Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A d'ESO

www.apuntesmareaverde.org.es

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

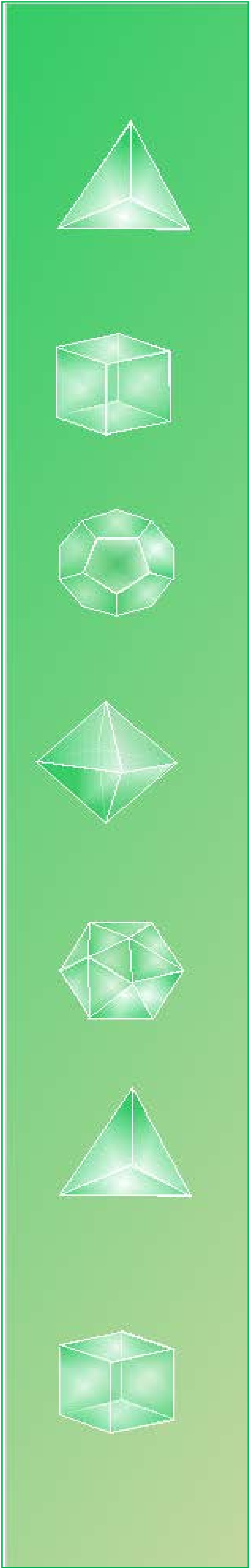
Textos Marea Verde

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0



Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO
Capítol 1:
Nombres reals

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Paco Moya y Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

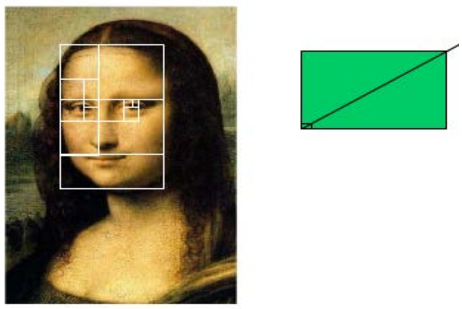
Índex

Resum

Ja coneixes els nombres naturals, els nombres enters i els nombres racionals. En aquest capítol estudiarem els nombres reals que estan formats pels nombres racionals i els irracionals.

Amb alguns nombres reals irracionals ja t'havies trobat, com amb$\sqrt{2}$, o amb π… Però hi ha molts, molts més. Hi ha molts més nombres irracionals que racionals. I et preguntaràs, com es pot dir això si són infinits? Resulta que hi ha uns infinits més grans que altres. A l'infinit dels nombres naturals se li denomina "infinit *numerable*". L'infinit dels nombres enters i dels números racionals també és "infinit *numerable*", però el dels nombres reals ja no és numerable, és molt major, se li denomina "*la potència del continu*".

El nombre d'or a la Gioconda



Una de les propietats més importants dels nombres reals és la seua relació amb els punts d'una recta, per la qual cosa aprendrem a representar-los a la recta "*real*" a la que no deixen "forats".

Nombres reals. 4t A d'ESO

En aquest primer capítol repassarem moltes coses que ja coneixes, com les operacions amb els nombres, representar els nombres en una recta, les potències… Si tot això ho domines prou, el millor és que passes molt de pressa per ell, i dediques el teu temps a altres capítols que et resulten més nous. No obstant això, segur que hi ha xicotets detalls que sí que poden resultar-te nous, com per exemple que els nombres irracionals, junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels *nombres reals*, i que a cada nombre real li correspon un punt de la recta (propietat que ja tenien els nombres racionals) i a cada punt de la recta li correspon un nombre real. Per això, a la recta numèrica l'anomenarem *recta real*.

Comencem amb un problema perquè mesures el que recordes sobre operacions amb fraccions:

Activitats proposades

1. *Les perles del rajà*: Un rajà va deixar les seues filles un cert nombre de perles i va determinar que es fera de la manera següent. La filla major prendria una perla i un setè del que quedara. La segona filla rebria dues perles i un setè del restant. La tercera jove rebria tres perles i un setè del que quedara. I així successivament. Feta la divisió cada una de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

1. DISTINTS TIPUS DE NOMBRES

1.1. Operacions amb nombres enters, fraccions i decimals

Operacions amb nombres enters

Recorda que:

Els nombres **naturals** són: $\mathbb{N}$ **= {1, 2, 3….}**.

Hi ha ocasions de la vida quotidiana en què és necessari usar nombres diferents dels nombres naturals. Fixa't en aquests exemples:

Exemples:

- Si es tenen 20 € i es gasten 30 euros, es tindrà un deute de 10 euros, és a dir –10 €.
- Quan fa molt fred, per exemple 5 graus sota zero, s'indica dient que fa –5 ºC.
- En baixar en ascensor al soterrani 3, has abaixat al pis –3.

Els **nombres enters** són una ampliació dels **nombres naturals** ($\mathbb{N}$). Els nombres **enters positius** són els nombres naturals i s'escriuen precedits del signe +: +1, +2, +3, +4, +5… Els **enters negatius** van precedits del signe –: –1, –2, –3… El **zero** és l'únic nombre enter que no és ni negatiu ni positiu i no porta signe.

El conjunt dels nombres enters es representa per $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ **= {…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}.**

Recorda que:

Per a **sumar** (o restar) nombres enters podem sumar per un costat tots els nombres enters positius, i els negatius d'un altre, restant el resultat.

Exemple:

Si *a, b* i *c* són nombres enters llavors:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Per a **multiplicar** o dividir nombres enters es té en compte la regla dels signes.

Exemple:

(+5) · (+4) = +20 (–3) · (–5) = +15 (+5) · (–4) = –20 (–6) · (+5) = –30

Activitats proposades

2. Realitza les operacions següents:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) +11*ab* + (+7) · (+6*ab* – 8*ab*) e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utilitza la jerarquia d'operacions per a calcular al teu quadern:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operacions amb fraccions

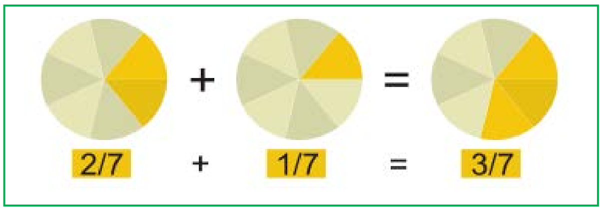
Recorda que:

Una ***fracció*** és una expressió de la forma $\frac{m}{n}$ on tant *m* com *n* són nombres enters. Per a referir-nos a ella diem "*m partit per n*"; *m* rep el nom de ***numerador*** i *n* el de ***denominador***.

Les fraccions el numerador de les quals és major que el denominador reben el nom de **fraccions impròpies**. Les fraccions el numerador de les quals és menor que el denominador reben el nom de **fraccions pròpies.**

Per a **sumar** o restar fraccions que tenen **el mateix denominador** es realitza la suma, o la resta, dels numeradors i es manté el mateix denominador.

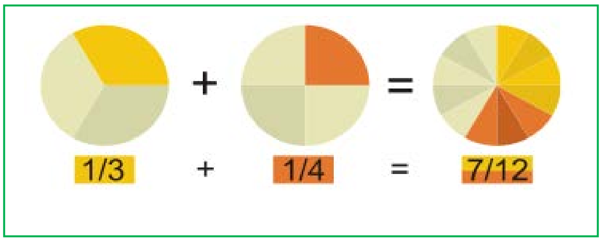
Per a sumar o restar fraccions amb **distint denominador**, es redueixen a comú denominador, buscant el mínim comú múltiple dels denominadors.



Exemples:

a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Els denominadors són diferents, 3 i 4. El seu mínim comú múltiple és 12. En dividir 12 entre 3 ens dóna 4 i en fer-ho entre 4 obtenim 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Activitats proposades

4. Efectua les següents operacions amb fraccions:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica les fraccions següents:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operacions amb expressions decimals

Una **expressió decimal** consta de dues parts: la seua **part entera**, el nombre que està a l'esquerra de la coma i la seua **part decimal**, allò que es troba a la dreta de la coma.

Observa que:

La coma es pot escriure dalt: 3'5, o baix: 3,5, i inclús als Estats Units s'utilitza un punt: 3.5. En aquest capítol escriurem la coma baix.

Per a **sumar o restar** expressions decimals, basta aconseguir que tinguen el mateix nombre de xifres decimals.

Exemple:

a) 24,7 + 83,15 – 0,05 = 24,70 + 83,15 – 0,05 = 107, 80 b) 53,39 – 56 + 0,06 = 53,45 – 56,00 = –2,55

Per a **multiplicar** dues expressions decimals, es multipliquen ignorant la coma que posseeix cada una d'elles. Al resultat d'aqueix producte se li posa una coma perquè sorgisca una expressió decimal amb una part decimal de longitud igual a la suma de les quantitats de xifres decimals que tenen les expressions decimals multiplicades.

Exemple:

$$5{,}7a \cdot 3{,}2a \cdot 7{,}14a = 130{,}2336a^3$$

Per a **dividir** expressions decimals igualem el nombre de xifres decimals d'ambdós nombres, i després dividim.

Exemple:

$$\frac{9{,}3}{4'81}=\frac{9{,}30}{4'81}=\frac{930}{481}=1{,}9$$

Activitats proposades

6. Realitza les operacions:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

1.2. Nombres racionals. Fraccions i expressions decimals

Tota expressió decimal exacta, o periòdica, es pot posar com a fracció.

Una expressió **decimal exacta** es converteix en la fracció el numerador de la qual coincideix amb el nombre decimal, després d'eliminar la coma, i el denominador és el nombre 1 seguit de tants zeros com a xifres tenia la part decimal del nombre en qüestió.

Exemple:

$$93{,}15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$$

Per a escriure en forma de fracció una expressió **decimal periòdica**, com per exemple N = 1,725252525…, hem d'aconseguir dos nombres amb la mateixa part decimal perquè en restar desapareguen els decimals:

$$N = 1{,}7252525\ldots$$
$$1000N = 1725{,}2525\ldots$$
$$10N = 17{,}2525\ldots$$
$$Sirestem: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Per fer això multipliquem a N de manera que la coma quede després del primer període, en aquest cas després de 1725. També multipliquem a N de manera que la coma quede al principi del primer període, en aquest cas darrere de 17. Ara 1000N i 10N tenen la mateixa part decimal (infinita) que si restem desapareix, i podem aïllar N.

Activitats proposades

7. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals i redueix-les. Comprova amb la calculadora que està bé:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..

e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta, o periòdica.

Recorda que:

Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 la seua expressió decimal és exacta.

Exemple:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}025; jaque \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$i açò és general ja que sempre hi haurà una potència de 10 que siga múltiple del denominador si aquest només conté doses o cincs. Fixa't que el nombre de decimals és el major dels exponents de 2 i 5.

Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no siga 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.

Exemple:

- Si dividim 1 entre 23 obtenim un primer residu que és 10, després un altre que és 8 i seguim, però, es repetirà alguna vegada el residu i per tant les xifres del quocient? La resposta és que sí, segur que sí, els residus són sempre menors que el divisor, en aquest cas de l'1 al 22, si jo obtinc 22 residus distints (com és el cas) en traure un més ha de repetir-se!, és l'anomenat *Principi de les caselles (o del Palomar N.del T.)*. I a partir d'ací els valors del quocient es repeteixen. Per tant l'expressió decimal és periòdica i el nombre de xifres del període és com a màxim una unitat inferior al denominador (no sempre ocorre açò però 1/23 té un període de 22 xifres, 1/97 el té de 96 xifres, no obstant això 1/37 té un període de només 3 xifres.

S'anomenen **nombres racionals** a aquells l'expressió decimal dels quals és finita o periòdica, i se'ls representa per Q. Acabem de veure que es poden escriure en forma de fracció pel que es pot definir el conjunt dels nombres racionals com:

$$\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

Per què imposem que el denominador siga diferent de zero? Observa que no té sentit una fracció de denominador 0.

Activitats proposades

8. Mentalment decideix quins de les següents fraccions té una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teua deducció era correcta.

1.3. Nombres irracionals. Expressió decimal dels nombres irracionals

Hi ha altres nombres l'expressió decimal dels quals és infinita no periòdica. Ja coneixes alguns: π,$\sqrt{2}$… Quan els grecs van demostrar que existien nombres com$\sqrt{2}$, o com el nombre d'or, que no es podien posar en forma de fracció i que tenien, per tant, infinites xifres decimals no periòdiques, els va parèixer una cosa insòlita. Per això aquests nombres van rebre aqueix estrany nom de "*irracionals*". No els podien entendre dins de la seua filosofia. L'interessant és que hi ha una longitud que mesura exactament$\sqrt{2}$, que és la diagonal de quadrat de costat 1, o la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles de catets 1.

El mètode per a demostrar que$\sqrt{2}$no es pot escriure en forma de fracció es denomina "reducció a l'absurd" i consisteix a suposar que sí es pot, i arribar a una contradicció. Aquest procediment serveix igual per a totes **les arrels no exactes**, com amb$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, …

Però no val per a tots els irracionals. Per a demostrar que π és un nombre irracional cal estudiar molt. Està relacionat amb l'interessant problema de la quadratura *del cercle*. Va ser demostrat a finals del segle XVIII per Lambert. Fins a aqueix moment encara es continuaven calculant decimals per a trobar un període que no té.

Aquests nombres l'expressió decimal dels quals és infinita i no periòdica es denominen **números irracionals**.

S'anomenen **nombres reals** al conjunt format pels nombres racionals i els nombres irracionals.

Amb aquests nombres tenim resolt el problema de poder mesurar qualsevol longitud. Aquesta propietat dels nombres reals es coneix amb el nom de *completesa*.

A cada nombre real li correspon un punt de la recta i a cada punt de la recta li correspon un nombre real.

Observa que també a cada nombre racional li correspon un punt de la recta, però no al contrari, perquè $\sqrt{2}$ és un punt de la recta que no és racional.

Activitats proposades

10. Dibuixa un segment de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitàgores pot ajudar-te, és la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles de catets 1. Mesura'l amb un regle. La seua longitud no és 1,4, perquè $(1,4)^2$ és diferent de 2; no 1,41 perquè $(1,41)^2$ és diferent de 2; ni 1,414, perquè $(1,414)^2$ és diferent de 2; i no obstant això $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Troba l'expressió decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hem vist que no és un nombre racional, per la qual cosa no pot tindre una expressió decimal finita, o periòdica, de manera que la seua expressió decimal té infinites xifres que no es repeteixen periòdicament. I no obstant això has pogut dibuixar-lo exactament (bé com a la diagonal del quadrat de costat 1, o com la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles de catets 1).

1.4. Distints tipus de nombres

Notació:

$\in$ vol dir "pertany a"

$\cup$ vol dir "unió"

$\subset$ vol dir "inclòs en"

$\cap$ vol dir "intersecció"

Ja coneixes distints tipus de nombres:

Naturals ➔ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres que s'usen per a comptar i ordenar. El 0 no sol considerar-se un nombre natural.

Enters ➔ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres naturals, els seus oposats i el zero. No tenen part decimal, d'ací el seu nom. Inclouen als Naturals.

Als nombres que es poden expressar en forma de quocient de dos nombres enters se'ls denomina nombres racionals i se'ls representa per la lletra Q. Per tant

Racionals ➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Els nombres racionals inclouen als Enters.

També contenen als nombres que tenen expressió decimal exacta (0,12345) i als que tenen expressió decimal periòdica (7,01252525…) perquè poden escriure's en forma de fracció.

Els nombres com $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, π… són els **nombres irracionals**, i tenen una expressió decimal infinita no periòdica. Junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels nombres reals. Per tant

Irracionals ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

Són nombres irracionals aquells nombres que **no** poden posar-se com a fracció de nombres enters. Hi ha més del que podria parèixer (de fet hi ha més que racionals ¡!), són tots aquells que tenen una expressió decimal que no és exacta ni periòdica, és a dir, **infinites xifres decimals i sense període.** **Exemples**: 17,6766766676… que me l'acabe d'inventar o 0,1234567891011… que se'l va inventar Carmichael. Inventa't u, busca en Internet i si no el trobes, doncs és teu (per ara ☺)

Reals ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

És la unió dels nombres racionals i dels irracionals.

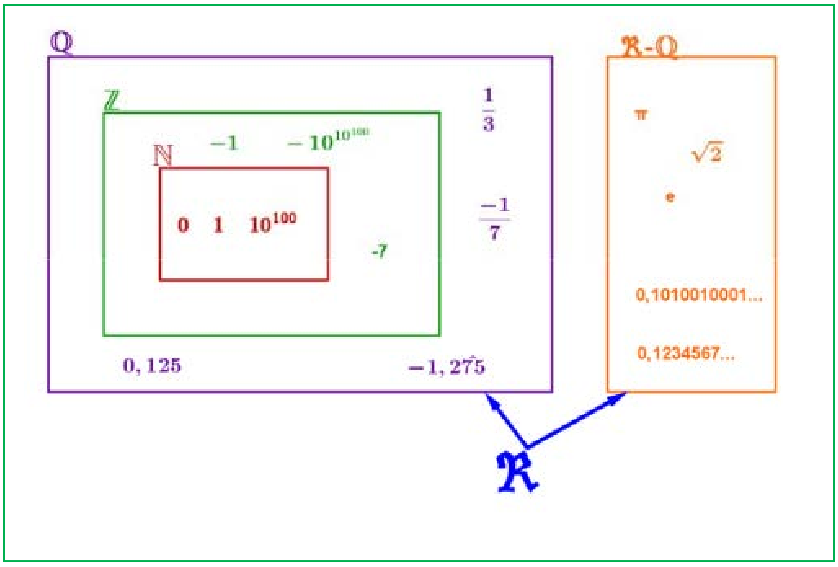
Tenim per tant que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re.$$

$$\mathrm{I} \subset \Re$$

Són aquests tots els nombres?

No, els reals formen part d'un conjunt més ampli que és el dels Nombres Complexos C (en 1r de batxillerat s'estudien en l'opció de Ciències).



Activitats proposades

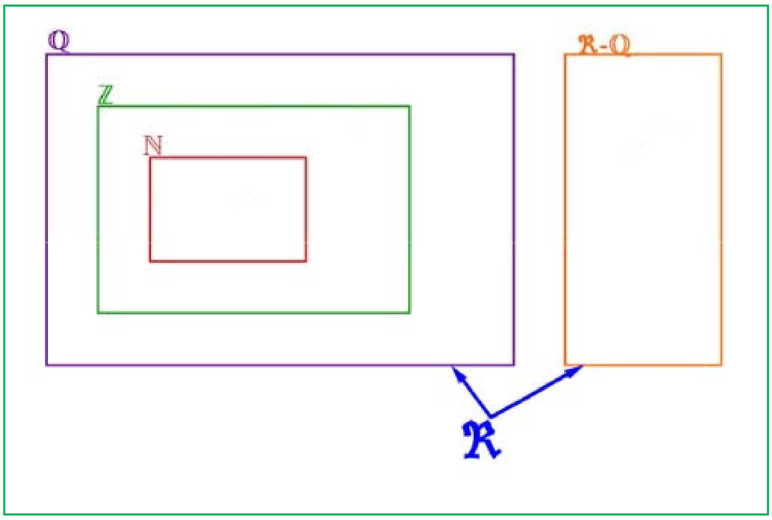
12. Copia al teu quadern la taula adjunta i assenyala amb una X a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

Nombre	N	Z	Q	I	$\Re$
−7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					

13. Copia al teu quadern l'esquema següent i col·loca els nombres de l'exercici anterior al seu lloc:

14. Pots demostrar que 4,99999… = 5?, quant val 2,5999…? Escriu-los en forma de fracció.

15. Quantes xifres pot tindre com a màxim el període de $\frac{1}{53}$?



2. POTÈNCIES

2.1. Repàs de les potències d'exponent natural

Recorda que:

Per a calcular la **potència** d'exponent un nombre natural i de base un nombre qualsevol es multiplica la base per si mateixa tantes vegades com indique l'exponent.

Exemples:

a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$

b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$

d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Convé tindre en compte algunes particularitats que ens ajuden a abreviar el càlcul:

Les potències de **base negativa** i exponent **parell** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **imparell** són nombres negatius

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

Exemples:

$$(-5)^2 = +25$$

$$(-5)^3 = -125$$

Activitats proposades

16. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potències d'exponent fraccionari

Si l'exponent és, per exemple, –2, no sabem multiplicar una cosa *menys dues vegades*. Tampoc sabem multiplicar una cosa per si mateix *zero vegades*. Ara la definició anterior no ens serveix. Les definicions que es van a donar mantindran les propietats que coneixem de les operacions amb potències d'exponent natural, que continuaran sent vàlides.

Es defineix: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ i es defineix $a^0 = 1$

En efecte, $\dfrac{a^3}{a^3} = 1$ i $\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Perquè continuen verificant-se les propietats de les operacions amb potències es defineix $a^0 = 1$.

Recorda

Sempre es verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m\cdot n}$

També, $\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2}$ i $\dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Perquè continuen verificant-se les propietats de les operacions amb potències es defineix $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Activitats proposades

17. Expressa com a única potència:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4\right)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-9}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operacions amb radicals

L'arrel n-èsima d'un nombre *a* és un nombre *x* que en elevar-lo a *n*, dóna com resultat *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

L'**arrel quadrada** d'un nombre real no negatiu *a és* un *únic* nombre no negatiu *x* que elevat al quadrat ens dóna *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existeix al camp real. Cap nombre real en elevar-lo al quadrat dóna un nombre negatiu. Només podem calcular arrels d'exponent parell de nombres positius. No obstant això $\sqrt[3]{-1} = -1$ sí que existeix, perquè $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Observa que: $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, pel que es defineix:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Exemple:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podem **operar** amb radicals utilitzant les mateixes propietats de les potències d'exponent fraccionari.

Exemple:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$

Recorda

Hi ha operacions amb radicals que **NO** estan permeses.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$ que es distinto de:

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$.

- $\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

De vegades és possible **extraure factors** d'un radical.

Exemple:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Activitats proposades

19. Simplifica els radicals $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usant potències d'exponent fraccionari.

20. Calcula $\sqrt{484}$ i $\sqrt[3]{8000}$ factorizant prèviament els radicands

21. Calcula i simplifica: $\sqrt{3}(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ i $(7^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{2}}$

23. Expressa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

2.4. Notació científica

Un nombre expressat en **notació científica** està format per un nombre decimal la part entera del qual està entre 1 i 9, multiplicat per 10^n, sent n un nombre enter positiu o negatiu.

$$a \cdot 10^n \quad \text{sent} \quad 1 \le a \le 9$$

Si l'exponent ***n* és positiu** s'utilitza per a expressar nombres grans i si l'exponent ***n* és negatiu** per a expressar nombres xicotets

Exemple:

- 7810000000000 = $7,81 \cdot 10^{12}$ 0,000000000038 = $3,8 \cdot 10^{-11}$
- 500.000 = $5 \cdot 10^5$ 0,00002 = $2 \cdot 10^{-5}$
- Hi ha galàxies que estan a 200.000.000.000.000 km de nosaltres, i ho escrivim $2 \cdot 10^{14}$
- La massa d'un electró és aproximadament de 0,000000000000000000000000000911 grams, que s'escriu com $9,11 \cdot 10^{-28}$

Activitats resoltes

- A la llegenda dels escacs utilitzem nombres molt grans. Si no ens interessa tanta aproximació sinó fer-nos una idea únicament de com és de gran, podem usar la notació científica.

  Una aproximació per al nombre de grans de blat de la casella 64 és $9 \cdot 10^{18}$, amb la qual cosa ens fem una idea millor de l'enorme que és que amb el nombre: 92233720368547758089223372036854775808 que dóna un poc de mareig.

- Escriu en notació científica: 2^{16}, 2^{32} i 2^{64}

  $2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$

  $2^{32} = 4294967296 \approx 4{,}29 \cdot 10^9$

  $2^{64} = 18446744073709551616 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Activitats proposades

24. Escriu en notació científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

Operacions amb notació científica

Per a realitzar **sumes i restes**, amb expressions en notació científica, es transforma cada expressió decimal de manera que s'igualen els exponents de 10 en cada un dels termes

Exemple:

- Per a calcular $4 \cdot 10^8 + 2{,}3 \cdot 10^6 - 6{,}5 \cdot 10^5$ expressem tots els sumands amb la mateixa potència de 10, triant la menor, en aquest cas 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6{,}5 \cdot 10^5$. Traiem factor comú: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6{,}5) = 4016{,}5 \cdot 10^5 = 4{,}0165 \cdot 10^8$

El **producte** (o el **quocient**) de dues expressions en notació científica és el resultat de multiplicar (o de dividir) els nombres decimals i sumar (o restar) els exponents de base 10.

Exemple:

- $2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^6 = (2{,}5 \cdot 1{,}36) \cdot 10^{5+6} = 3{,}4 \cdot 10^{11}$
- $5{,}4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5{,}4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1{,}35 \cdot 10^2$
- Per a fer el quocient per a calcular 2^{63} dividint 2^{64} entre 2 en notació científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1{,}8 \cdot 10^{19} / 2 = 0{,}9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Les calculadores utilitzen la notació científica. Moltes calculadores per a escriure $9 \cdot 10^{18}$ escriuen 9e+18.

Activitats proposades

25. Utilitza la teua calculadora per a obtindre 2^{16}, 2^{32} i 2^{64} i observa com dóna el resultat.

26. Utilitza la calculadora per a obtindre la teua edat en segons en notació científica.

27. Efectua les operacions en notació científica:

a) $0{,}000481 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5{,}4 \cdot 10^6 + 7{,}2 \cdot 10^5$

c) $(2{,}9 \cdot 10^5) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3{,}8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^6) \cdot (8{,}1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4{,}8 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6{,}28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2{,}9 \cdot 10^2) : (3{,}98 \cdot 10^{-7})$

3. REPRESENTACIÓ A LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS

3.1. Representació de nombres enters i racionals

Recorda que:

Per a representar un nombre enter a la recta numèrica es traça una recta horitzontal en què es marca el zero, que es denomina origen, i es marca l'1. Es divideix la recta en segments iguals, de longitud 1. Es representen els nombres positius a partir del zero a la dreta i els nombres negatius a partir del zero a l'esquerra.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

D'aquesta manera queden ordenats els nombres enters. Com més a la dreta estiga un nombre situat a la recta numèrica és major, i com més a l'esquerra estiga situat és menor.

Exemple 6:

- Representa en una recta numèrica i ordena els nombres enters següents:

–2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 i 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orde de menor a major: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orde de major a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Activitats proposades

28. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 i 0.

29. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de major a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7

30. *Pitàgores* va viure entre el 569 a. C. i el 475 anys a. C. i *Gauss* entre el 1777 i el 1855, quina diferència de segles hi ha entre ambdós dates?

31. Representa gràficament i ordena en sentit creixent, calcula els oposats i els valors absoluts dels següents nombres enters: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Per a representar una fracció en la recta numèrica:

Distingim entre fraccions pròpies i impròpies.

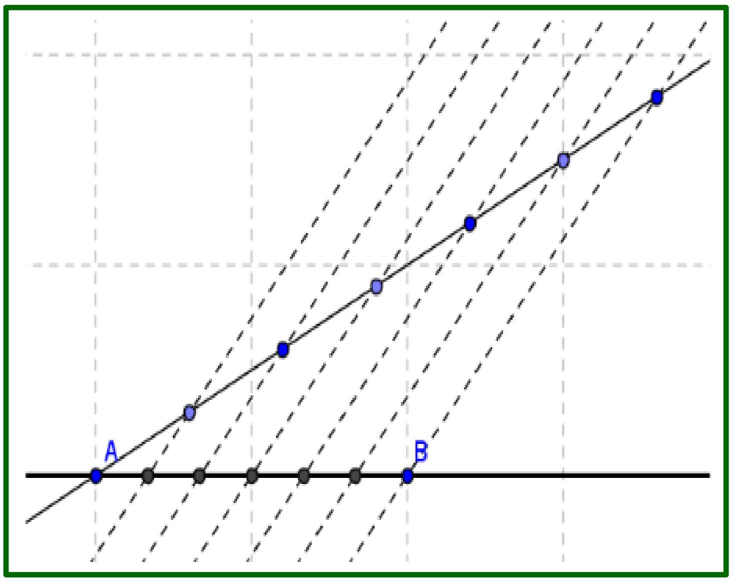
En qualsevol cas hem de recordar com es divideix un segment en parts iguals.

Activitats resoltes

- Si la fracció és **pròpia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), per exemple $\frac{5}{6}$bastarà de dividir la primera unitat en 6 parts iguals i prendre 5. En cas de ser negativa comptarem cap a l'esquerra. (Veure figura)

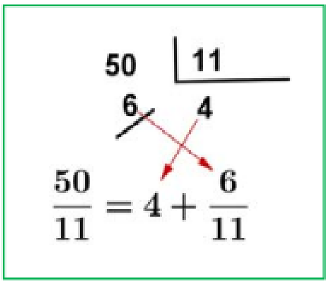
Dividir un segment en parts iguals

Per a dividir el segment AB en per exemple 6 parts iguals, tracem per A una línia auxiliar obliqua qualsevol, obrim el compàs una obertura qualsevol i marquem 6 punts en la recta anterior a distància igual. Unim l'últim punt amb B i tracem paral·leles que passen pels punts intermedis de la recta obliqua. Pel *Teorema de Tales*, el segment AB ha quedat dividit en 6 parts iguals. Per a representar 5/6, prenem 5 d'aqueixes parts.



Normalment no t'exigiran que ho faces tan exacte, ho faràs de forma aproximada, però vés en compte en què les parts pareguen iguals.

- Si la fracció és **impròpia** (numerador major que denominador i per tant valor major que 1) farem la divisió entera (sense decimals) quedant-nos amb el quocient i el residu. Açò ens permet posar-la en forma mixta (suma d'un enter i una fracció pròpia). Així per exemple: $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$ja que en dividir 50 entre 11 obtenim 4 de quocient i 6 de resta. *El quocient és la part entera i el residu el numerador de la fracció pròpia.*

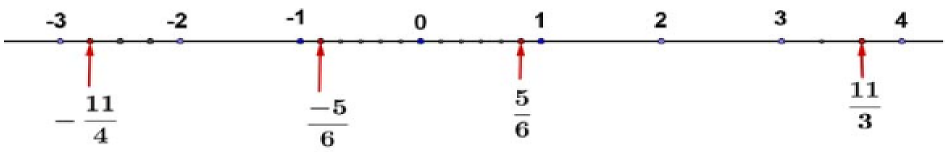


Per a representar-la només ens hem d'anar on diu la part entera (4) i la unitat següent (la que va del 4 al 5) la dividim en 11 parts iguals i prenem 6.

- Un altre exemple:$\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$, perquè la divisió dóna 2 de quocient i 3 de residu.

Ens n'anem al 2, dividim la unitat següent (del 2 al 3) en 7 parts iguals i prenem 3.

- **En cas de ser negativa**: $-\frac{11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, es farà igual però comptant cap a l'esquerra. Ens n'anem al –2, la unitat que va del –2 al –3 es divideix en 4 parts i prenem 3 (però comptant del –2 al –3 clar!).



Activitats proposades

32. Representa a la recta numèrica els nombres següents: $\frac{7}{6};\frac{-17}{4};2,375;-3,\overset{\frown}{6}$

33. Representa a la recta numèrica 6,5; 6,2; 3,76; 8,43; 8,48; 8,51 i 8,38.

34. Ordena els següents nombres de major a menor: +1,47; –4,32; –4,8; +1,5; +1,409; 1,4, –4,308.

3.2. Representació a la recta real dels nombres reals:

Triat l'origen de coordenades i la grandària de la unitat (o dit d'una altra manera, si col·loquem el 0 i l'1) tot nombre real ocupa una posició a la recta numèrica i al revés, tot punt de la recta es pot fer correspondre amb un nombre real.

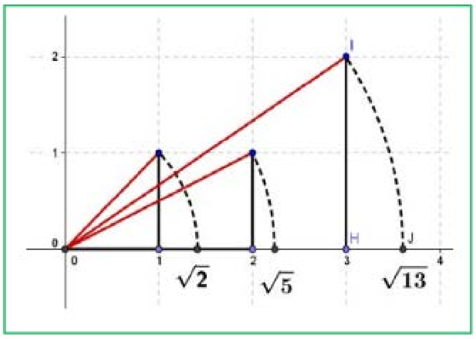
Aquesta segona part, és la propietat més important dels nombres reals i la que els distingeix dels nombres racionals.

Vegem com representar de forma exacta **alguns** nombres reals:

Representació a la recta de les arrels quadrades:

Per a representar arrels quadrades usem el *Teorema de Pitàgores*. Si en un triangle rectangle la hipotenusa és *h* i els catets són *a*, *b* tenim que$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Activitats resoltes



- Representa a la recta$\sqrt{2}$

Si *a* = *b* = 1 tenim que$h = \sqrt{2}$. Només hem de construir un triangle rectangle de catets 1 i 1, la seua hipotenusa medeix$\sqrt{2}$, (la diagonal del quadrat de costat 1 mesura$\sqrt{2}$). Ara utilitzant el compàs, portem aqueixa distància a l'eix X (veure figura).

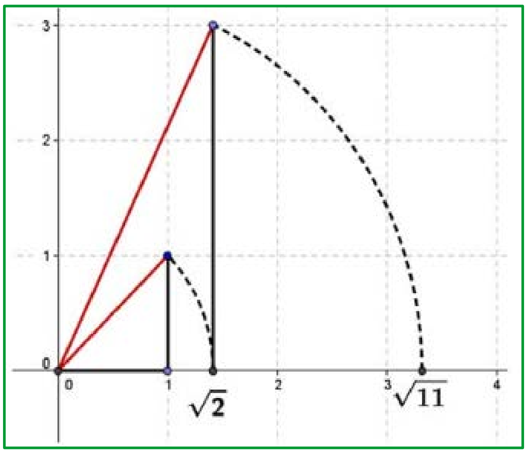
- Representa a la recta$\sqrt{5}$

Com$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ només cal construir un triangle rectangle de catets 2 i 1, i la seua hipotenusa mesura$\sqrt{5}$.

