4-x}{x-5} \right)$$

$$b) g(x) = \ln(-x^2-x+2)$$

$$c) h(x) = \ln \left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2} \right)$$

9. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

$$a) f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$$

$$b) g(x) = e^{\sqrt{x-5}}$$

$$c) h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$$

10. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$ a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica

11. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & x < 2 \\ k + x & x \geq 2 \end{cases}$ a) Determina el valor de k perquè la funció sigui contínua en tota la recta real.
b) Representa la seva gràfica
12. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \dots x < -1 \\ x^2 - 5 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$ a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica
13. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 2 \\ x^2 - 4 & x \geq 2 \end{cases}$ a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica
14. Esbossa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 - 25}$ indicant les seves asymptotes i els seus punts de discontinuïtat.
15. Esbossa la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$ indicant les seves asymptotes i els seus punts de discontinuïtat.

AUTOAVALUACIÓ

1. El límit $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ és igual a:
a) ∞ b) 0 c) 1 d) $2/3$
2. El límit $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \times \left(\frac{1}{x + 2} \right)$ és igual a és igual a:
a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1
3. El límit $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$ és igual a:
a) ∞ b) 0 c) $-2/3$ d) -1
4. El límit $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}$ és igual a:
a) $1/2$ b) 0 c) $-\infty$ d) -1
5. El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$ és igual a:
a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
6. El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$ és igual a:
a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
7. El límit $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{2x^2 + 1}$ és igual a:
a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1
8. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.
a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable c) Un salt finit d) Un salt infinit
9. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable c) Un salt finit d) Un salt infinit
10. Estudia la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable c) Un salt finit d) Un salt infinit

ACTIVITATS PROPOSADES

1. CONCEPTE DE DERIVADA.

1. Troba la taxa de variació mitjana en els intervals $[-3, 2]$, $[1, 5]$ i $[0, 3]$ de les funcions següents:

a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x - 3$

c) $y = 0,5x + 2$

d) $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creus que la taxa de variació mitjana de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

2. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^2 - 1$ en els intervals $[-3, 2]$, $[1, 5]$ i $[0, 3]$. És ara constant?

3. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $y = x^3 + 1$ en els intervals $[-3, 2]$, $[1, 5]$ i $[0, 3]$.

Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la taxa de variació mitjana no és constant.

4. En fer un estudi sobre l'aterratge d'avions es grava una pel·lícula des del moment en què l'avió toca terra fins que es para, i es mesuren els temps i les distàncies recorregudes:

Temps (t) en segons	0	2	4	6	8	10	12	14
Distància (d) en metres	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocitat mitjana de l'avió. b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals: $[0, 6]$, $[2, 10]$ i $[6, 14]$. c) És constant?

5. S'estudia la posició d'un cotxe respecte de la sortida d'un túnel i s'obtenen les dades següents:

Temps (segons)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distància (metres)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocitat mitjana del cotxe en l'interval $[0, 40]$.

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals $[15, 25]$ i $[20, 30]$. És constant?

c) Si la velocitat màxima permesa és de 120 km/h, consideres que ha pogut sobrepassar-la en algun moment? I si la velocitat màxima anés de 80 km/h?

6. El tren AVE surt de l'estació i augmenta la seva velocitat fins a arribar a 250 km/h en 10 minuts, manté llavors aquesta velocitat constant durant hora i mitja, i comença a disminuir-la fins a parar-se en altres 10 minuts.

a) Representa en una gràfica la funció temps - velocitat.

b) Ja saps que l'acceleració ens indica la variació de velocitat. Indica l'acceleració mitjana en els primers 10 minuts.

c) Indica l'acceleració mitjana entre el minut 10 i el minut 90.

d) Determina l'acceleració en els últims 10 minuts.

7. La funció de beneficis d'una certa empresa ve donada per: $B(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$, on $B(x)$ indica el benefici que obté l'empresa quan fabrica x unitats. Calcula la taxa de variació mitjana dels beneficis entre 0 i 100 unitats, i la taxa de variació mitjana dels beneficis entre 25 i 100 unitats.

8. Una empresa determina que els costos de producció per treballador contractat són $C(x) = x + \sqrt{x}$, i que els ingressos per vendes també per treballador contractat vénen donats per $l(x) = 2x + x^2$. Per tant els beneficis $B(x)$ per treballador contractat són ingressos menys costos. (Observa que aquestes funcions no són contínues, no es poden contractar 37 treballadors, és una funció escalonada, però anem a treballar amb elles com si anessin contínues). Determina la taxa de variació mitjana si es contracten entre 100 i 2500 treballadors.

9. Troba la derivada de les funcions següents en els punts $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x - 3$

c) $y = 0,5x + 2$

d) $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creïs que la derivada de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

10. Troba la derivada de la funció $y = x^2 - 1$ en els punts $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$. És ara constant?

11. Troba la derivada de la funció $y = x^3 + 1$ en els punts $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$.

Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la derivada no és constant.

12. En el viatge de l'activitat d'introducció el cotxe recorria entre la primera hora i la segona una distància i donada per l'equació: $y = 0,2x^2 + 110x - 67,2$. Determina la velocitat que portava el cotxe per a $x = 1,5$.

13. En aquest viatge la distància recorreguda per $2,5 \leq x \leq 3$ ve donada per l'equació $y = 110x - 121,4$. I per $3 \leq x \leq 5$ per $y = 0,1x^2 + 118x - 146,3$. Per a $x = 3$ hi ha un canvi en la velocitat. Calcula la velocitat abans de $x = 3$, i la velocitat després de $x = 3$.

14. Un vehicle espacial s'enlaira d'un planeta amb una trajectòria donada per: $y = 50x - 0,2x^2$ (x i y en km). L'adreça del vehicle ens la proporciona la recta tangent en cada punt. Determina l'adreça del vehicle quan està a 2 km de distància sobre l'horitzó.

15. Des d'un avió nodrissa es deixa anar un avió experimental que el seu impulsor s'encén a la màxima potència i roman encès 20 segons. La distància que separa a l'avió experimental de l'avió nodrissa ve donada per $d = 0,3t^4$. Calcula la velocitat de l'avió experimental als 3, 4, 7 i 10 segons d'haver estat deixat anar.

16. Representa gràficament la funció $y = 2$, i determina la seva derivada per a $x = 1, 2, 3, \dots$. a. Quant val? És sempre la mateixa? Ocurrerà el mateix per a qualsevol recta horitzontal $y = b$?

17. Dibuixa una funció qualsevol i dos punts sobre ella, $f(x)$ i $f(a)$, corresponents a les ordenades x , a . Interpreta geomètricament la definició de derivada a partir del dibuix.

18. Dibuixa una funció qualsevol i un punt qualsevol sobre la funció $f(a)$. Dibuixa també un segment sobre l'eix d'abscisses amb origen en a i longitud h . Interpreta de nou la definició de derivada en un punt basant-te en aquesta figura.

19. En un exercici anterior vam veure que una empresa determina que els ingressos per vendes per treballador contractat vénen daus per $l(x) = 2x + x^2$. (Observa que aquesta funció no és contínua, no es poden contractar 3 i 7 treballadors, és una funció escalonada, però anem a treballar com si ho anés). Determina la derivada de la funció ingressos respecte a les persones contractades. Què significat creïu que té?

20. Caiguda lliure d'una pilota. En la figura es mostren, mitjançant fotografia estroboscòpica¹, les posicions de la pilota a intervals regulars de temps: per a $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, l'espai recorregut és proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la funció de posició $y = f(t)$, i calcula la velocitat i l'acceleració derivant la funció de posició.

21. Calcula la derivada mitjançant el límit de la funció $y = x^2 - x + 1$ en el punt $x = 1$. Calcula la derivada mitjançant el límit de la funció $y = x^2 - x + 1$ en el punt $x = a$. Calcula mitjançant l'expressió resultant $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5^43)$ i $f'(-7)$.

22. Completa en el teu quadern la següent taula amb les derivades:

Funció	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

23. Pensa en un exemple de funció no derivable i que sí sigui contínua.

2. REGLES DE DERIVACIÓ

24. Escriu les funcions derivades de les funcions següents:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

25. Calcula les derivades de les següents funcions polinòmiques:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^3$; c) $y = 2/3x^4 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

26. Ja hem obtingut la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilitza-la per obtenir la derivada en $x = 1, 4, 5, \dots$. Pots obtenir la derivada en $x = 0$? Raona la resposta.

27. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

28. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$

29. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \sqrt[5]{x^7}$; b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$; c) $y = \frac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$; d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$

30. En un exercici anterior vam veure que una empresa determina que els costos de producció per treballador contractat eren $C(x) = x + \sqrt{x}$, i que els ingressos per vendes també per treballador contractat vénen daus per $l(x) = 2x + x^2$. Per tant els beneficis $B(x)$ per treballador contractat són ingressos menys costos. (Observa que aquestes funcions no són contínues, no es poden contractar 3 i 7 treballadors, és una funció escalonada, però anem a treballar amb elles com si anessin contínues). Determina la derivada de la funció costos $C(x)$ i de la funció beneficis $B(x)$ respecte del nombre de treballadors contractats. Quin significat tenen?

31. Calcula les derivades de les següents funcions:



Posicions de la pilota a intervals regulars de temps, per a $t = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$

1 Un llum estroboscòpic és un instrument que il·lumina una escena durant intervals regulars de temps. Si utilitzem aquest tipus de llum sobre un moviment repetitiu, com la rotació d'una roda, i l'interval coincideix amb un període complet de moviment, l'objecte semblarà estàtic a l'observador.

$$a) y = (x^5 - 7x^3)^{12} \quad b) y = (3x^3 - 5x^2)^7 \quad c) y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad d) y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$$

32. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$a) y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}} (x^4 - 6x^3)^2 \quad b) y = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{x^3 - 5}} \quad c) y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3} \quad d) y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$$

3. APLICACIONS DE LA DERIVADA

33. Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punt $x = 2$

34. El perfil d'una certa muntanya té la forma d'una paràbola: $y = 0'05x - 0'01x^2$, on x i y es mesuren en km. Escriu l'equació de la recta tangent per a $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.

35. El departament de "màrqueting" d'una empresa estima que els ingressos mensuals que va a produir el llançament d'un nou producte vénen daus per: $y = 30 + 5t^2 - 0'4t^3$, on t és el temps expressat en mesos des que el producte surti al mercat, i y són els ingressos en centenars d'euros. a) Calcula si els ingressos estan creixent o decreixent als 3 mesos de llançament del producte. b) Durant quin període de temps augmenten els ingressos? c) Durant quin període de temps disminueixen?

Solució: a) $y' = 10t - 1'2t^2$, $y'(3) = 30 - 10'8 > 0$. Creixent. b) $10t - 1'2t^2 = 0 \rightarrow t(10 - 1'2t) = 0 \rightarrow t = 0$, $10 = 1'2t \rightarrow t = 8'333$. Aproximadament a poc més dels 8 mesos comencen a descendir els ingressos.

36. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y = x^3 + 3x$. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y = x^3 - 3x$. Com és en $x = 0$? I en $x = 2$? I en $x = -2$?

37. En un exercici anterior vam veure que una empresa determina que els costos de producció per treballador contractat eren $C(x) = x + \sqrt{x}$, i que els ingressos per vendes també per treballador contractat vénen daus per $y(x) = 2x + x^2$. Per tant els beneficis $B(x)$ per treballador contractat són ingressos menys costos. La funció beneficis $B(x)$ respecte del nombre de treballadors contractats, és creixent o decreixent?

38. Calcula els màxims i mínims de les funcions següents:

$$a) y = 4x^2 + 3 \quad b) y = 5x^4 - 2 \quad c) y = 3x^3 + 1 \quad d) y = 4x^4 - 2x^2 + 5 \quad e) y = 7x^3 - 3x.$$

39. Es desitja fabricar envasos amb forma de prisma recte quadrangular de base quadrada de manera que el volum sigui d'un litre i la superfície emprada sigui mínima.

40. Determina els màxims i mínims de les funcions següents:

$$a) y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7; \quad b) y = x^3 - 3x + 5; \quad c) y = |x - 4|; \quad d) y = |x + 1| + |x - 2|.$$

41. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en l'interval $[-4, 3]$ i en l'interval $[0, 5]$.

42. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció $f(x) = |x + 2|$ en l'interval $[-3, 5]$.

43. Determina les dimensions d'un con de volum mínim inscrit en una esfera de radió $R = 5$ cm. (Ajuda: L'altura del con és igual a $R + x$, i el radi de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

RESUM

Definició de derivada	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Càlcul de derivades	<p>Si $f(x) = k$ llavors $f'(x) = 0$. Si $f(x) = x^k$ llavors $f'(x) = kx^{k-1}$ Si $f(x) = g(x) + h(x)$ llavors $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ Si $f(x) = kg(x)$ llavors $f'(x) = kg'(x)$ Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ llavors $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$</p> $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ <p>$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$</p>	$y = 7x^3 + 2/x^5 \rightarrow y' = 21x^2 - 10/x^6$ $y = \sqrt{x} \cdot 2x \rightarrow$ $y' = (1/2)\sqrt{x} \cdot 2x + 2\sqrt{x}$ $y = \frac{3x}{x^2 - 1} \rightarrow$ $y' = \frac{3(x^2 - 1) - 3x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$ $y = \sqrt{x^3 + 2} \rightarrow$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}} \cdot 3x^2$
Recta tangent	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangent a $y = x^3 + 2x$ en el punt $(0, 0)$: $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Creixement i decreixement	<p>Si $f'(a) > 0$ llavors $y = f(x)$ és creixent en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ llavors $y = f(x)$ és decreixent en $x = a$.</p>	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$. <ul style="list-style-type: none"> • Per $a < x < -1, y' > 0 \rightarrow y$ creixent. • Per $-1 < x < 1, y' < 0 \rightarrow y$ decreixent • Per $a > x > 1, y' > 0 \rightarrow y$ creixent
Màxims i mínims	<p>Si $(a, f(a))$ és un màxim o un mínim d'$y = f(x)$ i existeix $f'(a)$ llavors $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ llavors $(a, f(a))$ és un punt crític. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) > 0$ llavors $(a, f(a))$ és un mínim. Si $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$ llavors $(a, f(a))$ és un màxim.</p>	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$. $y'(-1) = 0, y''(-1) < 0$, després $(-1, 2)$ és un màxim relatiu. $y'(1) = 0, y''(1) > 0$, després $(1, -2)$ és un mínim relatiu.

