

**Propiedad Intelectual**

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-009031

Fecha y hora de registro: 2013-06-22 11:35:24.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.drights.com>



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)



**Autora: Adela Salvador**

**Revisores: Nieves Zuasti y Sergio Hernández**

**Ilustraciones: Banco de imágenes del INTEF**

## Índice

### 1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

#### 2. PRIMERAS ESTRATEGIAS

- 2.1. ESTIMA EL RESULTADO
- 2.2. EXPERIMENTA, JUEGA CON EL PROBLEMA
- 2.3. HAZLO MÁS FÁCIL PARA EMPEZAR
- 2.4. HAZ UN DIAGRAMA, UN ESQUEMA...
- 2.5. MIRA SI TU PROBLEMA SE PARECE A ALGUNO QUE YA CONOZCAS
- 2.6. ESCOGE UNA BUENA NOTACIÓN

#### 3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- 3.1. ¡EUREKA!
- 3.2. BLOQUEOS

#### 4. JUEGOS Y PROBLEMAS

## Resumen

¿Qué es un problema? ¿Cómo enfrentarse a unos problemas nuevos que, quizás, no sean fáciles? ¿Es posible dar normas, conocer estrategias, para resolver mejor cualquier tipo de problema?

Un **problema** matemático es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan, de inmediato, alcanzar el objetivo.

Lo que para una persona es un problema, para otra puede ser un simple **ejercicio**, o mucho más que un problema, una **investigación**. La diferencia está en los conocimientos previos, y si para resolverlo debe hacerse preguntas, añadir hipótesis al enunciado.

Ante un auténtico problema muchas veces no sabe uno ni siquiera por dónde empezar. Veremos algunas **estrategias de pensamiento** útiles en toda clase de problemas.

Pensamos que enseñar a resolver problemas es lo mejor que se puede enseñar, pues el mundo evoluciona rápidamente y lo que hoy nos parece imprescindible, mañana puede haber quedado obsoleto, mientras que resolviendo problemas se prepara a las personas a enfrentarse a lo desconocido y los procesos mentales nunca envejecen.

Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea.

## 1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

### Ejemplo 1:

1. La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24 312 km. ¿Cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión, que debe ser cada 5 000 km?



Siempre que tengas que resolver un problema es conveniente que sigas los siguientes pasos:

### Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con cuidado el enunciado, y piensa:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Qué piden?

### Fase 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema con operaciones con números naturales, luego:

- ¿Qué operaciones aritméticas debo hacer? ¿Habrás que sumar? ¿Habrás que multiplicar? ¿Habrás que restar? ¿Habrás que dividir?

### Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resolvemos el problema:

Si multiplicas 5 000 por 5 obtienes 25 000. Por tanto, la próxima revisión debe ser a los 25 000 km, luego a la madre de María le faltan  $25\,000 - 24\,312 = 688$  km para hacer la revisión.

### Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.

Si sumas a 24 312 los 688 km del resultado tenemos los 25 000 km de la próxima revisión.

## Actividades propuestas

1. ¡Inventa problemas similares!
2. Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 6 € el metro. ¿Cuántos euros costará ponerlo?
3. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 64 731 km. Si las revisiones son cada 5 000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?
4. La piscina de Inés tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 10 m de largo y 7 m de ancho. Desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?



## 2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### 2.1. Estima el resultado

En muchas ocasiones nos basta con estimar un resultado, no con la solución exacta.

Ya has estimado las dimensiones de tu aula.

A la madre de María, por ejemplo, para estar tranquila le basta saber que le faltan más de 600 km para la próxima revisión. Mientras que el padre de Juan quizás no necesite saber que exactamente le faltan  $65\,000 - 64\,731 = 269$  km para la próxima revisión, sino estimar que le faltan menos de 300 km para empezar a preocuparse por hacerla.

Para realizar buenas estimaciones es conveniente haber practicado mucho.