Has agarrat el truc?, el radicand cal expressar-lo com a suma de 2 quadrats. El triangle rectangle tindrà com a catets aqueixos dos nombres.

- Així, per a representar$\sqrt{13}$, expressem 13 com a suma de 2 quadrats: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ja que en un triangle rectangle de costats 3 i 2 la hipotenusa serà$\sqrt{13}$.

- Però, i si el nombre no pot posar-se com a suma de 2 quadrats?, per exemple l'11 (sempre complicant les coses! ☹).



Caldrà fer-ho en 2 passos. 11 = 2 + 9, hi ha algun nombre el quadrat del qual siga 2?, per descomptat que sí, $\sqrt{2}$. Per tant $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, hem de fer un triangle rectangle de catets $\sqrt{2}$ i 3. Per a això primer es construeix $\sqrt{2}$ com abans i es traça una perpendicular de longitud 3 (veure figura).

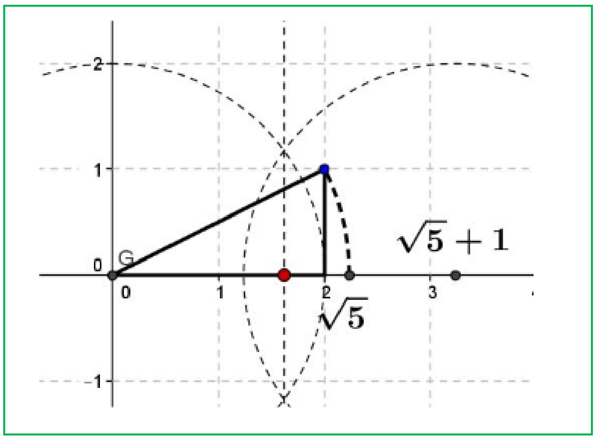
Poden dibuixar-se ja així totes les arrels?, no. Hi ha algunes per a les que cal fer més passos ($\sqrt{7}$ per exemple requereix 3), però millor ho deixem ací, no?

Activitats resoltes

- Representa a la recta numèrica de forma exacta el nombre d'or $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Has sentit parlar del nombre d'or?

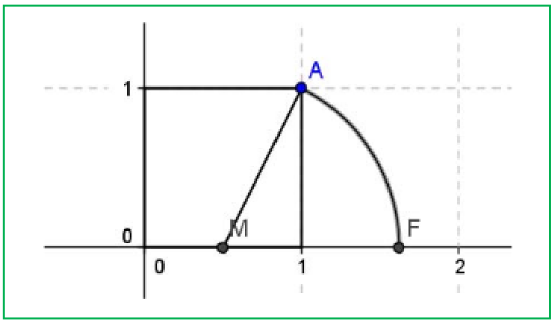
El Nombre d'Or (o Raó Àuria o Proporció Harmònica o Divina Proporció) és igual a $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



- Com el representem a la recta?

Només cal construir $\sqrt{5}$ com dalt, sumar 1 (traslladem 1 unitat amb el compàs) i dividir entre 2 trobant el punt mitjà (amb la mediatriu), fet.

- Una altra forma distinta:



Construïm un quadrat de costat 1 (un què?, un el que vulgues!). Trobem el punt mitjà del costat inferior (M) i portem la distància MA amb el compàs a l'eix horitzontal, OF és el número d'or.

Vegem:

$$MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF=\frac{1}{2}+MA=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Activitats proposades

35. Busca rectangle auri i espiral àuria en Internet.

36. Ja de pas busca la relació entre el *Nombre d'Or* i la *Successió de Fibonacci*.

37. Busca en youtube "algo pasa con phi" i em contes.

38. Representa a la recta numèrica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Densitat dels nombres reals

Els nombres reals són **densos**: entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres reals al mig.

Això és fàcil de deduir, si *a*, *b* són dos nombres amb *a* < *b* sabem que $a < \frac{a+b}{2} < b$, és a dir, la mitjana està entre els dos nombres. Com açò podem fer-ho les vegades que vulguem, d'ací el resultat.

Curiosament els racionals són també densos als nombres reals, així com els irracionals.

Activitats proposades

39. Calcula 3 nombres reals que estiguen entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1.

40. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre $\sqrt{2} i 1,5$

41. Troba 5 nombres irracionals que estiguen entre 3,14 i π

3.3. Ferramenta informàtica per a estudiar la proporció àuria

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la proporció àuria.

Un segment està dividit en dues parts que estan en proporció àuria si la raó entre la longitud del segment i la longitud de la part major coincideix amb la raó entre la longitud de la part major i la de la part menor.

Activitats resoltes

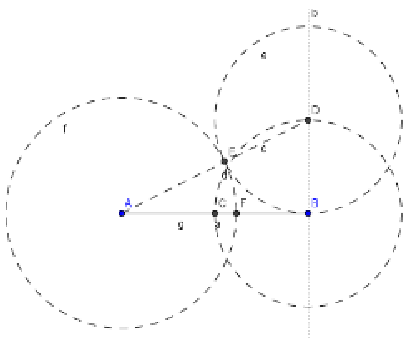
- *Utilitza Geogebra per a dividir un segment en dues parts que estiguen en proporció àuria.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa el segment, *a*, que els uneix.
- Traça un segment *BD* perpendicular al segment *AB* en el punt *B*, la longitud del qual siga la mitat d'*AB,* pots seguir les instruccions següents:
  - Calcula el Punt **mitjà o centre** del segment *AB* i anomena'l *C*.
  - Dibuixa amb **Circumferència amb centre i punt que creua** la que té centre en *B* i passa per *C*.

➢ Traça la **Recta Perpendicular** al segment *AB* que passe per *B*.

➢ Defineix *D* com el **Punt d'Intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.



- Dibuixa el segment *AD* i una circumferència amb centre *D* que passe per *B*. Siga *E* el **Punt d'Intersecció** d'aquesta circumferència amb el segment *AD*.
- Amb centre en *A* traça la circumferència que passa per *E* i determina el **punt d'Intersecció,** *F*, d'aquesta circumferència amb el segment *AB*.
- Traça el segment, *g*, que uneix els punts *A* i *F*.
- Comprova que el punt *F* divideix al segment *AB* en dues parts que estan en proporció àuria:

➢ Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals**.

➢ Calcula en la línia **d'Entrada** els quocients *a/g i g/(ag).*

Observa en la **Finestra algebraica** que aquests valors coincideixen, has calculat un valor aproximat del nombre d'or, Φ.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i comprova que el quocient entre les longituds dels segments *AF* i *FB* roman constant.
- Per a visualitzar millor la construcció pots dibuixar els elements auxiliars amb traç discontinu, triant al menú contextual, **Propietats i Estil de traç**.

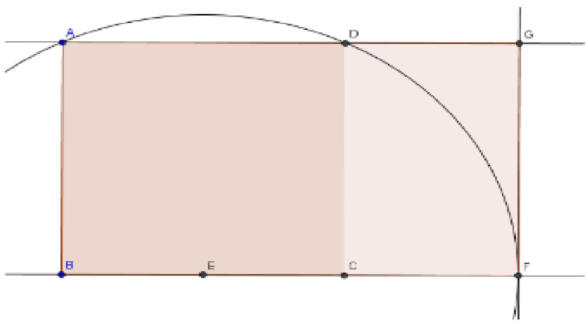
Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria.

Si a un rectangle auri li llevem (o li afegim) un quadrat obtenim un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

- *Utilitza Geogebra per a dibuixar un rectangle auri.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

• Defineix dos punts *A* i *B* que seran els extrems del costat menor del rectangle i amb la ferramenta ***polígon regular*** dibuixa, a partir dels punts *A* i *B*, el quadrat *ABCD* i oculta els noms dels costats amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol**.



• Calcula el **Punt mitjà**, *E*, del costat *BC*. Amb centre en *E* dibuixa la **Circumferència** amb centre en *E* que passa per *A*.

• Traça la recta, *a*, que passa per *BC* i defineix com a *F* el **Punt d'intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.

• Dibuixa la **Recta perpendicular** a la recta *a* què passa per *F*, i la **recta** que passa pels punts *A i D*, anomena *G* al **Punt d'intersecció** d'aquestes rectes i defineix amb **Polígon** el rectangle *ABFG*.

• A la finestra algebraica apareixen les longituds dels costats del rectangle com a *f* i *g*, introdueix a la línia d'Entrada *g / f* i observa en aquesta finestra que apareix el valor *e* que és una aproximació al nombre auri. Tria al menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals.**

- Dibuixa el **segment** *CF*, a la finestra algebraica apareix la seua longitud, *h*, introdueix a la **línia d'Entrada** *f / h*, observa que aquest quocient coincideix amb *g / f* i és una aproximació del nombre auri.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i observa que el quocient entre les longituds dels costats dels rectangles és constant.

El rectangle *ABFG* és auri ja que el quocient entre la longitud del seu costat major i la del menor és el nombre d'or, a més el rectangle *DCFG*, que s'obté en llevar un quadrat de costat el menor del rectangle, és també auri i per tant semblant al primer.

- *Crea les teues pròpies ferramentes amb Geogebra. Crea una que dibuixe rectangles auris.*

Es va a crear una ferramenta que a partir de dos punts *A* i *B* dibuixe el rectangle auri en què el segment *AB* és el costat menor.

- A la figura anterior oculta el nom dels punts *C, D, E, F* i *G* amb la ferramenta **Exposa/Oculta** rètol fent clic amb el ratolí sobre ells, a l'àrea de treball o a la finestra algebraica.

- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta** i defineix:

Objectes d'eixida: el polígon quadrat, el polígon rectangle i els punts *C, D, F*, i *G*.

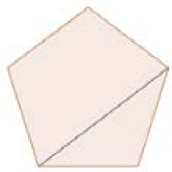
Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.

I tria com a **nom de la ferramenta** *rectangleauri*. Observa que apareix a la barra de ferramentes.

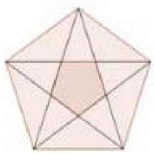
En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *rectangleauri* , que es guarda com *rectangleauri.ggt*

Utilitza la ferramenta **Desplaçament de la zona gràfica** per a anar a una part buida de la pantalla i comprovar que la ferramenta *rectangleauri* funciona perfectament.

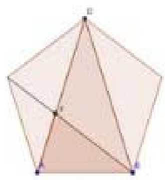
Activitats proposades



1. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la de la seua diagonal estan en proporció àuria.



2. Calcula amb Geogebra una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma al seu interior en dibuixar les seues diagonals. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.



3. Comprova que els triangles *ABD* i *ABF* de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seua raó de semblança.

4. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons

4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS:

Com ja sabem entre dos nombres reals hi ha infinits nombres. Hi ha una notació especial per a referir-se a aqueixos infinits nombres que hauràs de dominar per a aquest i futurs cursos.

4.1. Intervals. Tipus i significat

(Del lat. *Intervallum*): **2.** m. Conjunto dels valors que pren una magnitud entre dos límits donats. RAE.

Definició:

Un subconjunt de $\mathfrak{R}$ és un interval si per a qualsevol parell d'elements, a i b, d'aqueix subconjunt es verifica que si $a < x < b$ llavors x ha de pertànyer al dit subconjunt.

Estudiarem en aquest apartat intervals tancats de distints tipus: els intervals oberts, els intervals tancats i els intervals semioberts (o semitancats)

Intervals oberts:

Si ens volem referir al conjunt dels nombres que hi ha entre dos valors però sense comptar els extrems, usem un **interval obert**

Exemple:

- Els nombres superiors a 2 però menors que 7 es representen per (2, 7) i es llig "interval obert d'extrems 2 i 7". A ell pertanyen infinits nombres com 2,001; 3,5; 5; 6,999; … però no són d'aquest conjunt ni el 2 ni el 7. Això representen els parèntesis, que entren tots els nombres del mig però no els extrems.

Exemple:

- Els nombres positius menors que 10, es representen per (0, 10), l'interval obert d'extrems 0 i 10. Fixa't que 0 no és positiu, per la qual cosa no entra i el 10 no és menor que 10, per la qual cosa tampoc entra.

Nota: No s'admet posar (7, 2), el menor sempre a l'esquerra!

També cal dominar l'expressió d'aquests conjunts usant desigualtats, prepara't:

$$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}.$$

Traduïm: Les claus s'utilitzen per a donar els elements d'un conjunt, dins d'elles s'enumeren els elements o es dóna la propietat que compleixen tots ells. S'utilitza la x per a denotar a un nombre real, la / significa "tal que" (de vegades s'utilitza un punt i coma ";" o una ratlla vertical "|") i finalment es diu la propietat que compleixen mitjançant una doble desigualtat. Així que no t'espantes, això de dalt es llig: els nombres reals tal que són majors que 2 i menors que 7.

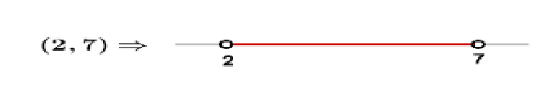
Usarem indistintament diverses d'aquestes nomenclatures perquè totes et resulten familiars.

És necessari dominar aquest llenguatge matemàtic ja que la frase en castellà pot no entendre's en altres països però t'assegurem que això de les claus i la | ho entenen tots els estudiants de matemàtiques del món (bé, quasi tots).

L'altre exemple: $(0, 10) = \{x \in \mathfrak{R} / 0 < x < 10\}$.

Finalment la **representació gràfica**:

Es posen **punts sense** omplir als extrems i es ressalta la zona intermèdia.



De vegades també es poden posar al 2 i al 7 parèntesi: "( )", o claudàtors al revés: "] [".

Pregunta: Quin és el nombre que està més prop de 7, sense ser 7?

Pensa que 6,999…=7 i que entre 6,999 i 7 hi ha "molts, moltíssims …" nombres.

Nota:

A alguns textos els intervals oberts es representen així:]2 , 7[la qual cosa tenen alguns avantatges com que els estudiants no confonguen l'interval (3, 4) amb el punt del pla (3, 4), que assegurem que ha ocorregut (però tu no seràs un d'ells no?), o l'enutjosa necessitat de posar (2,3 ; 3,4) perquè (2,3,3,4) no ho entendria ni Gauss.

Intervals tancats:

Igual que els oberts però ara **sí** que pertanyen els extrems.

Exemple:

- L'interval dels nombres majors o iguals que –2 però menors o iguals que 5. Ara el –2 i el 5 sí que entren. Es fa igual però posant claudàtors: [–2, 5].

En forma de conjunt s'escriu:

$$[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \le x \le 5\}.$$

Fixa't que ara posem $\le$ que significa "*menor o igual*".

Exemple:

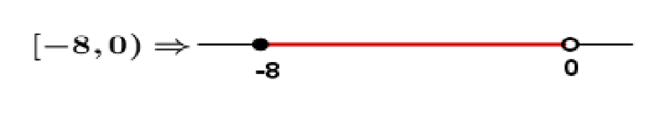
- L'interval dels nombres el quadrat del qual no és superior a 4. Si ho penses un poc veuràs que són els nombres entre el –2 i el 2, ambdós inclosos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Per tant:

$$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \le x \le 2\}.$$

La representació gràfica és igual però posant **punts emplenats**. De vegades també es pot representar gràficament amb claudàtors: "[ ]".

Intervals semioberts (o semitancats, a triar)

Per descomptat que un interval pot tindre un extrem obert i un altre tancat. La notació serà la mateixa.



Exemple:

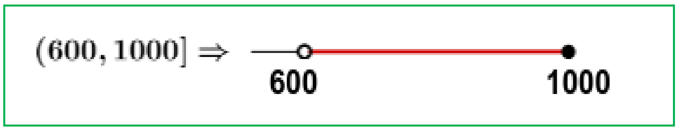
- Temperatura negativa però no per davall de –8 ºC:

$$[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R};\ -8 \le x < 0\}.$$

És l'interval tancat a l'esquerra d'extrems –8 i 0.

- Nombres superiors a 600 però que no excedisquen de 1000.

  (600, 1000] = {x ∈ ℜ; 600 < x ≤ 1000}.



És l’interval tancat a la dreta d’extrems 600 i 1000.

4.2. Semirectes

Moltes vegades el conjunt d'interès no està limitat per un dels seus extrems.

Exemple:

- Els nombres reals positius: No hi ha cap nombre positiu que siga el major. Es recorre llavors al símbol ∞ i s’escriu:

$$(0, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 0\}.$$

Note’s que és equivalent posar $x > 0$ que posar $0 < x$, es pot posar d’ambdues formes.

Exemple:

- Nombres no majors que 5:

$$(-\infty, 5] = \{x \in \Re \mid x \leq 5\}.$$

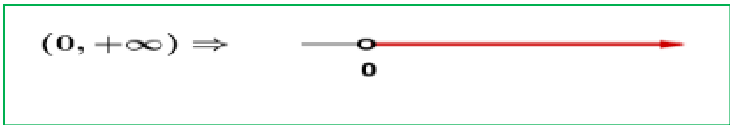
Ací el 5 sí que entra i per això el posem tancat (“no major” equival a “menor o igual”)

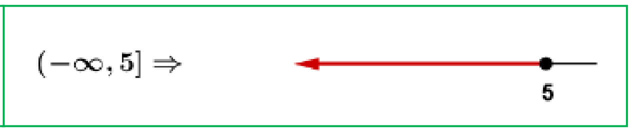
Exemple:

- Solució de $x > 7$:

$$(7, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 7\}.$$

Nota: **L’extrem no tancat sempre es posa obert**. No volem veure açò: (7, +∞]





Les semirectes també són intervals. Són intervals no tancats.

Inclús la recta real és un interval:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \Re \mid -\infty < x < +\infty\} = \Re.$$

És l’únic interval no tancat ni superiorment ni inferiorment.

Observa que amb aquesta nomenclatura estem dient que –∞ i que +∞ no són nombres reals.

4.3. Entorns

És una forma especial de representar els intervals oberts.

Es defineix l’entorn de centre a i radi r i es denota E(a, r) (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que estan a una **distància de *a* menor que *r***.

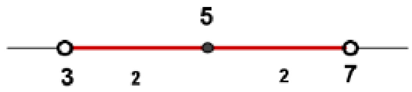
E(*a*, *r*) = (*a* – *r*, *a* + *r*)

Observa que un entorn és sempre un interval obert i tancat.

Amb un exemple ho entens millor:

Exemple:

- L'entorn de centre 5 i radi 2 són els nombres que estan de 5 a una distància menor que 2. Si ho pensem un poc, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l'interval (3, 7). És com agafar el compàs i amb centre en 5 marcar amb obertura 2.

$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$ 

Fixa't que el 5 està al centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

Exemple:

- E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)

És molt fàcil passar d'un entorn d'un interval. Anem a fer-ho al revés.

Exemple:

- Si tinc l'interval obert (3, 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6,5 que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10 – 3) : 2 = 3,5 és el radi (la mitat de l'ample).

Per tant (3, 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

L' interval (*b*, c) és l'entorn $E\left(\frac{b+c}{2}, \frac{c-b}{2}\right)$.

Exemple:

- L' interval (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2}, \frac{1-(-8)}{2}) = E(-3{,}5; 4{,}5)$.

Activitats proposades

42. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:

a) Percentatge superior al 15 %. b) Edat inferior o igual a 21 anys.
c) Nombres el cub dels quals siga superior a 27. d) Nombres positius la part entera dels quals té 2 xifres.
e) Temperatura inferior a 24 ºC. f) Nombres que estiguen de 2 a una distància inferior a 3.
g) Nombres per als que existeix la seua arrel quadrada (és un nombre real).

43. Expressa en forma d'interval els entorns següents:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

44. Expressa en forma d'entorn els intervals següents:

a) (1, 7) b) (–5 , –1) c) (–4 , 2)

45. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals?

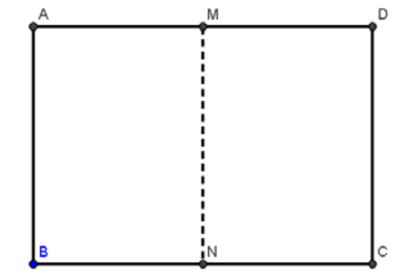
**Pista:* 600,222333€ pot ser un sou?

CURIOSITATS. REVISTA

Folis i

Ja sabem que un quadrat de costat L té una diagonal que val L , vegem alguna cosa més:

L'imatge representa un foli amb la norma DIN 476 que és la més utilitzada a nivell mundial.



Aquesta norma especifica que un foli DIN A0 té una superfície d'1 m^2 i que en partir-lo per la mitat obtindrem un DIN A1 que ha de ser un rectangle semblant a l'anterior. Partint l'A1 en 2 iguals obtenim el DIN A2 , després el DIN A3 i el DIN A4 que és el més usat. Tots són semblants als anteriors.

Què significa ser semblant?

Doncs que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, però AM = AD/2 aleshores

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Per tant als folis DIN 476:

la raó entre el llarg i l'ample és $\sqrt{2}$.

No queda ací la cosa, fíxa't que al partir el foli en 2 parts iguals el nou foli té el costat més gran que coincideix amb el costat menor de l'original: AB és ara el costat major i abans era el menor, com AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que la raó de semblança és $\sqrt{2}$. És a dir, per a pasar d'un foli A0 a un altre A1 dividim els seus costats entre . El mateix per als següents.

Calculem les dimensions:

Per a l'A0 tenim que l'àrea és AD · AB = $1m^2$

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m;}$$

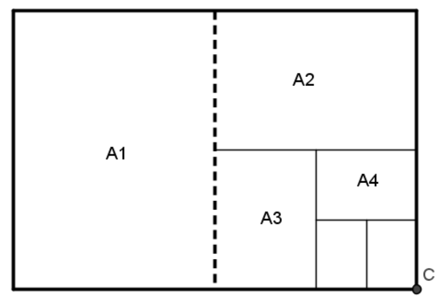
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx 0.841$ m. Per a obtindre les mesures de l'A4 dividim 4 vegades entre $\sqrt{2}$:

Llarg = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx 0.297$ m = 29.7 cm

Ample= Llargo/ $\sqrt{2} \approx 0.210$ m = 21.0 cm

Una taula

	Llarg (cm)	Ample (cm)	Àrea (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2



Qüestions:

Comprova els valors de la taula anterior (hi ha al menys tres valors enganyats)

Quants folis A4 caben en un foli A0?

Quines són les dimensions de l'A6?, i de l'A7?

El nombre d'or

Dividim un segment en dues parts de manera que si dividim la longitud del segment total entre la part major deu de donar el mateix que en dividir la part major entre la part menor.

Tenim que $(a+b)/a = a/b$

El nombre d'Or (o Raó Aúrea) anomenat ϕ (fi) és precisament el valor d'aqueixa proporció, així:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1+\frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Ja tenim dues curiositats:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

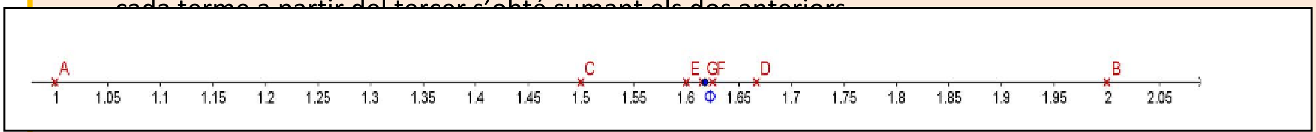
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

On F_n és el n-èsim Nombre de Fibonacci. Aquests nombres són 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … on cada terme a partir del tercer s'obté sumant els dos anteriors.



=1,5; 5/3 =1,666…; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625

Com pot veure's, ens acostem ràpidament al valor del nombre d'Or, primer per davall, després per dalt, per davall, … alternativament.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Si per exemple substituïm n per 20 obtenim $F_{20} = 6765$.

Realment podem prescindir del 2n terme del numerador, per a $n > 3$ es fa molt més xicotet que el primer. Per exemple, per a $n = 6$ si fem $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenim 8,0249 que arredonit es 8, el valor correcte.

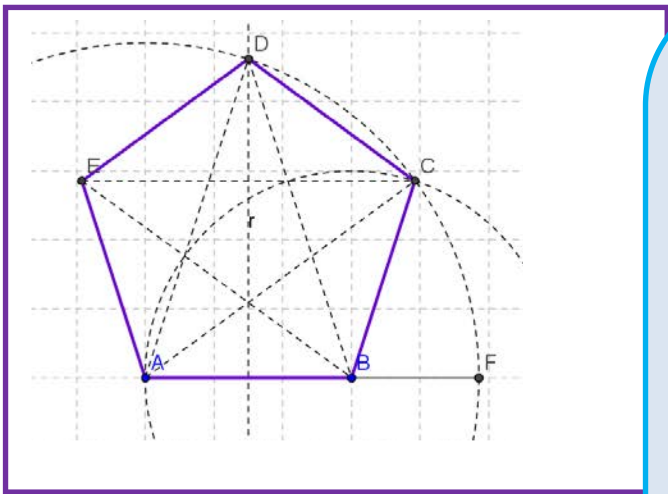
…ue per als autors

Activitats:

a) Calcula F_{31} i F_{30} amb la fórmula de Binet.

b) Fes el quocient i mira si és una bona aproximació del Nombre d'Or.

El pentàgon regular i el Nombre d'Or.



En un pentàgon regular la raó entre una diagonal i el costat és Φ . Com sabem construir Φ , la construcció d'un pentàgon regular és molt senzilla:

Si AB serà un costat del nostre pentàgon, construïm el punt F alineat amb A i B que complisca AF/AB igual a Fi (s'indica com fer-ho al text).

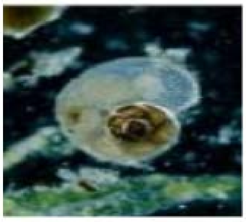
Llavors, AB serà el costat i AF la mesura de la diagonal.

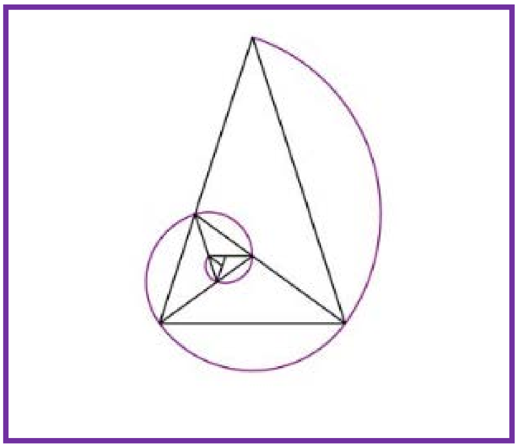
Tracem la mediatriu d'AB i una circumferència de centre A i radi AF. Es tallen en D que és un vèrtex del pentàgon.

Tracem ara una circumferència amb centre B i radi AB, es talla amb l'anterior en C que és un altre vèrtex del pentàgon. Només queda trobar E que és molt fàcil.

El pentàgon regular amb les seues diagonals es coneix com "Pentagrama Místic" i pareix que tornava bogets als pitagòrics, en ell el nombre d'Or apareix de forma desmesurada.

Del Pentagrama hem tret aquest triangle, anomenat Triangle Auri que permet obtindre més triangles auris fent la bisectriu en un dels angles iguals i formar aquesta espiral. Aquesta espiral és pareguda a l'Espiral Àuria, a la de *Fibonacci* i a l'espiral logarítmica que és la que apareix a: galàxies, huracans, petxines, gira-sols …





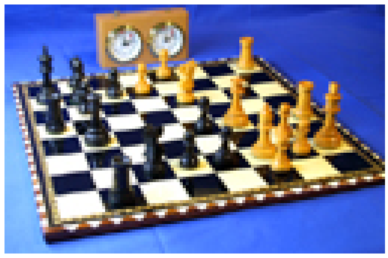
Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Els escacs

Conta la llegenda que quan l'inventor dels escacs li va mostrar aquest joc al rei Shirham de l'Índia, aquest es va entusiasmar tant que li va oferir regalar-li tot el que volguera. L'inventorva demanar un gra de blat per a la primera casella del joc, dos per a la segona, 4 per a la tercera, i així duplicant la quantitat en cada casella.

Al rei li va paréixer una petició modesta, però… com es pot comprovar aqueix nombre de grans donen poc més de 15 bilions de tones mètriques el que correspon a la producció mundial de blat de 21.685 anys.

Impossible que el rei tinguera tant blat!



T'agrada fer màgia!

Pots fer aquest joc amb els teus amics. Per a fer-lo necessites paper i llapis, o millor, una calculadora, o encara millor, un full de càlcul.

Escriu en una columna els nombres de l'1 al 20. Al costat de l'1 escriu el nombre que et diga el teu amic o amiga, d'una, dues o tres xifres (376). Al costat del 2 escriu també un altre nombre inventat d'1, 2 o 3 xifres (712). Al costat del 3, la suma dels dos números anteriors (1088). Al costat del 4, el mateix, la suma dels dos nombees anteriors (ara els del costat del 2 i del 4), i així fins a arribar a la casella 20.

Ara divideix el nombre del costat del 20 (3948456) entre el nombre del costat del 19 (2440280), i màgia!, pots endevinar el resultat. S'aproxima al nombre d'or!

1,618…

Per què? Saps alguna cosa de la successió de Fibonacci? Troba alguna cosa a Internet.

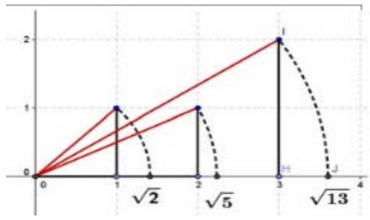
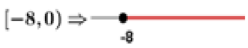
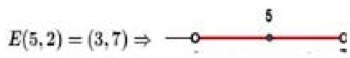
Fes un full de càlcul com la del marge.

E6

	A	B	C	D	E
1	**T'agrada fer màgia!**				
2					
3	1	376			
4	2	712			
5	3	1088			
6	4	1800			
7	5	2888			
8	6	4688			
9	7	7576			
10	8	12264			
11	9	19840			
12	10	32104			
13	11	51944			
14	12	84048			
15	13	135992			
16	14	220040			
17	15	356032			
18	16	576072			
19	17	932104			
20	18	1508176			
21	19	2440280			
22	20	3948456			
23					
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	1,61803
25					

Nombres reals. 4t A d'ESO

RESUM

		Exemples
Conjunts de nombres	**Naturals** ➔ N = {1, 2, 3, …}; **Enters** ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionals** ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionals** ➔ I = ℜ − Q; **ℜ=** Q∪I	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ *x* = 1,7252525… = 854/495
Nombres racionals	La seua expressió decimal és exacta o periòdica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representació a la recta real	Fixat un origen i una unitat, hi ha una bijecció entre els nombres reals i els punts de la recta. A cada punt de la recta li correspon un nombre real i viceversa.	
N. Reals	Tota expressió decimal finita o infinita és un nombre real i recíprocament.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
Interval obert	Interval obert en el que els extrems **no** pertanyen a l'interval	 (2, 7) = {x ∈ℜ/ 2 < x < 7}.
Interval tancat	Els extrems **SI** pertanyen a l'interval	[−2, 2] = {x ∈ℜ; −2 ≤ x ≤ 2} 
Intervals  **Semioberts (o semitancats)**	Interval amb un extrem obert i un altre tancat	$[-8, 0) = \{x \in \square \ / -8 \le x < 0\}$
Entorns	Forma especial d'expressar un interval obert: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	

EXERCICIS I PROBLEMES

Nombres

1. Efectua les següents operacions amb fraccions:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realitza les operacions:

a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Troba el valor exacte de $\frac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sense calculadora.

5. Digues quines d’aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Troba 3 fraccions *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. Quants decimals té $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, t’atreveixes a explicar el motiu?

8. Fes la divisió 999 999:7 i després fes 1:7. Serà casualitat?

9. Ara divideix 999 entre 37 i després fes 1:37, és casualitat?

10. Fes al teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

2,73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; –2,5 ; 0,1223334444…

11. Contesta verdader o fals, justificant la resposta.

a) $\mathrm{Q}\cap(\Re - \mathrm{Q}) = \{0\}$
b) $\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}$
c) L’arrel quadrada d’un nombre natural és irracional.
d) $\sqrt{7}\notin\mathrm{Q}$
e) 1/47 té expressió decimal periòdica.

12. Posa exemples que justifiquen:

a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.

b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.

13. Què serà la suma de nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seua expressió decimal)

14. La suma de 2 nombres amb expressió decimal periòdica pot ser un enter?

15. Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats $\sqrt{2} i \sqrt{8}$m.

16. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat la diagonal del qual mesura 2 m.

17. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat $\sqrt{3}$ m.

18. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$ m.

19. Troba l'àrea total i el volum d'un cub de costat $\sqrt[3]{7}$ m.

20. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle perquè la seua àrea es faça el triple?

21. Quant ha de valdre el radi d'un cercle perquè la seua àrea siga 1 m^2?

22. Tenim una circumferència i un hexàgon regular inscrit en ella. Quina és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)

Potències

23. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expressa com a única potència:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrau els factors possibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

28. Expressa en forma de potència: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica l'expressió:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. S'estima que el volum de l'aigua dels oceans és de 1285600000 km^3 i el volum d'aigua dolça és de 35000000 km^3. Escriu aqueixes quantitats en notació científica i calcula la proporció d'aigua dolça.

31. Se sap que en un àtom d'hidrogen el nucli constitueix el 99 % de la massa, i que la massa d'un electró és aproximadament de $9{,}109\cdot 10^{-31}$ kg. Quina massa té el nucli d'un àtom d'hidrogen? (*Recorda*: Un àtom d'hidrogen està format pel nucli, amb un protó, i per un únic electró)

32. A Joan li han fet una anàlisi de sang i té 5 milions de glòbuls rojos en cada mm^3. Escriu en notació científica el nombre aproximat de glòbuls rojos que té Juan estimant que té 5 litres de sang.

Representació a la recta real

33. *Pitàgores* va viure entre el 569 i el 475 anys a. C. i Gauss entre el 1777 i el 1855, quina diferència d'anys hi ha entre ambdues dates?