EXERCICIS I PROBLEMES

Definició de derivada

1. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = x^3$ en el punt $x = 2$.
2. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
3. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = 1/x^2$ en $x = 4$.
4. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punt d'abscissa $x = 1$.
5. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció $y = x - 3$ en $x = 2$.

Càlcul de derivades

6. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

7. Calcula: a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $D(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

8. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3) \times (x^2 - 5x + 2)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x} \times (x+5)}{(x^2 - 5)}$

9. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$ b) $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$ c) $7i = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

10. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \frac{(x-1) \times (2x-3)}{x+2}$ b) $y = \frac{(3x^2+4) \times (4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \frac{(8x+5x^2) \times (2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \frac{(x+9) \times (2x-3)}{(x+3) \times (x+2)}$

11. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3+2)^5$ d) $y = (2x^2+5x)^9$

12. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7+3x^2)^6$ b) $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3+2)^5 \cdot (x^5-6x^8)$ d) $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

13. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = e^{x^2+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^2-7x^2})^7$ c) $y = e^{3x^2+5x^3}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

14. Calcula les derivades de les següents funcions:

a) $y = \cos(x^5-7x^3) \cdot \sin(x^5-7x^3)$ b) $y = \cos^7(3x^3-5x^2) \cdot \sin^5(3x^3-5x^2)$ c) $y = \cos(4x^5-8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos(2x^2+4x^7)^4}$

Aplicacions de la derivada

15. Calcula les rectes tangents de la gràfica de la funció $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.
16. Calcula les rectes tangents de les gràfiques de les funcions següents en els punts indicats:

a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

17. Indica el pendent de la recta tangent de:

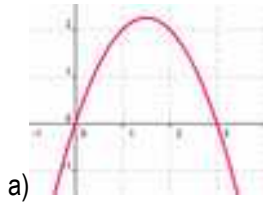
a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

18. Determina les coordenades dels punts de la gràfica $y = x^3 - 3x + 2$ en els quals la seva tangent sigui paral·lela:

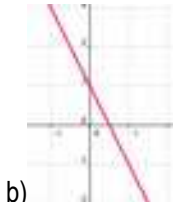
a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

19. Determina la recta tangent de la gràfica de la funció $y = \sqrt[2]{x^3}$ en $x = 0$.

20. Si $f'(x) = x(3 - x)$, quin de les següents gràfiques podria ser la de $f(x)$?



a)



b)



c)



d)

21. Determina les rectes tangents a la funció $f(x) = 4x^3 - 12x$ en els punts en els quals el pendent és 12. Quin és el menor valor que pot tenir el pendent a aquesta corba? En quins punts s'aconsegueix?

22. Determina la recta tangent a la funció $f(x) = x^3 - 3x$ en el punt $A(1, 2)$. En quin un altre punt talla la recta tangent a la funció?

23. Determina els coeficients a , b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx + c$, que passa pel punt $A(1, 2)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $O(0, 0)$.

24. Determina els coeficients a , b i c perquè les funcions $f(x) = x^3 + bx + c$ i $g(x) = cx - x^2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $A(1, 0)$.

25. Determina el coeficient a , perquè la funció $f(x) = x^2 + a$, sigui tangent a la recta $y = x$.

26. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 1/x^2$.

27. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 1/x$.

28. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula els seus màxims i mínims i fes un esbós de la seva gràfica.

29. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula els seus màxims i mínims. En quin punt talla a l'eix d'ordenades? Fes un esbós de la seva gràfica.

30. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

31. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

32. Determina els intervals de creixement i decreixement de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.

33. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en l'interval $[-7, 2]$ i en l'interval $[0, 8]$.

34. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció $f(x) = |x + 3|$ en l'interval $[-3, 3]$.

Problemes

35. L'espai recorregut, en metres, per un vehicle als t segons de passar per un control de radar, ve donat per: $y = 15t + 0,8t^2$. Quina velocitat portava en passar pel control? I als 5 segons? Si continua així, en quin moment passarà dels 120 km/h?

36. La temperatura, T , en graus, d'una bola de ferro que s'està escalfant ve donada per $T = 200 - 500/t$, on t és el temps en segons. El radi, r , en mm, de la bola quan la temperatura és de T graus ve donat per $r = 40 + 0'001T$. A quina velocitat varia el radi quan la temperatura és de 50° , 75° , 100° ? A quina velocitat varia la temperatura als 30 segons? I per a $t = 90$ segons? A quina velocitat varia el radi als 10 segons, als 30 segons i als 90 segons?

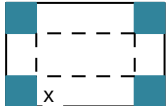
37. La distància, d , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure a la Terra als t segons, ve donada aproximadament per $d = 5t^2$. Si cau un cargol des de la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que està a 57 m d'altura), a quina velocitat arribaria al sòl? I si caigués des de la segona plataforma (que està a 115m)? I des de la tercera plataforma (que està a 274 m)?

38. La funció $y = f(t)$ indica l'espai recorregut, y , en metres, per un cos en el temps t (en segons). Determina en cada cas la funció velocitat i la funció acceleració:

39. a) $y = t^2 - 4t + 3$ b) $y = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $y = -t^2 + 4t + 3$ d) $y = (3t - 4)^2$

40. Un dipòsit cilíndric de 10 metres de diàmetre s'omple d'aigua a $0'3 \text{ m}^3$ per minut. A quina velocitat varia l'altura d'aigua als 2 minuts? I als 5 minuts?

41. La distància, d , en metres, recorreguda per un trineu que es llisca per un pendent gelat, als t segons, ve donada per $d = 0'2t^2 + 0'01t^3$. Determina la velocitat del trineu als 2, 4, 7 i 15 segons. Se sap que si la velocitat del trineu aconseguix els 60 km/h li poden fallar els frens, quan hauria de començar a aplicar els frens per no perdre el control?

42. Volem construir caixes usant cartolines rectangulars de 20 cm per 25 cm. Per a això es talla en cada cantonada un quadrat de costat x , i es doblega. Quin valor ha de tenir el costat del quadrat, x , retallat perquè les caixes continguin un volum màxim? Ajuda: Hauràs d'escriure el volum de les caixes en funció de  x .

43. Uns barrals per emmagatzemar oli són cilíndrics i tenen una capacitat de 150 litres. Si es desitja construir-los de manera que la seva superfície lateral sigui mínima, quant ha de mesurar la seva altura i el radi de la seva base?

44. En fer les proves d'un nou medicament es comprova que segons la dosi, x , en mil·ligrams, que s'administri, el percentatge de curacions, i , ve donat per: $y = 100 - 80/(x + 5)$. No obstant això el medicament té efectes secundaris ja que perjudica al ronyó. El nombre de malalts als quals el tractament produeix efectes secundaris augmenta un 2 % per cada mil·ligram que s'augmenta la dosi. Podries ajudar a determinar la dosi de medicament adequada? Raona la resposta.

45. En una indústria la funció $o = f(t)$ indica el nombre de persones que constitueixen la força del treball en l'instant t , i la funció $v = g(t)$ indica la producció mitjana per persona incorporada per força de treball en l'instant t . (Anem a considerar que ambdues funcions són derivables, encara que en realitat el nombre de persones és sempre un nombre natural, i per tant són funcions escalonades). La producció total és igual a $y = o \cdot v$. Si la força de treball augmenta un 3 % anual, ($o' = 0'03o$) i la producció per treballador augmenta un 2 % anual ($v' = 0'02v$) total, determina la taxa de creixement instantània de la producció total.

46. En l'exercici anterior considera que la funció que indica el nombre de persones que constitueixen la força del treball en l'instant t és $o = f(t) = 3t$ i que la funció $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producció mitjana per persona incorporada per força de treball en l'instant t . La producció total és igual a $y = o \cdot v$. Determina la taxa de creixement instantània de la producció total.

47. Si en l'exercici anterior consideres que la força de treball ha disminuït un 5 % anual, i la producció per treballador ha augmentat un 3 % anual total, determina llavors la taxa de creixement instantània de la producció total. Creix o decreix la producció total?

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quin de les següents expressions és la definició de derivada d'una funció en $x = a$:

a) $\lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$

2. La derivada d' $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ és:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

3. La derivada de $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ és:

- a) 15/11 b) -10/25 c) -16/121 d) 1/3

4. La derivada d' $y = t^{x^2+3}$ és:

- a) $y' = 2x \cdot t^{x^2+3}$ b) $y' = 2(t^x)^2 \cdot t^x$ c) $y' = 3 + t^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2t^x$

5. La derivada $y = \cos(x^3)$ és:

- a) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x^3))$ b) $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -\sin(x^3) \cdot \cos(3x^2)$ d) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$

6. L'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ és:

- a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

7. L'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ és:

- a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$

8. La funció $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ és:

- a) creixent b) decreixent c) aconseguix un mínim d) aconseguix un màxim

9. Si la derivada d'una certa funció és: $y' = (x - 4)x$ llavors els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció són:

- a) $x < 0$, decreixent; $0 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent
 b) $x < 0$, decreixent; $0 < x < 4$, creixent; $x > 4$, decreixent
 c) $x < 0$, creixent; $0 < x < 4$, creixent; $x > 4$, decreixent
 d) $x < 0$, creixent; $0 < x < 4$, decreixent; $x > 4$, creixent

10. La funció $y = 3x^2 - 2x^3$ aconseguix els següents màxims i mínims:

- a) (0, 0) màxim i (1, 1) mínim b) (-1, 5) màxim i (1, 1) mínim
 c) (6, -324) mínim i (1, 1) màxim d) (0, 0) mínim i (1, 1) màxim

ACTIVITATS PROPOSADES

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa les dades que falten en la taula.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				

2. Completa les dades que falten en la taula.

Interval	f_i	h_i	F_i
[0, 10[60		60
[10, 20[0'4	
[20, 30[30		170
[30, 40[0'1	
[40, 50]			200

3. Classifica les següents variables com a qualitatives o quantitatives, i aquestes últimes com a contínues o discretes.

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) Intenció de vot d'un partit | b) Nombre de correus electrònics que reps en un mes. |
| c) Nombre de calçats | d) Nombre de quilòmetres recorreguts en cap de setmana. |
| e) Marques de cervesa | f) Nombre d'empleats d'una empresa |
| g) Altura | h) Temperatura d'un malalt. |

4. Moltes persones que inverteixen en borsa ho fan per aconseguir beneficis ràpids, per això el temps que mantenen les accions és relativament breu. Preguntada una mostra de 40 inversors habituals sobre el temps en mesos que han mantingut les seves últimes inversions es van recollir les següents dades:

10'5 11'2 9'9 15'0 11'4 12'7 16'5 10'1 12'7 11'4 11'6 6'2 7'9 8'3 10'9 8'1 3'8 10'5 11'7 8'4
12'5 11'2 9'1 10'4 9'1 13'4 12'3 5'9 11'4 8'8 7'4 8'6 13'6 14'7 11'5 11'5 10'9 9'8 12'9 9'9

Construeix una taula de freqüències que reculli aquesta informació i fes alguna representació gràfica.

5. Investigats els preus per habitació de 50 hotels d'una província s'han obtingut els següents resultats.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50
100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

- Distribució de freqüència dels preus, sense agrupar i agrupant en 5 intervals de la mateixa amplitud.
- Percentatge d'hotels amb preu superior a 75.
- Quants hotels tenen un preu major o igual que 50 però menor o igual a 100?
- Representa gràficament les distribucions de l'apartat a).

6. El govern desitja saber si el nombre mitjà de fills per família ha descendit respecte a la dècada anterior. Per a això s'ha enquestat a 50 famílies respecte al nombre de fills i s'ha obtingut les dades següents.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

- Construeix la taula de freqüències amb aquestes dades.
- Quantes famílies tenen exactament 3 fills?
- Quin percentatge de famílies tenen exactament 3 fills?
- Quin percentatge de famílies de la mostra té més de dos fills? I menys de tres?
- Construeix el gràfic que consideris més adequat amb les freqüències no acumulades.
- Construeix el gràfic que consideris més adequat amb les freqüències acumulades.

7. En un hospital es desitja fer un estudi sobre els pesos dels nounats. Per a això es recullen les dades dels 40 beus i es té:

3'2 3'7 4'2 4'6 3'7 3'0 2'9 3'1 3'0 4'5 4'1 3'8 3'9 3'6 3'2 3'5 3'0 2'5 2'7 2'8
3'0 4'0 4'5 3'5 3'5 3'6 2'9 3'2 4'2 4'3 4'1 4'6 4'2 4'5 4'3 3'2 3'7 2'9 3'1 3'5

- Construeix la taula de freqüències.
- Si sabem que els beus que pesen menys de 3 quilos ho fan prematurament. Quin percentatge de nens prematurs han nascut entre aquests 40?
- Normalment els nens que neixen prematurs que pesen més de 3 quilos i mitjà no necessiten estar en incubadora. Pots dir que percentatge de nens estan en aquesta situació?
- Representa gràficament la informació rebuda.