#### Actividades propuestas

Intenta ahora tú estimar las soluciones de estos problemas:

5. Si tu paga semanal es de ocho euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un móvil (que estimas que vale unos 300 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?
6. Un ascensor sólo puede elevar 500 kg, ¿cuántos de tus amigos piensas que podrían subirse?
7. Informan que a una manifestación han ido 40 000 personas, ¿cómo crees que las han contado?
8. Si toda la población mundial se diera la mano formando una fila, ¿qué longitud se tendría?
9. ¿Cuánta gente cabe de pie en tu aula?
10. ¿Cuántos kilómetros andas al año?
11. ¿Cuántos granos de arroz hay en un kilo?



### 2.2. Experimenta, juega con el problema

Al experimentar con los datos del problema es fácil que se te ocurra qué debes hacer con ellos.

#### Actividades propuestas

12. a) Piensa un número de tres cifras.
  - b) Escríbelo al revés y resta el menor del mayor.
  - c) Escribe el resultado al revés y súmalo al resultado de la resta.
  - d) Escribe la solución final.
  - e) Prueba con varios números, ¿qué observas? ¿Hay algún caso en el que no se obtenga la misma solución?
  - f) Prueba con cuatro cifras. ¿Obtienes resultados del mismo tipo que las anteriores?
  - g) ¿Te atreves con cinco cifras?

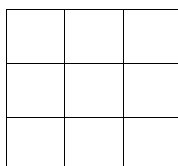
### 2.3. Hazlo más fácil para empezar

**13. "Las torres de Hanoi":** Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor. Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuánto falta para que termine el mundo?

Para enfrentarte a este problema, ten en cuenta, lo primero, las **fases**, intenta entender bien el problema.

Luego, **hazlo más fácil para empezar**. En lugar de con 64 discos, empieza sólo con un disco. A continuación, con dos, con tres... Manipula los objetos. Haz un esquema.

#### 14. Cuadrado Mágico



Con los números del 10 al 18 completa en tu cuaderno el cuadro de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

- Hazlo más fácil, comienza con un cuadrado mágico con los números del 1 al 9. ¿Cuánto debe sumar cada fila? ¿Cuál debe ser el número de la casilla central? ¿La suma de  $1 + 2 + \dots + 9 = \dots$ ? ¿Qué número dividido entre 3 nos da: ...?

Luego hazte las mismas preguntas con los números del problema inicial.

### 2.4. Haz un diagrama, un esquema...

En muchas ocasiones hacer un diagrama nos resuelve el problema.

#### Actividades propuestas

**15. "Color del pelo":** Tres amigas A, B, C, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están jugando a las cartas sentadas en una mesa circular, cada una pasa una carta a la que está a su derecha. La amiga B ha pasado una carta a la rubia. La amiga A ha pasado una carta a la que ha pasado una carta a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de A, B y C?

Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones que existen, se observa que una de ellas es inconsistente, ya que una de las amigas es a la vez rubia y pelirroja. La solución es la otra configuración, que es consistente con el enunciado.

**16.** Una persona es 80 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Lee y comprende con cuidado el enunciado, dibuja un esquema y sabrás la solución.

**17.** Quieren cruzar un río en una barca tres mujeres y tres maridos celosos, si sólo caben dos personas en la barca, y nunca pueden quedar solos una mujer y un marido que no sean pareja, ¿cómo pueden hacerlo?

## 2.5. Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Es posible que tu problema tenga el mismo aire que otro que ya has resuelto, lo que puede proporcionarte pistas útiles para resolver el nuevo.

### Actividades propuestas

18. Observa las ofertas de una tienda:

	<i>Precio anterior</i>	<i>Oferta</i>
<b>Camisetas</b>	15 euros	12 euros
<b>Chaquetas</b>	40 euros	30 euros
<b>Pantalones</b>	32 euros	28 euros
<b>Camisas</b>	25 euros	21 euros



Una persona aprovecha estas ofertas y compra cinco camisas, una chaqueta, dos pantalones y tres camisetas. Averigua cuánto se gasta y cuánto se ahorra por comprar esa ropa en ofertas.