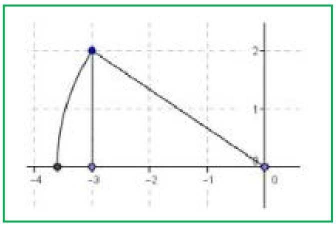
34. Representa de forma exacta a la recta numèrica: –2,45; 3,666…

35. Situa a la recta real els nombres 0,5; 0,48; 0,51 i 0,505.

36. Ordena els següents nombres de major a menor: 2,4; –3,62; –3,6; 2,5; 2,409; –3,9999…

37. Representa a la recta numèrica de forma exacta els nombres següents:

$$\frac{2}{3};\ \frac{-3}{5};\ \frac{5}{2};\ 1{,}256;\ 3{,}\hat{5}$$



38. La imatge és la representació d'un nombre irracional, quin?

39. Representa de forma exacta a la recta numèrica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

40. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre 3,14 i π.

Intervals

41. Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:

a. $(-5, 5]$

b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \leq 7\}$.

c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$

d. $(-3, +\infty)$

42. Troba:

a. $(2, 4] \cup (3, 5]$

b. $(2, 4] \cap (3, 5]$

c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

43. Pot expressar-se com a entorn una semirecta? Raona la resposta.

44. Expressa com a entorns oberts, si és possible, els intervals següents:

a. (0 , 8) b. (–6 , –2) c. (2, $+\infty$)

45. Expressa com a intervals oberts els entorns següents:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)

46. Quins nombres al quadrat donen 7?
47. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?
48. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?

Diversos

49. Un nombre irracional tan important com a Pi és el nombre "e". $e \approx 2,718281828...$ que pareix periòdic, però no, no ho és. És un nombre irracional. Es defineix com el nombre a què s'acosta quan *n* es fa molt, però que molt gran. Agafa **la calculadora** i dóna-li a *n* valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, …

Apunta els resultats a una **taula**.

50. Una altra forma de definir *e* és $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que diràs tu què són aqueixos nombres tan admirats!, s'anomena factorial i és molt senzill: 4! = 4·3·2·1 = 24, es multiplica des del nombre fins a arribar a 1. Per exemple: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No et preocupes, que la tecla "!" està a la calculadora. Pots calcular *e* amb 6 xifres decimals correctes? **Nota:* Fixa't que ara la convergència és molt més ràpida, només has hagut d'arribar fins a *n* = ?

51. Ordena de menor a major les masses següents:

Massa d'un electró	$9,11 \cdot 10^{-31}$ quilograms
Massa de la Terra	$5,983 \cdot 10^{24}$ quilograms
Massa del Sol	$1,99 \cdot 10^{30}$ quilograms
Massa de la Lluna	$7,3 \cdot 10^{22}$ quilograms

52. Prenent $1,67 \cdot 10^{-24}$ grams com a massa d'un protó i $1,2 \cdot 10^{-15}$ metres com a radi, i suposant-ho esfèric, calcula: a) el seu volum en cm^3 (Recorda el volum d'una esfera és $(4/3)\pi r^3$. b) Troba el pes d'un centímetre cúbic d'un material format exclusivament per protons. c) Compara el resultat amb el pes d'un centímetre cúbic d'aigua (un gram) i d'un centímetre cúbic de plom (11,34 grams).

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina afirmació és falsa. El nombre –0,3333333… és un nombre

a) real b) racional c) irracional d) negatiu

2. Operand i simplificant la fracció $\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}$ s'obté:

a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a – 2$ d) $1/(a – 2)$

3. L'expressió decimal 0,63636363…. S'escriu en forma de fracció com

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Al simplificar $\sqrt{2}(7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2})$ obtens:

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5. Contesta sense fer operacions. Les fraccions 4/7; 9/150, 7/50 tenen una expressió decimal:

a) periòdica, periòdica, exacta b) periòdica, exacta, periòdica c) periòdica, exacta, exacta

6. El conjunt dels nombres reals menors o iguals a –2 s'escriu:

a) (–∞, –2) b) (–∞, –2] c) (–2, +∞) d) (–∞, –2[

7. L'entorn de centre –2 i radi 0,7 és l'interval:

a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8. L'interval (–3, –2) és l'entorn:

a) E(–2'5; 1/2) b) E(–3'5; –0,5) c) (–3'5, 1/2) d) (–2'5; –0,5)

9. En efectuar l'operació $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ s'obté:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. En efectuar l'operació $0{,}000078 + 2{,}4\cdot10^{-5}$ s'obté:

a) $3{,}6\cdot10^{-10}$ b) $1{,}8912\cdot10^{-10}$ c) $10{,}2\cdot10^{-5}$ d) $18{,}72\cdot10^{-5}$

Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4tA ESO

Capítol 2: Proporcionalitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisors: Javier Rodrigo i María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

En la vida quotidiana és interessant saber manejar la proporcionalitat, per exemple per a calcular el descompte d'unes rebaixes, o l'interès que s'ha de pagar per un préstec. En multitud d'ocasions hem d'efectuar repartiments proporcionals, directes o inversos: premis de loteria, herències, mescles, aliatges…

El tant per cent i l'interès és un concepte que apareix constantment als Mitjans de comunicació i en la nostra pròpia economia. En aquest capítol farem una primera aproximació a la denominada "*economia financera*".

La proporcionalitat és una realitat amb què convivim al nostre voltant. Per a comprendre-la i utilitzar-la correctament, necessitem conèixer les seues regles. Reconeixerem la proporcionalitat directa o inversa, simple i composta, i realitzarem exercicis i problemes d'aplicació.

Autora: Nieves Zuasti
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

INTRODUCCIÓ

A Esther li agrada anar amb bicicleta a l'escola i ha comprovat que a fer aqueix recorregut tarda caminant quatre vegades més. Tenim ací tres magnituds: temps, distància i velocitat.

Recorda que:

Una **magnitud** és una propietat física que es pot mesurar.

A més velocitat es recorre més distància.

Són **magnituds directament proporcionals**.

A més velocitat es tarda menys temps.

Són **magnituds inversament proporcionals**.

Però, atenció, no totes les magnituds són proporcionals. Açò és una confusió molt freqüent. Perquè en créixer una magnitud, l'altra també cresca, encara no es pot assegurar que siguen directament proporcionals. Per exemple, Esther recorda que fa uns anys tardava més a recórrer el mateix camí, però l'edat no és directament proporcional al temps que es tarda. Anem a estudiar-lo amb detall per a aprendre a reconèixer-lo bé.

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1.1. Magnituds directament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

Exemple:

- Si tres bosses contenen 15 caramels, set bosses (iguals a les primeres) contindran 35 caramels, perquè:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \qquad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

La **raó de proporcionalitat directa *k*** és el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemple:

- A l'exemple anterior la raó de proporcionalitat és 5, perquè: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

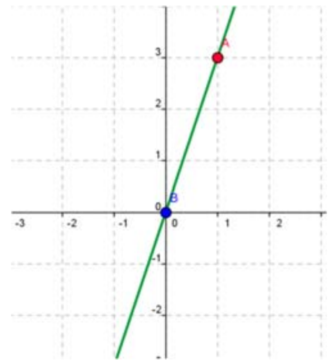
Exemple:

- Copia al teu quadern la següent taula, calcula la raó de proporcionalitat i completa els buits que falten sabent que és una taula de proporcionalitat directa:

Autora: Nieves Zuasti
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Magnitud A	18	1,5	60	2,7	0,21
Magnitud B	6	0,5	20	0,9	0,07

La raó de proporcionalitat és ***k*** = $\frac{18}{6}=3$. Per tant tots els valors de la magnitud B són tres vegades menors que els de la magnitud A: $\frac{18}{6}=\frac{1,5}{0,5}=\frac{60}{20}=\frac{2,7}{0,9}=\frac{0,21}{0,07}=3$.



Recta y = 3x

Observa que:

Si es representen gràficament els punts d'una proporcionalitat directa, tots ells estan sobre una **recta** que passa per l'origen de coordenades. La raó de proporcionalitat és el **pendent** de la recta. La funció lineal $y = kx$ es denomina també **funció de proporcionalitat directa**.

Exemple:

- Equació de la recta de l'exemple anterior:

L'equació de la recta és *y= 3x.* Comprovem que tots els punts la verifiquen:

18 = 3·6; 1,5 = 3·0,5; 60 = 3·20; 2,7 = 3·0,9; 0,21 = 3·0,07.

Reducció a la unitat

Si hem d'usar la mateixa equació de la recta en distintes ocasions el problema pot simplificar-se amb la **reducció a la unitat**. Si $x = 1$ llavors $y= \boldsymbol{k}$.

Exemple:

- Per a celebrar el seu aniversari Josep ha comprat 3 botelles de refresc que li han costat 4,5 €. Pensa que no seran suficients i decideix comprar 2 més. Calcula el preu de les 2 botelles utilitzant la reducció a la unitat.

  k = 1,5 $\Rightarrow$ $y = 1{,}5x$. Ara podem calcular el preu de qualsevol nombre de botelles. Al nostre cas

  $x = 2$, doncs $y = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ €.

Activitats proposades

1. Copia al teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat. Representa gràficament els punts. Determina l'equació de la recta.

Litres	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula els termes que falten per a completar les proporcions:

a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8}=\frac{x}{60}$

3. Si l'AVE tarda una hora i trenta-cinc minuts a arribar des de Madrid a València, que disten 350 quilòmetres, quant tardarà a recórrer 420 km?

Autora: Nieves Zuasti
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1.2. Proporcionalitat simple directa

Acabem de veure que la proporcionalitat simple directa consisteix a trobar l'equació d'una recta que passa per l'origen: $y = kx$.

Exemple:

- Vint caixes pesen 400 kg, quants kg pesen 7 caixes?

Busquem l'equació de la recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Equació de la recta

Si $x = 7$ doncs $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Activitats proposades

4. En una recepta ens diuen que per a fer una melmelada de fruites del bosc necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de fruita. Volem fer 7 quilograms de melmelada, quants quilograms de sucre i quants de fruita hem de posar?

5. L'altura d'una torre és proporcional a la seua ombra (a una mateixa hora). Una torre que mesura 12 m té una ombra de 25 m. Quina altura tindrà una altra torre l'ombra de la qual mesure 43 m?

6. Una font ompli una garrafa de 12 litres en 8 minuts. Quant temps tardarà a omplir un bidó de 135 litres?

7. Hem gastat 12 litres de gasolina per a recórrer 100 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1374 km?

8. El meu cotxe hi ha gasta 67 litres de gasolina a recórrer 1250 km, quants litres gastarà en un viatge de 5823 km?

9. Un llibre de 300 pàgines pesa 127 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 420 pàgines?

10. Dos pantalons ens van costar 28 €, quant pagarem per 7 pantalons?

1.3. Percentatges

El percentatge o tant per cent és la raó de proporcionalitat de major ús a la vida quotidiana.

El **tant per cent** és una raó amb denominador 100.

Exemple:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. L'equació de la recta és: $y = \frac{37}{100}x$.

Els percentatges són proporcions directes.

Exemple:

- La població de Zarzalejo era en 2013 de 7380 habitants. En 2014 s'ha incrementat en un 5 %. Quina és la seua població a final de 2014?

$y = \frac{7380}{100}x$, pel que el 5 % de 7392 és $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitants. La població s'ha incrementat en 369 habitants, per tant al final de 2014 la població serà de: 7380 + 369 = 7749 habitants.

Activitats proposades

11. Expressa en tant per cent les proporcions següents:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabem que els alumnes rossos d'una classe són el 16 % i hi ha 4 alumnes rossos, quants alumnes hi ha en total?

13. Un dipòsit de 2000 litres de capacitat conté en aquest moment 1036 litres. Què tant per cent representa?

14. La proporció dels alumnes d'una classe de 4t d'ESO que han aprovat Matemàtiques va ser del 70 %. Sabent que en la classe hi ha 30 alumnes, quants han suspès?

1.4. Increment percentual. Descompte percentual. Percentatges encadenats

Increment percentual

Exemple:

- L'exemple anterior pot resoldre's mitjançant **increment percentual**: 100 + 5 = 105 %

$y = \frac{7380}{100}x$, pel que el 105 % de 7392 és $y = \frac{7380}{100} \cdot 105 = 7749$ habitants.

Descompte percentual

- A les rebaixes a tots els articles a la venda els apliquen un 30 % de descompte. Calcula el preu dels què apareixen a la taula:

Preu sense descompte	75 €	159 €	96 €	53 €
Preu en rebaixes	52,50 €	111,3 €	67,2 €	37,1 €

Ja que ens descompten el 30 %, pagarem el 70 %. Per tant: $k = \frac{70}{100} = 0,7$ és la raó directa de proporcionalitat que aplicarem als preus sense descompte per a calcular el preu rebaixat. Per tant: $y=0,7x$.

Percentatges encadenats

Moltes vegades cal calcular diversos increments percentuals i descomptes percentuals. Podem **encadenar-los**. En aquests casos el més senzill és calcular, per a cada cas, el tant per u, i anar-los multiplicant.

Exemple:

- En unes rebaixes s'aplica un descompte del 30 %, i l'IVA del 21 %. Quant ens costarà un article que sense rebaixar i sense aplicar-li l'IVA costava 159 euros? Quin és el verdader descompte?

En un descompte del 30 % hem de pagar un 70 % ((100 – 30) %), pel que el tant per u és de 0,7. Per l'increment del preu per l'IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tant per u és de 1,21. Encadenant el descompte amb l'increment tindrem un índex o tant per u de 0,7 · 1,21 = 0,847, que apliquem al preu de l'article, 159 €, 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €. Per tant ens han descomptat 24,33 euros.

Si estem pagant el 84,7 % el verdader descompte és el 15,3 %.

Exemple:

- Calcula el preu inicial d'un televisor, que després de pujar-lo un 20 % i rebaixar-lo un 20 % ens ha costat 432 €. Quin ha sigut el percentatge de variació?

En pujar el preu un 20 % estem pagant el 120 % i el tant per u és 1,2. En el descompte del 20 % estem pagant el 80 % i el tant per u és 0,8. En total amb les dues variacions successives el tant per u és de 0,8·1,2 = 0,96, i el preu inicial és 432 : 0,96 = 450 €. Preu inicial = 450 €.

El tant per u 0,96 és menor que 1 per tant hi ha hagut un descompte perquè hem pagat el 96 % del valor inicial i aquest descompte ha sigut del 4 %.

Activitats proposades

15. Una fàbrica ha passat de tindre 130 obrers a tindre 90. Expressa la disminució en percentatge.

16. Calcula el preu final d'un llavaplats que costava 520 € més un 21 % d'IVA, a què se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 18 %.

17. Copia al teu quadern i completa:

a) D'una factura de 1340 € he pagat 1200 €. M'han aplicat un ……… % de descompte

b) M'han descomptat el 9 % d'una factura de …………….. € i he pagat 280 €.

c) Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 20 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?

18. El preu inicial d'un electrodomèstic era 500 euros. Primer va pujar un 10 % i després va abaixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Quin és el percentatge d'increment o descompte?

19. Una persona ha comprat accions de borsa al mes de gener per un valor de 10 000 €. De gener a febrer aquestes accions han augmentat un 8 %, però al mes de febrer han disminuït un 16 % Quin és el seu valor a finals de febrer? En quin percentatge han augmentat o disminuït?

20. El preu inicial d'una enciclopèdia era de 300 € i al llarg del temps ha patit variacions. Va pujar un 10 %, després un 25 % i després va abaixar un 30 %. Quin és el seu preu actual? Calcula la variació percentual.

21. En una botiga de venda per Internet s'anuncien rebaixes del 25 %, però després carreguen en la factura un 20 % de gasto d'enviament. Quin és el percentatge d'increment o descompte? Quant haurem de pagar per un article que costava 30 euros? Quant costava un article pel qual hem pagat 36 euros?

Autora: Nieves Zuasti
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

1.7. Escales

En plans i mapes trobem anotades en la seua part inferior l'escala a la què estan dibuixats.

L'**escala** és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.

Exemple:

- S'expressa de la forma 1 : 2000 que significa que 1 cm del pla correspon a 2000 cm = 20 m a la realitat.

Per tant si *"y"* són les mesures en la realitat, i *"x"* ho són al pla, aquesta escala es pot escriure amb l'equació de la recta:

$$y = 2000x.$$

Principals calçades romanes

Les escales també es representen en forma gràfica, mitjançant una barra dividida en segments d'1 cm de longitud

Exemple:

0 20 40 60 80 100 m

Escalímetre

Aquesta escala identifica cada centímetre del mapa amb 20 m a la realitat és a dir 1 : 2000, $y = 2000x$.

En estudiar la semblança tornarem a insistir en les escales.

Un instrument senzill per a realitzar treballs a escala és el ***pantògraf*** que facilita copiar una imatge o reproduir-la a escala.

El pantògraf és un paral·lelogram articulat que, en variar la distància entre els punts d'articulació, permet obtindre diferents grandàries de dibuix sobre un model donat.

Activitats proposades

22. La distància real entre dos pobles és 28,6 km. Si al mapa estan a 7 cm de distància. A quina escala està dibuixat?

23. Quina altura té un edifici si la seua maqueta construïda a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?

24. Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.

25. Les dimensions d'una superfície rectangular al pla són 7 cm i 23 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 50, calcula les seues mesures reals.

2. PROPORCIONALITAT INVERSA

2.1. Magnituds inversament proporcionals

Recorda que:

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.

Exemple:

- Quan un automòbil va a 90 km/h, tarda quatre hores a arribar al seu destí. Si fóra a 120 km/h tardaria 3 hores a fer el mateix recorregut.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals.

La **raó de proporcionalitat inversa** *k´* és el producte de cada parell de magnituds: ***k' = a · b = a´· b´***

Exemple:

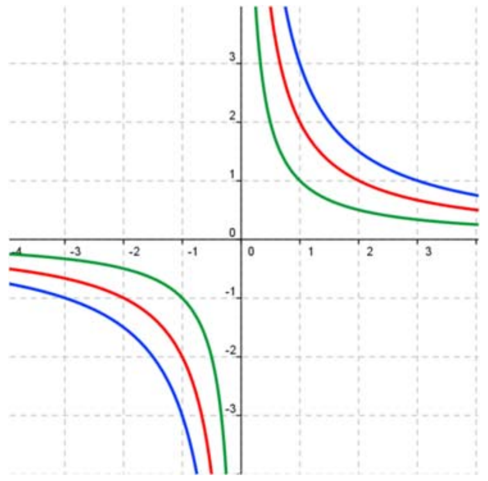
- Copia la taula al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula de proporcionalitat inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

k´ = 18 · 50 = 900. Comprova que totes les columnes donen aquest resultat.

Observa que:

Si es representen gràficament els punts d'una proporcionalitat inversa, tots ells estan sobre la gràfica d'una **hipèrbola** d'equació $y = \frac{k'}{x}$. La raó de proporcionalitat inversa és la constant **k'**. A aquesta hipèrbola $y = \frac{k'}{x}$ també se la denomina **funció de proporcionalitat inversa**.



Hipèrboles: y = 3/x; y = 2/x; y = 1/x

Exemple:

- Equació de la hipèrbola de l'exemple anterior

La hipèrbola és $y = \frac{900}{x}$. Comprovem que tots els punts verifiquen l'equació de la dita hipèrbola:

$y = \frac{900}{18}$ = 50; $y = \frac{900}{150}$ = 6; $y = \frac{900}{1{,}5}$ = 600; $y = \frac{900}{3600}$ = 0,25; $y = \frac{900}{100}$ = 9.

Activitats proposades

26. Per a enrajolar un recinte, 7 obrers han dedicat 80 hores de treball. Completa al teu quadern la següent taula i determina la constant de proporcionalitat. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Nombre d'obrers	1	5	7	12			60
Hores de treball			80		28	10	

2.2. Proporcionalitat simple inversa

Per a calcular el quart terme entre dues magnituds inversament proporcionals calculem la constant de proporcionalitat i escrivim l'equació de la hipèrbola

Exemple:

- Quatre persones realitzen un treball en 18 dies, quantes persones necessitarem per a realitzar el mateix treball en 8 dies?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ persones.}$$

Activitats proposades

27. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 5 panells de 1,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 3 m de llarg?

28. En un hort ecològic s'utilitzen 5000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 12 % de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob perquè les plantes reben la mateixa quantitat de nitrats?

29. Aqueix mateix hort necessita 200 caixes per a envasar les seues albergínies en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per a envasar-les en caixes de 1,7 quilograms? I per a envasar-les en caixes de 2,3 quilograms?

30. Per a envasar una certa quantitat de llet es necessiten 8 recipients de 100 litres de capacitat cada u. Volem envasar la mateixa quantitat de llet emprant 20 recipients. Quin haurà de ser la capacitat d'aqueixos recipients?

31. Copia al teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa. Escriu l'equació de la hipèrbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

2.3. Proporcionalitat composta

Una proporció en la que intervenen més de dues magnituds lligades entre si per relacions de proporcionalitat directa o inversa es denomina **proporció composta**.

Per a resoldre-la, la reduirem a un problema simple de proporcionalitat directa o inversa.

Exemple:

- A l'institut 30 alumnes de 4t A d'ESO han anat a esquiar i han pagat 2700 € per 4 nits d'hotel; 25 alumnes de 4t B d'ESO han guanyat en la loteria 3375 € i decideixen anar al mateix hotel. Quantes nits d'allotjament poden pagar?

Tenim tres magnituds: el nombre d'alumnes, la quantitat en € que paguen per l'hotel i el nombre de nits d'hotel. Observa que a més alumnes es paga més diners, per tant aquestes magnituds són directament proporcionals. A més nits d'hotel es paga més diners, per tant aquestes altres dues magnituds són també directament proporcionals. Però per a una quantitat de diners fixa, a més alumnes poden anar menys nits, per tant el nombre d'alumnes és inversament proporcional al nombre de nits d'hotel.

El millor mètode és reduir-lo a un problema de proporcionalitat simple, per a això obtenim el preu del viatge per alumne.

Cada alumne de 4t A ha pagat 2700 : 30 = 90 € per 4 nits d'hotel. Per tant ha pagat per una nit 90/4 = 22,5 €. L'equació de proporcionalitat directa és: $y = 22{,}5x$, on "y" és el que paga cada alumne i "x" el nombre de nits.

Cada alumne de 4t B compta amb 3375 : 25 = 135 € per a passar x nits d'hotel, per la qual cosa 135=22,5x, per tant poden estar 6 nits.

Activitats proposades

32. Sis persones realitzen un viatge de 12 dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 4 dies?

33. Si 16 peretes originen un gasto de 4500 €, estant enceses durant 30 dies, 5 hores diàries, quin gasto originarien 38 peretes en 45 dies, enceses durant 8 hores diàries?

34. Per a alimentar 6 vaques durant 17 dies es necessiten 240 quilos d'aliment. Quants quilos d'aliment es necessiten per a mantindre 29 vaques durant 53 dies?

35. Si 12 hòmens construeixen 40 m de tàpia en 4 dies treballant 8 hores diàries, quantes hores diàries han de treballar 20 hòmens per a construir 180 m en 15 dies?

36. Amb una quantitat de pinso podem donar de menjar a 24 animals durant 50 dies amb una ració d'1 kg per a cada u. Quants dies podrem alimentar a 100 animals si la ració és de 800 g?

37. Per a omplir un dipòsit s'obrin 5 aixetes que llancen 8 litres per minut i tarden 10 hores. Quant temps tardaran 7 aixetes semblants que llancen 10 litres per minut?

38. Si 4 màquines fabriquen 2400 peces funcionant 8 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per a aconseguir 7000 peces durant 10 hores diàries?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

Quan es realitza un repartiment en parts desiguals s'ha d'establir prèviament si es tracta d'un repartiment proporcional directe o invers.

3.1. Repartiment proporcional directe

En un repartiment proporcional directe li correspondrà més a qui té més parts.

Activitat resolta

- Tres amics han de repartir-se els 400 € que han guanyat en una competició d'acord amb els punts que cada un ha obtingut. El primer va obtindre 10 punts, el segon 7 i el tercer 3 punts.

El repartiment directament proporcional s'inicia sumant els punts: 10 + 7 + 3 = 20 punts.

Calculem el premi per punt: 400 : 20 = 20 €.

El primer obtindrà 20 · 10 = 200 €.
El segon: 20 · 7 = 140 €.
El tercer: 20 · 3 = 60 €.
La suma de les tres quantitats és 200 + 140 + 60 = 400 €, la quantitat total a repartir.

Com es tracta d'una proporció, s'ha d'establir la regla següent:

Siga N (a l'exemple anterior 400) la quantitat a repartir entre quatre persones, a qui els correspondrà A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Aquestes quantitats són proporcionals a la seua participació en el repartiment: *a, b, c, d*.

$a + b + c + d = n$ és el nombre total de parts en què ha de distribuir-se N.

N : $n = k$ que és la quantitat que correspon a cada part. A l'exemple anterior: k = 400 : 20 = 20.

El repartiment finalitza multiplicant k per a, b, c i d, obtenint-se així les quantitats corresponents A, B, C i D.

És a dir, ara l'equació de la recta és: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Activitats proposades

39. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 € Quant correspon a cada un?

40. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € enguany en la seua empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500€, quant correspon a cada un?

41. L'Unió Europea ha concedit una subvenció de 48.000.000 € per a tres estats de 1.500, 900 i 600 milions d'habitants, com ha de repartir-se els diners, sabent que és directament proporcional al nombre d'habitants?

42. Es reparteix una quantitat de diners, entre tres persones, directament proporcional a 2, 5 i 8. Sabent que a la segona li correspon 675 €. Trobar el que li correspon a la primera i tercera.

43. Una iaia reparteix 100 € entre els seus tres néts de 12, 14 i 16 anys d'edat; proporcionalment a les seues edats. Quant correspon a cada un?

3.2. Repartiment proporcional invers

En un repartiment proporcional invers rep més qui menys parts té.

Siga N la quantitat a repartir i *a*, *b* i *c* les parts. En ser una proporció inversa, el repartiment es realitza als seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Per a calcular les parts totals, reduïm les fraccions a comú denominador, per a tindre un patró comú, i prenem els numeradors que són les parts que corresponen a cada u.

Activitat resolta

- Repartir 4000 € de forma inversament proporcional a 12 i 20.

Calculem el total de les parts: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

4000 : 8 = 500 € cada part.

500 · 5 = 2500 €.

500 · 3 = 1500 €.

En efecte, 2500 + 1500 = 4000.

Activitats proposades

44. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 10, 5, 2 i 1 error, han de repartir-se els 2500 punts. Quants punts rebrà cada un?

45. Al testament, el iaio estableix que vol repartir entre els seus néts 4500 €, de manera proporcional a les seues edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat siga per als néts menors, quant rebrà cada un?

46. Es reparteix diners inversament proporcionals a 5, 10 i 15; al menor li corresponen 3000 €. Quant correspon als altres dos?

47. Tres germans ajuden al manteniment familiar entregant anualment 6000 €. Si les seues edats són de 18, 20 i 25 anys i les aportacions són inversament proporcionals a l'edat, quant aporta cada un?

48. Un pare va amb els seus dos fills a una fira i a la tómbola guanya 50 € que els reparteix de forma inversament proporcional a les seues edats, que són 15 i 10 anys. Quants euros ha de donar a cada un?

3.3. Mescla i aliatges

Les **mescles** que estudiarem són el resultat final de combinar distintes quantitats de productes, de distints preus.

Activitat resolta

- Calcula el preu final del litre d'oli si mesclem 13 litres a 3,5 € el litre, 6 litres a 3,02 €/l i 1 litre a 3,9 €/l.

Calculem el cost total dels diferents olis:

$$13 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 3{,}02 + 1 \cdot 3{,}9 = 67{,}52 \text{ €}.$$

I el nombre total de litres: 13 + 6 + 1 = 20 l.

El preu del litre de mescla valdrà 67,52 : 20 = 3,376 €/l, que arrodonint a cèntims són 3,38 €/l.

Activitats proposades

Grans de cafè

49. Calcula el preu del quilo de mescla de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.

50. Quants litres de suc de pomelo de 2,40 €/l han de mesclar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per a obtindre una mescla a 2,13 €/l?

Un **aliatge** és una mescla de metalls per a aconseguir un determinat producte final amb millors propietats o aspecte.

Els aliatges es realitzen en joieria mesclant metalls preciosos, or, plata, platí, amb coure o rodi. Segons la proporció de metall preciós, es diu que una joia té més o menys **llei.**

La **llei** d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.

Exemple:

- Una joia de plata de 50 g de pes conté 36 g de plata pura. Quina és la seua llei?

$$\textbf{Llei} = \frac{pes metall pur}{pes total} = \frac{36}{50} = 0{,}72$$

Una altra forma de mesurar el grau de puresa d'una joia és el **quirat**.

Un quirat d'un metall preciós és 1/24 de la massa total de l'aliatge.

Perquè una joia siga d'or pur ha de tindre 24 quirats.

Exemple:

Una joia d'or de 18 quirats pesa 62 g. Quina quantitat del seu pes és d'or pur?

$$\text{Pes en or} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46{,}5 \text{ g}.$$

El terme ***quirat*** ve de la paraula grega *"keration" (garrofa).* Aquesta planta, de llavors molt uniformes, s'utilitzava per a pesar joies i gemmes a l'antiguitat.

Activitats proposades

51. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 87 g i conté 69 g d'or pur.

52. Quants quirats té, aproximadament, la joia anterior?

4. INTERÉS

4.1. Càlcul d'interès simple

L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps.

A **l'interès simple**, al capital *C* dipositat se li aplica un tant per cent o rèdit *r* anualment.

El càlcul de l'interès obtingut al cap de diversos anys es realitza mitjançant la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el temps que es diposita el capital són mesos o dies, l'interès es calcula dividint l'expressió anterior entre 12 mesos o 360 dies (any comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \text{ temps en mesos} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \text{ temps en dies}$$

Activitats resoltes

- Dipositem 4000 € al 2 % anual. Quants diners tindrem al cap de 30 mesos?

Calculem l'interès simple:

$$I = \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €}$$

Sumem capital i interessos:

4000 + 200 = 4200 €

Activitats proposades

53. Calcula l'interès simple que produeixen 10.000 € al 3 % durant 750 dies.

54. Quin capital cal dipositar al 1,80 % durant 6 anys per a obtindre un interès simple de 777,6 €?

4.2. Interès compost

Des d'un altre punt de vista, l'interès és el percentatge que s'aplica a un préstec al llarg d'un temps, incrementant la seua quantia a l'hora de tornar-lo.

Aquest tipus d'interès no es calcula com l'interès simple sinó que s'estableix el que s'anomena "*capitalització*".

L'interès compost s'aplica tant per a calcular el capital final d'una inversió, com la quantitat a tornar per a amortitzar un préstec.

Normalment els préstecs es tornen mitjançant quotes mensuals que s'han calculat a partir dels interessos generats pel préstec al tipus d'interès convingut.

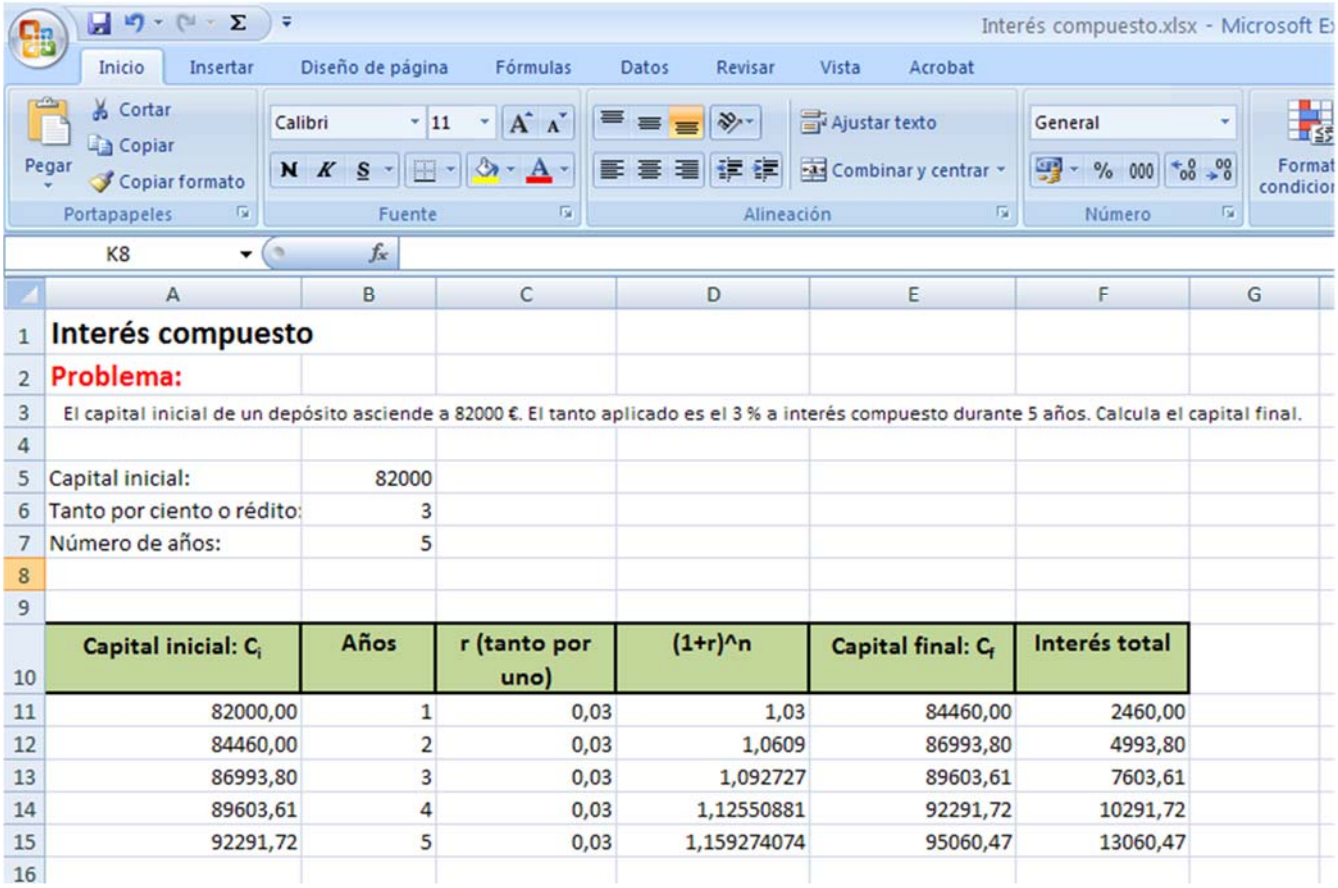
La capitalització composta planteja que, a mesura que es van generant interessos, passen a formar part del capital inicial, i aqueix nou capital produirà interessos en els períodes successius.