8. En una finca de veïns de Benicàssim, es reuneixen la comunitat de veïns per veure si contracten a una persona perquè els porti la comptabilitat. El resultat de la votació és el següent: 25 veïns a favor de la contractació, 15 veïns en contra i 5 veïns s'abstenen. Representa la informació mitjançant un diagrama de sectors

9. Es prenen vuit mesuraments del diàmetre intern dels anells per als pistons del motor d'un automòbil. Les dades en mm són:
74'001 74'003 74'015 74'000 74'005 74'002 74'005 74'004

Calcula la mitjana i la mitjana d'aquestes dades. Calcula també la variància, la desviació típica i el rang de la mostra.

10. Donada la distribució de dades 38432 384343 38436 38438 38440 amb freqüències 4, 8, 4, 3, 8, troba la mitjana de la distribució.

11. La distribució dels salaris en la indústria turística espanyola és la que figura en la taula. Calcula:

- El salari mitjà per treballador (marques de classe de l'últim interval 20000)
- El salari més freqüent.
- El salari tal que la meitat dels restants sigui inferior a ell.

Interval	f_i
[0, 1500[2145
[1500, 2000[1520
[2000, 2500[840
[2500, 3000[955
[3000, 3500[1110
[3500, 4000[2342
[4000, 5000[610
[5000, 10000[328
≥ 10000	150

12. Calcula la mitjana, la moda, primer i tercer quartil i norantè percentil de la distribució:

x_i	f_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

13. S'han dissenyat dues unitats bessones de plantes pilots i han estat posades en funcionament en un determinat procés. Els resultats dels deu primers balanços en cadascuna de les unitats han estat els següents:

Unitat A 97'8 98'9 101'2 98'8 102'0 99'0 99'1 100'8 100'9 100'5

Unitat B 97'2 100'5 98'2 98'3 97'5 99'9 97'9 96'8 97'4 97'2

- Fes una representació gràfica d'aquestes mostres.
- Determina les mitjanes i les variàncies.

14. A cert barri s'ha trobat que les famílies residents s'han distribuït, segons la seva composició de la forma següent:

Composició	Nº de famílies
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

- Quin és el nombre mitjà de persones per família?
- Quin és la grandària de la família més freqüent?
- Si solament hi hagués places d'aparcament pel 75 % de les famílies i aquestes s'atenguessin per famílies de major grandària a menor, quins components hauria de tenir una família per entrar en el contingent?
- Nombre de membres que tenen com a màxim el 85 % de les famílies.

15. En llançar 200 vegades un dau es va obtenir la següent distribució de freqüències.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	a	32	35	33	b	35

Troba la mitjana i la moda de la distribució, sabent que la mitjana aritmètica és 3'6.

16. Les següents dades són mesurades de la capacitat cranial d'un grup d'homínids:

84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70,
57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

- Calcula la mitjana i la mitjana mostrals.
- Troba els quartils primer i tercer.

- c) Troba els percentils cinquanta i noranta.
 d) Calcula el rang mostral.
 e) Calcula la variància mostral i la desviació estàndard mostral.

17. Les següents dades procedeixen d'un estudi de contaminació de l'aire.

6'5 2'1 4'4 4'7 5'3 2'6 4'7 3'0 4'9 8'6 5'0 4'9 4'0 3'4 5'6 4'7 2'7 2'4 2'7 2'2 5'2 5'3 4'7 6'8 4'1 5'3 7'6 2'4 2'1
 4'6 4'3 3'0 4'1 6'1 4'2

- a) Construeix un histograma.
 b) Determina els cuartils.
 c) Calcula la mitjana i la desviació típica.

2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. 3. COVARIÀNCIA

18. Els dades següents són les qualificacions obtingudes pels estudiants d'un grup de 25 de 1º de batxillerat en les assignatures de Matemàtiques i Llengua.

Matemàtiques	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Llengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemàtiques	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Llengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

- a) Escribe la taula de freqüències conjunta.
 b) Proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en ambdues assignatures, proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en Matemàtiques, proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en Llengua.
 c) Són independents les qualificacions de Matemàtiques i Llengua?
 d) Representa gràficament.
 e) Calcula el coeficient de correlació.

19. Per realitzar un estudi sobre la utilització d'una impressora en un determinat departament, es va mesurar en un dia els minuts transcorreguts entre les successives utilitzacions X i el nombre de pàgines impreses y , obtenint-se els següents resultats.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	1	10	12	12
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	2	20	3	3

- a) Escribe la distribució de freqüències conjunta. Percentatge de vegades que transcorren més de nou minuts des de l'anterior utilització i s'imprimeixen menys de dotze pàgines. Nombre de vegades que s'imprimeixen menys de dotze pàgines i transcorren nou minuts des de la utilització anterior.
 b) Freqüències marginals. Vegades que si imprimeixen com a molt dotze pàgines. Nombre de pàgines que s'imprimeixen en el 80 % de les ocasions.
 c) Calcula la distribució del nombre de pàgines impreses condicionada al fet que han transcorregut nou minuts entre successives utilitzacions.
 d) Dibuixa el diagrama de dispersió.

20. Les alçades dels 30 nens nascuts en una maternitat durant una setmana van ser els següents:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Pes	3'2	4'1	4'5	3'0	3'6	2'9	3'8	3'8	3'6	3'9	3'0	3'8	4'1	3'5	4'0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3'1	3'3	3'9	3'7	4'1	4'2	3'5	3'8	3'6	3'4	4'6	3'5	3'6	3'1	4'0

- a) Construeix una taula de doble entrada, agrupant els pesos en intervals de 0'5 kg.
 b) És la alçada independent del pes?

21. En l'examen d'una assignatura que consta de part teòrica i part pràctica, les qualificacions de nou alumnes van ser:

Teoria	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Pràctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal. Dibuixa el núvol de punts. Comenta els resultats.

22. Si desitja investigar el bestiar caprino i el bestiar oví d'un país. En la taula de doble entrada adjunta es presenten els resultats d'un estudi de 100 explotacions ramaderes, seleccionades aleatòriament del cens agropecuari. Es proporcionen les freqüències conjuntes del nombre de caps (en milers) de cabres X i ovelles Y que posseeixen les explotacions.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

- a) Troba les mitjanes, variàncies i desviacions típiques marginals.
 b) Troba el nombre mitjà d'ovelles condicionat al fet que en l'explotació hi ha 2000 cabres.
 c) Troba el nombre mitjà de cabres que tenen aquelles explotacions que sabem que no tenen ovelles.
 d) Troba la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables.

23. El volum d'estalvi i la renda del sector famílies en milions en euros constants de 2005 per al període 2005-2014 van ser:

Anys	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Estalvi	1'9	1'8	2'0	2'1	1'9	2'0	2'2	2'3	2'7	3'0
Renta	20'5	20'8	21'2	21'7	22'1	22'3	22'2	22'6	23'1	23'5

- a) Recta regressió de l'estalvi sobre la renda.
 b) Recta de regressió de la renda sobre l'estalvi.
 c) Per a l'any 2015 se suposa que la renda era de 24.1 milions d'euros. quin serà l'estalvi esperat per a l'any 2015?
 d) Estudiar la fiabilitat de la predicció anterior.

24. Es va mesurar el temps en segons que van trigar a gravar-se els mateixos 24 fitxers en un llapis USB X i en un disc dur exterior y.

X	1'2	1	1'1	0'5	1'1	1'5	1	1'4	1'4	1'3	0'4	0'3
y	1'3	1'1	1'2	0'4	1'2	1'4	1'1	1'6	1'6	1'5	0'4	0'3

X	0'3	1'5	1'4	1'1	1'2	1'2	0'4	0'5	1'3	1'5	1'2	0'2
y	0'3	1'6	1'3	1'1	1'3	1'1	0'4	0'4	1'4	1'6	0'9	0'3

- a) Construeix la taula de freqüències conjunta. Cuál és el percentatge de fitxers que triguen menys d'1'5 segundos en el primer tipus i més de 1'4 en el segon? Coántos fitxers triguen a gravar-se entre 0'6 i 1'2 segons en el primer tipus de memòria? Cuánto temps triguen com a molt a gravar-se almenys el 90 % dels fitxers en el segon tipus de memòria?
 b) Troba la taula de freqüències condicionades dels temps del segon tipus de memòria d'aquells programes que van trigar 1'2 en el primer tipus de memòria. Cuál és la proporció d'aquests programes que triguen a gravar-se més d'1'5 segons en el segon tipus de memòria?
 c) Representa gráficamente les dades i comenta el resultat obtingut.
 d) Si un fitxer triga 0'8 segons a gravar-se en el primer tipus de memòria, quants segons trigues a gravar-se en el segon tipus? Donar una mesura de fiabilitat. Confirma aquesta mesura el comentat en l'apartat c)?

25. D'un moll es penjen pesos i obtenim els allargaments següents.

Pes (g) X	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Allargament (cm) y	0	0'5	1	3	5	6'5	8	10'2	12'5	18

Encuentra la recta de regressió d'y sobre X i estima l'allargament que s'aconseguirà amb pesos de 100 i 500 gr. Quin de les dues estimacions és més fiable?

26. La taula següent mostra el nombre de gèrmens patògens per centímetre cubico d'un determinat cultiu segons el temps transcorregut.

Nombre d'hores	0	1	2	3	4	5
Nombre de gèrmens	20	26	33	41	47	53

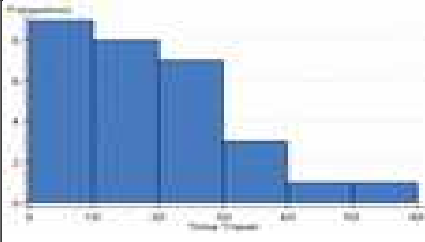
- a) Calcula la recta de regressió per predir el nombre de gèrmens per centímetre cubico en funció del temps.
 b) Quina quantitat de gèrmens per centímetre cubico és previsible trobar quan transcorrin 6 hores? És bona aquesta predicció?
 27. En un deposituat cilíndric, l'altura de l'aigua que conté varia a mesura que passa el temps segons les dades recollides en la taula:

Temps: h	8	22	27	33	50
Altura: m	17	14	12	11	6

- a) Troba el coeficient de correlació entre el temps i l'altura. Da una interpretació d'ell.
 b) Quina altura s'aconseguís quan hagin transcorregut 40 hores?
 c) Quan l'altura aconseguieix 2 m sona una alarma. Cuánto temps ha de passar perquè soni l'alarma?
 28. L'evolució de l'IPC (índex de preus al consum) i la taxa d'inflació en els mesos indicats d'un determinat any, va ser:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
IPC	0'7	1'1	1'7	2	1'9	1'9
Taxa inflació	6	6	6'3	6'2	5'8	4'9

- a) Representa el núvol de punts.
 b) Calcula el coeficient de correlació entre l'IPC i la taxa d'inflació.
 c) Es pot estimar la taxa de inflació a partir de l'IPC?

		Exemples
Histograma	Representació gràfica de les dades agrupades en intervals.	
Mitjana aritmètica	$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i h_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2,52$
Mitjana	Valor tal que en la distribució hi ha tantes dades menors que ell com a majors que ell.	
Moda	Dada amb major freqüència, el que més vegades es repeteix.	
Variància	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 x f_i}{n} - \bar{x}^2$	
Desviació típica	$s = \sqrt{\text{Variància}}$	
Covariància	$S_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) x f_{ij}}{n} = \frac{\sum_i \sum_j x_i y_i x f_{ij}}{n} - \bar{x} \bar{y}$	
Coefficient correlació	$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad -1 \leq r \leq 1$	
Dependència lineal	<p>$r = -1$ dependència funcional lineal negativa</p> <p>$-1 < r < 0$ dependència negativa</p> <p>$r = 0$ no existeix dependència lineal, ni funcional</p> <p>$0 < r < 1$ dependència positiva</p> <p>$r = 1$ dependència funcional lineal positiva</p>	
Recta regressió Y sobre X	$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x})$	
Recta regressió X sobre Y	$x = \bar{x} + \frac{S_{xy}}{s_y^2} (y - \bar{y})$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Estadística descriptiva unidimensional

1. Es coneix el volum setmanal de residus sòlids recollits en m^3 durant 10 setmanes, en un municipi petit:
25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6

Calcula:

- a) Les mesures de **centralització**: la mitjana, mitjana, moda
 b) Les mesures de **dispersió**: desviació típica, variància, coeficient de variació, valor mínim, valor màxim, recorregut, primer quartil, tercer quartil i interval intercuartílic.
 c) Fes una representació gràfica en **sèrie temporal**, que permeti observar tendències, cicles i fluctuacions. Recorda que en una sèrie temporal, en l'eix d'abscisses està el temps d'observació i en l'eix d'ordenades la magnitud d'observació.

2. Una companyia d'assegurances desitja establir una pòlissa d'accidents. Per a això, selecciona a l'atzar a 1 00 propietaris i els pregunta quants euros han gastat en reparacions de l'automòbil. S'han agrupat en intervals els valors de la variable obtinguts:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Nombre de persones	20	20	10	20	20	10

- a) Calcula les marques de classe i escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
 b) Representa les dades en un diagrama de barres, un altre de línies i un de sectors.
 c) Representa un histograma de freqüències relatives. *Cura*: Els intervals no són tots iguals.
 d) Calcula la mitjana i la desviació típica.
 e) Calcula la mitjana i els cuartils.