19. Se han apuntado 25 estudiantes a un viaje. Al pagar el billete 5 de ellos se dan cuenta que no han traído dinero. El resto decide pagárselo, y abonan cada uno 3 €. ¿Cuánto cuesta cada billete?

## 2.6. Escoge una buena notación

### Actividades propuestas

20. Calcula mentalmente el producto de dos números y luego suma un tercero:

a)  $5 \times 9 + 26 =$

b)  $200 \times 7 + 128 =$

c)  $60 \times 8 + 321 =$

Ahora al revés: nos dan el resultado y buscamos, de la forma anterior, con qué números puede obtenerse. Por ejemplo, nos dan 1 000 y decimos  $1\ 000 = 100 \times 7 + 300$ .

Sigue ese modelo para expresar los números siguientes: 2 000, 4 000 y 5 500.

21. **Emmy Noether**, una ilustre mujer matemática, nació el 23 de marzo de 1 882 y murió el 14 de abril de 1935.

a) ¿Cuántos años tenía al morir?

b) ¿Cuántos años han pasado desde el año de su muerte?

c) ¿Cuántos años faltan para celebrar el centenario de su muerte?  
¿Cuántos meses? ¿Cuántos días?



### 3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

#### 3.1. ¡Eureka!

Ya sabes que **Arquímedes** estaba en la bañera cuando exclamó **¡Eureka!** pues había descubierto una importante propiedad de los cuerpos sumergidos. Algo parecido ocurre en muchas ocasiones. Tú mismo si trabajas en un problema, luego tu inconsciente continua trabajando y, de repente, cuando menos lo esperas ¡Eureka!, tienes la solución. Esta situación, esta emoción positiva y gratificante, también recibe el nombre de **¡Ajá!**

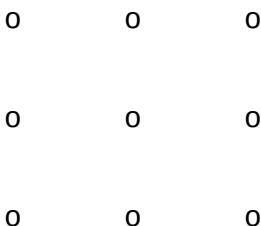
En la Historia de la Ciencia se conocen muchas de estas situaciones. Busca alguna y reflexiona sobre cómo te sientes al resolver un problema que, en un primer momento, parecía imposible.

#### 3.2. Bloqueos

Pero también pueden aparecer emociones negativas, a las que llamamos **bloqueos**. Muchas veces, al intentar resolver un problema, éste nos parece imposible, nos desanimamos, entran ganas de dejarlo todo. Esto es un bloqueo. Pero eso le pasa a todo el mundo. Hay que sacar fuerzas y continuar. Buscar la causa del bloqueo.

Veamos algunos problemas sencillos que resultan complicados pues en ellos suele producirse un bloqueo. Intenta primero resolverlos y luego, si no te salen, lee la ayuda.

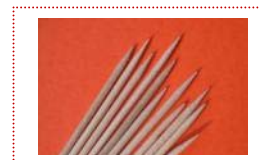
**22.** Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.



Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Recuerda, lo primero es comprender el enunciado. Prueba a hacerlo. ¿Lo has conseguido? Estupendo. No lo consigues, inténtalo un poco más.

**Bloqueo:** Si no lo consigues es porque estás presuponiendo algo que no se ha dicho y es que no puedes salir del recinto limitado por los puntos. Haz trazos más largos y lo conseguirás enseguida.



**23.** Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

➤ Experimenta, juega con el problema. ¡Lo has conseguido! Entonces no has tenido un bloqueo.

**Bloqueo:** Nadie ha dicho que no pudieras salir del plano. Ahí está el bloqueo. Lo consigues con un tetraedro regular.

## 4. JUEGOS Y PROBLEMAS

¿Te gusta jugar? Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

**Fases:** Lo primero, naturalmente, comprender bien las reglas del juego, que es similar a comprender el enunciado. Lo segundo, jugar, hasta encontrar una estrategia ganadora. Luego jugar y ver si tu estrategia es realmente buena. Por último, generalizar, intentar mejorar la estrategia.



### Actividades propuestas

Utiliza todo lo que has aprendido.