Si es tracta d'un dipòsit bancari, el capital final es calcularà seguint el procediment següent:

C_i (capital inicial)	1 any	*i* (tant per u)	$C_f = C_i\cdot(1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anys	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anys	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n anys		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cap de *n* anys, el capital final serà $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Per a fer els càlculs pots utilitzar un "Full de càlcul". Basta que al full de càlcul adjunt modifiques les dades de les caselles B5 on està el "Capital inicial", casella B6 on està el "Tant per u" i de la casella B7 on apareix el nombre de "Anys", i arrossegues a la columna B fins que el nombre final d'anys coincidisca amb la dita casella.



	A	B	C	D	E	F
1	**Interés compuesto**					
2	**Problema:**					
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.					
4						
5	Capital inicial:	82000				
6	Tanto por ciento o rédito:	3				
7	Número de años:	5				
8						
9						
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47
16						

Activitats resoltes

- El capital inicial d'un dipòsit ascendeix a 82000 €. El tant per cent aplicat és el 3 % a interès compost durant 5 anys. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060 \text{ €}$$

Activitats proposades

55. Al 5 % d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39500 €?

CURIOSITATS. REVISTA

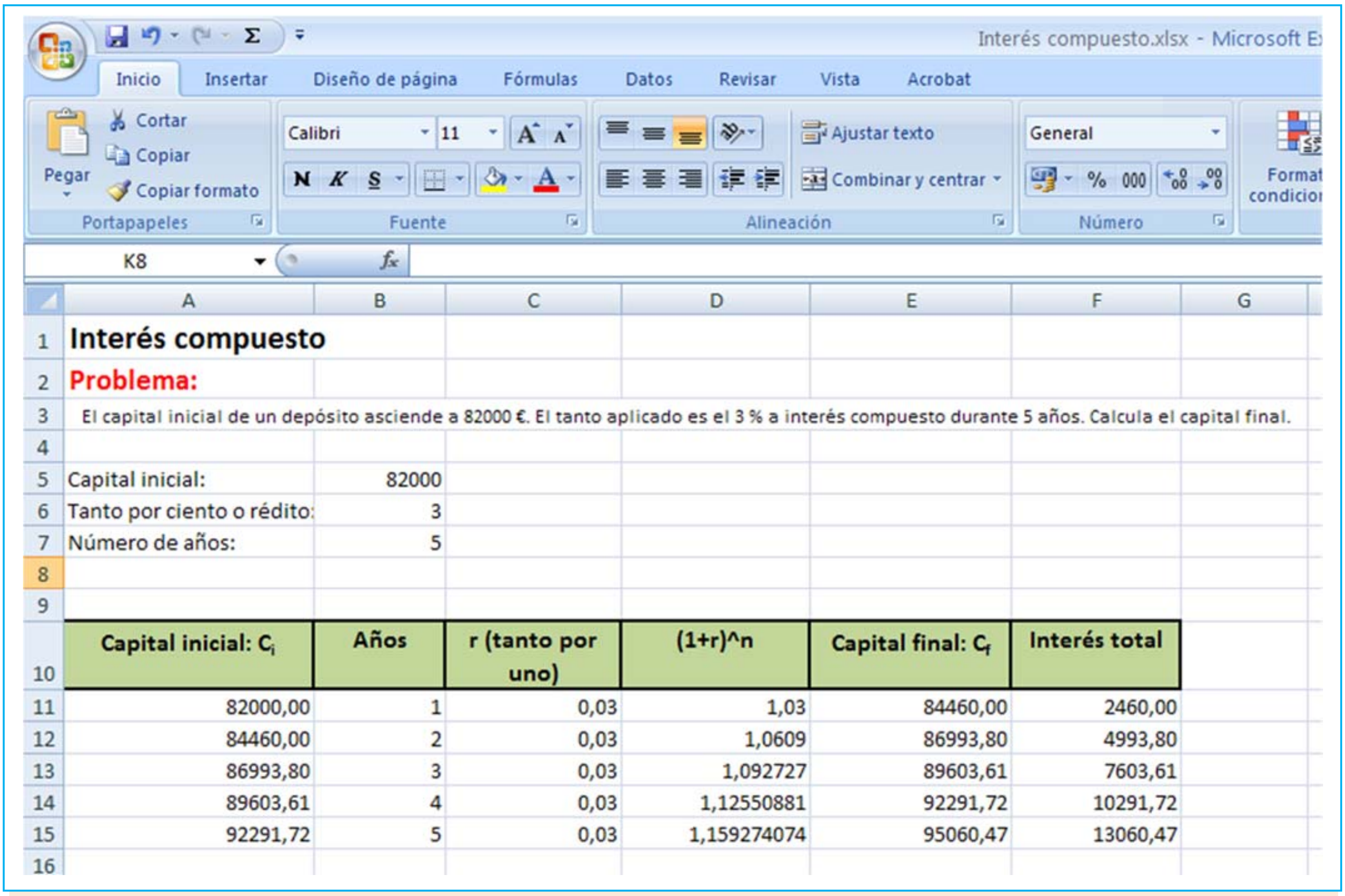
Confecciona el teu propi full de càlcul

Resoldrem el problema "El capital inicial d'un dipòsit ascendeix a 82000 €. El tant aplicat és el 3 % a interès compost durant 5 anys. Calcula el capital final" confeccionant un full de càlcul.

Obri Excel o qualsevol altre full de càlcul. Veuràs que els fulls estan formades per quadrícules, amb lletres en l'horitzontal i nombres en la vertical. Així cada quadrícula del full es pot designar per una lletra i un nombre: A1, B7, …

Deixarem les primeres 9 files per a posar títols, anotacions…

A la fila 10 escriurem els títols de les caselles. A la casella A10 escriu: Capital inicial. A la B10: Anys. A la C10: Tant per u. A la D10: $(1 + r)^n$. A l'E10: capital final. A la F10: Interès total.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Interés compuesto**						
2	**Problema:**						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

A la fila 11 comencem els càlculs. A A11 anotem 82000, que és el capital inicial.

A B11, escrivim 1, perquè estem l'any primer; a B12, escrivim 2, i seleccionant les caselles B11 i B12 arrosseguem fins a B15, perquè ens demanen 5 anys.

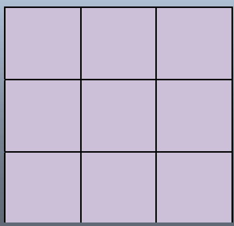
Com s'ha posat el capital al 3 %, el tant per u és 0,03, quantitat que copiem en C11 i arrosseguem fins a C15.

Per a calcular $(1 + r)^n$, podem fer-lo usant la funció POTÈNCIA. Per a això escrivim un signe = a la casella D11 i busquem la funció POTÈNCIA, a nombre escriurem 1+C11 i a exponent B11. T'haurà quedat: =POTÈNCIA(1+C11;B11). Ara, ho assenyales i ho arrossegues fins a D15.

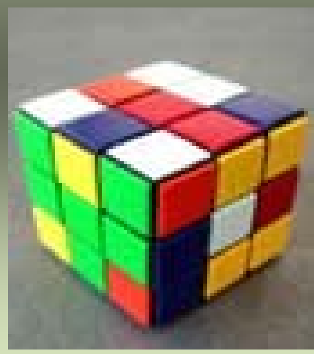
Per a calcular $C \cdot (1 + r)^n$, a la columna E, només hem de multiplicar A11*D11. Volem deixar invariant el capital inicial, per a dir-se'l a Excel, que no ens el canvie, escrivim: =$A$11*D11 i arrosseguem fins a la fila E15.

Proporcionalitat en àrees i volums

En augmentar el costat d'un quadrat al doble, la seua superfície queda multiplicada per 4. Al multiplicar per 3 el costat, l'àrea es multiplica per 9.



En augmentar el costat d'un cub al doble, el seu volum queda multiplicat per 8. En multiplicar per 3 el costat, el volum es multiplica per 27.



En general, si fem un canvi d'escala de factor de proporcionalitat *k*, l'àrea té un factor de proporcionalitat k^2, i el volum k^3.

Utilitza aquesta observació per a resoldre els problemes següents:

La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?

Abans de començar a calcular, dóna la teua opinió.

Ajuda: k^3 = 8 000 000/1 doncs k = 200. Si la Torre Eiffel medeix 300 metres d'altura, la nostra torre mesurarà 300/200 = 1,5 m. Metre i mig! Molt més que un llapis!

1. A una pizzeria la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quina té millor preu?

2. Veiem al mercat un lluç de 40 cm que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

3.En un dia va fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

RESUM

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Exemples</td></tr>
<tr><td>Proporcionalitat directa</td><td>Dues magnituds són directament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.
La funció de proporcionalitat directa és una recta que passa per l'origen: y = kx. El pendent de la recta, k, és la raó de proporcionalitat directa.</td><td>Per a empaperar 300 m^2 hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m^2, necessitarem 8,32 rotllos, perquè k = 300/24 = 12,5, y = 12,5x, per la qual cosa x = 104/12,5 = 8,32 rotllos.</td></tr>
<tr><td>Proporcionalitat inversa</td><td>Dues magnituds són inversament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre.
La funció de proporcionalitat inversa és la hipèrbola y= k'/x. Per tant la raó de proporcionalitat inversa k´ és el producte de cada parella de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.</td><td>Dues persones pinten un habitatge en 4 dies. Per a pintar el mateix habitatge, 4 persones tardaran: k' = 8, y=8/x, per la qual cosa tardaran 2 dies.</td></tr>
<tr><td>Percentatges</td><td>Raó amb denominador 100.</td><td>El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$</td></tr>
<tr><td>Escales</td><td>L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures a la realitat.</td><td>A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km a la realitat.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Repartiment proporcional directe
Repartir directament a 6,10 i 14, 105000 €
6 + 10 + 14 = 30
105000 : 30 = 3500
6 · 3500 = 21000 €
10 ·3500 = 35000 €
14 · 3500 = 49000 €</td><td>Repartiment proporcional invers
Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6
$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$
5670 : 21 = 270
270 · 10 = 2700
270 · 6 = 1620
270 · 5 = 1350</td></tr>
<tr><td>Mescles i aliatges</td><td>Mesclar distintes quantitats de productes, de distints preus.
La llei d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.</td><td>Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seua llei és: $\frac{195}{245} = 0,795$</td></tr>
<tr><td>Interès simple i compost</td><td>L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps</td><td>C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 anys
$I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €</td></tr>
</table>

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima quantes persones caben de peu en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplit completament un local de 400 m^2, quantes persones estimes que han anat a aqueixa festa?
3. Cada setmana paguem 48 € en transport. Quant gastarem durant el mes de febrer?
4. Amb 85 € hem pagat 15 m de tela, quant ens costaran 23 m de la mateixa tela?

5. Per a entapissar cinc cadires he utilitzat 0,6 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 10 m?
6. Un camió ha transportat en 2 viatges 300 sacs de creïlles de 25 kg cada u. Quants viatges seran necessaris per a transportar 950 sacs de 30 kg cada un?
7. Una edició de 400 llibres de 300 pàgines cada un aconsegueix un pes total de 100 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 700 llibres de 140 pàgines cada un?
8. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és k = 1,8, copia al teu quadern i completa la taula següent:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
10. Per retardar-se en el pagament d'un deute de 1500 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %. Quant ha de tornar en total?
11. Si un litre de llet de 0,85 € augmenta el seu preu en un 12 %, quant val ara?
12. Què tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1900 € si finalment es van pagar 1200 €?

13. Si unes sabatilles de 60 € es rebaixen un 15 %, quin és el valor final?
14. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?
15. Lluís va comprar una camiseta que estava rebaixada un 20 % i va pagar per ella 20 €. Quin era el seu preu original?

16. Per liquidar un deute de 35000 € abans d'allò que s'ha previst, una persona paga finalment 30800 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?

17. El preu d'un viatge s'anuncia a 500 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)

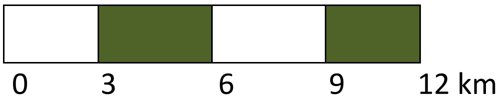
18. Què increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 25 € i ara es paga a 29 €?

19. Un balneari va rebre 10 mil clients al mes de juliol i 12 mil a l'agost. Quin és l'increment percentual de clients de juliol a agost?

20. Un mapa està dibuixat a escala 1 : 800000. La distància real entre dues ciutats és 200 km. Quina és la seua distància al mapa?

21. La distància entre Oviedo i Corunya és de 340 km. Si al mapa estan a 12 cm, quina és l'escala a la què està dibuixat?

22. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància a la realitat per a 21 cm.



23. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

Grandària al dibuix	Grandària real	Escala
20 cm llarg i 5 cm d'ample		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si les següents magnituds es troben en proporció directa, inversa o en cap d'elles:

a) Velocitat a què circula un cotxe i espai que recorre

b) Diners que tens per a gastar i bosses d'ametles que pots comprar

c) Talla de sabates i preu de les mateixes

d) Nombre de membres d'una família i litres de llet que consumixen

e) Nombre d'entrades venudes per a un concert i diners recaptats.

f) Nombres d'aixetes que omplin una piscina i temps que aquesta tarda a omplir-se

g) Edat d'una persona i estatura que té

h) Nombre de treballadors i temps que tarden a fer una tanca

i) Edat d'una persona i nombre d'amics que té

26. Quina velocitat hauria de portar un automòbil per a recórrer en 4 hores una certa distància, si a 80 km/h ha tardat 5 hores i 15 minuts?

27. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En la granja es fa la comanda de farratge per a alimentar a 240 porcs durant 9 setmanes. Si ven 60 porcs, quantes setmanes li durarà el farratge? I si en compte de vendre, compra trenta porcs? I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb els 240 porcs?

29. Un granger amb 65 gallines té dacsa per a alimentar-les 25 dies. Si ven 20 gallines, Quants dies podrà alimentar a les restants?

30. Amb 15 paquets de 4 kg cada un poden menjar 150 gallines diàriament. Si els paquets foren de 2,7 kg, quants necessitaríem per a donar de menjar a les mateixes gallines?

31. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula al teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 20 operaris per a realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per a realitzar el mateix treball?

33. En un magatzem es guarden reserves de menjar per a 100 persones durant 20 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per a 75 persones amb 2 racions diàries?

34. Si 15 operaris instal·len 2500 m de tanca en 7 dies. Quants dies tardaran 12 operaris a instal·lar 5250 m de tanca?

35. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cada un?

36. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.

37. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris el realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cada un?

38. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.

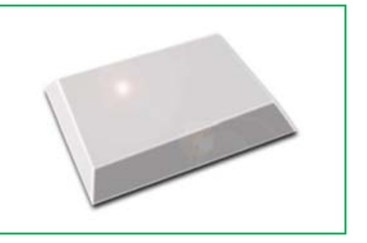
39. Mesclem 3 kg d'ametles a 14 €/kg, 1,5 kg d'anous a 6 €/kg, 1,75 kg de castanyes 8 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de mescla de fruits secs.

40. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix mesclant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una botella de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

41. Per a aconseguir un tipus de pintura es mesclen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte I a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de mescla.

42. Cinc persones comparteixen un microbús per a realitzar distints trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cada un?

43. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per a subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cada una?



44. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quina és la seua llei?

45. Quants grams d'or conté una joia de 0,900 de llei, que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?

46. Quin capital cal dipositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per a obtindre un interès simple de 810 €?

47. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400 € al 1,4 % en 10 anys?

48. Quants mesos ha de dipositar-se un capital de 74500 € al 3 % per a obtindre un interès de 2980 €?

49. Al 3 % d'interès compost, un capital s'ha convertit en 63338,5 €. De quin capital es tracta?

50. En la construcció d'un pont de 850 m s'han utilitzat 150 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 50 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?

51. En un col·legi de primària es convoca un concurs d'ortografia en què es donen diversos premis. El total que es reparteix entre els premiats és 500 €. Els alumnes que no han comés cap falta reben 150 €, i la resta es distribueix de manera inversament proporcional al nombre de faltes. Hi ha dos alumnes que no han tingut cap falta, un ha tingut una falta, un altre dues faltes i l'últim ha tingut quatre faltes, quant rebrà cada un?

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 2000; 0,025; 20; 20000 b) 2000; 0,25; 2; 20000 c) 1000; 0,025; 10; 10000

2. Amb 500 € paguem els gastos de gas durant 10 mesos. En 36 mesos pagarem:

a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.

3. Un article que costava 2000 € s'ha rebaixat a 1750 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:

a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %

4. Per a envasar 510 litres d'aigua utilitzem botelles de litre i mig. Quantes botelles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?

a) 590 botelles b) 700 botelles c) 650 botelles d) 680 botelles

5. Els valors que completen la taula de proporcionalitat inversa són:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seues parcel·les. La major, que mesura 15 ha rebut 30 tones, la segona és de 12 ha i la tercera de 10 ha rebran:

a) 24 t i 20 t b) 20 t i 24 t c) 24 t i 18 t d) 25 t i 20 t

7. L'escala a la que s'ha dibuixat un mapa en què 2,7 cm equivalen a 0,81 km és:
a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300

8. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc forrar 32 llibres. Quants rotllos necessitarem per a forrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?

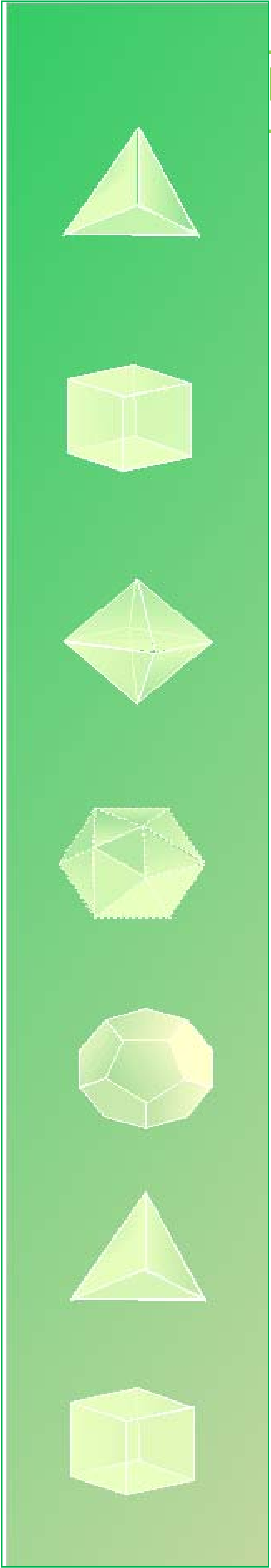
a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos

9. El preu final del kg de mescla de 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg és:

a) 1,12 € b) 0,98 € c) 1,03 € d) 1,05 €

10. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:

a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g



Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO

Capítol 3: Polinomis. Fraccions algebraiques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF. commons.wikimedia

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

En Babilònia ja utilitzaven l'Àlgebra, però els egipcis i els grecs la tractaven utilitzant la Geometria. Els àrabs van arreplegar el saber antic d'Orient i Occident i van portar l'Àlgebra a Europa. La paraula "*àlgebra*" en àrab significa "*restaurar*" i en el Quixot apareixen algebristes que restauraven els ossos trencats. Al segle XIII, *Fibonacci*, (Leonardo de Pisa) va viatjar i va contactar amb matemàtics àrabs i hindús. El seu llibre, *Líber abaci*, pot ser considerat el primer llibre d'Àlgebra europeu. Al Renaixement italià ja va haver-hi grans algebristes que s'ocupaven, principalment, de la resolució d'equacions.

Després, el punt de vista va canviar. *L'Àlgebra Moderna* s'ocupa de les estructures algebraiques, que ve a ser el trobar les propietats comunes que puguen tindre distints conjunts, com per exemple, trobar similituds entre els nombres enters, que ja coneixes, i els polinomis que treballarem en aquest capítol.

Hui els ordinadors són capaços de treballar amb expressions algebraiques.

1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

1.1. Introducció

No cal imaginar situacions rebuscades per a que, a l'hora de realitzar un raonament, ens topem amb alguna de les quatre operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació o divisió.

Exemples:

- Anna, Antoni i Eduard han realitzat un viatge, i a la tornada han sumat els gastos efectuats que ascendeixen a 522 €. El gasto realitzat per cada un ha sigut $\frac{522}{3}$ €, és a dir, 174 €.

- Si comprarem pomes a una fruiteria en què el preu d'un quilogram és de 1'3 €, resulta habitual que, segons anem col·locant la fruita a la balança, vaja indicant l'import final. Per a això realitza l'operació: 1,3·x, on x és la quantitat de quilograms que ens ha indicat la balança. Després de cada pesada, el resultat d'aqueixa multiplicació reflectix l'import de les pomes que, en aqueix moment, conté la bossa.

- Recordes la fórmula de l'Interès: $I = \frac{Crt}{100}$, on I és l'interès que es rep en col·locar un capital C, amb un rèdit r, durant un nombre d'anys t.

- Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel que paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de telefonada. Amb aqueixa tarifa, una telefonada de 3 minuts ens costarà:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ €}$$

Però quin és el preu d'una telefonada qualsevol? Com desconeixem la seua duració, ens trobem amb una quantitat no determinada, o indeterminada, per la qual cosa en qualsevol resposta que donem a la pregunta anterior s'apreciarà l'absència d'aqueixa dada concreta. Podem dir que el cost d'una telefonada qualsevol és

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

on x assenyala la seua duració, en minuts.

- Per a calcular el valor del perímetre d'un rectangle de costats a i b s'utilitza l'expressió:

$$2 \cdot a + 2 \cdot b$$

- L'expressió algebraica que ens representa el producte dels quadrats de dos nombres qualssevol x e y es simbolitza per $x^2 \cdot y^2$

Activitats proposades

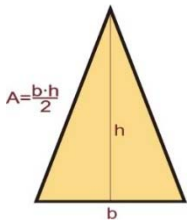
1. A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de telefonades realitzades (*N*) així com la quantitat total de minuts de conversació (*M*). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les telefonades efectuades durant aqueix mes és:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ €}$$

Exemple:

- És ben coneguda la *fórmula de l'àrea* d'un triangle de base *b* i altura associada *h*:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



En tots aquests exemples han sorgit **expressions algebraiques**.

1.2. Expressions algebraiques

Anomenarem **expressió algebraica** a qualsevol expressió matemàtica que es construïsca amb nombres reals, lletres i les operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i/o divisió.

En una expressió algebraica pot haver-hi dades no concretades; unes vegades haurem d'obtindre els valors que "resolen" l'expressió, i en altres, com la fórmula de l'àrea del triangle, es verifiquen per a qualsevol valor. Segons el context, rebran el nom de ***variable***, ***indeterminada***, ***paràmetre***, ***incògnita***, entre altres.

Si en una expressió algebraica no hi ha *variables*, la dita expressió no és més que un nombre real.

En fixar un valor concret per a cada *indeterminada* d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.

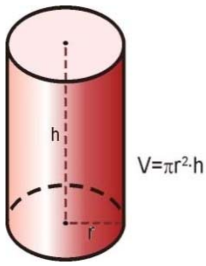
El **valor numèric** d'una expressió algebraica és el que s'obté en substituir les lletres d'aqueixa expressió per determinats valors.

Exemple:

- El volum d'un cilindre ve donat per l'expressió algebraica

  $\pi \cdot r^2 \cdot h$

  en la que *r* és el radi del cercle base i *h* és la seua altura. D'esta manera, el volum d'un cilindre la base del qual té un radi de 10 cm i d'altura 15 cm és igual a: $\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$



- El valor de l'expressió 2*a* + 5 per al cas concret de *a* igual a 3 el calculem substituint *a* per 3. Així resulta 2 · 3 + 5 = 11, i es diu que el valor numèric de 2*a* + 5 para *a* = 3 és 11.

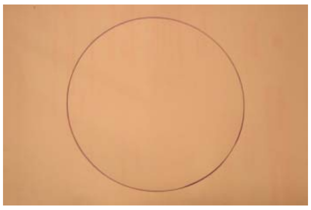
- Si a l'expressió $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$

  particularitzem les tres variables amb els valors $x = 4$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$

  sorgeix el nombre real $7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$

En una expressió algebraica pot no tindre sentit donar algun valor a certa indeterminada. En efecte, a l'últim exemple no és possible fer $z = 0$.

Activitats proposades



1. Escriu l'expressió algebraica que ens proporciona l'àrea d'un cercle.

2. Escriu en llenguatge algebraic els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol: *x* i *y*:

a) La meitat de l'oposat de la seua suma.

b) La suma dels seus cubs

c) El cub de la seua suma

d) L'invers de la seua suma

e) La suma dels seus inversos

3. Tradueix a un enunciat en llenguatge natural les següents expressions algebraiques:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

4. Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 15 % sobre el preu imprès en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix a la seua etiqueta.

5. L'anterior comerç, als últims dies del període de rebaixes, desitja desfer-se de les seues existències i per a això ha decidit augmentar el descompte. Manté el 15 % per a la compra d'una única peça i, a partir de la segona, el descompte total augmenta un 5 % per cada nova peça de roba, fins a un màxim de 20 articles. Analitza quant pagarem en realitzar una compra en funció de la suma total de les quantitats que figuren en les etiquetes i del nombre d'articles que s'adquirisquen.

6. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:

a) $x^2 + 7x - 12$ per a $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ per a $a = -3$ i $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ per a $a = -1$.

7. Indica en cada cas el valor numèric de l'expressió següent: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

2.1. Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres reals i variables (o indeterminades). Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre real que multiplica a la **part literal**, indeterminada o indeterminades.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el doble d'una quantitat, $2\cdot x$, és un monomi amb una única variable, *x*, i coeficient 2.
- El volum d'un cilindre, $\pi\cdot r^2\cdot h$, és un monomi amb dues indeterminades, r i h, i coeficient π. La seua part literal és $r^2\cdot h$.
- Altres monomis: $\frac{4}{7}\cdot x^2\cdot y^3$, $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$
- L'expressió $7xy^2 + 3xy + 2x$ està formada per tres termes, tres monomis, cada un té un coeficient i una part literal:

  Al primer, $7xy^2$, el coeficient és 7 i la part literal $x\,y^2$

  Al segon, $3xy$, té per coeficient 3 i part literal $x\cdot y$

  I al tercer, $2x$, el coeficient és 2 i la part literal *x*.

Dos monomis són **semblants** si tenen la mateixa part literal.

Per exemple:

Són monomis semblants: $7xy^3$ i $3xy^3$.

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

- Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.
- Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- $3\cdot x$ és un monomi de grau 1 en la variable *x*.
- $\pi\cdot r^2\cdot h$ és un monomi de grau 3 en les indeterminades r i h.
- $\frac{4}{7}\cdot x^2\cdot y^3$ és un monomi de grau 5 en x i y.
- $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$ és un monomi de grau 4 en x, y i z.

Un nombre real pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Activitats proposades

8. Indica el coeficient i la part literal de les monomis següents:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis.

El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ és un polinomi de grau 3 a la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ és un polinomi de grau 4 a les indeterminades x i y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x, y i z.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres reals.

Direm que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Un polinomi està **ordenat** si els seus monomis estan escrits de menor a major grau o viceversa.

Un polinomi és **complet** si estan els monomis de tots els graus, sense coeficients nuls.

Exemples:

- $-8x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 23$ és un polinomi de grau 4 en la variable x. Està ordenat i no és complet.
- $7y^3 + 4y - 9$ és un polinomi de grau 3 en la indeterminada y. Està ordenat i no és complet.
- $z^2 - 6z + 8$ és un polinomi de grau 2 en z. A més, és un polinomi mònic, ordenat i complet.
- $5x + 2$ és un polinomi de grau 1 en x. A més, és un polinomi ordenat i complet.

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre real: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat p a un polinomi, a l'avaluació de p en, per exemple, el nombre *-3* la denotem per *p(-3)*, i llegim *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x, podem referir-nos a ell com p o *p(x)* indistintament. D'aquesta manera apreciem que un polinomi pot ser entès com una manera concreta d'assignar a cada nombre real un altre nombre real. En aqueix cas a *y=p(x)* diem que és una funció polinòmica.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ ens trobem amb el nombre

$$p(5) = -3\cdot 5^4 + \frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2 = -3\cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ per a $y = -1$ és

$$q(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1) - 7 = 4\cdot(-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- En particularitzar el polinomi $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el nombre $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis, amb la mateixa indeterminada, procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ i $-x^4+4x^2-5x-6$ és el polinomi

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$
$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6abx^2 - abx$

Al següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre un altre.

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$
$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. Basta fer-lo agrupant-los de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

També:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Activitats proposades

9. Realitza les següents sumes de polinomis:

- $(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3)$
- $-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6)$

10. Simplifica les següents expressions algebraiques:

a) $3x-4-(3x+2)+4x$ b) $3(x^2-4x+6)-(x^2-6x+5)$

c) $(-3)(2a+4b)-(2b-3a)$ d) $4(2a^2-2ab+2b^2)-(3a^2-4ab)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el *polinomi zero*.

Exemple:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Element oposat. Cada polinomi té associat un altre, al que anomenarem el seu polinomi *oposat*, tal que la suma d'ambdós és igual al polinomi zero. Aconseguim el polinomi oposat d'un donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

- El polinomi oposat de $p\equiv-2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, al que denotarem com $"-p"$. Ratifiquem que la seua suma és el polinomi zero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Activitats proposades

11. Escriu el polinomi oposat de cada un dels polinomis següents:

- $4x^4+6x^3+2x^2+5x-2$
- $9x$
- $-2x^4+4x^2$

12. Considera els polinomis $p\equiv-2x^3-6x+3$, $q\equiv2x^2+2x+9$, així com el polinomi suma $s\equiv p+q$. Troba els valors que adopta cada un d'ells per a x=-2, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si hi ha alguna relació entre aqueixos tres valors.

13. Obtín el valor del polinomi $p\equiv-2x^3-6x+3$ en $x=3$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en x=3?

2.3. Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella pren valors als nombres reals, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte dels nombres reals, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5\cdot(-4)\cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1)\cdot(-2x) = (-x^3)\cdot(-2x) + (3x)\cdot(-2x) + (-1)\cdot(-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$

$= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$

- $(x-6)\cdot(x^3-2x) = (x-6)\cdot x^3 + (x-6)\cdot(-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\ \hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\ \hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordem que el *polinomi oposat* d'un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon de multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta manera el polinomi oposat de p és

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural **l'operació diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat d'un donat:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1)\cdot q$$

Exemple:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2-6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Activitats proposades

14. Efectua els següents productes de polinomis:

- $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$
- $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$
- $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$
- $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

15. Realitza les següents diferències de polinomis:

- $(-3x^3+x)-(-2x^2)$
- $(3x^4+2x)-(-4x-5)$
- $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

16. Multiplica cada un dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgisquen polinomis mònics:

- $3x^3-2x^2+x$
- $-4x^4+2x-5$
- $-x^2+2x-6$

17. Calcula i simplifica els productes següents:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los:

$$p\cdot q\equiv q\cdot p$$

Exemple:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. Basta fer-lo agrupant-los de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r\equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Exemple:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

També:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Activitats proposades

18. Realitza els següents productes de polinomis:

- $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$
- $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: en multiplicar-lo per qualsevol altre sempre ens dóna aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat*.

Exemple:

$$1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = (-5x^3 - 2x + 3) \cdot 1 = -5x^3 - 2x + 3$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right)$$

tenim dues opcions per a conèixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot \left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **traure factor comú**.

Exemple:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$$

Activitats proposades

19. De cada un dels següents polinomis extrau algun factor que siga comú als seus monomis:

- $-20x^3 - 40x^2 + 10x$
- $60x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

3.1. Introducció a les fraccions polinòmiques

Fins a aquest moment hem estudiat la suma i el producte de polinomis. En qualsevol dels casos el resultat sempre és un altre polinomi. Quan establim una **fracció polinòmica.** com, per exemple,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

el que tenim és una **fracció algebraica**, que en general, no és un polinomi. Sí que apareix un polinomi en el cas particular en què el denominador és un nombre real diferent de zero, açò és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que l'expressió anterior no és un polinomi: qualsevol polinomi pot ser avaluat en qualsevol nombre real. No obstant això aqueixa expressió no pot ser avaluada per a $x=1$, ja que ens quedaria el nombre 0 al denominador.

Podríem creure que la següent fracció polinòmica. sí que és un polinomi:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí que és un polinomi, perquè es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x=0$. No obstant això, aqueixa fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluats en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor. Són **expressions equivalents** quan ambdós tenen sentit.

3.2. Divisió de polinomis

Encara que, com hem vist en l'apartat anterior, una fracció polinòmica., en general, no és un polinomi, anem a endinsar-nos en la divisió de polinomis perquè és una qüestió important i útil.

Analitzem amb deteniment la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, *D* (dividend) entre *d* (divisor, diferent de 0), sorgeixen altres dos, el quocient (*c*) i el residu (*r*). Ells es troben lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r=0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu *r* siga un nombre menor que el divisor *d*, i major o igual que zero. Fixem-nos en que, sense aquesta exigència per al residu *r*, podem triar arbitràriament un valor per al quocient *c* el qual ens subministra el seu valor associat com a residu *r*. En efecte, si tenim com a dividend *D* = 673 i com divisor *d* = 12, "si volem" que el quocient siga *c* = 48 el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

i la connexió entre aquests quatre nombres és $673 = 12 \cdot 48 + 97$

Aquesta última "lectura" de la divisió de nombres enters va a guiar-nos a l'hora de dividir dos polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També ací pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau haurà de ser menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem $$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

encara que, en este cas, serem conscients de les cauteles assenyalades en l'apartat anterior quant a les equivalències entre polinomis i altres expressions algebraiques.