3. S'ha preguntat a 40 alumnes pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
Nombre de vegades	5	15	7	6	4	2	1

- a) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes i un diagrama de línies de freqüències relatives.
 b) Calcula la mitjana, la mitjana i la moda.

4. S'ha preguntat a 50 estudiants de 1º de Batxillerat pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut:

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
Nombre de vegades	8	19	8	7	5	2	1

- a) Representa les dades en un diagrama de barres de freqüències absolutes, en un diagrama de línies de freqüències relatives, i en un diagrama de sectors.
 b) Fes un histograma.
 c) Calcula la mitjana, la mitjana i la moda. Calcula els cuartils.
 d) Calcula la variància, la desviació típica, el recorregut i l'interval intercuartílic.

Utilitza un full de càlcul amb l'ordinador

Es coneix el volum setmanal de residus sòlids recollits en m^3 durant les 52 setmanes d'un any, en un municipi petit:

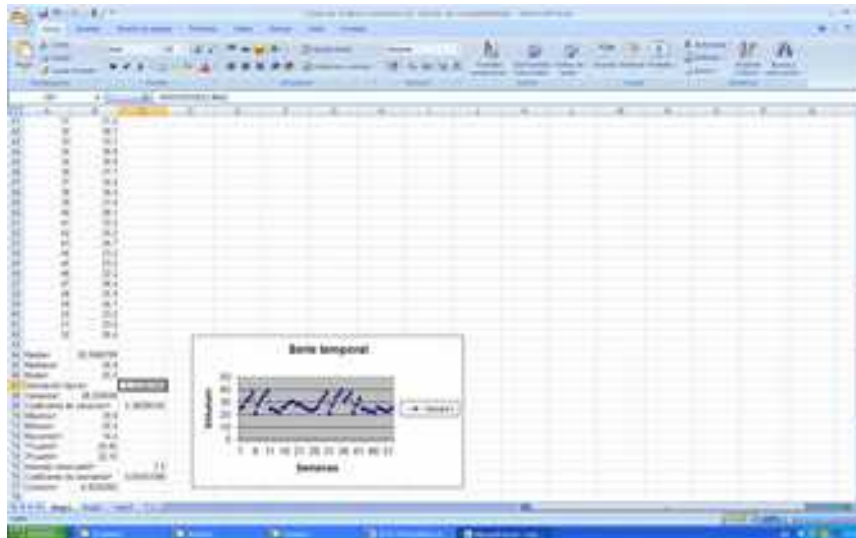
25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula, utilitzant Excel o un altre full de càlcul:

5. Paràmetres estadístics

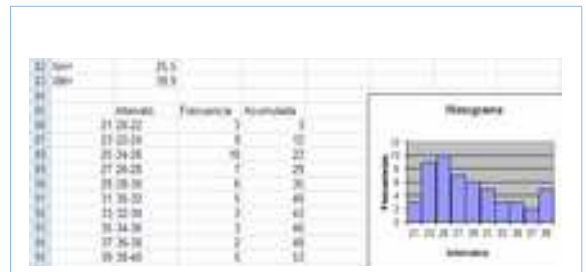
- a) Les mesures de centralització: la mitjana, mitjana, moda
 b) Les mesures de **dispersió**: desviació típica, variància, coeficient de variació, valor mínim, valor màxim, recorregut, primer quartil, tercer quartil i interval intercuartílic.
 c) Altres coeficients: coeficient d'asimetria i coeficient de curtosis que trobis. Investiga les possibilitats de l'ordinador per obtenir paràmetres estadístics.
 d) Fes una representació gràfica en **sèrie temporal**, que permeti observar tendències, cicles i fluctuacions. Recorda que en una sèrie temporal, en l'eix d'abscisses està el temps d'observació i en l'eix d'ordenades la magnitud d'observació.
 Per a això, escriu en la casella A12, 1, en A13, 2, i arrossega per escriure l'ordre de les setmanes, fins que aparegui el 52. Escriu en la columna B el volum recollit cada setmana.
 En la casella A11 un títol, per exemple, "Residus sòlids".
 En la casella C12 escriu Mitjana, i en la casella D12 calcula-la usant la funció MITJANA. D'igual forma calcula els altres paràmetres.

Observa un tros de pantalla amb alguns resultats:



6. Les dades de la pràctica anterior es volen representar en un histograma per millor determinar la seva distribució. Per a això:

- a) Indica el nombre total de dades, N , el menor valor: X_m , el major valor, X_M , i el recorregut R .
- b) La quantitat de barres de l'histograma, k , se sol prendre, per menys de 50 dades, entre 5 i 7. Per a N entre 50 i 100, entre 6 i 10. Per a N entre 100 i 250, entre 7 i 12. I per a N major de 250, entre 10 i 20. En est cas N és igual a 52, després el nombre de barres podria ser entre 6 i 10. En dividir R entre 10 s'obté 1,87 que seria l'interval de classe. Per facilitar la divisió en classes fixem l'interval de classe, h , en 2, i el nombre de barres, k , en 10. Per no tenir valors en els límits de classe prenem l'inici del primer interval en 20. Així, els intervals són: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ara ja es pot construir la taula de freqüències i dibuixar l'histograma.



- c) Calcula i representa en l'histograma els punts m , $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, on m i s són la mitjana i la desviació típica, respectivament

7. Anem a investigar què ocorre en fer un canvi de variables. Vam dir que si considerem $y_i = a + bx_i$, sent a i b dues constants qualssevol, la nova mitjana aritmètica quedaria $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

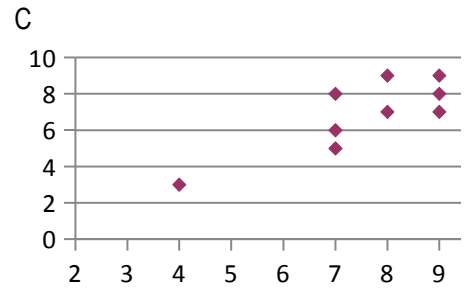
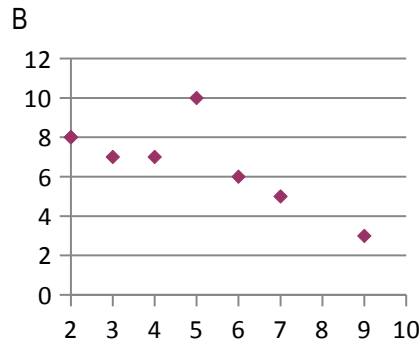
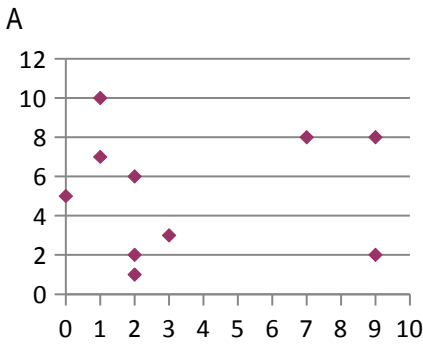
- a) Obre Excel. Introdueix les dades: $X = 255, 271, 318, 342, 389, \dots$ en la columna A, a partir de la fila 11. Quin canvi de variable s'ha fet? Observa: $x = X/10$.
- b) En la columna C, a partir de la fila 11 escriu els límits de classe, en la columna D el valor mitjà, en la columna E anem a explicar les freqüències absolutes i en la columna F les freqüències acumulades. Utilitza la funció CONTAR.SI per explicar. Per exemple, escriu en I11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escriu =I11. En I12 escriu CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la taula de freqüències. Escriu títols en la fila 10.
- c) Calcula la mitjana i la desviació típica. Per a això escriu en la fila 3 i 4, columna B, les funcions =MITJANA(A11:A63) i =DESVEST(A11:A63). Escriu els resultats amb 2 decimals.
- d) Com obtens ara la mitjana i la desviació típica de les dades reals? Com desfas el canvi? Si no ho recordes, o no tens seguretat, investiga-ho. Calcula la mitjana i la desviació típica, abans i després del canvi. Escriu aquest resultat, en general, per a un canvi de variables lineal $y = ax + b$.
- e) Dibuixa l'histograma. No oblidis mai indicar les unitats en tots dos eixos, i tota la informació que ajudi a comprendre el gràfic. Afegeix sempre la grandària, N , i els valors de la mitjana i la desviació típica.
- f) Discuteix el resultat. És gran la dispersió? La distribució, és simètrica?

8. Una altra recerca: Anem a investigar la distribució de la mitjana. Per a això anem a prendre mostres de grandària 5. Utilitza la columna G. En G11 escriu =MITJANA(B11:B15), en G12 la mitjana de B16 a B20, i així fins al final. Tenim calculades les 10 mitjanes de mostres de grandària 5. Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquestes mitjanes. Compara amb els resultats anteriors. Escriu en el teu quadern les conclusions.

Estadística descriptiva bidimensional

9. En una mostra de 10 persones mirem el seu color d'ulls i pèl i trobem que hi ha 5 bruns d'ulls marrons, 1 bru d'ulls verds, 3 rossos d'ulls blaus i 1 ros d'ulls verds. A) Representa en una taula de doble entrada aquesta situació. B) Escriu la taula de freqüències relatives. C) Escriu les freqüències absolutes i relatives marginals. D) Escriu la distribució de freqüències condicionades.

10. Lola ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjuntes, i ha obtingut: -0'8, 0'85 i 0'03, però ara no recorda quin és de cadascuna. Pots ajudar a decidir què coeficient correspon amb cada núvol?



11. En una tenda volen estudiar les vendes del pa de motlle en funció del preu. Per a això proven cada setmana amb un preu diferent i calculen les vendes realitzades. Han obtingut les següents dades:

Preu (euros)	0'5	0'7	1	1'2	1'3	1'5	1'7	1'8	2
Vendes (mitjanes)	20'2	19'2	18'1	15'3	11'6	6	4	0	0

- a) Representa les dades en un diagrama de dispersió (núvol de punts) i indica a quines conclusions creïs que es va a arribar.
- b) Calcula la covariància, el coeficient de correlació, la recta de regressió i el coeficient de determinació
- c) Decideixen posar un preu de 1'4 euros, quins opines que serien les vendes mitjanes setmanals?

12. Una companyia aèria realitza un estudi sobre la relació entre les variables X, temps d'un vol, en hores; i y, consum de combustible (gasoil) para aquest vol, en litres, i s'han obtingut les següents dades.

X (hores)	0'5	1	1'5	2	2'5	3
y (litres)	2250	3950	5400	7300	8500	10300

- a) Representa les dades en un diagrama de dispersió.
- b) Calcula la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables. Interpreta els resultats.
- c) Calcula l'equació de les rectes de regressió.
- d) Calcula el coeficient de determinació.

13. Preguntem a 10 estudiants de 1º de Batxillerat per les seves qualificacions en Matemàtiques, pel nombre de minuts diaris que veuen la televisió, pel nombre d'hores setmanals que dediquen a l'estudi, i per la seva alçada en centímetres. Les dades es recullen en la taula adjunta.

Qualificacions de Matemàtiques	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minuts diaris que veu la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Hores setmanals d'estudi	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Alçada (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Volem estudiar la relació entre les qualificacions de Matemàtiques i les altres tres variables. Per a això dibuixa els diagrames de dispersió, i calcula els coeficients de correlació i determinació. Calcula les rectes de regressió.

14. Fes un treball. Passa una enquesta als teus companys i companyes de classe. Tria una mostra de 10 persones i hazles dues preguntes amb dades numèriques, com per exemple, quant mesura la seva mans, quin nombre de sabata calça, el nombre de llibres que llegeix en un mes, el nombre d'hores que veu la televisió a la setmana, diners que gasta al mes a comprar música, la qualificació en Matemàtiques del seu últim examen... Representa les dades obtingudes en una taula de doble entrada. Haz un estudi complet. Pots utilitzar l'ordinador:

- a) Escribeu en el teu quadern una taula de doble entrada de freqüències absolutes, freqüències relatives. Obtingues les distribucions marginals i condicionades.
- b) Amb les distribucions unidimensionals, dibuixa els diagrames de barres, diagrames de línies i diagrames de sectors. Calcula la s mitjanes, mitjas i modas. Calcula la s variàncies i la s desviaciones típicas. Calcula els cuartiles i els intervals intercuartílicos.
- c) Amb les distribucions bidimensionals, dibuixa un diagrama de dispersió, i calcula la covariància, el coeficient de correlació i la recta de regressió.
- d) Reflexiona sobre els resultats i escriu un informe.

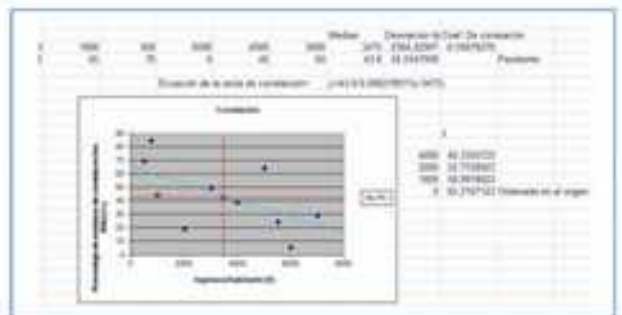
Utilitza un full de càlcul amb un ordinador

15. L'objectiu d'aquesta pràctica és estudiar la dispersió entre dues variables, mitjançant un núvol de punts o diagrama de dispersió, el coeficient de correlació i la recta de regressió.

En 10 països s'anoten els ingressos mitjans, en euros, per habitant i any, i el percentatge mitjà en els residus sòlids de menjar.