#### 24. ¡Y ahora un juego! Las tres en raya

Se juega de dos en dos. Copia en el cuaderno la tabla siguiente:

497	315	69	77
115	33	90	22
225	161	46	55
355	142	135	213

Una persona escoge dos números, uno del conjunto  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  y otro del conjunto  $B = \{11, 45, 71, 23\}$ . Los multiplica mentalmente, y pone su marca (o una ficha, o una bolita de papel) sobre el número resultante. La otra persona hace lo mismo cuando le toque el turno. Gana quien pone tres marcas en línea recta.

Ahora ¡a jugar!

25. Realiza el mismo juego de la actividad anterior con este otro tablero, y con los grupos de números:  $A = \{2, 5, 7, 4\}$  y  $B = \{3, 11, 9, 1\}$ .

63	7	21	6
22	4	15	5
45	2	55	44
12	36	18	77

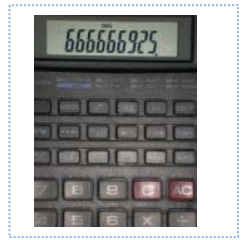
- Inventa con otros números tu propio tablero de juegos.



**26. Otro juego**

Es un juego de **calculadora** y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original.

Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.



2	4	5	6	1	0	3	7
+	-	x	/	+	-	+	-
/	=	+	=	x	=	x	=
34	147	123	93				

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

**27. ¡Hagamos magia!**

Dile a una persona que piense un número de tres cifras, que escriba ese número y, de nuevo, las tres cifras, para formar un número de seis cifras. Pídele que lo divida entre 7, luego entre 11 y luego entre 13. Se quedará sorprendida al comprobar que el resultado es el número que escribió. ¿Sabes por qué?

**28. Resuelve el crucigrama:** Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

	x		x		=	24
x		x		x		
	x		x		=	35
x		x		x		
	x		x		=	30
=		=		=		
6		50		84		

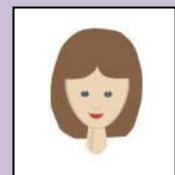
CURIOSIDADES. REVISTA**ELLAS Y ELLOS INVESTIGAN PARA RESOLVER PROBLEMAS**

*El progreso que ahora disfrutamos ha sido posible gracias a la iniciativa y al trabajo de miles de hombres y mujeres. Superaron retos y resolvieron problemas para los que necesitaron muchos conocimientos matemáticos*

**CONSTRUYERON PUENTES QUE NOS COMUNICAN****DISEÑARON AVIONES QUE SOBREVUELAN OCÉANOS****BARCOS QUE SURCAN LOS MARES****LA INFORMÁTICA QUE NOS INVADE****LA REINA DE LAS CIENCIAS DEL S. XIX**

Mary Somerville dedicó su vida al estudio de las matemáticas y la física. Tradujo al inglés La Mecánica Celeste de Laplace, uno de los tratados científicos más importantes de su época. Escribió numerosas obras y artículos, viajó por Europa y se relacionó con los principales científicos. La Reina Victoria le concedió una pensión vitalicia en reconocimiento a su trabajo. Fue una mujer feliz. Mirad lo que escribió:

*"Tengo 92 años..., mi memoria para los acontecimientos ordinarios es débil pero no para las matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas"*

**LA ELECTRICIDAD QUE LLEGA A TODAS PARTES**

**RESUMEN**

<b>Problema</b>	Es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.
<b>Fases en la resolución de un problema</b>	<p>Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema.</p> <p>Fase 2: Busca una buena estrategia.</p> <p>Fase 3: Lleva adelante tu estrategia.</p> <p>Fase 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable. Comprueba la estrategia.</p>
<b>Algunas estrategias</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Estima el resultado.</li> <li>➤ Experimenta, juega con el problema.</li> <li>➤ Hazlo más fácil para empezar.</li> <li>➤ Haz un diagrama, un esquema...</li> <li>➤ Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas.</li> <li>➤ Escoge una buena notación.</li> </ul>
<b>Emociones y resolución de problemas</b>	<p>Emoción positiva: Idea feliz. ¡Aja! ¡Eureka!</p> <p>Emoción negativa: Bloqueo</p>
<b>Juegos de estrategia</b>	Para ser un buen jugador en juegos de estrategia puedes utilizar las técnicas que has aprendido con la resolución de problemas.