Igual que ocorre amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cada una de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de manera que el grau d'aqueixos polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem conclòs. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

Dividirem el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Com el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

o, com a igualtat entre expressions algebraiques, $$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, i del que s'ha dit sobre $r(x)$, és evident que el grau del polinomi quocient, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Anem a obtindre-lo monomi a monomi.

- Primera aproximació als polinomis quocient i residu:

Per a poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de major grau de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació de $c(x)$, el seu monomi de major grau: $c_1(x) = 3x^2$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Com aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, major que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Segona aproximació als polinomis quocient i residu:

Si particularitzem la igualtat entre expressions algebraiques $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ al que tenim fins ara resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, sorgit com a residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

El nou objectiu és aconseguir la igualtat $r_1 \equiv q\cdot c_2+r$. Igual que abans, el grau deuria de ser 1 o 0. Com el terme de major grau de $r_1(x)$, $8x^3$, ix del producte $q(x)\cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient continga el monomi $c_2(x)=4x$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:

$$r_2(x)=r_1(x)-q(x)\cdot c_2(x)=(8x^3-8x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 4x=$$
$$=(8x^3-8x^2+3x-2)-(8x^3-4x^2+12x)=-4x^2-9x-2$$

Com aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Tercera aproximació als polinomis quocient i residu:

Allò que s'ha realitzat a l'etapa segona ens permet avançar en l'adequada descomposició de l'expressió algebraica que ens ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Com en cada pas, el grau deuria de ser 1 o 0. El terme de major grau de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x)\cdot c_3(x)$, per la qual cosa $c_3(x)=-2$

i el tercer residu $r_3(x)$ és

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Com aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu sí que és el definitiu. Hem conclòs:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si ho expressem mitjançant polinomis:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusió: en dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x)=3x^2+4x-2$ i com a polinomi residu $r(x)=-11x+4$.

A continuació agilitzarem la divisió de polinomis:

Activitats proposades

20. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per a dividir el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & \;2x^2 - x + 3 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & \;3x^2 \\ \cline{1-3}
 & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 &
\end{array}
$$

- Primera i segona etapes:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & \;2x^2 - x + 3 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & \;3x^2 + 4x \\ \cline{1-3}
 & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & \\
 & -8x^3 & +4x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^2 & -9x & -2 &
\end{array}
$$

- Les tres etapes:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & \;2x^2 - x + 3 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & \;3x^2 + 4x - 2 \\ \cline{1-3}
 & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & \\
 & -8x^3 & +4x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^2 & -9x & -2 & \\
 & & 4x^2 & -2x & +6 & \\ \cline{3-5}
 & & & -11x & +4 &
\end{array}
$$

21. Divideix els polinomis següents:

- $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$
- $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
- $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$
- $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$
- $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$

22. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparega $q(x) = x^2 + 2x - 1$ com a polinomi quocient i $r(x) = -2x^2 + 3$ com a residu.

3.3. Operacions amb fraccions algebraiques

Ja que tant els polinomis com les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potència, nombres reals, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres reals.

- **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions algebraiques hem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-lo, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta: $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$

- **Producte.** Basta multiplicar els numeradors i denominadors entre si:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions: $\dfrac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \dfrac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$

Activitats proposades

23. Efectua els càlculs següents:

a) $\dfrac{3x+2}{x^2+1} + \dfrac{5}{2x}$ b) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{x+2}$ c) $\dfrac{-2x}{5x^2+4x} \cdot \dfrac{5}{3x-2}$ d) $\dfrac{x-4}{x^2+5x} : \dfrac{x-4}{x+5}$

24. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, només un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

- $\dfrac{-3x^2+2x-1}{x^3} + \dfrac{4x-1}{x^2}$
- $\dfrac{x-1}{x^2+5x} - \dfrac{6}{x+5}$

25. Comprova, simplificant, les igualtats següents:

- $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$
- $\dfrac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \dfrac{3}{2}y$
- $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12} = \dfrac{x^2-3x}{x+4}$
- $\dfrac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y} = \dfrac{3y^2+2y}{y-4}$
- $\dfrac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b} = \dfrac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

26. Calcula els quocients següents:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

27. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

4. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL D'UN POLINOMI

4.1. Factorització d'un polinomi

Tal com ocorre amb la divisió entera, la divisió de polinomis també pot ser **exacta**, és a dir, la resta pot ser el polinomi zero.

$$\begin{array}{rl} 24 & \underline{|2\ \ } \\ 04 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & -3x^2+3x-2 \\ \hline
\underline{-3x^5+3x^4-2x^3} & -x^3+2x-4 \\
\qquad -6x^3+18x^2-16x+8 & \\
\qquad \underline{6x^3-6x^2+4x} & \\
\qquad\qquad 12x^2-12x+8 & \\
\qquad\qquad \underline{-12x^2+12x-8} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Exemple:

En aquest cas escrivim $\dfrac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

i direm que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divideix a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optem per una igualtat polinòmica: $3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$

Observem que l'haver obtingut com a residu el polinomi 0 ens permet expressar el polinomi dividend, $p(x)$, com a producte d'altres dos polinomis, els polinomis divisor i quocient, $q(x)\cdot c(x)$. Hem aconseguit una **factorització** del polinomi $p(x)$, o una **descomposició en factors** de $p(x)$.

En general, un polinomi concret pot ser factoritzat, o descompost, per mitjà de diferents grups de factors. Si continuem amb el polinomi $p(x)$ anterior, una manera d'obtindre una descomposició alternativa consisteix en, al seu torn, aconseguir una factorització d'algun dels polinomis $q(x)$ o $c(x)$.

Constatem que el polinomi $-x^2+2x-2$ divideix a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{l|l}
-x^3\qquad +2x-4 & -x^2+2x-2 \\ \hline
\underline{x^3-2x^2+2x} & x+2 \\
\quad -2x^2+4x-4 & \\
\quad \underline{2x^2-4x+4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

En efecte, la divisió és exacta i això ens porta a la igualtat següent:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la traslladem a la descomposició que teníem de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Activitats proposades

28. Completa, quan siga possible, les factoritzacions següents:

- $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

29. Determina un polinomi de grau 4 que admeta una descomposició factorial en què participe el polinomi $6x^3-x^2+3x-1$.

Direm que un polinomi és **reductible** si admet una factorització mitjançant polinomis de grau inferior al seu. En cas contrari el polinomi serà **irreductible**.

És clar que els polinomis de grau 1 no poden ser descompostos com a producte d'altres dos polinomis de menor grau. Són polinomis irreductibles. En el següent apartat constatarem que hi ha polinomis de grau 2 que també són irreductibles.

De les diferents factoritzacions que pot admetre un polinomi la que més informació ens proporciona és aquella en què tots els factors que intervenen són polinomis irreductibles, ja que *no és millorable*. Convé advertir que, en general, no és fàcil aconseguir aqueix tipus de descomposicions. A continuació aprofundirem en aquesta qüestió.

4.2. Arrels d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x)$ direm que un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si en avaluar p en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, açò és, si

$$p(\alpha)=0$$

Exemple:

Considerem el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- El nombre 2 és una arrel de $s(x)$, ja que

$$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

- Una altra arrel de $s(x)$ és el nombre -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

- En canvi, el nombre 1 no és una arrel de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampoc és arrel de $s(x)$ el nombre 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Activitats proposades

30. Estudia si els següents nombres són o no arrel dels polinomis indicats:

- $x=3$ de x^3-3x^2+1
- $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2
- $x=1$ de x^3-3x^2+x+1
- $x=0$ de x^3-3x^2+1
- $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

Al següent exercici arreplegarem algunes connexions entre les arrels d'un polinomi i les operacions de suma i producte de polinomis.

Activitats proposades

31. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α.

- Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi suma $p_1(x)+p_2(x)$?
- Si α és una arrel de $p_1(x)$, també és arrel del polinomi producte $p_1(x)\cdot p_2(x)$?
- Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4\cdot p_1(x)$?

El que un nombre real siga arrel d'un polinomi està fortament connectat amb la factorització del dit polinomi:

Si un nombre real concret α és una arrel del polinomi $p(x)$, llavors el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$. Dit d'una altra manera, el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la manera següent:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$, el qual pot ser conegut en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Demostrarem l'anterior asseveració.

Si dividim $p(x)$ entre $x-\alpha$, obtindrem

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Com el polinomi divisor, $x-\alpha$, és de grau 1, i el polinomi residu ha de ser d'inferior grau, deduïm que el residu anterior és un nombre real β. Escriguem $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

El polinomi de l'esquerra, $p(x)$,és idèntic al de la dreta, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Per aqueixa raó, en avaluar-los en un cert nombre real obtindrem el mateix valor. Procedim a particularitzar-los per a $x=\alpha$. Al ser α arrel de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Açò ens porta a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

i, així, el residu és 0, i

És natural que ens preguntem si és cert el recíproc del resultat anterior. La resposta és afirmativa:

Si un polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

per a un cert polinomi $c(x)$ i un cert nombre real α, llavors el nombre α és una arrel del polinomi $p(x)$, açò és, $p(\alpha)=0$.

La seua demostració és senzilla. Basta que avaluem p en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Si fonem aquests dos últims resultats en un només ens trobem davant del denominat *teorema del factor*:

Teorema del factor. Un número real concret α és arrel d'un polinomi $p(x)$ si i només si el polinomi $x-\alpha$ divideix a $p(x)$, és a dir, si i només si el polinomi $p(x)$ admet una descomposició factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Exemple:

Tornem amb el polinomi $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabem que el nombre 2 és una arrel de $s(x)$. Ratifiquem que $x-2$ divideix a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & \;x-2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+6x+4 \\ \cline{1-2} & 6x^2 & -8x & -8 & \\ & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3} & & 4x & -8 & \\ & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

  Podem descompondre $s(x)$ de la manera següent:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vam veure que una altra arrel de $s(x)$ és el nombre -1. Si observem la precedent factorització de $s(x)$, és evident que aquest nombre -1 no és arrel del factor $x-2$,per la qual cosa necessàriament ha de ser-lo de l'altre factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

  En haver constatat que -1és arrel del polinomi $c(x)$, deduïm que $x-(-1)=x+1$ens va a ajudar a descompondre $c(x)$:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +6x & +4 & \;x+1 \\ \cline{4-4} -2x^2 & -2x & & 2x+4 \\ \cline{1-2} & 4x & +4 & \\ & -4x & -4 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

  Per tant:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunim allò que s'ha fet als apartats precedents d'aquest exemple:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

  S'ha descompost $s(x)$ com a producte de tres polinomis irreductibles de grau 1. A la vista d'ells coneixem totes les arrels de $s(x)$, els nombres 2, -1 i -2.

Els resultats teòrics que hem establit ens condueixen a aquest altre:

Tot polinomi de grau n té com a màxim n arrels reals, alguna de les quals pot aparèixer repetida entre aqueixos no més de n nombres reals.

Hi ha polinomis que no admeten arrels, és a dir, que no s'anul·len mai:

Exemples:

- El polinomi $t(x)=x^2+1$ no té arrels ja que en avaluar-ho en qualsevol número real α sempre ens dóna un valor positiu i, per tant, diferent de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1 > 0$$

A més, aquest polinomi de grau dos, $t(x)=x^2+1$, és un polinomi irreductible perquè, en no tindre arrels, no podem expressar-lo com a producte de polinomis de menor grau.

- Un altre polinomi sense arrels és

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

No obstant això, $u(x)=x^4+2x^2+1$ és un polinomi reductible ja que, òbviament, pot ser expressat com a producte de dos polinomis d'inferior grau.

Encara que no siga possible demostrar-lo, per la seua dificultat, sí es pot anunciar que tot polinomi de grau imparell posseeix, almenys, una arrel real.

Activitats proposades

32. Construeix un polinomi de grau 3 tal que posseïsca tres arrels distintes.

33. Determina un polinomi de grau 3 tal que tinga, almenys, una arrel repetida.

34. Construeix un polinomi de grau 3 de manera que tinga una única arrel.

35. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeta saber quan un polinomi qualsevol

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admet al nombre 0 com a arrel.

36. Demostra una regla que assenyale quan un polinomi qualsevol

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admet al nombre 0 com a arrel.

37. Demostra una norma que assenyale quan un polinomi qualsevol

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admet al nombre 1 com a arrel.

38. Obtín totes les arrels de cada un dels polinomis següents:

- $x+6$
- $-x+4$
- $2x-7$
- $-4x-5$
- $-3x$
- x^2-5x
- $4x^2-x-3$
- x^3-4x
- x^3+4x

4.3. Regla de Ruffini

A l'apartat anterior es va provar l'equivalència entre que un nombre real α siga arrel d'un polinomi $p(x)$ i el fet de que el polinomi mònic de grau un x-α dividisca a $p(x)$, açò és, que existisca un altre polinomi $p(x)$ tal que siga possible una factorització de $p(x)$ del tipus:

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$$

A causa de la importància que té la divisió de polinomis quan el polinomi divisor és de la forma x-α, és convenient agilitzar tals divisions.

Exemple:

- Considerem el polinomi $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Anem a dividir-lo entre $x + 2$. Si el residu és 0 el nombre -2 serà una arrel de $p(x)$; al cas contrari, si no és 0 el residu, llavors -2 no serà arrel de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \quad x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2 - 10x + 21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}$$

Ja que el residu no és zero, -2 no és una arrel de $p(x)$.

Vegem com han sorgit tant el polinomi quocient com el residu. El que el grau del dividend siga tres i que el divisor siga de grau u imposa que el quocient tinga grau dos i que el residu siga un nombre real. El quocient consta dels monomis $3x^2$, $-10x$ i 21, els quals coincideixen amb els monomis de major grau de cada un dels dividends després de disminuir els seus graus en una unitat: $3x^2$ procedix de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividend inicial), $-10x$ ve de $-10x^2+x+3$ i, finalment, 21 de $21x+3$. Aquest fet, coincidència en el coeficient i disminució del grau en una unitat, es deu al fet que el divisor, $x+2$, és mònic i de grau u.

A continuació, tindrem en compte únicament els coeficients del dividend, per orde de grau, 3, –4, 1 i 3; quant al divisor, com és mònic i de grau u, basta considerar el seu terme independent, +2, però com el resultat de multiplicar els monomis que van conformant el quocient pel divisor hem de restar-se'l a cada un dels dividends, atenent a aquest canvi de signe, en lloc del terme independent, +2, operarem amb el seu oposat, –2, nombre que, al mateix temps, és l'arrel del divisor $x+2$ i sobre el qual pesa la pregunta de si és o no arrel de $p(x)$.

- Primer pas de la divisió:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \quad x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2 \\
 & -10x^2 & +x & +3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & \multicolumn{1}{|l}{\underline{\quad}}
\end{array}$$

Apareix en el quocient el monomi $3x^2$ (coeficient 3), el qual provoca la "desaparició" de $3x^3$ al dividend i l'aparició del monomi $-6x^2$ (coeficient $-6=(-2)\cdot3$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $-10x^2$ (coeficient $-10=(-4)+(-6)$) i, al quocient, $-10x$.

- Segon pas. El dividend passa a ser $-10x^2 + x + 3$.

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+x+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrl} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \underline{|\quad} \end{array}$$

La irrupció al quocient del monomi -10x (coeficient -10) provoca la "desaparició" de -10x² al dividend i l'aparició del monomi 20x (coeficient 20=(-2)·(-10)). Després d'operar (sumar) ens trobem amb 21x (coeficient 21=1+20) i, al quocient, 21.

- Tercer pas. El dividend passa a ser $21x + 3$.

$$\begin{array}{ll} 3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ x+2\quad} \\ \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+x+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad -39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrl} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \underline{|-39} \end{array}$$

Tenim al quocient el terme independent 21. Aquest provoca l'eliminació de 21x al dividend i l'aparició del terme -42=(-2)·21. Després d'operar (sumar) ens trobem amb el residu -39=3-42.

En cada un dels passos figura, a la part dreta, el mateix que s'ha realitzat a la divisió convencional, però amb l'avantatge que tot és més àgil pel fet que només s'empren nombres reals: els coeficients dels distints polinomis intervinents.

Estem davant de l'anomenada **regla de Ruffini**, un algoritme que ens proporciona tant el quocient com el residu que resulten de dividir un polinomi qualsevol entre un altre de la forma x-α.

Exemple:

- Dividim el polinomi $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrrl} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & \underline{|-8} \end{array}$$

El quocient és $-x^3-x^2-3x-4$ y el resto -8. Com el residu no és 0 deduïm que el nombre 3 no és arrel de $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4$. La relació entre dividend, divisor, quocient i residu és, com sempre:

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4 = (x-3)\cdot(-x^3 - x^2 - 3x - 4) + (-8)$$

Si avaluem $p(x)$ en $x = 3$ no pot donar zero, però quin valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalment hem obtingut el residu anterior. Aquest fet ve arreplegat en el denominat teorema del residu.

Teorema del residu. El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ en particularitzar-lo en $x=\alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Activitats proposades

39. Usa la regla de Ruffini per a realitzar les següents divisions de polinomis:

- $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$
- x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$
- $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$
- x^3-8x+2 entre $x-3$

40. Empra la regla de Ruffini per a dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis esmentats:

- $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5
- $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
- $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$
- $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

41. Utilitza la regla de Ruffini per a conèixer el valor del polinomi $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

42. Estudia si és possible usar la regla de Ruffini, d'alguna forma, per a dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Per a facilitar la comprensió dels conceptes i resultats d'aquest tema la majoria dels nombres que han aparegut fins ara, coeficients, arrels, etc., han sigut nombres enters. Per descomptat que podem trobar-nos amb polinomis amb coeficients racionals, o irracionals, o amb polinomis amb arrels donades per una fracció o un nombre irracional. També hi ha polinomis que no tenen arrels.

Exemples:

- Comprovem, mitjançant la regla de Ruffini, que $\alpha=\frac{1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Per a conèixer les arrels del polinomi x^2-2 hem d'estudiar si hi ha algun nombre real α tal que l'anul·le, és a dir, per al que es tinga

$$\alpha^2 - 2 = 0$$
$$\alpha^2 = 2$$
$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

Així, el polinomi de grau dos $x^2 - 2$ té dues arrels distintes, les quals són nombres irracionals.

- Ja sabem que hi ha polinomis que no tenen arrels, com per exemple $x^2 + 4$.

Apreciem que la regla de Ruffini ens informa sobre si un nombre concret és o no arrel d'un polinomi. Naturalment, quan estem davant d'un polinomi, i ens interessa conèixer les seues arrels, no és possible efectuar una prova amb cada nombre real per a determinar quines són arrel del polinomi. Al pròxim apartat destacarem certs "nombres candidats" a ser arrel d'un polinomi.

4.4. Càlcul de les arrels d'un polinomi

A l'hora de buscar les **arrels enteres d'un polinomi** disposem del resultat següent:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seues **arrels enteres**, si les tinguera, es troben necessàriament entre els divisors enters del seu terme independent a_0.

Procedim a la seua demostració. Suposem que un cert nombre enter α és una arrel d'aqueix polinomi. Tal nombre ha d'anul·lar-ho:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha\cdot(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

A l'última igualtat, el nombre del costat esquerre és enter, perquè està expressat com una suma de productes de nombres enters. Per això, el nombre del costat dret, $\frac{-a_0}{\alpha}$, també és enter. En ser també enters tant $-a_0$ com α, aconseguim que α és un divisor de a_0.

Exemples:

- Determinem, d'acord amb l'anterior resultat, què nombres enters són candidats a ser arrels del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:

  Tals nombres enters candidats han de ser divisors de -6, el terme independent del polinomi. Per això, els únics nombres enters que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

  Pot comprovar-se que els nombres enters 2 i -3 són arrels; els altres no ho són.
- Les úniques possibles arrels senceres del polinomi $2x^3+x^2+12x+6$ també són:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

  En aquest cas cap d'aqueixos nombres és una arrel del polinomi.

Activitats proposades

43. Para cada un dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, què nombres enters són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són:

- $x^3 - x^2 + 2x - 2$
- $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
- $2x^3 + x^2 - 18x - 9$
- $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Un poc més general podem afirmar sobre classes de nombres i arrels d'un polinomi:

Donat un polinomi qualsevol $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seues **arrels racionals**, si les tinguera, necessàriament tenen per numerador algun divisor del terme independent, a_0, i per denominador algun divisor del coeficient del terme de major grau, a_n.

Exemples:

- Tornant a un dels polinomis de l'exemple anterior, $2x^3+3x^2-11x-6$, els nombres racionals candidats a ser arrels seues tenen per numerador a un divisor de -6 i per denominador a un divisor de 2. Per tant, els únics nombres racionals que poden ser arrel d'aqueix polinomi són:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  A més de 2 i -3, també és arrel $\frac{-1}{2}$; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels racionals del polinomi $2x^4+2x^3-x^2-3x-3$ són:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En aquest cas cap d'aqueixos números és arrel del polinomi.

Activitats proposades

44. Completa l'exemple precedent comprovant que, en efecte, $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3+3x^2-11x-6$.

45. Para cada un dels següents polinomis indica quins nombres racionals són candidats a ser arrels seues i, després, determina quins ho són:

- $3x^2 + 4x + 1$
- $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Al tema pròxim, dedicat a les equacions, serem capaços d'obtindre les arrels de tot polinomi de grau dos, si les tinguera.

4.5. Factorització de polinomis i fraccions algebraiques

La factorització de polinomis pot ser utilitzada per a simplificar algunes expressions en què intervenen fraccions algebraiques. Vegem-ho a través d'un parell d'exemples:

Exemple:

- Una fracció algebraica com:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pot ser simplificada gràcies a què el numerador i el denominador admeten factoritzacions en què algun polinomi està present en ambdós.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Com ja hem apuntat altres vegades, les expressions final i inicial no són idèntiques però sí que són equivalents en tots aquells valors per als que ambdues tenen sentit, és a dir, per a aquells en què no s'anul·la el denominador.

Exemple:

- En una suma de fraccions polinòmiques com aquesta: $\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$

podem aconseguir un comú denominador als quocients a partir de la descomposició de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convé destacar que en el resultat final s'ha optat per deixar el denominador factoritzat. D'aqueixa forma, entre altres qüestions, s'aprecia ràpidament per a què valors de la indeterminada aqueixa fracció algebraica no admet ser avaluada.

Activitats proposades

46. Simplifica, si és possible, les expressions següents:

- $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$
- $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

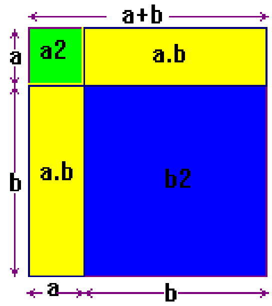
47. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

- $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$
- $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productes notables de polinomis

En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen sovint. Podem exposar-los de molt diverses formes. Tal com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en un algun cas concret, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret açò no farà ni més menys que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, després d'efectuar els oportuns càlculs:



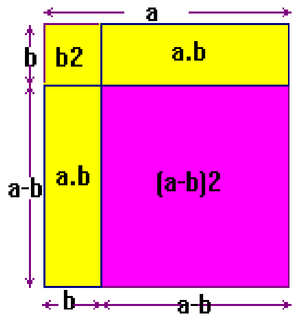
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Observa els quadrats de la il·lustració i comprova com es verifica.

El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer menys el doble producte del primer pel segon més el quadrat del segon.



Observa els quadrats i rectangles de la il·lustració.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podem observar que, en cada un dels desenrotllaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cada un dels monomis.

Exemples:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Activitats proposades

48. Realitza els càlculs:

- $(1+4a)^2$
- $(-x+5)^2$
- $(-2x-3)^2$
- $(x^2-1)^3$
- $(5x+3)^3$

49. Obtín les fórmules dels quadrats dels trinomis següents:

- $(a+b+c)^2$
- $(a+b-c)^2$

50. Desenrotlla les potències següents:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

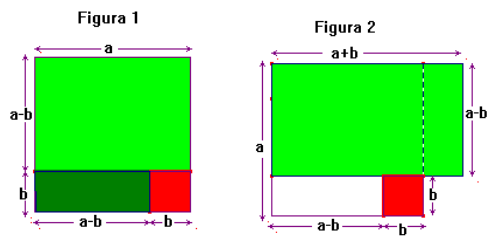
51. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté després d'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$



Observa la il·lustració.

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Exemples:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Activitats proposades

52. Efectua aquests productes:

- $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$
- $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$
- $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Convé donar-se compte que les seues fórmules, llegides al revés, constitueixen una factorització d'un polinomi.

Exemples:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Activitats proposades

53. D'acord amb allò que s'ha exposat, factoritza els polinomis següents:

- x^2-4x+4
- $3x^2+18x+27$
- $3x^5-9x^3$

54. Calcula els productes següents:

a) $(3x+1)\cdot(3x-1)$ b) $(2a-3b)\cdot(2a+3b)$

c) $(x^2-5)\cdot(x^2+5)$ d) $(3a^2+5)\cdot(3a^2-5)$

55. Expressa com a suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

56. Simplifica les següents fraccions algebraiques

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

CURIOSITATS. REVISTA

Fes màgia

Pensa un nombre

* Multiplica'l per 2

* Suma 4

* Multiplica per 5

* Divideix per 10

* Resta el nombre

* Màgia, màgia, màgia…

* ¡El resultado es **2**!

Passatemps

A B A

A B A

<u>A B A</u>

B C B

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu que va realitzar les seues investigacions en les primeres dècades del segle XX. Va demostrar dos teoremes essencials per a la teoria de la relativitat que van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

Va treballar en estructures algebraiques i en l'actualitat el qualificatiu ***noetherian*** s'utilitza per a designar molts conceptes en àlgebra: anells *noetherians,* grups *noetherians,* mòduls *noetherians,* espais *topològics noetherians,* etc.

Quan va intentar donar classes en la Universitat de Göttingen el reglament indicava explícitament que els candidats havien de ser hòmens per la qual cosa Noether no va poder accedir a la docència universitària. Es conta, com a anècdota, que Hilbert va dir en un Consell de la dita Universitat:

> *"no veig per què el sexe de la candidata és un argument contra el seu nomenament com a docent. Després de tot no som un establiment*
>
> *de banys"*

D'ella va dir Albert Einstein :

> *"Al regne d'Àlgebra en què els millors matemàtics han treballa durant segles, ella va descobrir mètodes que s'ha demostrat qu tenen una importància enorme... La matemàtica pura és, a la seu manera, la poesia de les idees lògiques. ... En aquest esforç cap a l bellesa lògica es descobreixen fórmules espirituals per a aconsegui*

RESUM

Noció	*Descripció*	*Exemples*
Expressió algebraica	Expressió matemàtica que es construeix amb nombres reals i lletres sotmesos a les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica apareix un nombre real: el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades	Si, a l'expressió precedent, fem *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenim $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres reals i indeterminades	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grau 6 i coeficient –5 $7\cdot x^2$ de grau 2 i coeficient 7
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
Divisió de dos polinomis	En dividir el polinomi *p*(*x*) entre *q*(*x*) s'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient, *c*(*x*), i residu, *r*(*x*), tals que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-lo com a producte d'altres polinomis de menor grau	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Arrels i factorització	Si α és una arrel del polinomi $p(x)$ és equivalent que el polinomi $p(x)$ admeta una descomposició factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ per a un cert polinomi $c(x)$	-2 és una arrel de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seues arrels	

EXERCICIS I PROBLEMES

1. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual endevinarem el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.

i. Dis-li a un company que escriga en un paper un nombre natural i que no el mostre
ii. Que el multiplique per 3
iii. Que al resultat anterior li sumix 18
iv. Que multiplique per 2 el que obté
v. Que dividisca entre 6 l'última quantitat
vi. Que al resultat precedent li reste el nombre que va escriure
vii. Independentment del nombre desconegut original, quin nombre ha sorgit?

2. En aquest altre exercici endevinarem dos nombres que ha pensat un company. Construeix una expressió algebraica que arreplegue tots els passos i, finalment, descobreix el truc.

i. Sol·licita a un company que escriga en un paper, i no mostre, dos nombres naturals: un d'una xifra (entre 1 i 9) i un altre de dues xifres (entre 10 i 99)
ii. Que multiplique per 4 el nombre triat d'una xifra
iii. Que multiplique per 5 el que obté
iv. Que multiplique el resultat precedent per 5
v. Que li sumix a l'anterior el nombre de dues xifres que va triar
vi. Si el teu company et diu el resultat d'aquestes operacions, tu descobreixes els seus dos nombres. Si et diu, per exemple, 467, llavors saps que el nombre d'una xifra és 4 i el de dues xifres és 67, per què?

3. Estudia si hi ha nombres reals en què les següents expressions no poden ser avaluades:

- $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$
- $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona té estalviats 2500
5. euros i decideix dipositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interès anual del 2 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de què disposarà?
6. Generalitzem l'exercici anterior: Si ingressem X euros en un dipòsit bancari el tipus d'interès del qual és de l'$\boldsymbol{i}$ % anual, quina serà la quantitat que recuperarem al cap d'anys?
7. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(5)$=-2.

8. Considerem els polinomis $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ i $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realitza les operacions següents:

a) $p+q+r$ c) $p \cdot r$

b) $p - q$ d) $p \cdot r - q$

9. Calcula els productes:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0{,}3x - 0{,}2y + 0{,}1z) \cdot (0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}3z)$ c) $(x - 1)(x - a)(x - b)$

10. Efectua les divisions de polinomis:

- $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$
- $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

11. Calcula els quocients:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

12. Realitza les operacions entre les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-6x+9}$ c) $\frac{2x-3}{x^2-3x}\cdot\frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{3x}{x^2-6x+9}$ d) $\frac{2x-3}{x^2-3x}:\frac{3x}{x^2-6x+9}$

13. Construeix un polinomi de grau 2 tal que el nombre -5 siga arrel seua.

14. Determina un polinomi de grau 3 tal que les seues arrels siguen 6, -3 i 0.

15. Determina un polinomi de grau 4 tal que les seues arrels siguen 6, -3, 2 i 0.

16. Construeix un polinomi de grau 4 tal que tinga únicament dues arrels reals.

17. Determina un polinomi de grau 5 tal que les seues arrels siguen 6, -3, 2, 4 i 5.

18. Troba un polinomi *q(x)* tal que en dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre *q(x)* s'obtinga com a polinomi residu $r(x) = x^2 + x + 1$.

19. Troba les arrels enteres dels polinomis següents:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$ d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

20. Obtín les arrels racionals dels polinomis de l'exercici anterior.

21. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

22. Calcula les potències:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

23. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenrotllament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seua procedència.

$x^2 - 36$

$5x^2 + 1$

$5x^2 - 11$

$x^2 - 3y^2$

24. Descompon en factors:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

25. Amb aquest exercici es pretén mostrar la conveniència a l'hora de no operar una expressió polinòmica. que tenim factoritzada totalment o parcialment.

a) Comprova la igualtat $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina totes les arrels del polinomi $x^4 - 5x^2 + 6$.

26. Factoritza numerador i denominador i simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

27. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2 - 1}$

28. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{x^4 - 1}{x^7} : \dfrac{x^2 + 1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1 - x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

29. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

30. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ és:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau tres sol ser un altre polinomi de grau ……….

b) La suma de tres polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….

c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

d) La diferència de dos polinomis de grau quatre sol ser un altre polinomi de grau ……….

4. En dividir el polinomi $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2. b) pot ser de grau 2.

c) ha de ser de grau 1. d) ha de ser de grau menor que 2.

5. Considera el polinomi $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. Quins dels següents nombres enters són *raonables candidats* per a ser una arrel seua?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomi $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Quins dels següents nombres racionals són *raonables candidats* per a ser una de les seues arrels?

a) -3 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

7. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres

a) té tres arrels. b) té, com a màxim, tres arrels. c) té, almenys, tres arrels.

8. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tinga exactament tres arrels, ja siguen diferents o amb alguna múltiple?

9. Justifica la veracitat o falsedat de cada una de les frases següents:

a) La regla de Ruffini serveix per a dividir dos polinomis qualssevol.

b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algoritme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

10. Analitza si pot haver-hi algun polinomi de grau deu que no tinga cap arrel.

Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO
Capítol 4:
Equacions i sistemes lineals

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

Resum

Ja saps resoldre moltes equacions i sistemes d'equacions, i utilitzar-ho per a resoldre gran nombre de problemes d'allò més variat. En aquest capítol repassarem la resolució d'equacions que ja coneixes, de primer grau, de segon… i aprendrem a resoldre algunes noves equacions i a utilitzar allò que s'ha aprés per a resoldre problemes de la vida quotidiana per mitjà de les equacions.

Repassarem també els sistemes d'equacions lineals, com es resolen per diferents mètodes i la seua aplicació per a resoldre problemes que ens rodegen, però utilitzarem aqueixos mètodes per a resoldre alguns sistemes nous que no siguen lineals.

Els matemàtics han tardat prop de tres mil anys a comprendre i resoldre equacions tan senzilles i que tan bé coneixes com $ax + b = 0$. Ja els egipcis resolien problemes que es poden considerar d'equacions encara que no existia la notació algebraica. El matemàtic grec *Diofanto* al segle III va resoldre equacions de primer i segon grau. Al segle XV va haver-hi un desafiament per a premiar a qui resolguera una equació de tercer grau. Al segle XIX es va demostrar que no hi ha una fórmula general que resolga les equacions de cinqué grau.

EQUACIONS

1.1. Concepte d'equació

Una **equació** és una igualtat algebraica que únicament és certa per a alguns valors de les incògnites. Els valors de les incògnites que fan certa la igualtat són les **solucions** de l'equació.

Resoldre una equació és trobar les seues solucions, és a dir, els valors que en substituir-los en l'equació la converteixen en una identitat numèrica.

Comprovar la solució consisteix a substituir-la a l'equació i veure si la igualtat obtinguda és una identitat.

Cal diferenciar una **equació** d'una **identitat** algebraica com a $x(x + 2) = x^2 + 2x$ que és certa per a tot valor de x.