S'obté:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50



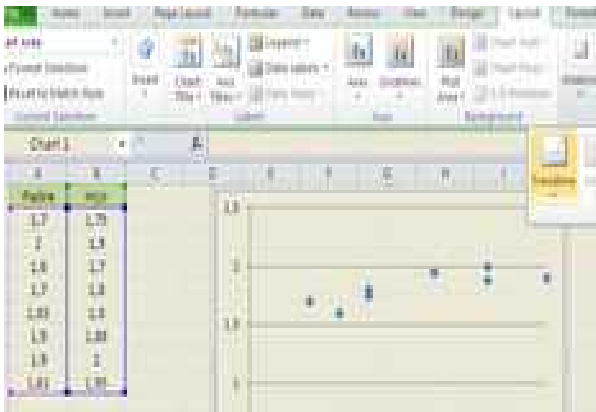
- a) Obre un full de càlcul. Copia les dades. Calcula la mitjana i la desviació típica de les x , i la mitjana i la desviació típica de les y .
- b) Representa el núvol de punts. Selecciona les dades, incloent a les mitjanes. Estreny el botó d'assistent de gràfics i tria **XY (Dispersió)**. En títols escriu com a **Títol del gràfic** *Correlació*, en **Eix de valors (X)** descriu la variable x sense oblidar dir les unitats, escriu: *Ingressos/habitant (€)*, en **Eix de valors (y)** descriu la variable y sense oblidar dir les unitats, escriu: *Percentatge de residus de menjar en els RSU (%)*. En **Llegenda** tria no mostrar llegenda.
- c) Observa que si $x - \bar{x}$ i $y - \bar{y}$ tenen el mateix signe queden en els quadrants I i III i si ho tenen diferent en II i IV. Explica els punts que queden en els quadrants I i III, explica els que queden en els quadrants II i IV. Ens pot donar una idea de la correlació. Va a ser positiva o negativa? És una correlació forta o feble? Entri que valors pot variar el coeficient de correlació? Estima a ull un valor per a aquesta correlació.
- d) Organitza en Excel un full de càlcul que et permeti calcular la correlació. Escriu les dades en les files 3 i 4. En L3 i L4 calcula les mitjanes utilitzant la funció **MITJANA**. En M3 i M4 calcula la desviació típica utilitzant la funció **DESVEST**. En N3 calcula el coeficient de correlació, utilitzant la funció:

COEF.DE.CORREL(B3:K3;B4:K4)

- e) Ara anem a millorar el nostre gràfic. Observa que si col·loques al ratolí damunt d'un punt indica les coordenades. Traça les rectes $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ que indiquen les mitjanes. Utilitza per a això la paleta de dibuix. Dibuixa-les en color vermell.
- f) La recta de regressió és la recta que fa mínimes les distàncies del núvol de punts. És la recta: $y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$ Calcula en N4 el pendent de la recta. Escriu l'equació de la recta. Observa el gràfic. Com l'hauries estimat a ull? Avaluja el pendent i l'ordenada en l'origen.

16. Es recull en una taula l'altura (en metres) d'un pare i de la del seu fill amb 15 anys d'edat.

Pare	1'7	2	1'6	1'7	1'65	1'9	1'9	1'81
Fill	1'75	1'9	1'7	1'8	1'6	1'88	2	1'95



- a) Utilitza l'ordinador per representar el diagrama de dispersió. Copia les dades en un full de càlcul en les columnes A i B. Assenyala les dues sèries i tria *inserir gràfic de dispersió*. Automàticament veuràs que apareix el diagrama de dispersió (núvol de punts). Joga amb les opcions per modificar el títol, el format, l'escala dels eixos...



- b) Dibuixa la recta de regressió. Punxa sobre un

punt del núvol, i tria "Agrega línia de tendència". Perquè dibuixi l'ordinador la recta de regressió la línia de tendència ha de ser *Lineal*. En la pantalla que apareix marquem la casella que diu: "Presentar equació en el gràfic" i la casella que diu "Presentar el valor de R quadrat en el gràfic". Al final, si ho has fet bé, el dibuix ha de ser més o menys alguna cosa similar a això:



- c) Utilitza la recta per determinar que altura del fill correspondria a una altura del pare de 1'75 m.

AUTOAVALUACIÓ

1. Realitzem una prova a 20 aspirants a un lloc de gravador consistent en un dictat amb cert temps de durada (en minuts) i després explicar el nombre d'errors comesos en transcriure-ho a ordinador. Els resultats van ser.

Temps	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errors	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

- Construeix la taula freqüències conjunta i les taules freqüències marginals.
- Calcula mitjana, mitjana, moda, variància, desviació típica per a les variables marginals.
- Calcula el recorregut per a les variables marginals i la covariància.
- Nombre mitjà d'errors condicionat a un temps de dictat de 6 minuts. Percentatge aspirants que cometen menys de 8 errors d'entre els quals són sotmesos a un dictat de més de 6 minuts.
- Calcula la recta de regressió lineal del temps sobre el nombre d'errors i, a la vista d'ella, explica la dependència o independència de les variables.

2. La següent taula mostra la talla de calçat i els pesos de 55 estudiants.

Talla	39	40	40	40	41	41	41	41	42	42	42	42	43	43	44
Pes	55	60	65	70	60	65	70	85	65	70	75	80	65	75	85
Nº estudiants	1	3	3	4	3	4	6	1	8	8	7	2	2	1	2

- Calcula la taula de freqüències conjunta.
- Són independents el pes i la talla? Calcula la covariància i la recta de regressió.

3. Donada la següent taula de freqüències conjunta, calcular el valor de a sabent que la mitjana condicionada d' Y donat $X = 1$ és $3/5$.

X/y	0	1
1	4	a
4	3	7

4. Els preus diaris de les accions X i y varien, de manera que s'estudien conjuntament aquestes dues variables durant 10 dies, i es calculen els paràmetres.

	Mitjana	Desviació típica
X	15'7	3'1
y	8'2	1'9

Covariància 0'95.

- Si coneixem el valor de l'acció X amb anterioritat al valor d' Y , calcula la recta de regressió que permeti obtenir una estimació del preu d' Y , una vegada conegut el valor de X .
- Seria útil usar aquest cas concret de regressió lineal per predir el valor d' Y i aprofitar la predicció per prendre decisions? Per què?

1. PROBABILITAT

1. Indica si són, o no, fenòmens aleatoris:

- La superfície de les províncies espanyoles.
- Anotar el sexe del proper bebè nascut en una clínica determinada.
- L'àrea d'un quadrat del que es coneix el costat.
- Tirar tres daus i anotar la suma dels valors obtinguts.
- Saber si el proper any és de traspàs.

2. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Escriure en cinc targetes cadascuna de les vocals i treure una a l'atzar".

3. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "Tirar una xinxeta i anotar si cau de punta o no".

4. Inventar dos successos de l'experiment aleatori: Tirar dues monedes.

5. En el joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les unitats del primer premi.

6. Escriu tres successos aleatoris del experiment aleatori treure una carta d'una baralla espanyola.

7. En treure una carta d'una baralla espanyola, cridem B al succés treure un as i A a el succés treure una figura. Escriu els successos $A \cup B$, $A \cap B$ i $A - B$.

8. Sigui A el succés tirar un dau i treure un nombre major que 4. Escriu el succés contrari de A .

9. Un succés i el seu succés contrari, com són, compatibles o incompatibles? Raona la resposta.

10. En l'experiment aleatori, treure una carta d'una baralla espanyola, escriu tres successos incompatibles amb el succés "treure un as".

11. Calcula la probabilitat que en treure una carta de la baralla sigui una espasa.

12. Per saber la probabilitat que un nounat sigui esquerrà, et basaries en l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?

13. Quin és la probabilitat de *no* treure un 5 en tirar un dau? I de *no* treure un múltiple de 3? I de *no* treure un nombre menor que 2?

14. En tirar una moneda dues vegades, quin és la probabilitat de *no* treure cap cara? I de treure almenys una cara? Observa que treure almenys una cara és el succés contrari de *no* treure cap cara.

15. Fes un diagrama en arbre similar a l'anterior en el teu quadern amb els successos A i B : $A = \text{treure un as en la primera extracció}$, $\bar{A} = \text{no treure as}$, i $B = \text{treure un as en la segona extracció}$, $\bar{B} = \text{no treure as en la segona extracció}$. Quin és la probabilitat de *treure as* en la segona extracció condicionat a *no* haver-ho tret en la primera? I la de *no treure as* en la segona extracció condicionat a *no* haver-ho tret en la primera? Quin és la probabilitat de *treure dos asos*? I la de treure un sol as?

16. En el diagrama d'arbre anterior indica com és la probabilitat de "*no* surten 2 asos" i la de "*no* surt cap as".

17. En l'experiment "treure tres cartes seguides", quin és la probabilitat de *treure tres asos*? Primer amb reemplaçament, i després sense reemplaçament.

18. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat que surti un sis doble.

19. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat de treure almenys un 6. *Ajuda*: Potser et sigui més fàcil calcular la probabilitat de *no treure cap 6*, i utilitzar el succés contrari.

20. Llancem dos daus que no estiguin trucats i anem els nombres de la seva cara superior. Considerem el succés A fet que la suma de les dues cares sigui 8, i el succés B que aquests nombres difereixin en dues unitats. a) Comprova que $P(A) = 5/36$ (casos favorables: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) i que $P(B) = 8/36$ (casos favorables: (1, 3), (2, 4), ...). b) Calcula les probabilitats de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \bar{B})$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. c) Calcula $P(A|B)$; $P(A|\bar{B})$; $P(\bar{A}|B)$.

21. Dibuixa en el teu quadern un diagrama en arbre per a tres incendis, i calcula la probabilitat que almenys un hagi estat intencionat sent $P(I) = 0'6$.

22. En una aeronau s'han instal·lat tres dispositius de seguretat: A , B i C . Si falla A se posa B en funcionament, i si també falla B comença a funcionar C . Les probabilitats que funcioni correctament cada dispositiu són: $P(A) = 0'96$; $P(B) = 0'98$ i $P(C) = 0'99$. a) Calcula la probabilitat que fallin els tres dispositius. b) Calcula la probabilitat que tot vagi bé.

23. Una fàbrica de nines rebutja normalment el 0'3 % de la seva producció per fallades degudes a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) En agafar dues nines a l'atzar calgui rebutjar ambdues. b) En agafar dues nines a l'atzar calgui rebutjar només una. c) En agafar dues nines a l'atzar no calgui rebutjar cap d) Verifiquem 4 nines, calcula la probabilitat de rebutjar únicament la tercera nina triada.

24. Llancem una moneda fins que aparegui dues vegades seguides del mateix costat. Calcula les probabilitats que: A) L'experiència acabi al segon llançament. B) Acabi al tercer llançament. C) Acabi a la cambra. D) Acabi com a màxim en el quart

llançament (és a dir, que acabi en el segon o en el tercer o en el quart llançament).

25. S'ha fet un estudi estadístic sobre accidents de trànsit i s'han determinat les següents probabilitats reflectides en la taula de contingència:

	Accident en carretera (C)	Accident en zona urbana (O)	Totals
Accident amb víctimes (V)	0'27		0'56
Accident amb només danys materials (M)			
Totals	0'58		1

a) Copia la taula en el teu quadern i completa-la.

b) Determina les següents probabilitats: $P(V \cap C)$; $P(V \cap O)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap O)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ i $P(O)$.

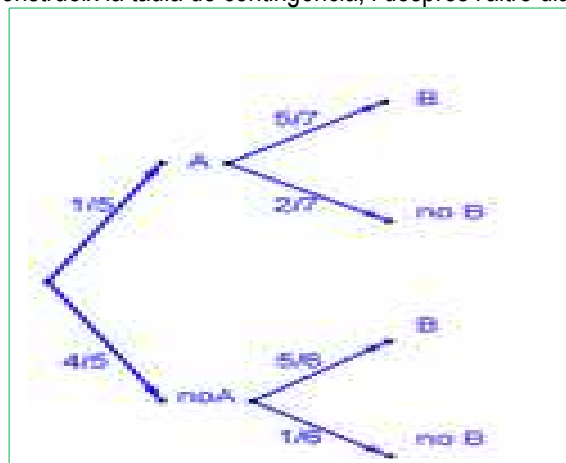
c) Calcula $P(O|V)$; $P(C|V)$; $P(V|O)$; $P(V|C)$. Són dependents o independents els successos: accident amb víctimes i accident en carretera?

26. Inventa una taula de contingència considerant que els accidents puguin ser de carretera (C) o urbans (O), però que ara els classifiquem en lleus (L), greus (G) o mortals (M). Observa que el fonamental per confeccionar la taula és que els successos siguin incompatibles dos a dos.

27. Donada la taula de contingència, construeix dos diagrames d'arbre.

	A	No A = \bar{A}	
B	0'4	0'2	0'6
No B = \bar{B}	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

28. Donat el diagrama d'arbre del marge, construeix la taula de contingència, i després l'altre diagrama d'arbre.



29. Tenim dues urnes, A i B. La primera amb 8 boles blanques i 2 boles negres. La segona amb 4 boles blanques i 6 boles negres. Es treu una bola a l'atzar, d'una de les dues urnes, també a l'atzar i resulta ser negra. Quin és la probabilitat que procedeixi de la urna A?