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La Jefe de Estudios de un colegio ha anotado en un cuadro el número de alumnos y alumnas que han faltado a clase. En ese colegio hay ocho clases de Secundaria.

	L	M	X	J	V	TOTAL
<b>1º A</b>	2	3	5	1	3	
<b>1º B</b>	3	4	1	3	2	
<b>2º A</b>	2	6	3	4	3	
<b>2º B</b>	5	1	0	2	1	
<b>3º A</b>	4	2	3	1	0	
<b>3º B</b>	6	3	1	2	3	
<b>4º A</b>	2	3	1	4	0	
<b>4º B</b>	4	2	2	2	0	
<b>TOTAL</b>						



Copia la tabla en tu cuaderno y resuelve allí el ejercicio.

a) Completa las últimas fila y columna del cuadro.

b) Sabiendo que el número total de alumnos y alumnas de ese colegio en Secundaria es de 205, averigua cuántos había en el colegio el jueves.

2. “El extraordinario 37”

$$37 \times 3 = 111$$

$$37 \times 6 = 222$$

$$37 \times 9 = 333$$

Consigue tú ahora

444, 555, 666...

3. En una cuadrícula de cuatro por cuatro, coloca los números del 1 al 16 en los cuadrados, cada uno en uno. Multiplica los números de cada dos cuadrados adyacentes y escribe el producto en cada arista. Suma los números que hay en cada arista. Queremos que la suma sea lo menor posible, ¿Cómo debemos colocar los números del 1 al 16?

## 4. Triángulos

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

Comprueba que el triángulo sigue hasta llegar a +10.

5. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

6. **Números en fuga:** Estas operaciones se han quedado sin resolver por falta de algunos números. ¿Puedes completarlas? Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

a) 
$$\begin{array}{r} 3 \square 89 \square \\ + 46410 \\ \hline \square 25 \square 6 \\ 1 \square 9 \square 53 \end{array}$$

b) 
$$4 \quad 2 : \quad 5 = 17 \text{ resto } 07$$

c) 
$$2 \quad 3 \quad \times 75 = 2 \quad 0050$$

7. Dos mujeres habían ido al mercado a vender 30 manzanas cada una. La primera tenía la intención de vender cada dos manzanas por un €. ¿Cuánto pensaba ganar? La segunda quería vender cada tres manzanas por dos €. ¿Cuánto ganaría? Pero no querían hacerse la competencia por lo que llegaron al siguiente acuerdo: vender ambas cada cinco (2 + 3) manzanas por tres (1 + 2) €. Lo habían vendido todo. ¿Han ganado 36 €? ¡Les sobra un €! Con la venta anterior iban a ganar 35 €, y han ganado 36 €. ¿Puedes explicarles qué ha ocurrido?



8. Sofía, que es muy sabia, se lo ha explicado, y se han puesto tan contentas que han decidido ir a comer las tres juntas. Pagaron la comida con 30 €, y el camarero les devolvió 5 €. Cada una se quedó con un €, pero sobraban 2 que dejaron de propina. ¡De nuevo tenían un problema! ¡Ahora faltaba un €! Han pagado  $10 - 1 = 9$  € cada una, que por 3 son 27 €, más 2 de propina son  $27 + 2 = 29$ . Y en un principio tenían 30. ¡Les falta uno! Explica lo sucedido.

9. **Letras y números:** Si sigues el orden alfabético estas cuatro operaciones dan como resultado letras con las que podrás formar una palabra:

$$(8 + 10) : 3 + 7 \times 1 - 5 =$$

$$(23 - 15) + 2 \times 4 =$$

$$1 \times 4 + 6 : 2 + 5 \times 1 =$$

$$45 \times (1 + 0) - 45 + 1 =$$

Cópialo en tu cuaderno y resuélvelo.