Les equacions poden tindre una única incògnita, o més d'una. Poden ser polinòmiques o d'un altre tipus (exponencial, racional, irracional…). A les equacions polinòmiques els exponents de les incògnites són nombres naturals. Poden ser de primer grau, si l'exponent més alt de la incògnita és u, de segon grau si és dos…

Exemple:

- L'equació $(x + 3)^2 = 4x^3$ és una equació polinòmica de tercer grau amb una incògnita.
- L'equació $7x+\dfrac{1}{x-2}=0$ és una equació racional. No és polinòmica.
- L'equació $7x + sen2x = 0$ no és una equació polinòmica.
- L'equació $4xy + 8x = 0$ és polinòmica de dues variables.

Dues equacions són **equivalents** si tenen la mateixa solució.

Per a resoldre equacions anem substituint-la per una altra equivalent fins a arribar a la solució. Per a obtindre equacions equivalents podem:

1) Sumar o restar un mateix terme a ambdós membres de l'equació.
2) Multiplicar ambdós membres per un mateix nombre.
3) Dividir ambdós membres per un mateix nombre cuidant que aqueix valor no siga zero.

Exemple:

- Per a resoldre 5x + 3 = 9 l'anem substituint per altres equivalents:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow$ (restem 3 a ambdós membres de l'equació)

$5x + 3 – 3 = 9 – 3 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow$ (dividim ambdós membres per 5 que és diferent de zero)

$5x/5 = 6/5 \Rightarrow x = 6/5$. Ja coneixem la solució, $x = 6/5$.

Comprovem si x = 6/5 és la solució substituint a l'equació:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow 5(6/5) + 3 = 9 \Rightarrow 6 + 3 = 9$. En efecte, 6/5 és solució.

El procediment per a resoldre equacions de primer grau amb una incògnita, recorda que és:

1) Eliminar els denominadors
2) Eliminar els parèntesis
3) Agrupar els termes amb la incògnita en un membre i els termes independents a l'altre.
4) Efectuar operacions
5) Aïllar la incògnita.

Exemple:

- Resoldre: $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$

1) Eliminar els denominadors

$9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5} \Rightarrow 5\cdot 9(2-3x)+4(x-3)=5\cdot 4x-(7-3x) \Rightarrow$

2) Eliminar els parèntesis

$90 - 135x + 4x - 12 = 20x - 7 + 3x \Rightarrow$

3) Agrupar els termes amb la incògnita en un membre i els termes independents en l'altre.

$135x + 4x - 20x - 3x = -7 - 90 + 12 \Rightarrow$

4) Efectuar operacions

$154x = -85 \Rightarrow$

5) Aïllar la incògnita.

$x = -85/-154 = 85/154$

Activitats proposades

1. Escriu tres equacions equivalents a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.

2. Resol les equacions següents:

a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$

3. Resol les equacions següents:

a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$

4. Comprova que la solució de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ és $x = 6$.

5. Escriu tres equacions de primer grau que tinguen com a solució 3, altres tres que tinguen infinites solucions i tres que no tinguen solució.

6. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que el seu perímetre és 30 cm i que la seua base és doble que la seua altura.

7. Resol les equacions següents:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$

c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$ d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$

e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

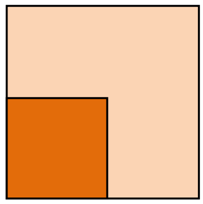
1.2. Equacions de 2n grau

Hi ha equacions de segon grau que ja saps resoldre. En aquest capítol aprofundirem i aprendrem a resoldre aquest tipus d'equacions. Per exemple, el següent problema ja saps resoldre'l:

Activitats resoltes

- S'augmenta el costat d'un taulell quadrat en 3 cm i la seua àrea ha quedat multiplicada per 4, Quin costat tenia el taulell?

Plantegem l'equació:



$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Aquesta equació si saps resoldre-la! $x + 3 = 2x$, per tant el costat és de 3 cm.

Hi ha una altra solució, $x = -1$, que no té sentit com a costat d'un quadrat.

Repassarem de forma ordenada l'estudi d'aquestes equacions.

Una **equació de segon grau** és una equació polinòmica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple:

- Són equacions de 2n grau per exemple

$$5x^2 - 8x + 3= 0; \qquad -3x^2 + 9x + -6 = 0; \qquad x^2 - (3/4)x - 2,8 = 0$$

Exemple:

- Els coeficients de les equacions de 2n grau són nombres reals, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0 \ ; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0 \ ; \quad -5,8x^2 + 1,7x + -0,02 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0$$

Activitats proposades

8. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3,2x^2 - 1,25 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

9. A les següents equacions de segon grau, indica qui són a, b i c.

a) $2 - 7x^2 + 11x = 0$ b) $-2,3x^2 + 6,7x = 0$

c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9,1x^2 - 2,3x + 1,6= 0$

1.3. Resolució d'equacions de 2n grau completes

S'anomena **equació de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para *a*, *b* i *c*.

Per a resoldre les equacions de segon grau completes s'utilitza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de l'equació.

Anomenem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- Resol l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primer hem de saber qui són *a*, *b* i *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Substituint aquests valors a la fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Per tant, les dues solucions són:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad ; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecte, $3^2 - 5\cdot3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, i $2^2 - 5\cdot2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, per tant 3 i 2 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

10. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

11. Resol les equacions següents:

a) $5x - 2\cdot\frac{x-1}{5} = x^2 - \frac{10x+8}{5}$ b) $4\cdot\frac{x-3}{5} - \frac{7-4x}{x} = 8$ c) $x(x-2) + 3(x^2 - 7) + 11 = -11$

d) $6(x^2 - 7) + 2(x^2 - 9) + 3 = 2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x} - \frac{1}{3} = \frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x} - \frac{2}{5} = \frac{4x-2}{15}$

1.4. Nombre de solucions d'una equació de 2n grau completa

Abans hem definit el que era el **discriminant**, te'n recordes?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Per a saber quantes solucions té una equació de 2n grau, ens anem a fixar al signe del discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'equació té dues solucions reals i distintes.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'equació té dues solucions reals iguals (una solució doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució.

Exemple:

- L'equació $x^2 - 4x - 12 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot(-12) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Per tant, l'equació donada té 2 solucions reals i distintes, 6 i –2. (Comprovació*:* $6^2 - 4\cdot6 - 12 = 36 - 24 - 12 = 0$ i $(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$).

- L'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 16 - 16 = 0$$

Per tant, l'equació té dues solucions reals iguals. Es pot escriure com:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$, que té la solució doble $x = 2$.

- L'equació $x^2 + 5x + 9 = 0$ té com a discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4\cdot1\cdot(9) = 25 - 36 = -11 < 0$$

Per tant, l'equació no té solució real. Cap nombre real verifica l'equació.

Activitats proposades

12. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 8 = 0$

c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ **d)** $3x^2 - 8x + 6 = 0$

1.5. Resolució d'equacions de 2n grau incompletes

Anomenem **equació de 2º grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient *b* val 0 (falta *b*), o el coeficient *c* val 0 (falta *c*).

Observa: Si el coeficient *a* val zero no és una equació de segon grau.

Exemple:

- L'equació de 2n grau $2x^2-18 =0$ és incompleta perquè el coeficient b = 0, és a dir, falta b.
- L'equació de 2n grau $3x^2 - 15x = 0$ és incompleta perquè no té *c*, és a dir, *c* = 0.

Una equació de segon grau incompleta també es pot resoldre utilitzant la fórmula de les completes però és un procés més lent i és més fàcil equivocar-se.

Si el coeficient *b* = 0: **Aïllem** la incògnita normalment, com fèiem a les equacions de primer grau:

$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $\frac{-c}{a} > 0$ té dues solucions distintes, si $\frac{-c}{a} < 0$ no hi ha solució.

Resum

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incógnita:

, si $c \leq 0$.

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, traiem factor comú:

Si el coeficient *c* = 0: Traiem factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Exemple:

- A l'equació $2x^2 - 50 = 0$ falta la b. Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, fem l'arrel quadrada als 2 membres de l'equació:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 5 i –5. En efecte, $2\cdot 5^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$, i $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot 25 - 50 = 0$

Exemple:

- A l'equació $4x^2 - 24x = 0$ falta la c. Per a resoldre-la, traiem factor comú:

$$4x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 4x(x - 6) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 6$.

En efecte, $4\cdot 0^2 - 24\cdot 0 = 0$, i $4\cdot(6)^2 - 24\cdot 6 = 4\cdot 36 - 24\cdot 6 = 144 - 144 = 0$.

Activitats resoltes

- Resol l'equació de 2n grau $3x^2 - 27 = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2º grau incompleta on falta la b. Per tant, aïllem la incògnita

$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 27/3 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Les solucions són 3 i –3.

- Resol l'equació de 2n grau $x^2 + 8x = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la c.

Per tant, traiem factor comú: $x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$

Obtenim les dues solucions: $x = 0$ i $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$. Les solucions són 0 i –8.

Activitats proposades

13. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

1.6. Suma i producte de les solucions en una equació de segon grau

Si en una equació de segon grau: $x^2 + bx + c = 0$, amb $a = 1$, coneixem les seues solucions: x_1 i x_2 sabem que podem escriure l'equació de forma factoritzada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Fem operacions:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

pel que el coeficient c és igual al producte de les solucions i la suma de les solucions és igual a l'oposat del coeficient b, és a dir, $-b$.

$$\mathbf{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Si l'equació és $ax^2 + bx + c = 0$, dividint per a, ja tenim una de coeficient $a = 1$, i obtenim que:

$$x_1\, x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Aquesta propietat ens permet, de vegades, resoldre mentalment algunes equacions de segon grau.

Activitats resoltes

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Busquem, mentalment dos nombres el producte dels quals siga 6 i la suma dels quals siga 5. En efecte, $2 \cdot 3 = 6$, i $2 + 3 = 5$, per tant les solucions de l'equació són 2 i 3.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producte ha de ser 9. Provem amb 3 com a solució, i en efecte 3 + 3 = 6. Les solucions són l'arrel 3 doble.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - x - 2 = 0$.

Les solucions són –1 i 2, perquè el seu producte és –2 i la seua suma 1.

- Resol mentalment l'equació $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són 1 i –2, perquè el seu producte és –2 i la seua suma –1.

Activitats proposades

14. Resol mentalment les següents equacions de 2º grau:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

15. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen 3 i 7.

16. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seua àrea 15 cm^2. Calcula les seues dimensions.

17. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a?

1.7. Altres equacions

Durant segles els algebristes han buscat fórmules, com la que ja coneixes de l'equació de segon grau, que resolguera les equacions de tercer grau, de quart, de cinqué… sense èxit a partir del cinqué grau. Les fórmules per a resoldre les equacions de tercer i quart grau són complicades. Només sabem resoldre de forma senzilla algunes d'aquestes equacions.

Exemple:

- Resol: $(x - 2) \cdot (x - 6) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) = 0$.

És una equació **polinòmica** de grau cinc, però en estar factoritzada sabem resoldre-la perquè el producte de diversos factors de zero, un d'ells ha de valdre zero. Igualant a zero cada factor tenim que les solucions són 2, 6, –1, 3 i 7.

Exemple:

- L'equació $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ és una equació polinòmica de quart grau, però amb una forma molt especial. S'anomena **equació biquadrada**, perquè podem transformar-la en una equació de segon grau anomenant a x^2 per exemple, z.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solució de l'equació de segon grau és $z = 4$, i l'altra és $z = 1$.

Per tant si $z = x^2 = 4$, aleshores $x = 2$ i $x = -2$.

I si $z = x^2 = 1$, aleshores $x = 1$ i $x = -1$.

La nostra equació de quart grau té quatre solucions: 2, –2, 1 i –1.

Exemple:

Si hi ha incògnites al denominador, l'equació es denomina **racional**, i es resol de forma semblant, llevant denominadors.

- Resol $\frac{3x-8+9x}{2x}=4$

Llevem denominadors: $\frac{3x-8+9x}{2x}=4$ $\Rightarrow$ $3x - 8 + 9x = 8x$ $\Rightarrow$ $3x + 9x - 8x = 8$ $\Rightarrow$ $4x = 8$ $\Rightarrow$ $x = 2$.

Exemple:

Si hi ha incògnites dins d'un radical, l'equació es denomina **irracional**, i es resol aïllant el radical i elevant al quadrat (o a l'índex del radical). Ara és necessari tindre una precaució, en elevar al quadrat, l'equació obtinguda no és equivalent, es poden haver afegit solucions.

- Resol $2+\sqrt{x-3}=x-1$

S'aïlla el radical: $2+\sqrt{x-3}=x-1 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-1-2 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-3$

Elevem al quadrat: $(\sqrt{x-3})^2=(x-3)^2 \Rightarrow x - 3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$.

Resolem l'equació de segon grau que té per solucions 4 i 3, i comprovant a l'equació inicial, ambdues són solucions d'aquesta equació.

Exemple:

Si la incògnita està en un exponent l'equació es denomina **exponencial**. Si podem expressar els dos membres de l'equació com a potències de la mateixa base, s'igualen els exponents.

- Resol: $3^{2x}=\frac{1}{81}$

Expressem l'equació com a potències d'una mateixa base: $3^{2x}=\frac{1}{81} \Rightarrow 3^{2x}=3^{-4}$

Igualem els exponents: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Activitats proposades

18. Resol les equacions següents:

a) $(x - 6) \cdot (x - 3) \cdot (x + 7) \cdot (x - 1) \cdot (x - 9) = 0$ b) $3(x - 4) \cdot (x - 8) \cdot (x + 5) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) = 0$

19. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

20. Resol les equacions racionals següents:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$

21. Resol les equacions irracionals següents:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

22. Resol les equacions exponencials següents:

a) $2^{x+5}+2^{x+4}+2^{x+3}=28$ b) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ c) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$

2. SISTEMES D'EQUACIONS

2.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Una equació amb diverses incògnites és una igualtat que les relaciona.

Per exemple:

$x^2 + y^2 = 36$, és l'equació d'una circumferència de centre l'origen i radi 6.

Un **sistema d'equacions** és, per tant, un conjunt d'equacions amb diverses incògnites.

Per exemple:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

La primera equació és la d'una circumferència de centre l'origen i radi 6, i la segona és l'equació d'una recta que passa per l'origen. Les solucions del sistema són els punts d'intersecció entre la circumferència i la recta.

S'anomena **solució del sistema** a cada un dels conjunts de nombres que verifiquen totes les equacions del sistema.

Dos sistemes són **equivalents** quan tenen les mateixes solucions.

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites està format per equacions de primer grau i es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

on *a, b, a'* i *b'* son nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c'* també són nombres reals anomenats **termes independents**.

La **solució del sistema** és un parell de valors (*x*, *y*) que satisfan les dues equacions del sistema.

Exemple:

Són sistemes d'equacions lineals, per exemple:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 9y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5y + 3 = 4x \\ 8x - 4 = 6y \end{cases}$$

Exemple:

No és un sistema lineal $\begin{cases} 4xy + 6y = 1 \\ 5x - 7xy = 3 \end{cases}$ perquè té termes en *xy*, encara que és un sistema de dues equacions.

Tampoc ho és $\begin{cases} 4x^2 + 6y = 5 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2, encara que és un sistema de dues equacions.

Activitats proposades

23. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2.2. Classificació de sistemes d'equacions lineals

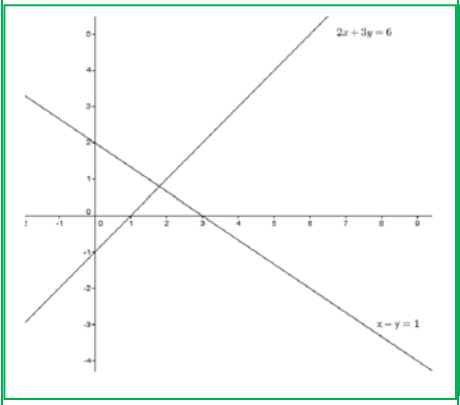
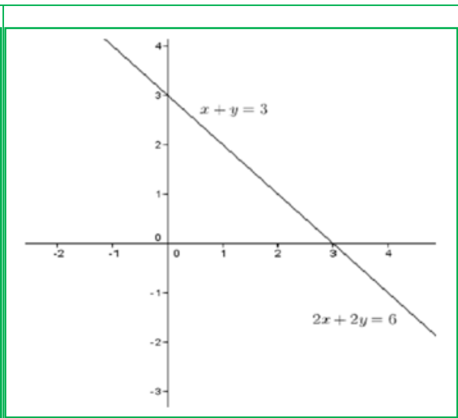
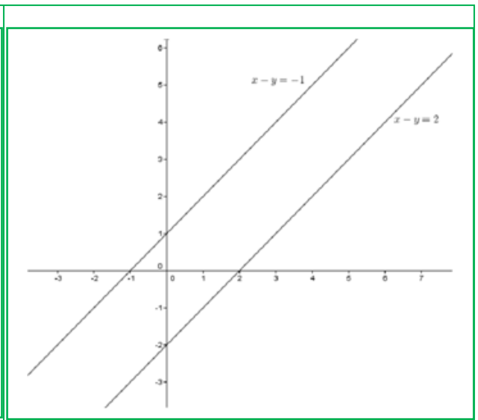
En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada una de les equacions representa una recta al pla.

Aquestes rectes poden estar posicionades entre si de tres maneres distintes, la qual cosa ens ajudarà a classificar el nostre sistema en:

1) **Compatible determinat**: el sistema té una única solució, per la qual cosa les rectes són **SECANTS**, es tallen en un únic punt.

2) **Compatible indeterminat**: el sistema té infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **COINCIDENTS.**

3) **Incompatible**: el sistema no té solució, per la qual cosa les rectes són **PARAL·LELES.**

		
Compatible determinat	**Compatible indeterminat**	**Incompatible**
Rectes secants	**Rectes coincidents**	**Rectes paral·leles**

Activitats resoltes

- Afig una equació a $x - 2y = 2$ perquè el sistema resultant siga:

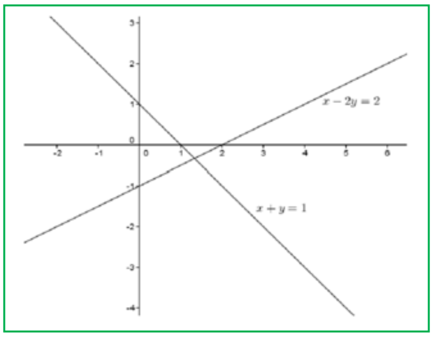
  a) Compatible determinat

  b) Incompatible

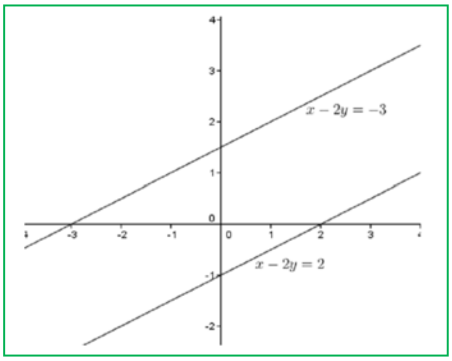
  c) Compatible indeterminat

Solució:

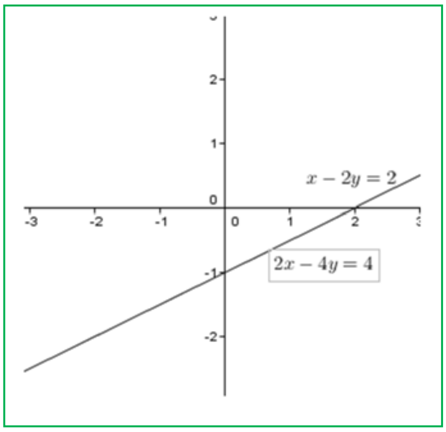
a) Per a que el sistema siga compatible determinat, afegirem una equació que no tinga els mateixos coeficients que la que ens donen. Per exemple, $x + y = 1$.



b) Per a que siga incompatible, els coeficients de les incògnites han de ser els mateixos (o proporcionals) però tindre diferent terme independent. Per exemple $x – 2y = –3$, (o $2x – 4y = 0$).



c) Per a que siga compatible indeterminat, posarem una equació proporcional a la que tenim. Per exemple $2x – 4y = 4$.



Una forma de resoldre un sistema lineal de dues equacions és el de **resolució gràfica**, representant, com hem vist a l'exemple anterior, les dues rectes definides per les equacions del sistema als mateixos eixos coordenats, classificant el sistema i si és compatible i determinat, determinant el punt d'intersecció.

Activitats proposades

24. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

25. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

2.3. Resolució de sistemes lineals pel mètode de substitució

El **mètode de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda en l'altra equació.

Així, obtenim una equació de primer grau en la que podem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ pel mètode de substitució:

Aïllem *x* de la segona equació:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

i la substituïm a la primera:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$x=3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot1=1$.

Solució:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Activitats proposades

26. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

2.4. Resolució de sistemes lineals pel mètode d'igualació

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts.

Així, obtenim una equació de primer grau en la que podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ pel mètode d'igualació:

Aïllem la mateixa incògnita a les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3-2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

27. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

2.5. Resolució de sistemes lineals pel mètode de reducció

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per a això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de *x* o *y* siguen iguals però de signe contrari.

Exemple:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ pel mètode de reducció:

Multipliquem la segona equació per -2 per a que els coeficients de la *x* siguen iguals però de signe contrari i sumem les equacions obtingudes:

$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumem}} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 0 - 7y = -7 \end{cases}$ $\Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

28. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

2.6. Sistemes d'equacions no lineals

Si alguna de les equacions del sistema **no** és lineal, el sistema ja no és lineal.

Es resol per qualsevol dels mètodes anteriors, per exemple per substitució, aïllant, si és possible una incògnita d'exponent u.

Exemple:

Per a resoldre $\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = -15 \end{cases}$ aïllem *"y"* de la primera equació: $y = 14 - x$, i la substituïm a la segona: $xy = x(14 - x) = -15 \Rightarrow 14x - x^2 = -15 \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0$.

Resolem l'equació de segon grau, i les solucions són: 15 i –1.

Com $y = 14 - x$, si $x = 15$ aleshores $y = -1$, i si $x = -1$ tenim que $y = 15$.

Les solucions són els punts (15, –1) i (–1, 15), punts d'intersecció entre la hipèrbola $xy = 15$, i la recta $x+y = 14$.

Activitats proposades

29. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ajuda*: Utilitza el mètode de reducció:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{aligned} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{aligned}\right\}$

30. La trajectòria d'un projectil és una paràbola d'equació: $y = -x^2 + 5x$, i la trajectòria d'un avió és un recte d'equació: $y = 3x$. En quins punts coincideixen ambdues trajectòries? Representa gràficament la recta i la paràbola per a comprovar el resultat.

31. Resol els següents sistemes i comprova gràficament les solucions:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 81 \\ xy = 4 \end{aligned}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{aligned}\right\}$

2.7. Sistemes d'equacions lineals de més de dues incògnites

La millor forma de resoldre sistemes lineals de més de dues incògnites és anar substituint el sistema per un altre equivalent de manera que cada vegada s'aconseguisca que siguen zeros els coeficients de més incògnites.

Exemple:

Per a resoldre el sistema: $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y+z=4 \\ x+4y-2z=3 \end{cases}$, deixem la primera equació sense modificar. Volem que la segona equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", per a això la multipliquem per 2 i li restem la primera. Perquè la tercera equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", la multipliquem per 2 i li restem la primera:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+2y+z=4 \\ x+4y-2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+7y-z=6 \end{cases}$$

Ara podem resoldre el sistema de dues equacions i dues incògnites format per les dues últimes equacions, o continuar amb el nostre procediment. Per a aconseguir que a la tercera equació el coeficient de la "*y*" siga un zero multipliquem la tercera equació per 3 i la segona per 7 i les restem:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+7y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 0+3y+5z=8 \\ 0+0+32z=32 \end{cases}$$

i ara ja podem aïllar cada una de les incògnites de forma ordenada:

$$\begin{cases} z=1 \\ 3y+5(1)=8 \\ 2x+y-3(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Activitats proposades

32. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 2x+y-3z=-2 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+2z=6 \\ x+2y+2z=4 \\ 3x-2y-3z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-2z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ x-2y-3z=-6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Resolució de problemes mitjançant equacions de 2n grau

Per a resoldre problemes per mitjà d'equacions de 2n grau, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat

2.- Identificar la incògnita

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic

4.- Plantejar l'equació i resoldre-la

5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *Quin és el nombre natural el quíntuple augmentat del qual en 6 unitats és igual al seu quadrat?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem la incògnita, que en aquest cas, és el nombre que estem buscant.

2.- Nombre buscat = x

3.-Traduïm ara el problema al llenguatge algebraic:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolem l'equació:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solució: Com l'enunciat diu "nombre natural" el nombre buscat és el 6.

5.- *Comprovació*: En efecte 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Activitats proposades

33. Quin número multiplicat per 4 és 5 unitats menor que el seu quadrat?

34. En una classe decideixen que tots enviaran una carta a la resta de companys. Un diu: Escriurem 380 cartes! Calcula el nombre d'alumnes que hi ha a la classe.

35. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats siga 365.

36. Una fotografia rectangular mesura 14 cm de base i 10 cm d'altura. Al voltant de la foto hi ha un marge de la mateixa amplària per a la base que per a l'altura. Troba l'ample del marge, sabent que l'àrea total de la foto i el marge és de 252 cm^2.

37. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu duple és 85. Quin és el nombre?

38. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base medeix 4 cm, calcula els costats del triangle i la seua àrea.

39. Un full de paper quadrat es doblega per la meitat. El rectangle resultant té una àrea de 8 cm^2. Quin és perímetre del dit rectangle?

40. Un pare diu: "El producte de l'edat del meu fill fa 5 anys pel de la seua edat fa 3 anys és la meua edat actual, que són 39 anys". Calcula l'edat del fill.

41. Troba les dimensions d'un rectangle l'àrea del qual és 21 m^2, sabent que els seus costats es diferencien en 4 metres.

42. En un triangle rectangle el catet major mesura 3 cm menys que la hipotenusa i 4 cm més que l'altre catet. Quant mesuren els costats del triangle?

43. Troba dos nombres parells consecutius el producte dels quals siga 224.

44. Troba tres nombres imparells consecutius tals que si al quadrat del major se li resten els quadrats dels altres dos s'obté com resultat 15.

3.2. Resolució de problemes mitjançant sistemes d'equacions

Per a resoldre problemes per mitjà de sistemes d'equacions, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat

2.- Identificar les incògnites

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic

4.- Plantejar el sistema i resoldre'l

5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *La suma de les edats d'un pare i el seu fill és 39 i la seua diferència 25. Quina és l'edat de cada un?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem les incògnites que, en aquest cas, són l'edat del pare i el fill

2.- Edat del pare = x

Edat del fill = y

3.- Passem l'enunciat a llenguatge algebraic:

La suma de les seues edats és 39:

$$x + y = 39$$

I la seua diferència 25:

$$x - y = 25$$

4.- Plantegem el sistema i el resolem pel mètode que ens resulte més senzill. En aquest cas, el fem per reducció:

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow[\text{sumem}]{} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solució: El pare té 32 anys i el fill té 7 anys.

5.- Comprovació*:* En efecte, la suma de les edats és 32 + 7 = 39 i la diferència és 32 – 7 = 25.

Activitats proposades

45. La suma de les edats de Maria i Alfons són 65 anys. L'edat d'Alfons menys la meitat de l'edat de Maria és igual a 74. Quina edat tenen cada un?

46. La suma de les edats de Mariló i Xavier és 32 anys. D'ací a 7 anys, l'edat de Xavier serà igual a l'edat de Mariló més 20 anys. Quina edat té cada un en l'actualitat?

47. Troba dos nombres la diferència dels quals siga 24 i la seua suma siga 104.

48. Un hotel té 42 habitacions (individuals i dobles) i 62 llits, quantes habitacions té de cada tipus?

49. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 10 cm i les longituds dels seus dos catets sumen 14 cm. Calcula l'àrea del triangle.

50. Neus li pregunta a Miriam per les seues qualificacions en Matemàtiques i en Llengua. Miriam li diu "La suma de les meues qualificacions és 19 i el producte 90". Neus li dóna l'enhorabona. Quines qualificacions va obtindre?

51. D'un nombre de tres xifres se sap que sumen 12, que la suma dels seus quadrats és 62, i que la xifra de les desenes és igual a la de les centenes més 1. Quin nombre és?

52. Es tenen tres sucs compostos de la manera següent:

El primer de 40 dl de taronja, 50 dl de llima i 90 dl de pomelo.

El segon de 30 dl de taronja, 30 dl de llima i 50 dl de pomelo.

El tercer de 20 dl de taronja, 40 dl de llima i 40 dl de pomelo.

Es demana quin volum haurà de prendre's de cada un dels sucs anteriors per a formar un nou suc de 34 dl de taronja, 46 dl de llima i 67 dl de pomelo.

53. Es venen tres espècies de cereals: blat, ordi i mill. Cada kg de blat es ven per 2 €, el de l'ordi per 1 € i el de mill per 0.5 €. Si es ven 200 kg en total i s'obté per la venda 150 €, quants volums de cada cereal s'han venut?

54. Es desitja mesclar farina de 2 €/kg amb farina d'1 €/kg per a obtindre una mescla de 1,2 €/kg. Quants kg haurem de posar de cada preu per a obtindre 300 kg de mescla?

55. En una botiga hi ha dos tipus de joguets, els de tipus A què utilitzen 2 piles i els de tipus B que utilitzen 5 piles. Si en total a la botiga hi ha 30 joguets i 120 piles, quants joguets hi ha de cada tipus?

56. Un vianant ix d'una ciutat A i es dirigeix a una ciutat B que està a 15 km de distància a una velocitat de 4 km/h, i al mateix moment ix un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A, quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de B s'encreuen?

CURIOSITATS. REVISTA

Obtenció de la fórmula per a resoldre equacions de segon grau.

$ax^2 + bx + c = 0$, amb $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multipliquem per $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumem b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Emplenem quadrats

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Calculem l'arrel quadrada

$\Downarrow$ Aïllem la x

Tres equacions de segon grau interessants

$x^2 = 2$

Aquesta equació ens apareix en aplicar el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles de costats iguals a 1, o en calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1. La seua solució és la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Té d'interessant que es demostra que la solució NO és un nombre racional, un nombre que es puga escriure com quocient de dos nombres enters.

$x + 1 = x^2$

També es pot escriure com:

que és una proporció, on x pren el valor

$\approx$ 1,618... que és el

$x^2 = -1$

La tercera equació no té solució real, cap nombre real en elevar-lo al quadrat pot donar un nombre negatiu, pero si ampliem el camp real amb la seua arrel,

resulta que ara totes les equacions de segon grau tenen solució, i als nombres $a + b \cdot i$ se'ls anomena **nombres complexos**.

Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu els treballs de la qual en Àlgebra van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

Els matemàtics han tardat prop de tres mil anys a comprendre i resoldre equacions tan senzilles i que tan bé coneixes com $ax + b = 0$. Ja els **egipcis** al papir del *Rhid* (1650 aC) i al de *Moscou* (1850 aC) resolen alguns problemes que es podrien considerar d'equacions, com per exemple: "*Un muntó i un seté del mateix és igual a 24*".

A **Mesopotàmia** i **Babilònia** ja se sabien resoldre sistemes de dues equacions i dues incògnites i equacions de segon grau.

Un problema que apareix en un llistó és: "*La quarta part de l'amplària més una longitud és igual a 7 mans. I longitud més amplària és igual a 10 mans*". En aquest problema "longitud" i "amplària" són incògnites no relacionades amb aquestes mesures.

A Xina al segle III a C es va editar L'art matemàtic *on* utilitzaven l'àbac i es resolien equacions de primer i segon grau i sistemes.

Un dels problemes resolts pot considerar-se com la resolució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites utilitzant el mètode matricial.

A Grècia, al segle III Diofanto d'Alexandria va publicar "*Aritmètica*" va treballar amb equacions i va utilitzar la primera lletra de la paraula grega "*arithmos*" que significa nombre, per a representar a la incògnita.

A la seua tomba apareix aquest problema:

"Caminant, aquesta és la tomba de Diofanto. És ell qui amb aquesta sorprenent distribució et diu el nombre d'anys que va viure. La seua joventut va ocupar la seua sisena part, després durant la dozena part la seua galta es va cobrir amb el primer borrissol. Va passar encara una setena part de la seua vida abans de prendre esposa i, cinc anys després, va tindre un preciós xiquet que, una vegada aconseguida la meitat de l'edat de son pare, va morir d'una mort desgraciada. Son pare va haver de sobreviure-li, plorant-li durant quatre anys".

Al segle VII els **hindús** coneixien procediments algebraics i treballaven amb eficàcia els nombres.

Al segle IX el matemàtic musulmà **Al-Jwarizmi** va treballar en procediments algebraics.

A 1489 es van inventar els símbols + i –.
A 1525 el símbol de l'arrel quadrada.
A 1557 el símbol =.
A 1591 François Viète representaba les incògnites amb vocals i les constants amb consonants.
A 1637 René Descartes va inventar la geometria analítica amb la notació que hui emprem de x, y z… per a les incògnites i *a, b, c*… per a les constants.

RESUM

		Exemples
Equació de primer grau	Llevar denominadors Llevar parèntesi Traslladar termes Simplificar i aïllar	$5/3x + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5/3x + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14$.
Equació de segon grau	Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ S'usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i distintes Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, té dues solucions 5 i -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \dfrac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma i producte d'arrels	$x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	**Compatible determinat**: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són **secants**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminat**: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **coincidents**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No té solució, les rectes són **paral·leles**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir a l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Equacions

1. Resol aquestes equacions:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

2. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-3x^2 - 5x - 2 = 0$ b) $2x(-3 + x) = 5$ c) $3x^2 = 27x$

d) $5(3x + 2) - 4x(x + 6) = 3$ e) $4(x - 9) + 2x(2x - 3) = 6$ f) $10(2x^2 - 2) - 5(3 + 2x) = -21$

g) $4(x + 5)\cdot(x - 1) = -2x - 4$ h) $3x\cdot(5x + 1) = 99$ i) $2(3x^2 - 4x + 2) - 2x(3x - 2) = -5$

3. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$

d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

4. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

5. Factoritza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 5, escriu:

$2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 5)\cdot(x - 5) = 0.$

Observa que si el coeficient de x^2 fóra diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats pel dit coeficient.

6. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Així per a resoldre $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta dir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$,per tant les seues solucions són 2 i 4.

Utilitza aqueixa expressió per a resoldre:

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 - 8x - 12 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

7. Resol mentalment les equacions següents, després desenrotlla les expressions i utilitza la fórmula general per a tornar a resoldre-les.

a) $(x - 3)\cdot(x - 7) = 0$ b) $(x + 2)\cdot(x - 4) = 0$ c) $(x - 8)\cdot(x - 4) = 0$

d) $(x - 2)\cdot(x + 5) = 0$ e) $(x + 6)\cdot(x - 3) = 0$ f) $(x - 5)\cdot(x + 3) = 0$

8. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol-les.

a) $x^2 + 5x - 2 = 0$ b) $5x^2 + 2x - 4 = 0$ c) $2x^2 + 4x + 11 = 0$

d) $2x^2 - 3x + 8 = 0$ e) $3x^2 - x - 5 = 0$ f) $4x^2 + 2x - 7 = 0$

9. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen cap solució real. *Ajuda*: Utilitza el discriminant.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen una solució doble.

11. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen dues solucions reals i distintes.

12. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen solució real.

13. Resol les següents equacions polinòmiques:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ c) $2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

14. Resol les següents equacions aplicant un canvi de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

15. Resol les següents equacions racionals:

a) $2x + \frac{3}{x} = 5$ b) $\frac{3}{5x} + \frac{1}{2x} = x$ c) $\frac{1}{x-3} + 2 = \frac{5}{x-3}$ d) $\frac{2x}{3-2x} - 5x = 1$

e) $\frac{2}{x+1} = \frac{3(2x+1)}{x-1} + 3$ f) $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{4+5x}{x} = 7$ g) $\frac{3x-2}{x+1} - \frac{2+3x}{x-1} = 4$

h) $\frac{3}{1-x} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x-x^2}$ i) $\frac{3x}{x-2} - \frac{5x}{x^2-4} = \frac{3x}{2}$ j) $\frac{1}{2} = \frac{x-5}{3-4x}$

16. Resol les següents equacions irracionals:

a) $x = -3 + \sqrt{5 + 2x^2}$ b) $\sqrt{25 - x} = x - 5$ c) $7 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 3x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 1$ e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 1 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 5$

g) $3\sqrt{x-2} - 4 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} = 1$ i) $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 4$

17. Resol les equacions següents: a) $3^{3x} = \frac{1}{81}$ b) $5^{2x} = \frac{1}{625}$

Sistemes

18. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

19. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

20. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

21. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

22. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{y-1}{5}=-1 \\ \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+3}{5}=-3 \\ 5x+2y=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-2}{3}=2 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

23. Copia al teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es complisca el que es demana en cada un:

Compatible indeterminat

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

La seua solució siga *x*=2 i *y*=1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

La seua solució siga *x* = –1 i *y* = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminat

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

24. Escriu tres sistemes lineals que siguen incompatibles.

25. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles indeterminats.

26. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles determinats.

27. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemes

28. En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

29. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per a completar el seu quadrat?

30. Descompon 8 en dos factors la suma dels quals siga 6.

31. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu duple és 85. Quin nombre és?

32. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina els dits nombres.

33. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portara un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega. Quants sacs porta cada un?

34. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?

35. Calcula tres nombres consecutius la suma de quadrats dels quals és 365.

36. D'ací a 11 anys, l'edat de Miquel serà la mitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té Miquel?

37. Dos nombres naturals es diferencien en 2 unitats i la suma dels seus quadrats és 580. Quins són els dits nombres?

38. La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és –84. De quins nombres es tracta?

39. Maria vol formar safates d'un quilogram amb massapans i mantegades. Si les mantegades li costen a 5 euros el quilo i els massapans a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata siga de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, Quina quantitat de mantegades i de massapans necessitarà?

40. Determina els catets d'un triangle rectangle la suma dels quals és 7 cm i la hipotenusa del dit triangle medeix 5 cm.

41. El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula els dits nombres

42. La suma de dos nombres és 20. El doble del primer més el triple del segon és 45. De quins nombres es tracta?

43. A un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha al garatge?

44. L'edat actual de Pere és el doble de la de Raquel. D'ací a 10 anys, les seues edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment Pere i Raquel?

45. A la meua classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada xica 2 bolígrafs i a cada xic 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants xics i xiques som a classe?

46. Entre el meu iaio i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu iaio té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cada un?

47. Dos entrepans i un refresc costen 5€. Tres entrepans i dos refrescos costen 8€. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

48. En una granja hi ha pollastres i vaques. Si es compten els caps, són 50. Si es compten les potes, són 134. Quants pollastres i vaques hi ha a la granja?

49. Un rectangle té un perímetre de 172 metres. Si el llarg és 22 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?

50. En una bossa hi ha monedes d'1 € i 2 €. Si en total hi ha 40 monedes i 53 €, quantes monedes de cada valor hi ha a la bossa?

51. En una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha a la baralla?

52. Una classe te 32 estudiants, i el nombre de xics és triple al xiques, quants xics i xiques hi ha?

53. Violant té 6 anys més que el seu germà Pol, i sa mare té 49 anys. D'ací a 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, quines edats tenen?

54. Es mesclen 15 kg de dacsa de 2,3 € el quilogram amb 27 kg de dacsa de preu desconegut, resultant el preu de la mescla de 3 € el kg. Quin preu tenia la segona dacsa?

55. L'altura d'un trapezi isòsceles és de 4 cm, el perímetre, 24 cm, i els costats inclinats són iguals a la base menor. Calcula l'àrea del trapezi.

56. Dos autobusos ixen, un des de Madrid i l'altre des de València a les 8 del matí. Un va a 100 km/h i l'altre a 120 km/h. A quina hora s'encreuen? A quants km de Madrid estaran? La distància entre Madrid i València és de 350 km.

57. En un concurs es guanyen 50 euros per cada resposta encertada i es perden 100 per cada fallada. Després de 20 preguntes, Pilar porta guanyats 250 euros. Quantes preguntes ha encertat?

58. Joan ha comprat 6 sucs i 4 batuts per 4,6 €, després ha comprat 4 sucs i 7 batuts i li han costat 4,8 €. Calcula els preus d'ambdues coses.

59. Quina fracció és igual a 1 quan es suma 1 al numerador i és igual a $\frac{1}{2}$ quan es suma 1 al denominador?

60. El quocient d'una divisió és 2 i el residu és 1. Si el divisor disminueix en 1 unitat, el quocient augmenta en una unitat i el residu nou continua sent 1. Trobar el dividend i el divisor.

61. Dues amigues van anar a pescar. Al final del dia una va dir: "Si tu em dónes un dels teus peixos, llavors jo tindré el doble que tu". L'altra li va respondre: "Si tu em dónes un dels teus peixos, jo tindré el mateix nombre de peixos que tu". Quants peixos tenia cada una?

62. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la seua àrea és 30 cm^2, i el perímetre del qual mesura 26 cm.

63. Un vianant ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 4 km/h, i es dirigeix a una ciutat "B" que està a 12 km de la ciutat "A", 30 minuts després ix un ciclista de la ciutat "B" a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a "A", quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de "B" s'encreuen?

64. Es desitja mesclar oli de 3 €/l amb un altre oli de 4,2 €/l de manera que la mescla resulte a 3,50 €/l. Quants litres de cada classe han de mesclar-se per a obtindre 200 litres de la mescla?

65. En intercanviar les xifres d'un nombre de dues xifres s'obté un altre que és 27 unitats major. Troba el nombre inicial.

66. La diagonal d'un rectangle mesura 26 cm, i el perímetre 42 cm. Troba els costats del rectangle.

67. Una tanca rodeja un terreny rectangular de 1000 m^2. Si la tanca mesura 130 metres, calcula les dimensions del terreny.

68. Diversos amics faran un regal de bodes que costa 900 euros, que pagaran a parts iguals. A última hora s'apunten dos amics més, amb la qual cosa cada un toca a 15 euros menys. Quants amics eren inicialment? Quant pagarà al final cada un?

69. Les diagonals d'un rombe es diferencien en 3 cm i la seua àrea és de 20 cm^2. Calcula el seu perímetre.

70. Un tren ix de Bilbao cap a Alcàzar de San Joan a una velocitat de 140 km/h. Una hora més tard ix un altre tren d'Alcàzar de San Joan cap a Bilbao a 100 km/h; la distància entre les dues ciutats és de 500 km. Al cap de quant temps s'encreuen els dos trens? A quina distància d'Alcàzar de San Joan?

71. Un cotxe ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 70 km/h i 30 minuts més tard un altre cotxe ix de "A" en la mateixa direcció i sentit a una velocitat de 120 km/h, quant temps tardarà el segon a atrapar al primer i a quina distància de "A" es produeix la trobada?

AUTOAVALUACIÓ

1. La solució de l'equació $3(x-1)-2(x-2)=5$ és:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

2. Les solucions de l'equació $156 = x(x-1)$ són:

a) $x = 11$ i $x = -13$ b) $x = 13$ i $x = -12$ c) $x = 10$ i $x = 14$ d) $x = -12$ i $x = -11$

3. Les solucions de l'equació $\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}$ són:

a) $x = 2$ i $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ i $x = 4$ c) $x = 1$ i $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ i $x = 3$

4. Les solucions de l'equació $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ són:

a) 1, −1, 4, −4 b) 1, −1, 2, −2 c) 2, −2, 3, −3 d) 2, −2, 5, −5

5. Les solucions de l'equació $2(x+2) - x(2-x) = 0$ són:

a) Infinites b) $x = 9$ i $x = 5$ c) no té solució d) $x = 1$ i $x = 4$

6. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ són:

a) Secants b) Paral·leles c) Coincidents d) S'encreuen

7. La solució del sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = 1$ b) $x = 1$ i $y = 1$ c) $x = 3$ i $y = 2$ d) No té solució

8. La solució del sistema $\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = -1$ b) $x = -2$ i $y = 1$ c) $x = 1$ i $y = 0$ d) $x = 3$ i $y = 1$

9. A una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha a la granja?

a) 16 pollastres i 11 porcs b) 15 pollastres i 12 porcs c) 13 pollastres i 14 porcs

10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15, li falten 100 unitats per a arribar al seu quadrat?

a) 20 anys b) 7 anys c) 25 anys d) 8 anys

Matemàtiques orientades als ensenyances aplicades:

4t A ESO. Capítol 5: Geometria al pla i a l'espai. Longituds, àrees i volums.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez

Revisors: Javier Rodrigo i David Hierro

Il·lustracions: Milagros Latasa i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

La Geometria és una de les branques més antigues de les Matemàtiques i el seu estudi ens ajuda a interpretar millor la realitat que percebem. El seu nom significa "*mesura de la Terra*". Mesurar és calcular longituds, àrees i volums. En aquest tema recordaràs les fórmules que vas estudiar ja l'any passat i aprofundiràs sobre les seues aplicacions a la vida real.

Ens movem a l'espai de dimensió tres, caminem sobre una esfera (que per ser gran, considerem plana), les cases són quasi sempre ortoedres. La informació que percebem per mitjà dels nostres sentits la interpretem en termes geomètrics. Precisem de les fórmules d'àrees i volums dels cossos geomètrics per a calcular les mesures dels mobles que caben al nostre saló, o per a fer un pressupost de la reforma de la nostra vivenda.

Moltes plantes distribueixen les seues fulles buscant el màxim d'il·luminació i les seues flors en forma esfèrica buscant un aprofitament òptim de l'espai. L'àtom de ferro disposa els seus electrons en forma de cub, els sistemes de cristal·lització dels minerals adopten formes polièdriques, les bresques de les abelles són prismes hexagonals. Aquests són alguns exemples de la presència de cossos geomètrics a la naturalesa.

ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA

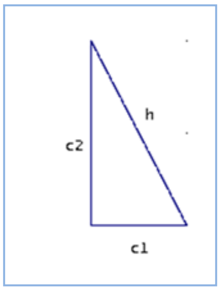
Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. TEOREMA DE PITÀGORES I TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitàgores

Teorema de Pitàgores al pla

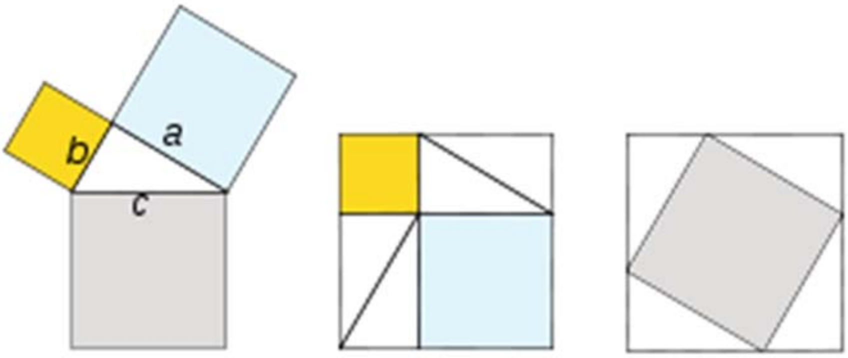
Ja saps que:



En un triangle rectangle anomenem **catets** als costats incidents amb l'angle recte i **hipotenusa** a l'altre costat.

En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets. $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Demostració:



Exemple:

- Si els catets d'un triangle rectangle mesuren 6 *cm* i 8 *cm*, la seua hipotenusa val 10 *cm*, ja que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

Activitats resoltes

- *Si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 13 dm i un dels seus catets mesura 12 dm, troba la mesura de l'altre catet:*

  Solució: Pel teorema de Pitàgores:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Activitats proposades

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm* i la seua hipotenusa 30 *cm*? Si la teua resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm*.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 4 *cm* i 3 *cm* b) 1 m i 7 *m* *c)* c) 2 *dm* i 5 dm d) 23,5 *km* i 47,2 *km*.

Utilitza la calculadora si et resulta necessària.

3. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 8 *cm* i 3 *cm* b) 15 m i 9 *m*

c) 35 *dm* i 10 *dm* d) 21,2 *km* i 11,9 *km*

4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 5 *m*.

5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 *cm*.

Teorema de Pitàgores a l'espai

Ja saps que:

La diagonal d'un ortoedre al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats de les seues arestes.

Demostració:

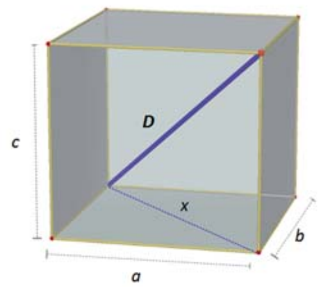
Siguen *a, b* i *c* les arestes de l'ortoedre que suposem recolzat al rectangle de dimensions *a , b*.

Si *x* és la diagonal d'aquest rectangle, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triangle de costats *D, x, a* és rectangle per tant: $D^2 = x^2 + c^2$

I tenint en compte la relació que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Activitats resoltes

- *Calcula la longitud de la diagonal d'un ortoedre d'arestes 7, 9 i 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16{,}55$ cm.

- *Les arestes de la base d'una caixa amb forma d'ortoedre mesuren 7 cm i 9 cm i la seua altura 12 cm. Estudia si pots guardar en ella tres barres de longituds 11 cm, 16 cm i 18 cm.*

  El rectangle de la base té una diagonal *d* que medeix: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm

  Per tant la barra més curta cap recolzada en la base.

  La diagonal de l'ortoedre vam veure en l'activitat anterior que mesura 16,55, per tant la segona barra si és possible, inclinada, però la tercera, no.

Activitats proposades

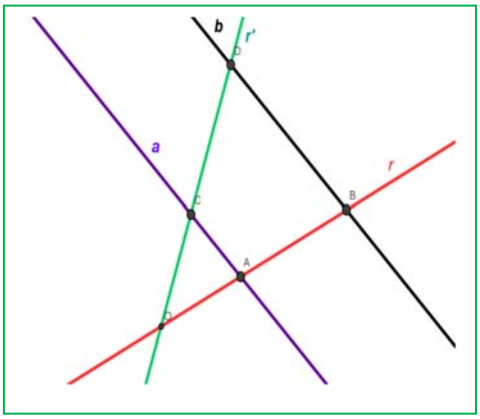
6. Una caixa té forma cúbica de 3 *cm* d'aresta. Quant mesura la seua diagonal?

7. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 8 metres de llarg, 5 metres d'ample i 3 metres d'altura.

1.2. Teorema de Tales

Ja saps que:

Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*. Llavors el Teorema de Tales afirma que els segments són proporcionals:



$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Es diu que els triangles *OAC* i *OBD* estan en posició *Tales*. Són **semblants**. Tenen un angle comú (coincident) i els costats proporcionals.

Activitats resoltes

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre d'OBD és 20 cm, i OA mesura 2 cm, AC mesura 5 cm i OC mesura 3 cm. Calcula les longituds dels costats d'OBD.*

Utilitzem l'expressió: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ substituint les dades:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, pel que aïllant, sabem que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, i *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecte: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetre del triangle.

- *Conta la llegenda que Tales va mesurar l'altura de la piràmide de Keops comparant l'ombra de la piràmide amb l'ombra del seu bastó. Tenim un bastó que medeix 1 m, si l'ombra d'un arbre medeix 12 m, i la del bastó, (a la mateixa hora del dia i al mateix moment), medeix 0,8 m, quant medeix l'arbre?*

Les altures de l'arbre i del bastó són proporcionals a les seues ombres, (formen triangles en posició *Tales*), pel que, si anomenem *x* a l'altura de l'arbre podem dir:

$\frac{0,8}{1}=\frac{12}{x}$. Per tant *x* = 12/0,8 = 15 metres.

Activitats proposades

8. En una foto hi ha un xiquet, que sabem que medeix 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l'altura del xiquet i de l'edifici a la foto, i resulten ser: 0,2 *cm* i 10 *cm*. Quina altura té l'edifici?

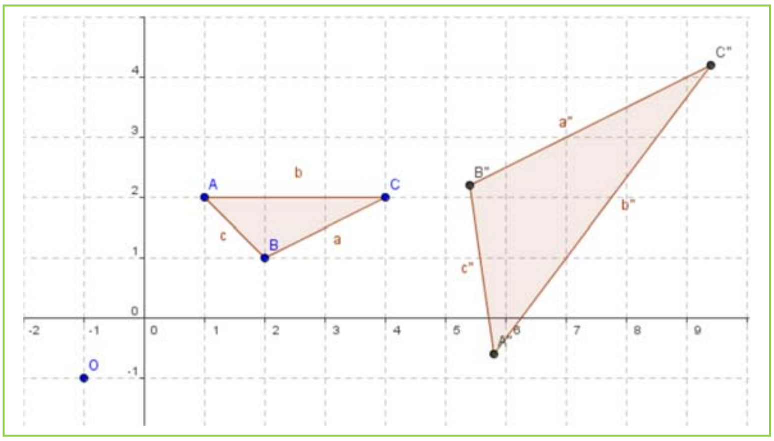
9. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seues diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats d'ambdós hexàgons.

10. En un triangle regular *ABC* de costat, 1 *cm*, tracem els punts mitjans, *M* i *N*, de dos dels seus costats. Tracem les rectes *BN* i *CM* que es tallen en un punt *O*. Són semblants els triangles *MÀS* i *COB*? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat *MN*?

11. Una piràmide regular hexagonal de costat de la base 3 *cm* i altura 10 *cm*, es talla per un pla a una distància de 4 *cm* del vèrtex, amb la qual cosa s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seues dimensions?

1.3. Aplicació informàtica per a la comprendre la semblança de triangles

- *Utilitza Geogebra per a analitzar la semblança entre triangles.*



- Obri una nova finestra de *Geogebra*, comprova que apareixen els **Eixos** i la **Quadrícula**.

- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix els punts A (1, 2), B (2, 1) i C (4, 2).

- Utilitza **Polígon** per a dibuixar el triangle ABC.

- Defineix un **Nou Punt** de coordenades (–1, –1), el programa l'anomena D. *Amb* el botó dret del ratolí i l'opció **ReAnomena**, anomena'l O.

- Utilitza la ferramenta **Dilata objecte des de punt indicat, segons factor**, per a dilatar el polígon ABC des del punt O, amb factor 2. S'obté el triangle $A'B'C'$.

- Amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta**, dibuixa el simètric del triangle $A'B'C'$ *respecte* al segment *a* del triangle ABC. S'obté el triangle $A''B''C''$.

- Selecciona el polígon $A'B'C'$ a la Finestra algebraica o a l'àrea de treball, i amb el botó dret del ratolí desactiva l'opció **Exposa objecte**, el triangle $A'B'C'$ queda ocult. Observa que pots tornar a visualitzar activant aquesta opció. Oculta de la mateixa manera els punts A', B' *i* C'.

- Perquè les mesures apareguen amb 5 decimals, activa **Posicions decimals** al menú **Opcions** i tria 5.

- Desplaça amb el punter el punt C, de manera que el triangle ABC continue sent un triangle. Es modifiquen ambdós triangles, però es mantenen les seues propietats, continuen sent semblants.

Activitats proposades

12. Justifica que els triangles ABC *i* $A''B''C''$ *són* semblants. Calcula la raó de semblança i la raó entre les seues àrees. Busca una relació entre la raó de semblança i la raó entre les àrees de dos triangles semblants.

13. Per què són semblants els triangles ABC i $A''B''C''$? Observa a la **Finestra algebraica** les longituds dels seus costats i els valors de les seues àrees. Quina és la raó de semblança? Quina és la raó entre les àrees?

14. Dibuixa distints pentàgons i hexàgons que no siguen regulars i amb la ferramenta **Dilata objecte des de punt indicat, segons factor, construeix** altres semblants.

a) Argumenta per què són semblants.

b) Calcula en cada cas la raó de semblança i la raó entre les seues àrees.

c) Investiga com pots trobar la raó entre les àrees de polígons semblants a partir de la raó de semblança.

1.4. Proporcionalitat en longituds, àrees i volums

Ja saps que:

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. En mapes, plans… a la raó de semblança se l'anomena **escala**.

Àrees de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. Si multipliquem per 2 el costat del

quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades

la del xicotet.

Volums de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors entre els seus volums és $\boldsymbol{k^3}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. En multiplicar per 2 el costat

del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum

del cub gran és 8 (23) el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\ 000\ 000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

Si la Torre Eiffel medeix 300 m, i anomenem x al que medeix la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ m. Medeix metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

15. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 cm. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?

16. A la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 2 € i 3 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 cm, 20 cm i 30 cm, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.

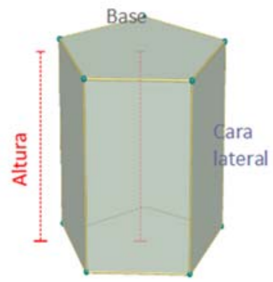
17. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tinga una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tindre la maqueta?

2. LONGITUDS, ÀREES I VOLUMS

2.1. Longituds, àrees i volums en prismes i cilindres

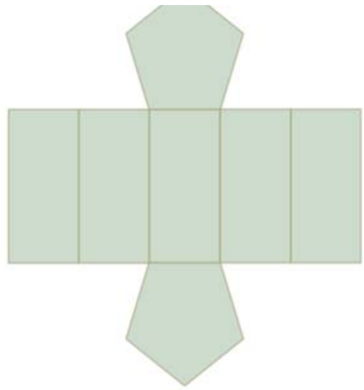
Recorda que:

Prismes



Un ***prisma*** és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases.

Àrees lateral i total d'un prisma.



L'àrea lateral d'un prisma és la suma de les àrees de les cares laterals.

Com les cares laterals són paral·lelograms de la mateixa altura, que és l'altura del prisma, podem escriure:

Àrea lateral = Suma de les àrees de les cares laterals =

Perímetre de la base · altura del prisma.

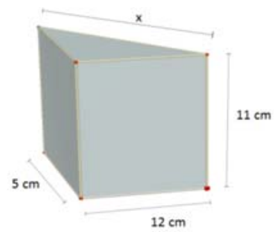
Si denotem per h l'altura i per P_B el perímetre de la base:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

L'àrea total d'un prisma és l'àrea lateral més el doble de la suma de l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Activitats resoltes



- *Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular recte d'11 cm d'altura si la seua base és un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm.*

Calculem en primer lloc la hipotenusa del triangle de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30 \text{ cm}; \; A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330 \text{ cm}^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390 \text{ cm}^2$$

Volum d'un cos geomètric. Principi de *Cavalieri*.

Recorda que:

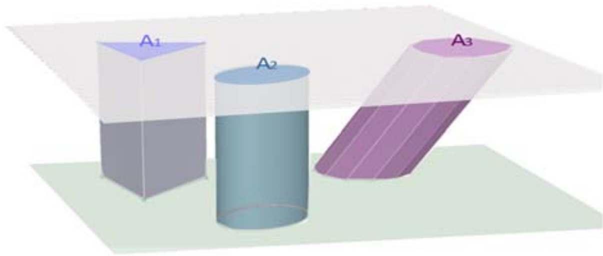
Bonaventura Cavalieri, matemàtic del segle XVII va enunciar el principi que porta el seu nom i que afirma:

"Si dos cossos tenen la mateixa altura i en tallar-los per plans paral·lels a les seues bases, s'obtenen seccions amb el mateix àrea, llavors els volums dels dos cossos són iguals"

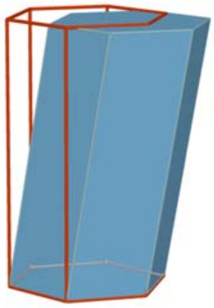
 Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
 Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemple:

A la figura adjunta les àrees de les seccions A_1, A_2, A_3, produïdes per un pla paral·lel a les bases, són iguals, llavors, segons aquest principi els volums dels tres cossos són també iguals.



Volum d'un prisma i d'un cilindre



El volum d'un prisma recte és el producte de l'àrea de la base per l'altura. A més, segons el principi de *Cavalieri*, el volum d'un prisma oblic coincideix amb el volum d'un prisma recte amb la mateixa base i altura. Si denotem per *V* aquest volum, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura:

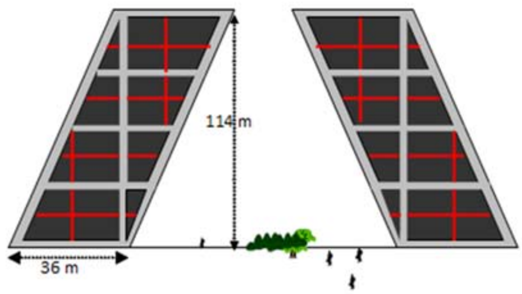
Volum prisma = $V = A_B \cdot h$

També el volum d'un cilindre, recte o oblic és àrea de la base per altura. Si anomenem *R* al radi de la base, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura, el volum s'escriu:

Volum cilindre = $V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$

Activitats resoltes

- Les conegudes torres Kio de Madrid són dues torres bessones que estan en el Passeig de la Castellana, junt amb la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.



Cadascuna d'elles és un prisma oblic la base del qual és un quadrat de 36 metres de costat i tenen una altura de 114 metres. El volum interior de cada torre pot calcular-se amb la fórmula anterior:

$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$$

Activitats proposades

18. Calcula el volum d'un prisma recte de 20 *dm* d'altura la base del qual és un hexàgon de 6 *dm* de costat.

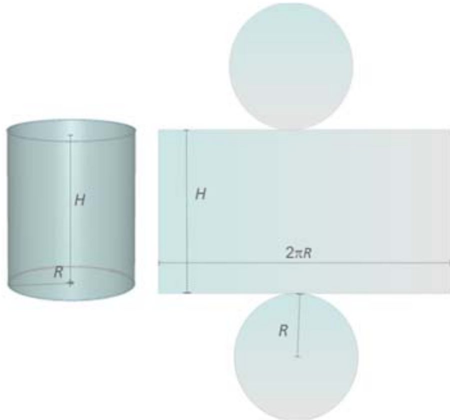
19. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seua base té 10 *cm* de diàmetre i que l'aigua arriba a 12 *dm* d'altura.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Àrees lateral i total d'un cilindre.

El cilindre és un cos geomètric desenrotllable. Si retallem un cilindre recte al llarg d'una generatriu, i l'estenem en un pla, obtenim dos cercles i una regió rectangular. D'aquesta manera s'obté el seu desenrotllament.

A partir d'aquest, podem veure que l'àrea **lateral de cilindre està** determinada per l'àrea del rectangle que té com a dimensions la longitud de la circumferència de la base i l'altura del cilindre.



Suposarem que l'altura del cilindre és H i que R és el radi de la base amb el que l'àrea lateral A_L és:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H = 2\pi RH$$

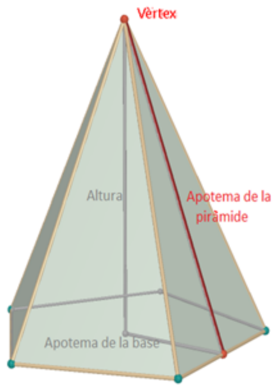
Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea dels dos cercles que constitueixen les bases, obtenim l'àrea **total del cilindre.**

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longituds, àrees i volums en piràmides i cons

Recorda que:

Àrees lateral i total d'una piràmide i d'un tronc de piràmide regulars.

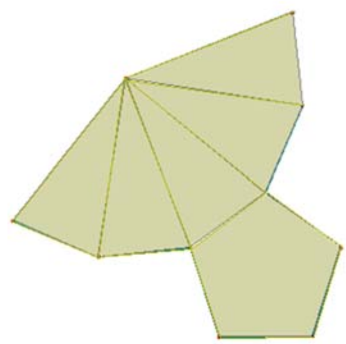


Una **piràmide** és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú com a costats té la base.

L'àrea lateral d'una piràmide regular és la suma de les àrees de les cares laterals.

Són triangles isòsceles iguals pel que, si l'aresta de la base mesura b, l'apotema de la piràmide és Ap i la base té n costats, aquest àrea lateral és:

Desenrotllament de piràmide pentagonal regular



$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

i com $n \cdot b$ =Perímetre de la base

$$A_L = \frac{Perímetredelabase \cdot Apotemadelapiràmide}{2} = \frac{Perímetredelabase}{2} \cdot Apotema$$

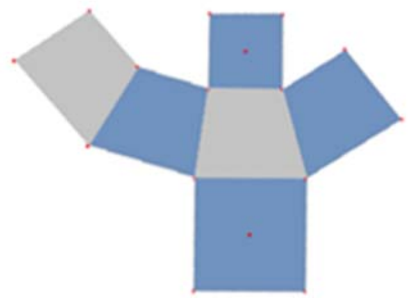
L'àrea lateral d'una piràmide és igual al semi-perímetre per l'apotema.

L'àrea total d'una piràmide és l'àrea lateral més l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronc de piràmide regular és un cos geomètric desenrotllable. Al seu desenrotllament apareixen tantes cares laterals com a costats tenen les bases. Totes elles són trapezis isòsceles.

Desenrotllament de tronc de piràmide quadrangular



Si *B* és el costat del polígon de la base major, *b* el costat de la base menor, *n* el nombre de costats de les bases i *Ap* és l'altura d'una cara lateral

Àrea lateral = A_L = $n \cdot \frac{(B+b).Ap}{2} = \frac{(P_B+P_b).Ap}{2}$ =

$$= \frac{Sumadelperímetredelesbases \cdot Apotemadeltronc}{2}$$

L'àrea total d'un tronc de piràmide regular és l'àrea lateral més la suma d'àrees de les bases:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Activitats resoltes

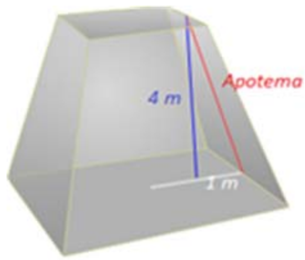
- *Calculem l'àrea total d'un tronc de piràmide regular de 4 m d'altura si sabem que les bases paral·leles són quadrats de 4 m i de 2 m de costat.*

En primer lloc calculem el valor de l'apotema. Tenint en compte que el tronc és regular i que les bases són quadrades es forma un triangle rectangle en què es compleix:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44\ m^2$$



Activitats proposades

20. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma hexagonal regular sabent que les arestes de les bases mesuren 3 *cm* i cada aresta lateral 2 *dm*.

21. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 16 m^2 i té 10 *m* d'altura. Calcula el perímetre de la base.

22. El costat de la base d'una piràmide triangular regular és de 7 *cm* i l'altura de la piràmide 15 *cm*. Calcula l'apotema de la piràmide i la seua àrea total.

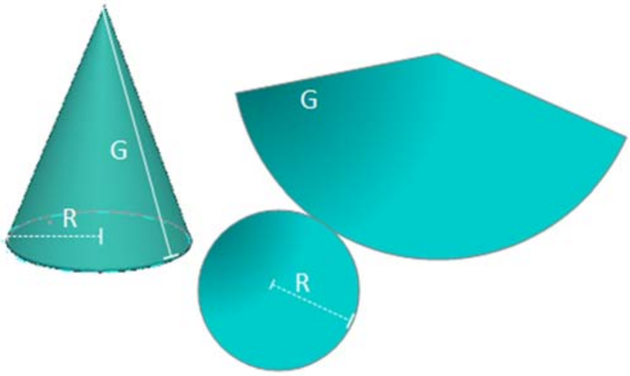
23. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seues bases són dos octògons regulars de costats 3 i 8 *dm* i que l'altura de cada cara lateral és de 9 *dm*.

24. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2, calcula l'apotema de la piràmide i la seua altura.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Àrees lateral i total d'un con.

Recorda que:



També el con és un cos geomètric desenrotllable. En retallar seguint una línia generatriu i la circumferència de la base, obtenim un cercle i un sector circular amb radi igual a la generatriu i longitud d'arc igual a la longitud de la circumferència de la base.