30. S'està estudiant un tractament amb un nou medicament, pel que se seleccionen 100 malalts. A 60 se'ls tracta amb el medicament i a 40 amb un placebo. Els valors obtinguts es representen en la taula adjunta

	Medicament (M)	Placebo (no M)	
Guarits (C)	50	30	80
No guarits (no C)	10	10	20
	60	40	100

S'utilitzen aquests valors per assignar probabilitats. Calcula:

a) La probabilitat que un malalt guarit hagi estat tractat amb el medicament. Ajuda: $P(M|C)$

b) La probabilitat que un malalt guarit hagi estat tractat amb el placebo. Ajuda: $P(\bar{M}|C)$.

Problemes proposats a Selectivitat

31. En un procés de fabricació de mòbils es detecta que el 2 % surten defectuosos. S'utilitza un dispositiu per detectar-los que resulta que detecta el 90 % dels mòbils defectuosos, però assenyalava com a defectuosos un 1 % que no ho són. A) Calcula la probabilitat que sigui correcte un mòbil que el dispositiu ha qualificat com a defectuós. B) Calcula la probabilitat que sigui defectuós un mòbil que el dispositiu ha qualificat com a correcte. Ajuda: Utilitza primer un diagrama en arbre i després una taula de contingència.

32. Es tenen 3 caixes, A, B i C. La caixa A té 10 boles de les quals 4 són negres. La caixa B té 6 boles amb una bola negra. La caixa C té 8 boles amb 3 negres. S'agafa una caixa a l'atzar i d'aquesta caixa es treu una bola, també a l'atzar. Comprova que la probabilitat que la bola sigui negra és $113/360$.

33. Tenim una moneda trucada la probabilitat de la qual d'obtenir cara és $3/5$ i la de creu és $2/5$. Si surt cara s'escull a l'atzar un nombre de l'1 al 8, i si surt creu, s'escull un nombre de l'1 al 6. Calcula la probabilitat que el nombre escollit sigui imparell.

2. COMBINATÒRIA

34. En una carrera competeixen 5 corredors i es van a repartir tres medalles, or, plata i bronze. Fes un diagrama en arbre i comprova que hi ha 60 formes diferents de repartir les medalles.

35. Fes diagrames en arbre per calcular:

a) Quantes paraules de dues lletres (amb significat o sense ell) pots escriure amb les lletres A, B o C, totes diferents. I si poden repetir-se les lletres?

b) Quantes paraules de tres lletres que comencin per vocal i acabin per consonant es poden formar amb les lletres de l'alfabet. (Recorda que hi ha 5 vocals i 22 consonants).

36. Ana té 4 samarretes, 2 pantalons i 3 parells de sabatilles. Pot portar una combinació diferent de samarreta, pantalons i sabatilla durant dos mesos (61 dies)? Quants dies haurà de repetir combinació? *Ajuda:* Segur que un diagrama en arbre et resol el problema.

37. De quantes formes poden repartir-se cinc persones, cinc pastissos diferents, menjant cada persona un pastís?

38. En una carrera de cavalls participen quatre cavalls amb els nombres 1, 2, 3 i 4. Quin d'ells pot arribar el primer? Si la carrera està amañada perquè el número quatre arribi el primer, quins d'ells poden arribar en segon lloc? Si la carrera no està amañada, de quantes formes diferents poden arribar a la meta? Fes un diagrama en arbre per respondre.

39. De quantes maneres pots ficar sis objectes diferents en sis caixes diferents, si només pots posar un objecte en cada caixa?

40. Quants països formen actualment la Unió Europea? Pots ordenar-los seguint diferents criteris, per exemple per la seva població, o pel que fa a la seva producció d'acer, o per la superfície que ocupen. De quantes maneres diferents és possible ordenar-los?

41. L'any 1973 hi havia sis països al Mercat Comú Europeu. De quantes formes pots ordenar-los?

42. En una oficina de col·locació hi ha set persones. De quantes formes diferents poden haver arribat?

43. Calcula: a) $\frac{5!}{4!}$; b) $\frac{8!}{3!}$; c) $\frac{9!}{5 \times 3!}$; d) $\frac{7!}{5!}$; e) $\frac{13!}{11!}$; f) $\frac{677!}{676!}$.

44. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

45. Expressa utilitzant factorials: a) $5 \cdot 4 \cdot 3$; b) $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$; c) $8 \cdot 7 \cdot 6$; d) $10 \cdot 9$.

46. Expressa utilitzant factorials: a) $(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)$; b) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$; c) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)$.

47. Escriu en forma de factorial les diferents formes que tenen d'asseure's en una classe els 30 alumnes en els 30 llocs que hi ha. (No ho calculis. El resultat és un nombre molt gran, per calcular-ho es necessita un ordinador o una calculadora, i caldria recórrer a la notació científica per expressar-ho de forma aproximada).

48. Nou ciclistes circulen per una carretera en fila índia. De quantes formes diferents poden anar ordenats?

49. Amb els 10 dígit, quants nombres diferents poden formar-se de 4 xifres?

50. Amb els 10 dígit i les 22 consonants de l'alfabet, quantes matricules de cotxe poden formar-se prenent quatre dígit i tres lletres?

51. Un byte o octet és una seqüència de zeros i uns presos de 8 en 8. Quants bytes diferents poden formar-se?

52. Calcula: a) $VR_{5,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{10,2}$; d) $VR_{2,10}$.

53. Expressa amb una fórmula:

a) Les variacions amb repetició de 4 elements preses de 5 en 5.

b) Les variacions amb repetició de 8 elements preses de 2 en 2.

c) Les variacions amb repetició de 7 elements preses de 4 en 4.

54. Quantes paraules de quatre lletres (amb significat o no) pots formar que comencin per consonant i acabin amb la lletra S?

55. Quatre persones van a una pastisseria en la qual únicament queden cinc pastissos, diferents entre si. De quantes formes diferents poden triar el seu pastís si cadascuna compra un?

56. Amb els 10 dígit es desitgen escriure nombres de sis xifres, totes elles diferents. Quantes possibilitats hi ha per escriure la primera xifra? Una vegada triada la primera, quantes hi ha per triar la segona? Una vegada triades les dues primeres, quantes hi ha per a la tercera? Quantes possibilitats hi ha en total?

57. Si tens 11 elements diferents i els has d'ordenar de 4 en 4 de totes les formes possibles, quantes hi ha?

58. Amb les lletres A, B i C, quantes paraules de 2 lletres no repetides podries escriure?

59. Amb els dígit 3, 5, 7, 8 i 9, quants nombres de 4 xifres diferents pots formar?

60. Calcula: a) $V_{10,6}$; b) $V_{9,5}$; c) $V_{7,4}$.

61. Calcula: a) $\frac{6!}{3!}$; b) $\frac{8!}{4!}$; c) $\frac{11!}{8!}$.

62. Tenim 5 bombons (iguals) que volem repartir entre 7 amics, de quantes formes es poden repartir els bombons si a cap li anem a donar més d'un bombó?

63. Juan vol regalar 3 DVDs a Pedro dels 10 que té, de quantes formes diferents pot fer-ho?

64. En el joc del póker es dona a cada jugador una mà formada per cinc cartes, de les 52 que té la baralla francesa, quantes mans diferents pot rebre un jugador?

65. Afegeix tres files més al triangle de *Tartaglia* de la dreta.

66. Suma els nombres de cada fila i comprova que la suma dels elements de la fila m és sempre igual a 2^m .

67. Sense calcular-los, indica quant valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ i $C_{5,5}$ buscant el seu valor en el triangle.

68. Desenvolupa $(a + b)^6$

69. Desenvolupa a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

70. Calcula el coeficient de x^7 en el polinomi que s'obté en desenvolupar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

71. Expressa amb radicals simplificats el polinomi que s'obté en desenvolupar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

RESUM

Successos	En realitzar un experiment aleatori existeixen diversos possibles resultats o successos possibles . Un succés és un subconjunt del conjunt de possibles resultats.	Tirem un dau. Possibles resultats = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Succés <i>obtenir múltiple de 3</i> = $\{3, 6\}$
Assignació de probabilitats	Una mesura Límit al que tendeixen les freqüències relatives. Regla de Laplace: Si els successos elementals són equiprobables llavors: $p = \text{casos favorables} / \text{casos possibles}$.	$P(5) = 1/6$. $P(\text{treure múltiple de 3}) = 2/6$
Axiomàtica de Kolmogorov	1. $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, per a tot A. 3. Si $(A \cap B) = \emptyset$ llavors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremes de Probabilitat	Succés contrari: $P(X) + P(\text{no}X) = 1$. Intersecció: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Unió: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	$P(\text{no } 5) = 1 - 1/6 = 5/6$. $P(5 \cup \text{múl. } 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6$ $P(\text{treure primer un 5 i després múltiple de 3}) = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36$
Teorema de Bayes	$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \times P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \times P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \times P(A_k)}$	
Permutacions	Es considera només l'ordre. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Es consideren l'ordre i els elements . Els elements poden repetir-se . $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeixen l'ordre i els elements . Els elements NO poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1) = \frac{m!}{(m - n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els elements . $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m - n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Binomi de Newton	$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

EXERCICIS I PROBLEMES.

Probabilitat

1. En un col·legi se selecciona un grup de 200 estudiants dels quals tots estudien francès o anglès. D'ells 150 estudien anglès i 70 estudien francès. Quants estudien francès i anglès? A un altre centre escolar s'estudien diversos idiomes: francès, anglès, alemany, italià. Se seleccionen també 200 estudiants dels quals, 150 estudien anglès, 70 francès i 40 tots dos idiomes, quants estudiants d'aquest centre no estudien ni francès ni anglès?
2. Lancem un dau. Calcula la probabilitat de: a) Treure un nombre imparell. b) No treure un 3. c) Treure un nombre major que 3. d) Treure un nombre major que 3 i que sigui imparell. e) Treure un nombre major que 3 o bé que sigui imparell.
3. En una classe hi ha 24 alumnes i 14 alumnes. La meitat de les alumnes i la tercera part dels alumnes tenen els ulls blaus. Es tria un estudiant a l'atzar. A) Calcula la probabilitat que sigui noi i tingui els ulls blaus. B) Calcula la probabilitat que sigui noi o tingui els ulls blaus.
4. Antonio, Juan i Jorge tenen una prova de natació. Antonio i Juan tenen la mateixa probabilitat de guanyar, i doble a la probabilitat de Jorge. Calcula la probabilitat que guanyi Juan o Jorge.
5. Lancem dues monedes diferents, una de 50 cèntims i una altra d'un euro. Calcula la probabilitat que: A) En la moneda d'un euro surti cara. B) Surti una cara. C) Surti almenys una cara. D) No surti cap cara. E) Surti una cara i una creu.
6. Lancem tres monedes. Calcula les probabilitats de: A) No surti cap cara. B) Surti almenys una cara. C) Surtin dues cares i una creu.
7. Lancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que la summa sigui 1, sigui 2, sigui 3, sigui 12.
8. Què és més probable en tirar tres daus, que la suma de les seves cares superiors sigui 9 o sigui 10? Escriu el succés "sigui 9" i el succés "sigui 10" i calcula les probabilitats dels seus successos elementals. Saps ja més que *Galileu!*
9. Lancem alhora una moneda i un dau. Flama A a el succés "Surti cara i un nombre parell". B al succés "Surti creu i un nombre primer" i C al succés "surti un nombre primer". Calcula les probabilitats de A, B i C. Com són aquests successos? Indica quins d'ells són compatibles i quins són incompatibles.
10. Lancem una moneda 50 vegades, què és més probable, obtenir 50 cares seguides o obtenir en les primeres 25 tiratges cara i en les 25 següents creu? Raona la resposta.
11. Una moneda està trucada. La probabilitat d'obtenir cara és doble que la d'obtenir creu. Calcula les probabilitats dels successos obtenir cara i d'obtenir creu en tirar la moneda.
12. Tres nois i dues noies juguen un torneig d'escacs. Tots els nois tenen idèntica probabilitat de guanyar, i totes les noies, també. Però la probabilitat de guanyar una noia és doble de la de guanyar un noi. Calcula la probabilitat que un noi guanyi el torneig.
13. Set parelles de nuvis estan en una habitació. Se seleccionen dues persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: a) Siguin un noi i una noia. b) Siguin una parella de nuvis. Ara s'escullen 4 persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: c) Hi hagi almenys una parella de nuvis. d) No hi hagi cap parella de nuvis.
14. Tenim un dau trucat de manera que els nombres imparells tenen una probabilitat doble a la dels nombres parells. Calcula les probabilitats de: A) Surti un nombre imparell. B) Surti un nombre primer. C) Surti un nombre primer imparell. D) Surti un nombre que sigui primer o sigui imparell.
15. En un grup de 12 amigues hi ha 3 rosses. Es trien dues noies a l'atzar. Calcula la probabilitat que: A) Ambdues siguin rosses. B) Almenys una sigui rossa. C) Cap sigui rossa. D) Una sigui rossa i l'altra no.
16. Lancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que: A) Els nombres obtinguts siguin iguals. B) Els nombres obtinguts difereixin en 3 unitats. C) Els nombres obtinguts siguin parells.
17. Lancem una moneda fins que surti cara. Calcula la probabilitat que: A) Surti cara abans del quart llançament. B) Surti cara després del vuitè llançament.
18. Un lot de 20 articles té 2 defectuosos. Es treuen 4 a l'atzar, quin és la probabilitat que cap sigui defectuós?
19. Es llancen dos daus i la suma de les cares superiors és 7. Quin és la probabilitat que en un dels daus hagi sortit un 3?