**10. "El lobo, la cabra y el repollo":** Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que, si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?



A. I. Fernández

**11.** Juan, Jaime y Jorge tienen cada uno dos oficios. Hay un barbero, un chofer, un tabernero, un músico, un pintor y un jardinero. ¿A qué se dedica cada uno de ellos? Sabiendo que:

1: El chófer se burló del músico porque tenía el pelo largo

2: El músico y el jardinero pescan con Juan

3: El pintor compró al tabernero vino

4: El chófer cortejaba a la hermana del pintor

5: Jaime debía 5 dólares al jardinero

6: Jorge vio a lo lejos a Jaime y al pintor.

**12. Sorpresas del 8 y el 9:**

$$0 \cdot 9 + 8 = 8$$

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$

$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$

$$987 \cdot 9 + 5 = 8888$$

$$9876 \cdot 9 + 4 = 88888$$

$$98765 \cdot 9 + 3 = 888888 \quad \text{¿Te animas a continuar la pirámide?}$$

**13.** Nos dan 16 bolas del mismo tamaño, pero una de ellas pesa un poco menos que las otras. Para averiguar cuál es disponemos de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que necesitas efectuar para, sin tener en cuenta la buena suerte, determinar la bola? ¿Y si son 32 bolas? ¿Y si son 27? ¿Y si 13? Generaliza el problema a cualquier número de bolas.

**14.** Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

**15.** ¿Cuál es el máximo número de ángulos interiores rectos que puede haber en un polígono convexo de  $n$  lados?

## PARA EL PROFESORADO

En la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba *Hans Freudenthal*, “*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*” y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que **la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica**, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad. Hay estudios que confirman que la enseñanza expresa de las etapas, cadencias, técnicas y estrategias consigue mejores resultados que la mera práctica espontánea. Es preciso resolver muchos problemas. Esa ayuda sólo puede ser eficaz si se ejerce sobre problemas concretos y no como pre-requisito teórico.

Trabajar en la resolución de problemas es lo mejor que se puede proporcionar a una persona, ya que ayuda a equiparla para su actividad integral, no solamente en lo que se refiere a sus capacidades matemáticas. El mundo evoluciona rápidamente, y tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro van a enfrentarse a situaciones desconocidas. Los procesos mentales no se hacen obsoletos.

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos, no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones, no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que, al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema e investigación.

La **heurística**, término introducido por **George Polya** en su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, es el “arte de resolver problemas” y trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos. Decía *Polya*: “*El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber – hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables*”.

*Polya* considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Ejecutar un plan, y
4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. Aconsejaba “enseñar matemáticas basándose fundamentalmente en la ocupación activa con problemas alrededor de los contenidos que se pretende impartir”. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan, como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

Una forma aconsejable para las clases de resolución de problemas es organizar el **trabajo en grupos**. Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos de que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

Los grupos, ni demasiado grandes, ni demasiado pequeños, podrían estar formados por unas seis o siete personas. En un grupo debe haber una persona responsable y una persona secretaria:

- La **persona responsable** tiene dos funciones, **dinamizadora** para mantener el interés del grupo y cuidar que nadie se quede sin participar y **organizadora** preocupándose de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- La persona **secretaria** se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando y es **portavoz**, encargándose de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona, sino que es recomendable un sistema de alternancia.

*Papel del profesorado:* En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las personas responsable y secretaria en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver problemas debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo y motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Pero el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso a largo plazo. No es un objetivo operativo evaluable mediante un examen.

Decía Giner de los Ríos: El maestro es quien exige del discípulo que piense y reflexione por sí, y en la medida de sus fuerzas, que investigue, cuestione, intente, dude, despliegue las alas de su espíritu. O Cossio: Dad la ocasión al estudiante de pensar por él mismo y ser el creador de su propia instrucción.

Para saber más entra en: <http://innovacioneducativa.upm.es/pensamientomatematico/node/91>