Combinatòria

20. Cinc nedadors tiren una carrera. De quantes formes poden arribar a la meta si no hi ha empats? I si són 8 nedadors?
21. Santi, Pepe, Ana i Silvia volen fotografiar-se junts, de quantes maneres poden fer-se la fotografia? Volen situar-se de manera que alternin nois amb noies, de quantes maneres poden ara fer-se la fotografia?
22. De quantes maneres es poden introduir 9 objectes diferents en 9 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa?
23. Set noies participen en una carrera, de quantes formes poden arribar a la meta? No hi ha empats. Quin és la probabilitat d'encertar l'ordre d'arribada a la meta?
24. Quants nombres diferents i de cinc xifres diferents poden formar-se amb els dígit 3, 4, 5, 6, i 7? Quants poden formar-se si tots comencen per 5? I si han de començar per 5 i acabar en 7?
25. Quantes banderes de 3 franges horitzontals de colors diferents es poden formar amb els colors vermell, groc i morat? I si es disposa de 6 colors? I si es disposa de 6 colors i no cal que les tres franges tinguin colors diferents?
26. Quants nombres de 3 xifres diferents es poden escriure amb els dígit 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Quants d'ells són imparells? Quants

són múltiples de 4?

27. Quants nombres de 34 xifres, diferents o no, es poden escriure amb els dígit: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Calcula la suma de tots ells.
28. A Maria li encanta el cinema i va a totes les estrenes. Aquesta setmana hi ha sis, i decideix anar cada dia a un. De quantes formes diferents pot ordenar les pel·lícules? Mala sort. Li anuncien un examen i decideix anar al cinema solament el dimarts, el dijous i el dissabte. Entre quantes pel·lícules pot triar el primer dia? I el segon? I el tercer?
29. Amb els dígit 0, 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar? (Observa: Si comença per 0 no és un nombre de quatre xifres). Quants són menors de 3000?
30. El llenguatge de l'ordinador està escrit en seqüències de zeros i uns (dígit binaris o bits) de grandària fixa. En el context de la informàtica, aquestes cadenes de bits es denominen paraules. Els ordinadors normalment tenen una grandària de paraula de 8, 16, 32 o 64 bits. El codi ASCII amb el qual es representaven inicialment els caràcters per a transmissió telegràfica tenia 7 bits. Després es va aplicar als ordinadors personals, ampliant-ho a 8 bits que és el que es denomina un byte o ASCII estès. Més tard es va substituir per Unicode, amb una longitud variable de més de 16 bits. Quants bytes diferents (8 dígit) si poden formar? En un ordinador cuya longitud de paraula tinguessin 16 dígit, quantes es podrien formar que fossin diferents? Si existís un ordinador cuya longitud de paraula tingués 4 dígit, es podria escriure amb ells les lletres de l'alfabet?
31. Tens vuit boles d'igual grandària, quatre blanques i quatre negres, si les col·loques en fila, de quantes formes pot ordenar-les?
32. Amb 4 llaunes de pintura de diferents colors, quantes mesclades de 2 colors podràs fer?
33. De quantes maneres es pot triar una delegació de 3 estudiants d'un grup de 30? I en el teu propi grup?
34. Quants productes diferents es poden formar amb els nombres: 2, $1/3$, 7, 5 i π prenent-los de 3 en 3? Quants d'aquests productes donaran com resultat un nombre enter? Quants un nombre racional no sencer? Quants un nombre irracional?
35. Quants aliatges de 4 metalls poden fer-se amb 7 tipus diferents de metall?
36. De quantes formes pots separar un grup de 9 estudiants en dos grups de 3 i 6 estudiants respectivament?
37. Una assignatura es compon de 15 temes i es va a realitzar un examen en el qual cauen preguntes de dos temes, quantes possibilitats hi ha per triar els temes que cauen? Si només has estudiat 10 temes, quantes possibilitats hi ha que et toquin dos temes que no et sàpigues? Quin és la probabilitat que et toquin dos temes que no et sàpigues? I la que et toqui només un tema que no et sàpigues?
38. Quantes opcions hi ha per triar quatre assignatures entre set optatives?
39. Es juga una partida de tir al plató en la qual es llancen successivament dotze plats. Quin és el nombre de successos en els quals s'obtenen quatre èxits, és a dir s'encerta quatre vegades en el blanc? En el mateix cas anterior, quin és la probabilitat de tenir èxit en l'últim tir?
40. Llancem una moneda i després un dau, Quants resultats diferents podem obtenir? I si llancem dues monedes i un dau? I si anessin 3 monedes i 2 daus?
41. En una reunió totes les persones se saluden estrechant-se la mà. Sabent que va haver-hi 91 salutacions. Quantes persones hi havia? I si hubo 45 salutacions, cuántas persones hi havia?
42. La major part de les contrasenyes de les targetes de crèdit són nombres de 4 xifres. Quantes possibles contrasenyes podem formar? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades?
43. Pedro va conèixer ahir a una noia. Ho van passar molt bé i ella li va donar el seu nombre de mòbil, però ell no portava el seu mòbil ni bolígraf. Va pensar que s'acordaria, però... només recorda que començava per 656, que hi havia altres quatre que eren totes diferents entre si i menors que 5. Calcula quantes possibilitats té d'encertar si marca un nombre. Massa. Fa memòria i recorda que les dues últimes són 77. Quantes possibilitats hi ha ara d'encertar fent una trucada?



44. Fa molts anys les plaques de matrícula eren com aquesta: M677573; després van ser com aquesta: M 1234 AB; i actualment com aquesta: 6068 BPD. Investiga quins avantatges té cadascun d'aquests canvis respecte a l'anterior.



45. Juana i Juan juguen al tennis i decideixen que guanya aquell que primer guanyi 4 sets. Quin és el nombre màxim de sets que hauran de disputar?

Quants desenvolupaments possibles pot tenir la trobada?

46. Un club d'alpinistes ha organitzat una expedició al Kilimanjaro formada per 11 persones, 7 experts i 4 que estan en formació. En un determinat tram només poden anar 3 experts i 2 que no ho siguin, de quantes formes pot estar compost aquest equip de 5 persones? Tu ets un expert, i vas a anar en aquest tram, quantes formes hi ha ara de compondre-ho?
47. En els bitllets d'una línia d'autobusos van impresos els noms de l'estació de partida i de la d'arribada. Hi ha en total 8 possibles estacions. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir l'empresa d'autobusos? Ara volen canviar el format i només imprimir el preu, que és proporcional a la distància. Les distàncies entre les estacions són totes diferents. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir en aquest cas?
48. Una parella té un fill de 3 anys que entra en la guarderia a les 9 del matí. El pare treballa en una fàbrica que té 3 torns mensuals rotatius: de 0 a 8, de 8 a 16 i de 16 a 24 hores. La mare treballa en un supermercat que té dos torns rotatius mensuals, de 8 a 14 i de 14 a 20 hores. Quants dies a l'any, de mitjana, no podrà cap dels dos portar al seu fill a la guarderia?
49. Un tir al blanc té 10 caballitos numerats que giren. Si s'encerta a un d'ells s'encén una llum amb el nombre del caballito. Tires 3

vegades, de quantes maneres es poden encendre les llums? I si el primer tir no dóna a cap caballito?

50. En una festa hi ha 7 noies i 7 nois. Juan balla sempre amb Ana. Antonio és el més decidit i sempre surt a ballar el primer, de quantes formes pot triar parella en els propers 4 balls?

AUTOAVALUACIÓ

1. En tirar dos daus, la probabilitat de treure almenys un 5 és:

- a) $5/6$ b) $11/36$ c) $25/36$ d) $30/36$

2. En tirar 3 monedes, la probabilitat de treure exactament dues cares és:

- a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$

3. En tirar 3 monedes, la probabilitat de treure almenys dues cares és:

- a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$

4. Traiem una carta d'una baralla de 40 cartes, la probabilitat que sigui un or o un múltiple de 2 és:

- a) $22/40$ b) $19/40$ c) $36/40$ d) $3/4$

5. Indica quin de les afirmacions següents és **sempre** correcta:

a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$

b) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Amb els dígitos 0, 1, 2, 3, i 4 quants nombres de quatre xifres es poden formar?

- a) 58 b) 120 c) 96 d) 192

7. Vuit corredors participen en una carrera, les formes diferents en què poden arribar a la meta són:

- a) 40320 b) 20160 c) 5040 d) 10080

8. Amb 5 llaunes de pintura de diferents colors, quantes mescleres de 2 colors podràs fer?

- a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

9. Amb els dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 es poden escriure nombres imparells de 3 xifres diferents. Quants nombres diferents es poden escriure?

- a) 60 b) 10 c) 120 d) 30

10. Amb els dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 es poden escriure nombres imparells de 3 xifres (iguals o diferents). Quants nombres diferents es poden escriure?

- a) 216 b) 108 c) 120 d) 90

ACTIVITATS PROPOSADES

1. DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT

- Es llancen 3 monedes i expliquem el nombre de cares que surten. Fes un diagrama en arbre. Escriu en una taula la funció de quantia i la funció de distribució. Representa la funció de quantia en un histograma i amb una línia la funció de distribució.
- Es llancen 2 daus i expliquem el nombre de 5 que apareixen. Fes un diagrama en arbre, escriu en una taula la funció de quantia i la funció de distribució, i representa-les gràficament.
- Es llancen 3 monedes. Per jugar ens cobren 1 euro, i per cada cara que aparegui guanyem 1 euro. Escriu una distribució de probabilitat i representa l'histograma. Quant esperes guanyar o perdre en 100 llançaments?
- Una persona aposta 10 euros a un joc de tirar una moneda i que surti cara o creu (o similar). Si gana es retira i deixa de jugar. Si perd, aposta el doble, 20 euros. Si gana es retira. Si perd aposta el doble, 40 euros. I així successivament. Amb aquesta estratègia sempre acaba guanyant 10 euros, però té un defecte, que no porti suficients diners per seguir jugant fins a guanyar! Imagina que porta 500 euros. A) Fes un diagrama d'arbre i calcula totes les possibilitats i les seves probabilitats. B) La distribució de probabilitat: Guanyats (x) \rightarrow Probabilitat (x). C) És un joc avantatjós? I per al nostre jugador? D) Calcula la probabilitat de guanyar 10 euros i la de perdre 500 euros.
- Llancem dos daus. Si apostem al 7 i surt, recuperem tres vegades l'apostat. Si apostem que surt menor que 7 i surt, recuperem l'apostat, i el mateix si apostem que surt major que 7. Quin és la millor estratègia?
- S'ha comprovat que la distribució de probabilitat del sexe d'un noutat és:

Sexe del noutat:	noia	noi
Probabilitat:	0'485	0'515

En un hospital van a néixer avui 10 bebès. Escriu l'expressió de probabilitat que neixin 7 noies.

- S'estima que el percentatge de llars que utilitza una determinada marca de tomàquet fregit és del 12 %. En una mostra de 20 llars, quina probabilitat hi ha de trobar entre 6 i 15 que ho utilitzin? (No ho calculis, només planteja com ho calcularies).
- Llancem dues monedes i expliquem el nombre de cares. Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquest experiment.
- Observa l'histograma de l'experiment de llançar una moneda 3 vegades. Indica les següents probabilitats. A) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor que 1. B) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor o igual a 1.
- Observa l'histograma de l'experiment de llançar una moneda 5 vegades. Indica les següents probabilitats. A) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor que 3. B) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor o igual a 3.
- Escriu l'expressió (no ho calculis) de la probabilitat que en llançar una moneda 15 vegades el nombre de cares sigui menor que 5.
- Escriu l'expressió (no ho calculis) de la probabilitat que en llançar un dau 15 vegades el nombre de cincos sigui major que 10.
- En el control de qualitat de bombetes de baix consumeix d'una fàbrica s'ha comprovat que el 90 % són bones. Es pren una mostra de 500 bombetes. De mitjana, quantes seran de bona qualitat? Calcula la mitjana, variància i desviació típica.
- En l'estudi sobre una nova medicina per a l'hepatitis C s'ha comprovat que produeix curacions completes en el 80 % dels casos tractats. S'administra a mil nous malalts, quantes curacions esperarem que es produeixin?
- Utilitza la taula de la normal tipificada per calcular: a) $P(z \leq 0'37)$; b) $P(z < 1'51)$; c) $P(z \geq 0'87)$; d) $P(z \leq -0'87)$; e) $P(0'32 < z < 1'24)$.
- Es tracta a pacients amb trastorn del somni amb un tractament que modela el nombre de dies amb una distribució normal de mitjana 290 dies i desviació típica 30. Calcula la probabilitat que en prendre una persona a l'atzar el seu tractament duri més de 300 dies.
- En una estació meteorològica que les precipitacions anuals de pluja tenen una mitjana de 450 mm/m² amb una desviació típica de 80 mm/m². Suposem que la variable aleatòria segueix una distribució normal. Calcula la probabilitat que: a) Aquest proper any la precipitació excedeixi els 500 mm/m². b) La precipitació estigui entre 400 i 510 mm/m². c) La precipitació sigui menor de 300 mm/m².
- En el cas del problema anterior d'una $N(450, 80)$ determina la probabilitat que la variable estigui en els intervals $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.
- En una fàbrica de cotxes es fan proves per conèixer el temps que triguen els seus vehicles a aconseguir la velocitat punta. Es considera que aquesta variable aleatòria temps es distribueix segons una distribució normal de mitjana 20 s i desviació típica 2 s. Calcula les probabilitats següents: a) Que un vehicle aconseguixi la seva velocitat punta als 25 s. b) Aconseguixi la seva velocitat punta en menys de 25 s. c) L'aconsegueixi entre 18 s i 22s. d) Quina velocitat punta consideres que tindran els vehicles ràpids? e) I els lents?
- Es llança una moneda mil vegades, quin és la probabilitat que el nombre de cares obtingudes estigui entre 400 i 600? I que sigui major que 800?

21. En una fàbrica de bombetes de baix consum se sap que el 70 % d'elles tenen una vida mitjana superior a 1000 hores. Es pren una mostra de 50 bombetes, quin és la probabilitat que hi hagi entre 20 i 30 la vida mitjana de la qual sigui superior a mil hores?, i la probabilitat que hi hagi més de 45 la vida mitjana de la qual sigui superior a 1000 hores?

22. Una companyia aèria ha estudiat que el 5 % de les persones que reserven un bitllet per a un vol no es presenten, per la qual cosa venen més bitllets que les places disponibles. Un determinat avió de la companyia té 260 places (amb el que solen reservar fins a 270). Calcula la probabilitat que arribin 260 passatgers. En 500 vols d'aquest avió, en quants consideres que hi haurà excés de passatgers?

29. Refés els càlculs de l'activitat anterior per a un nivell de confiança del 99 %.

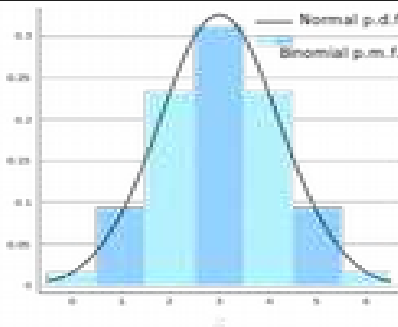
30. S'investiguen els hàbits de consum d'una població de dos milions de persones. Es passa una enquesta a mil persones i se'ls pregunta si al seu domicili es cuina amb gas, dels quals 600 responen afirmativament. Què pots afirmar sobre el nombre de persones en les quals al seu domicili s'usa gas amb un nivell de confiança del 95 %.

31. Es llança 600 vegades un dau i expliquem el nombre de 5s. a) Quin és l'interval simètric respecte de la mitjana amb una probabilitat de 0'99? b) El mateix amb una probabilitat del 0'6.

32. En una activitat anterior vam veure que en una companyia aèria s'havia estudiat que el 5 % de les persones que reserven un bitllet per a un vol no es presenten. Un determinat avió de la companyia té 260 places. Quin nombre de reserves n pot acceptar la companyia admetent una probabilitat del 0'02 perquè el nombre de reserves superi al nombre de places.

(Ajuda: Busca una binomial tal que $p(x > 260) < 0'02 \rightarrow p(x \leq 260) = 1 - p(x > 260) \geq 0'98$).

RESUM

Propietats de funció de quantia	1) $p(x) \geq 0$ 2) $\sum p(x) = 1$.	Llancem dues monedes i expliquem el nombre de cares: <table border="1" data-bbox="1018 904 1409 999"> <tr> <td>Nombre de cares (x):</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table>	Nombre de cares (x):	0	1	2				
Nombre de cares (x):	0	1	2							
Propietats de funció de distribució	1) $0 \leq F(x) \leq 1$ 2) $F(x)$ és una funció creixent 3) $F(x_{M\grave{a}xim}) = 1$	<table border="1" data-bbox="1018 999 1409 1178"> <tr> <td>Funció de quantia $p(x)$:</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> </tr> <tr> <td>Funció de distribució $F(x)$:</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>$\frac{3}{4}$</td> <td>$\frac{4}{4}$</td> </tr> </table>	Funció de quantia $p(x)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Funció de distribució $F(x)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
Funció de quantia $p(x)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$							
Funció de distribució $F(x)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$							
Esperança matemàtica	$E(x) = \mu = \sum_i x_i \cdot p(x_i)$	$\mu = 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) = 1$								
Variància i desviació típica	$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = E(x^2) - E^2(x)$ $\sigma = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)}$	$\sigma^2 = (0-1)^2 \cdot (1/4) + (1-1)^2 \cdot (1/2) + (2-1)^2 \cdot (1/4) = 1/2$. $\sigma = \sqrt{1/2}$								
Distribució binomial	$B(n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $E(x) = \mu = n \cdot p,$ $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$									
Distribució normal	$N(\mu, \sigma) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$									
Aproximació de la binomial a la normal	Una binomial amb $npq \geq 9$ es considera s'ajusta bé a una normal d'igual mitjana i desviació típica.									

EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Es llança un dau tres vegades i es quanta el nombre de treses que apareixen. Dibuixa l'histograma, la funció de quantia i la funció de distribució. Calcula la mitjana i la desviació típica.

2. Llancem 4 monedes. Per cada cara que surti guanyem 5 euros, però hem de pagar 3 euros per jugar. Quant esperes guanyar en una jugada? I en 20 jugades? I en 100 jugades?

3. Disposem de dues urnes, la primera amb 6 boles idèntiques numerades de l'1 al 6; la segona amb 4 boles idèntiques numerades de l'1 al 4. Traiem alhora una bola de cada urna, i considerem la variable aleatòria, "suma de punts obtinguts". A) Calcula la distribució de probabilitat i dibuixa l'histograma corresponent. B) Si traiem més de 5 punts guanyem 10 euros, i en cas contrari perdem la mateixa quantitat. És un joc equitatiu?

4. La població activa d'un cert país es pot dividir en els quals tenen estudis superiors i els que no els tenen, sent el primer d'un 20 %. Triem 10 persones de la població activa a l'atzar. Escriu l'expressió de totes les possibilitats i les seves probabilitats. Calcula la probabilitat que hi hagi 9 o 10 que tinguin estudis superiors.

5. Si $p(x)$ és la probabilitat de tenir x èxits en una distribució binomial $B(n, p)$, i $p(x+1)$ és la d'obtenir $x+1$ èxits, comprova que es

$$\text{verifica la següent relació recurrent: } p(x+1) = \frac{p(x)}{x+1} (n-x) \frac{p}{q}$$

6. En una ruleta hi ha 37 nombres numerats del 0 al 36, dels quals 18 són parells i 18 imparells. Si surt el 0 gana la banca. Juguem al dos per 1 a imparell, apostem 10 euros a imparell, i la banca ens paga 20 euros si surt un imparell, i es queda amb els nostres 10 euros si no surt, Et sembla un joc equitatiu?

7. Joc de Sant Petersburg: Es llança una moneda no trucada fins que apareix cara. Si surt en el primer llançament, es guanyen 10 euros, si en el segon, 20, si en el tercer, 40, ... i en el n -èsim, $10 \cdot 2^{n-1}$. Calcula el guany mitjà si només es pot llançar 5 vegades la moneda. I si es pot llançar 10 vegades?

8. Llancem un dau no trucat mil vegades i expliquem el nombre de 5, quin nombre d'èxits esperem amb una probabilitat no inferior al 0'95, és a dir, en l'interval intervén menys dues vegades la desviació típica i mitjana més dues vegades la desviació típica?

9. En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ calcula $P(x=0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x=10)$ i $P(x=7)$. Determina també la mitjana i la desviació típica.

10. Llancem 5 monedes, calcula les probabilitats d'obtenir:

- a) 0 cares, b) 1 cara, c) 2 cares, d) 3 cares

11. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

- a) $P(z=0)$, b) $P(z < 0)$, c) $P(z = 1'82)$, d) $P(z > 1'82)$.

12. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

- a) $P(z > 4)$, b) $P(z < 4)$, c) $P(z > 1)$, d) $P(z < 1)$.

13. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:

- a) $P(1 < z < 2)$, b) $P(-1'3 < z < 4)$, c) $P(-0'2 < z < 2'34)$, d) $P(-1 < z < 1)$.

14. Calcula en una distribució normal $N(1, 2)$ les probabilitats següents:

- a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

15. Calcula en una distribució normal $N(0'5, 0'2)$ les probabilitats següents:

- a) $P(x > 4)$, b) $P(x < 4)$, c) $P(x > 1)$, d) $P(x < 1)$.

16. Calcula en una distribució normal $N(1, 1/2)$ les probabilitats següents:

- a) $P(1 < x < 2)$, b) $P(-1'3 < x < 4)$, c) $P(-0'2 < x < 2'34)$, d) $P(-1 < x < 3)$.

17. En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i mitjançant l'aproximació a la normal determina $P(x=0)$, $P(x \neq 0)$, $P(x=10)$ i $P(x=7)$. Compara amb els resultats obtinguts en l'exercici 9.

18. En una distribució binomial $B(100, 0'4)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i mitjançant l'aproximació a la normal determina $P(x > 40)$, $P(x \leq 50)$, $P(x \geq 50)$ i $P(40 \leq x \leq 50)$.

19. En una distribució binomial $B(1000, 0'5)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i mitjançant l'aproximació a la normal determina $P(x < 200)$, $P(x = 150)$, $P(x < 150)$ i $P(50 \leq x \leq 150)$.

20. En una distribució binomial $B(1000, 0'05)$ calcula la mitjana i la desviació típica, i mitjançant l'aproximació a la normal determina $P(x > 200)$, $P(x = 200)$, $P(x < 200)$ i $P(50 \leq x \leq 200)$.

21. Una fàbrica de mòbils ha comprovat que l'1 % dels quals fabrica són defectuosos. En un control de qualitat es prenen 10 mòbils a l'atzar. Calcula la mitjana i la desviació típica. Calcula la probabilitat que hi hagi més de 2 mòbils defectuosos.

22. La probabilitat que Maria guanyi a Raquel en una partida és de 0'4. Juguem 6 partides. Calcula la probabilitat que:

- a) Maria guanyi alguna vegada. b) Raquel guanyi almenys una vegada.
c) Raquel guanyi més de la meitat de les partides. d) Maria guanyi 2 partides.

23. Les alçades de les persones d'una certa població es distribueixen segons una normal de mitjana 180 cm i desviació típica 15 cm. Determina les probabilitats que:

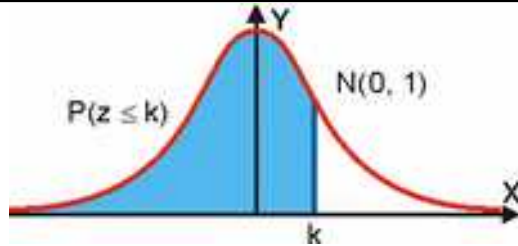
- a) Una persona tingui una alçada superior a 190 cm.
- b) Una persona tingui una alçada menor a 160 cm.
- c) Quina proporció de persones tenen una alçada compresa entre 160 cm i 190 cm?

24. En un examen per entrar en un cos de l'Estat se sap que els punts obtinguts es distribueixen segons una normal de mitjana 100 i desviació típica 10 punts. Determina la probabilitat que:

- a) Un opositor obtingui 120 punts.
- b) Si per aprovar és necessari tenir més de 120 punts, Quin percentatge d'opositors aproven?
- c) Si aproven únicament els que estan entre el 20 % dels millors, quants punts d'obtenir un opositor per aprovar?

AUTOAVALUACIÓ

1. Es llança un dau tres vegades i s'anota el nombre de quatre que apareixen. La distribució de probabilitat que tenim és:
 - a) $B(4, 1/6)$
 - b) $B(4, 1/4)$
 - c) $B(3, 1/6)$
 - d) $B(3, 5/6)$
2. En la distribució anterior, la mitjana és:
 - a) $\mu = 4/6$
 - b) $\mu = 1/2$
 - c) $\mu = 15/6$
 - d) $\mu = 1$
3. La **variància** és:
 - a) $\sigma^2 = 15/12$
 - b) $\sigma^2 = 5/6$
 - c) $\sigma^2 = 1/36$
 - d) $\sigma^2 = 5/12$
4. Utilitza la taula de la distribució normal estàndard per calcular la probabilitat $P(z \leq 2'02)$, que val:
 - a) $P(z \leq 2'02) = 0'0217$
 - b) $P(z \leq 2'02) = 0'9772$
 - c) $P(z \leq 2'02) = 0'0228$
 - d) $P(z \leq 2'02) = 0'9783$
5. Utilitza la taula de la distribució normal estàndard per calcular la probabilitat $P(0'5 < z < 1'5)$, que val:
 - a) 0'3417
 - b) 0'9332
 - c) 0'6915
 - d) 0'2742
6. Sense mirar la taula, ni tipificar la variable, la probabilitat de $P(x < \mu)$ és:
 - a) -0'4
 - b) 0'5
 - c) 0'6
 - d) No pot saber-se
7. En una distribució binomial $B(10, 0'3)$ el valor de $P(x = 0)$ és:
 - a) 0'11
 - b) 0'0198
 - c) 0'00001024
 - d) 0'8
8. El 2 % de les pastilles de fre fabricades se sap que són defectuoses. En una caixa amb 2000 pastilles, la probabilitat que hi hagi menys de 50 defectuoses és:
 - a) 0'6011
 - b) 0'7635
 - c) 0'9357
 - d) 0'8655
9. Una fàbrica d'ordinadors ha comprovat que el 5 % dels quals fabrica són defectuosos. En un control de qualitat es prenen 10 ordinadors a l'atzar. Determina si la probabilitat que no hi hagi cap defectuós és:
 - a) 0'5987
 - b) 0'4027
 - c) 0'9357
 - d) 0'8074
10. La probabilitat que Maria guanyi a Raquel en una partida és $2/3$. Juguen 4 partides. Determina si la probabilitat que Maria guanyi alguna vegada és:
 - a) 0'0123
 - b) 0'5
 - c) 0'8972
 - d) 0'9877

ÀREES SOTA LA DISTRIBUCIÓ DE PROBABILITAT NORMAL ESTÀNDAR, $N(0, 1)$ 

Taula de la uam: Universitat Autònoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000