Anomenem ara *R* al radi de la base i *G* a la generatriu. L'àrea lateral del con és l'àrea de sector circular obtingut. Per a calcular-la pensem que aquesta àrea ha de ser directament proporcional a la longitud d'arc que al seu torn ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base. Podem escriure aleshores:

$$\frac{ALateraldelcon}{Longitudd'arccorresponenalsector} = \frac{AtotaldelcerclederadiG}{LongituddelacircumferènciaderadiG}$$

És a dir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ i aïllant A_L tenim:

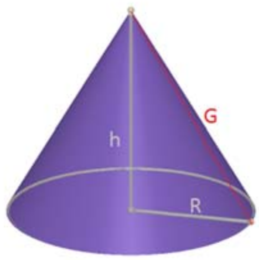
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea del cercle de la base, obtenim l'àrea **total del con.**

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Activitats resoltes

- *Calcula l'àrea total d'un con de 12 dm d'altura, sabent que la circumferència de la base mesura 18,84 dm .(Pren 3,14 com a valor de π)*



Calculem en primer lloc el radi *R* de la base:

$$2\pi R = 18,84 \Rightarrow \quad R = \frac{18,84}{2\pi} \approx \frac{18,84}{6,28} = 3 \text{ dm.}$$

Calculem ara la generatriu *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12,37 \text{ dm.}$$

Doncs $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3,14 \cdot 3 \cdot 12,37 + 3,14 \cdot 3^2 \approx 144,79\ dm^2$.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

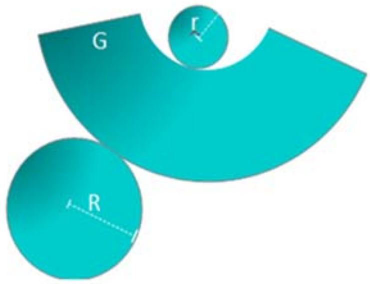
Àrees lateral i total d'un tronc de con.

Recorda que:

En tallar un con per un pla paral·lel a la base, s'obté un tronc de con. Igual que el tronc de piràmide, és un cos desenrotllable i el seu desenrotllament el constitueixen els dos cercles de les bases junt amb un trapezi circular, les bases del qual corbes mesuren el mateix que les circumferències de les bases.

Anomenant *R i r* als radis de les bases i *G* a la generatriu resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a l'expressió anterior li sumem les àrees dels cercles de les bases, obtenim l'àrea **total del tronc de con:**

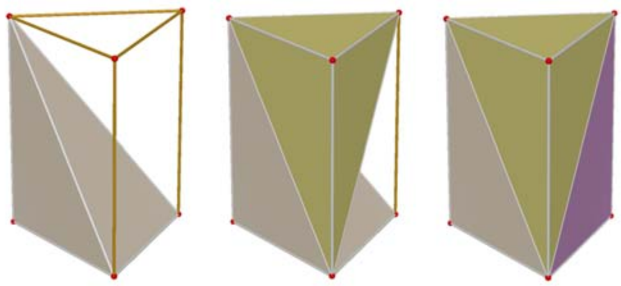
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volum d'una piràmide i d'un con.

Recorda que:

També als casos d'una piràmide o con, les fórmules del volum coincideixen en cossos rectes i oblics.

El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma que té la mateixa base i altura.



Volum piràmide = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3}$

Si comparem con i cilindre amb la mateixa base i altura, concloem un resultat anàleg

Volum con = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

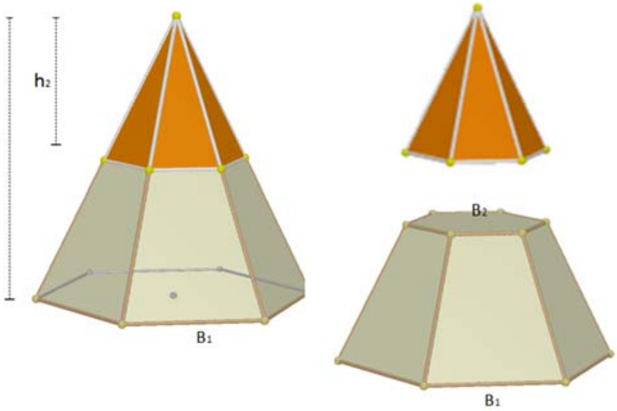
Volum d'un tronc de piràmide i d'un tronc de con.

Hi ha una fórmula per a calcular el volum d'un tronc de piràmide regular però l'evitarem. Resulta més senzill obtindre el volum d'un tronc de piràmide regular restant els volums de les dues piràmides a partir de les que s'obté.

Si representem per A_{B1} i A_{B2} els àrees dels bases i per h_1 i h_2 els altures dels piràmides esmentades, el volum del tronc de piràmide és:

Volum tronc de piràmide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



El volum del tronc de amb s'obté de manera semblant. Si R_1 i R_2 són els radis dels bases dels cons que originen el tronc i h_1 i h_2 els seues altures, el volum del tronc de amb resulta:

$$\text{Volum tronc de con} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Activitats resoltes

- *Calcula el volum d'un tronc de piràmide regular de 10 cm d'altura si les seues bases són dos hexàgons regulars de costats 8 cm i 3 cm.*

Primer pas: calculem les apotemes dels hexàgons de les bases:

Per a cada un d'aquests hexàgons:

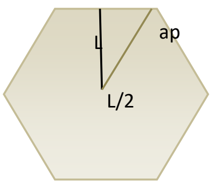


Figura 1

$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$

Per tant les apotemes buscades mesuren: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\ cm$; $ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\ cm$

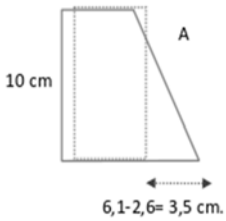


Figura 2

Com a segon pas, calculem l'apotema del tronc de piràmide

$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$

$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\ cm$

En tercer lloc, calculem el valor dels segments *x, y* de la figura 3 que ens serviran per a obtindre les altures i apotemes de les piràmides que generen el tronc amb què treballem:

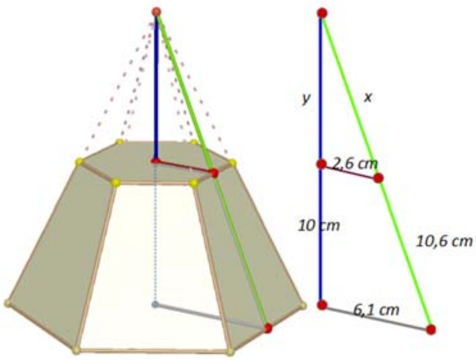


Figura 3

Pel teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow$

$6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$

Llavors l'apotema de la piràmide gran és 10,6 + 7,9=18,5 cm i el de la xicoteta 7,9 *cm*. I aplicant el teorema de *Pitàgores*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

Per tant les altures de les piràmides generadores del tronc mesuren 10 + 7,5 = 17,5 *cm* i 7,5 *cm.*

Finalment calculem el volum del tronc de piràmide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18{,}5 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7{,}9 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25 \, cm^3$$

Activitats proposades

25. Una columna cilíndrica té 35 *cm* de diàmetre i 5 *m* d'altura. Quina és la seua àrea lateral?

26. El radi de la base d'un cilindre és de 7 *cm* i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seua àrea total.

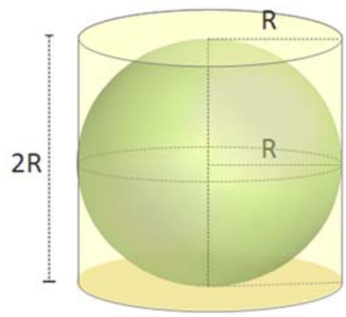
27. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seua generatriu mesura 25 *dm* i el seu radi de la base 6 *dm*.

28. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 m i la seua generatriu 12 *m*. Calcula l'àrea total.

2.3. Longituds, àrees i volums en l'esfera

Recorda que:

Àrea d'una esfera.



L'esfera **no** és un cos geomètric desenrotllable, per la qual cosa és més complicat que als casos anteriors trobar una fórmula per a calcular la seua àrea.

Arquimedes va demostrar que l'àrea d'una esfera és igual que l'àrea lateral d'un cilindre circumscrit a l'esfera, és a dir un cilindre amb el mateix radi de la base que el radi de l'esfera i l'altura del qual és el diàmetre de l'esfera.

Si anomenem *R* al radi de l'esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

L'àrea d'una esfera equival a l'àrea de quatre cercles màxims.

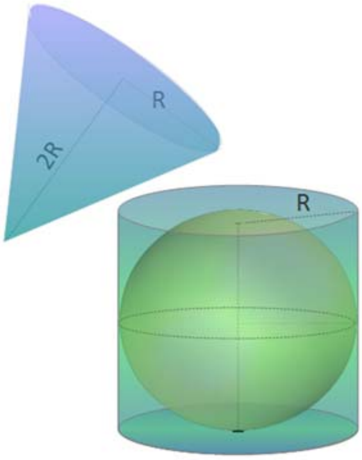
Activitats proposades

29. Una esfera té 4 *m* de radi. Calcula:

a) La longitud de la circumferència màxima;

b) L'àrea de l'esfera.

Volum de l'esfera



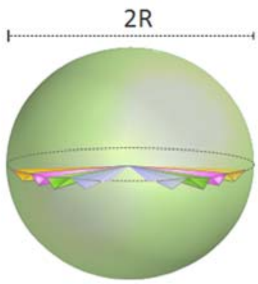
Tornem a pensar en una esfera de radi *R* i en el cilindre que la circumscriu. Per a omplir amb aigua l'espai que queda entre el cilindre i l'esfera, es necessita una quantitat d'aigua igual a un terç del volum total del cilindre circumscrit.

Es dedueix llavors que la suma dels volums de l'esfera de radi *R* i del con d'altura *2R* i radi de la base *R*, coincideix amb el volum del cilindre circumscrit a l'esfera de radi *R*. Per tant:

$$\text{Volum}_{\text{esfera}} = \text{Volum}_{\text{cilindre}} - \text{Volum}_{\text{con}} \Rightarrow$$

Volum $_{\text{esfera}}$ = $\pi R^2(2R) - \dfrac{\pi R^2(2R)}{3} = \dfrac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Hi ha demostracions més rigoroses que avalen aquest resultat experimental que hem descrit. Així per exemple, el volum de l'esfera es pot obtindre com a suma dels volums de piràmides que la recobreixen, totes elles de base triangular sobre la superfície de l'esfera i amb vèrtex en el centre de la mateixa.



Activitats proposades

30. (CDI Madrid 2008) El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 *m* d'altura i 2 *m* de diàmetre. Irene ha telefonat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit només queden 140 litres.

a. Quin és, en dm^3, el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).

b. Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?

31. Comprova que el volum de l'esfera de radi 4 *dm* sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 8 *dm* d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 8 *dm* d'altura i 4 *dm* de radi de la base.

2.4. Longituds, àrees i volums de poliedres regulars

Recorda que:

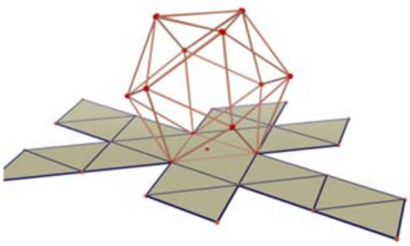
Un poliedre regular és un poliedre en què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals.

Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre

Àrea total d'un poliedre regular.

Com les cares dels poliedres regulars són iguals, el càlcul de l'àrea total d'un poliedre regular es redueix a calcular l'àrea d'una cara i després multiplicar-la pel nombre de cares.

Activitats resoltes



- *Calcula l'àrea total d'un icosàedre de 2 cm d'aresta.*

Totes les seues cares són triangles equilàters de 2 *cm* de base. Calculem l'altura *h* que divideix a la base en dos segments iguals

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Per tant l'àrea d'una cara és:

$A_{triangle} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 i per tant Àrea icosàedre = $20\sqrt{3} cm^2$

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. INICIACIÓ A LA GEOMETRIA ANALÍTICA

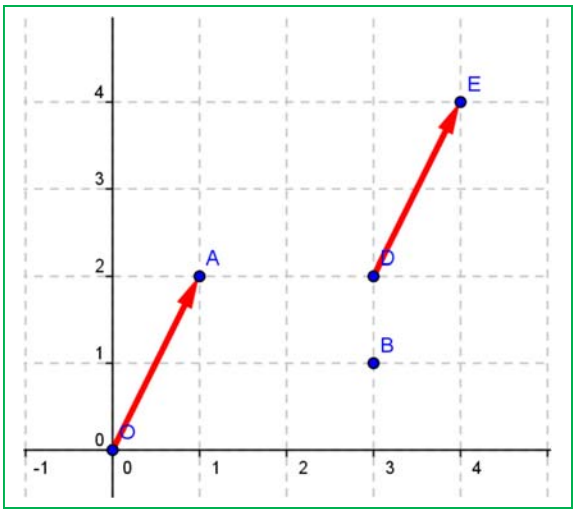
3.1. Punts i vectors

Al pla

Ja saps que

Un conjunt format per **l'origen** *O*, els dos eixos **de coordenades** i la **unitat de mesura** és un **sistema de referència cartesià**.

Les **coordenades d'un punt** *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, y)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** i "***y***" la segona coordenada o **ordenada**.



Donats dos punts, $D(d_1, d_2)$ i $E(e_1, e_2)$, les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per $\mathbf{DE}=(e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.

Exemple:

Les coordenades dels punts, de la figura són:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) i *E*(4, 4)

Les components del vector ***DE*** són

$$\mathbf{DE} = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

Les components del vector ***OA*** són:

$$\mathbf{OA} = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2).$$

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2).

A l'espai de dimensió tres

Les **coordenades d'un punt** *A* són una terna ordenada de nombres reals **(*x*, y, *z*)**, sent "***z*" *l'altura*** sobre el pla *OXY*.

Donats dos punts, $D(d_1, d_2, d_3)$ i $E(e_1, e_2, e_3)$, les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per $\mathbf{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Exemple:

Les coordenades de punts en l'espai són:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4)

Les components del vector ***DE*** són: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3)

Les components del vector ***OA*** són: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2, 3)

Activitats proposades

32. Representa en un sistema de referència a l'espai de dimensió tres els punts:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4) i vectors: ***DE*** i ***OA***.

33. El vector de components ***u*** = (2, 3) i origen *A* = (1, 1), quin extrem té?

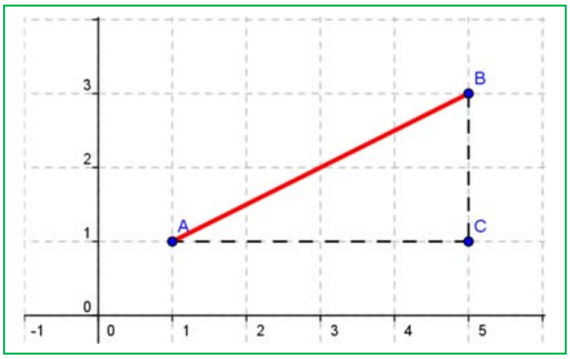
3.2. Distància entre dos punts

Al pla

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ és:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Exemple:



Pel Teorema de *Pitàgores* sabem que la distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1)$ i $B = (5, 3)$ és igual a:

$$D^2 = (5 – 1)^2 + (3 – 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

ja que el triangle *ABC* és rectangle de catets 4 i 2.

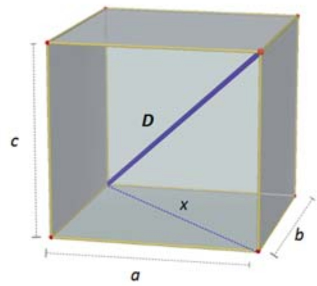
Per tant $D \approx 4{,}47$.

A l'espai de dimensió tres

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ és igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Exemple:



La distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1, 2)$ i $B = (5, 3, 8)$ és igual, pel Teorema de *Pitàgores* a l'espai, a

$D^2 = (5 – 1)^2 + (3 – 1)^2 + (8 – 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Per tant $D \approx 7{,}5$.

Activitats proposades

34. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$.

35. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$.

36. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

37. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

38. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $O(0, 0)$ i $A(3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

39. Dibuixa un cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(3, 3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

40. Siga $X(x, y)$ un punt genèric del pla, i $O(0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D.

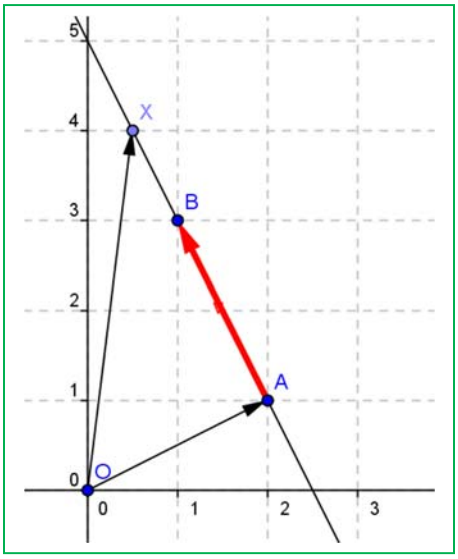
41. Siga $X(x, y, z)$ un punt genèric de l'espai, i $O(0, 0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D.

3.3. Equacions i rectes i plans

Equacions de la recta al pla.

Ja saps que **l'equació d'una recta** al pla és: $y = mx + n$. És l'expressió d'una recta com a funció. Aquesta equació es denomina **equació explícita** de la recta.

Si passem tot al primer membre de l'equació, ens queda una equació: $ax + by + c = 0$, que es denomina **equació implícita** de la recta.



Equació vectorial: També una recta queda determinada si coneixem un punt: $A(a_1, a_2)$ i un vector de direcció $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector ***OX*** pot escriure's com a suma del vector ***OA*** i d'un vector de la mateixa direcció que ***v***, *t**v***. És a dir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

on a *t* se li denomina paràmetre. Per a cada valor de *t*, es té un punt diferent de la recta. Amb coordenades quedaria:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

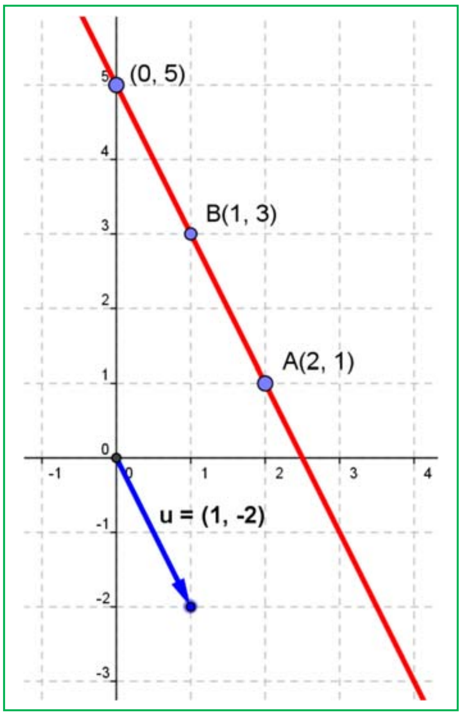
que és **l'equació paramètrica** de la recta.

Activitats resoltes

- *De la recta d'equació explícita* $y = -2x + 5$, coneixem el pendent, -2, i l'ordenada a l'origen, 5. El pendent ens dóna un vector de direcció de la recta, en general $(1, m)$, i en aquest exemple: $(1, -2)$. L'ordenada a l'origen ens proporciona un punt, en general, el $(0, n)$, i en aquest exemple, $(0, 5)$. L'equació paramètrica d'aquesta recta és:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

La seua equació implícita és: $-2x - y + 5 = 0$.



- *Escriu l'equació paramètrica de la recta* que passa pel punt $A(2, 1)$ i té com a vector de direcció $\boldsymbol{v} = (1, 2)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escriu l'equació de la recta* que passa pels punts $A(2, 1)$ i $B(1, 3)$. Podem prendre com a vector de direcció el vector $\boldsymbol{AB} = (1-2, 3-1) = (-1, 2)$, i escriure la seua equació paramètrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

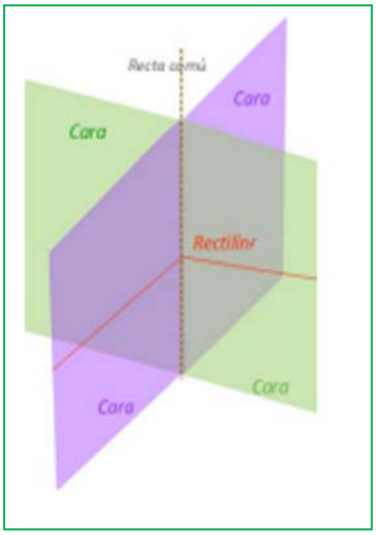
La recta és, als tres exemples, la mateixa, la de la figura. Amb això podem observar que una recta pot tindre moltes equacions paramètriques depenent del punt i del vector de direcció que es prenga. Però eliminant el paràmetre i aïllant "*y*" arribem a una única equació explícita.

Activitats proposades

42. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

Equacions de la recta i el pla en l'espai.

L'equació implícita **d'un pla** és :ax +*by* + *cz* + d =*0* . Observa que és pareguda a l'equació implícita de la recta però amb una component més.



L'**equació vectorial d'una recta** a l'espai és: ***OX*** = ***OA*** + ***tv***, aparentment igual a l'equació vectorial d'una recta al pla, però en escriure les coordenades, ara punts i vectors té tres components:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta també pot vindre donada com a intersecció de dos plans:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos punts determinen una recta i tres punts determinen un pla.

Activitats resoltes

- *Escriu l'equació de la recta en l'espai que passa pels punts A(1, 2, 3) i B(3, 7, 1).*

Prenem com a vector de direcció de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) i com a punt, per exemple el *A*, llavors:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podem trobar les equacions de dos plans que es tallen en dita recta, eliminant *t* en dues equacions. Per exemple, sumant la primera amb la tercera es té: $x + z = 4$. Multiplicant la primera equació per 5, la segona per 2 i restant, es té: $5x - 2y = 1$. Per tant una altra equació de la recta, com a intersecció de dos plans és:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escriu l'equació del pla que passa pels punts A i B de l'activitat anterior, i C(2, 6, 2).*

Imposem a l'equació $ax + by + cz + d = 0$ que passe pels punts donats:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restem a la segona equació la primera, i a la tercera, també la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multipliquem per 2 la tercera equació i li restem la segona:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Ja coneixem un coeficient, $b = 0$. Ho substituïm a les equacions:

$a + 3c + d = 0$

$a \; - c = 0$

Veiem que $a = c$, que substituït a la primera: $4c + d = 0$. Sempre, en tindre 3 equacions i 4 coeficients, tindrem una situació com l'actual, en que la podem resoldre excepte un factor de proporcionalitat. Si c=1, llavors $d = -4$. Per tant $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ i $d = -4$. És el pla d'equació:

$$x + z = 4$$

pla que ja havíem obtingut a l'activitat anterior.

Activitats proposades

43. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

44. Escriu les equacions dels tres plans coordenats.

45. Escriu les equacions dels tres eixos coordenats a l'espai.

46. En el cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(6, 6, 6)$ escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

3.4. Algunes equacions

Activitats resoltes

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 = 1$?

Depèn! Depèn de si estem en un pla o a l'espai.

Al pla, podem veure l'equació com que el quadrat de la distància d'un punt genèric *X*(*x*, *y*) a l'origen *O*(0,0) és sempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lloc de tots els punts del pla que disten 1 de l'origen és la circumferència de centre *O*(0, 0) i radi 1.

A l'espai el punt genèric *X*(*x*, *y*, *z*) té tres coordenades, i *O*(0, 0, 0), també. No és una circumferència, ni una esfera. I què és? El que està clar és que si tallem pel pla *OXY*, (*z* = 0) tenim la circumferència anterior. I si tallem pel pla *z* = 3? També una circumferència. És un cilindre. El cilindre d'eix, l'eix vertical, i de radi de la base 1.

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ara sí. Sí que podem aplicar la distància d'un punt genèric *X*(*x*, *y*, *z*) a l'origen *O*(0, 0, 0),

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

És l'equació de la superfície esfèrica de centre l'origen i radi 1.

Activitats proposades

47. Escriu l'equació del cilindre d'eix l'eix OZ i radi 2.

48. Escriu l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi 2.

49. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ i radi 1.

50. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre *A*(2, 5) i radi 2.

51. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

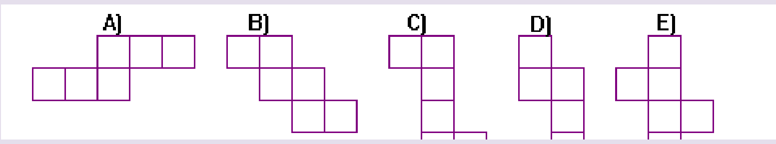
CURIOSITATS. REVISTA

Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

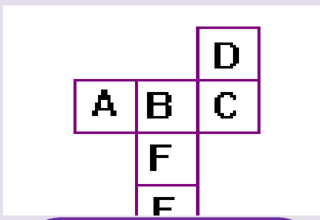
Grace Chisholm Young va nàixer el 15 de març de 1868, prop de Londres, Anglaterra, durant el regnat de la reina Victòria. Per a fer-nos una Idea sobre l'estat de l'educació en aqueixa època recordem que cap a 1881, el 20 % de la població d'Anglaterra encara no sabia escriure el seu nom. Era la més xicoteta de quatre germans (tres supervivents) i també la més consentida. Només li ensenyaven el que volia aprendre i en aquest sentit la seua educació va ser un tant informal. Li agradava el càlcul mental i la música. No obstant això va ser una preparació suficient per a, als 17 anys, passar els exàmens de *Cambridge* (*Cambridge Senior Examination*). Va estudiar Matemàtiques però per a doctorar-se va anar a *Göttingen* on es va doctorar en 1895. En 1896 es va casar amb *William Young* amb el que va tindre sis fills. Va ocupar molt del seu temps en l'educació dels seus fills.

Va escriure llibres i molts articles. Va escriure ***Primer llibre de Geometria*** En ell *Grace* escrivia que la geometria en dimensió tres rebia, en primària i en secundària, molta menys atenció que la geometria al pla. Opinava que açò no havia de ser així perquè *"en un cert sentit la geometria plana és més abstracta que la tridimensional"*, perquè considerava que la geometria tridimensional era més natural. Però admetia, no obstant això, molt difícil representar figures tridimensionals en una superfície bidimensional com és una pàgina d'un llibre, i considerava que aquesta era la raó per la no es treballava (i actualment tampoc es treballa) adequadament. *Grace* opinava que l'alumnat havia de construir figures espacials, per la qual cosa va incloure al seu llibre molts diagrames de figures tridimensionals per a ser retallats i construïts. Opinava que aqueixa era la forma en què l'alumnat havia de familiaritzar-se amb les propietats d'aquestes figures i que utilitzant-les, amb la seua ajuda, podia visualitzar els teoremes de la geometria tridimensional

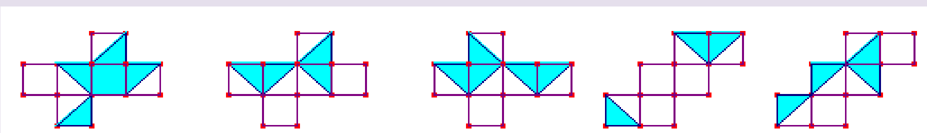
Quina de les figures següents no representa el desenvolupament d'un cub?



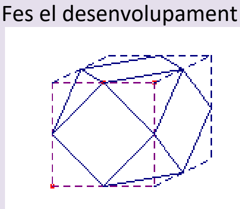
En fer un cub amb el desenvolupament de la figura, quina serà la lletra oposada a F?



A partir d'un d'aquets desenvolupaments bicolors, es pot fabricar un cub, de forma que els colors sigan els mateixos en les dues parts de cadascuna de les arestes. Quin d'ells ho verifica?

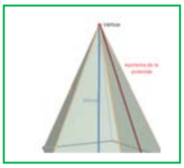


Fes el desenvolupament



Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

		Exemples
Teorema de Pitàgores a l'espai	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	a= 2, b = 3, c = 4, doncs D^2 = 4 + 9 + 16 = 29 D = $\sqrt{29}$ = 5,4.
Teorema de Tales:	Donades dues rectes, *r* i *r'*, que és tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. Si la recta *a* talla als rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla als rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*, llavors els segments corresponents són proporcionals	
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre en què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre	
Prismes	$A_{Lateral} = Perímetre_{Base} \cdot Altura A_{total} = Àrea_{Lateral} + 2Àrea_{Base}$ $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Piràmides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{piràmide}}{2} A_{total} = Àrea_{lateral} + Àrea_{Base} Volum = \frac{Àrea_{Base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindre	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volum = Àrea_{Base} \cdot Altura$	
Con	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volum = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Equacions de la recta al pla	**Equació explícita:** $y = mx + n$. **Equació implícita:** $ax + by + c = 0$ **Equació paramètrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Equacions de la recta i el pla a l'espai.	**Equació implícita d'un pla**: $ax + by + cz + d = 0$ **Equació paramètrica d'una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Teorema de *Pitàgores* i teorema de *Tales*

1. Calcula el volum d'un tetràedre regular de costat 7 *cm*.

2. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 *m*.

3. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 *cm* i altura 6 *cm*.

4. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesuren 4 *cm*, 5 *cm* i 6 *cm* que no siga un ortoedre. Dibuixa també el seu desenrotllament.

5. Si el paral·lelepípede anterior fora un ortoedre, quant mesuraria la seua diagonal?

6. Un got d'11 *cm d'altura* té forma de tronc de con en què els radis de les bases són de 5 i 3 *cm*. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobreïsca del got almenys 2 *cm*?

7. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 *cm*, 3 *cm* i 12 *cm* un bolígraf de 13 *cm* de longitud?

8. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 *cm* i l'altura del prisma 8 *cm*.

9. Si un ascensor medeix 1,2 *m* d'ample, 1,6 *m* de llarg i 2,3 *m* d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 *m* d'altura?

10. Quina és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 *m* d'ample, 8 *m* de llarg i 4 *m* d'altura?

11. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seua diagonal medeix 3,46 *cm*.

12. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases de la qual tenen radis 5 *cm* i 2 *cm*, i altura 10 *cm*.

13. En una pizzeria la pizza de 15 *cm* de diàmetre val 2 € i la de 40 *cm* val 5 €. Quina té millor preu?

14. Veiem en el mercat un lluç de 30 *cm* que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

15. En un dia fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

Longituds, àrees i volums

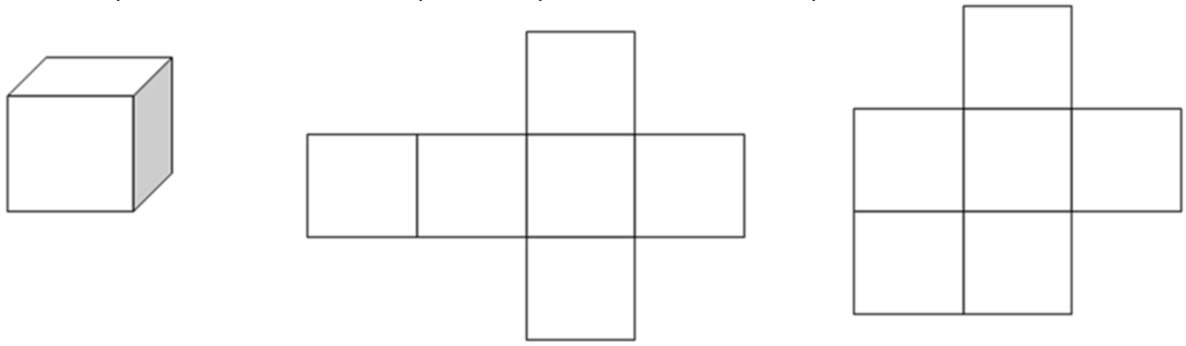
16. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els desenrotllaments següents:

17. Podrà existir un poliedre regular les cares del qual siguen hexagonals? Raona la resposta.

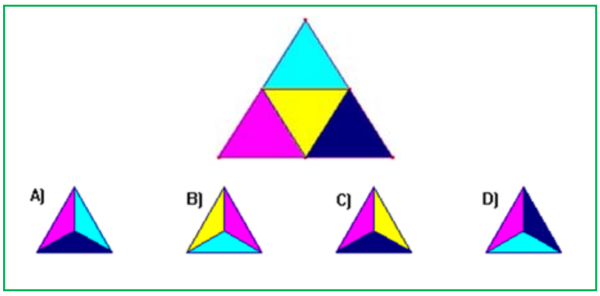
18. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?

19. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetràedre? I en cada un dels restants poliedres regulars?

20. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i busca tots els dissenys de sis quadrats que se t'acudisquen. Decideix quins poden servir per a construir un cub.



21. El triangle de la figura s'ha plegat per a obtindre un tetràedre. Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere, quina de les següents vistes en perspectiva del tetràedre és falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 *dm* i 4 *dm*. Calcula les àrees lateral i total del prisma.

23. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tinga 3 *cm* d'aresta basal i 0.9 *dm* d'altura i calcula les àrees de la base i total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.

25. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 2,7 *dm*, 6,2 *dm* i 80 *cm*.

26. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 7 *m* d'altura i 3 *cm* de radi de la base.

27. Calcula l'àrea total d'una esfera de 7 *cm* de radi.

28. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seua àrea lateral és de 150 cm^2 i la seua base és un hexàgon de 4 *cm* de costat.

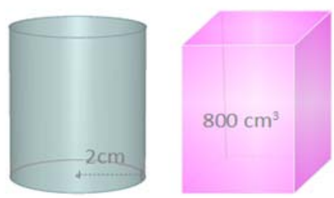
29. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 36 *dm* i l'altura de la piràmide és de 6 *dm*. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.

30. Un triangle rectangle de catets 12 *cm* i 16 *cm* gira al voltant del seu catet menor generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.

31. Tres boles de metall de radis 15 *dm*, 0,4 m i 2 *m* es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?

32. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric de 1,50 *m* de diàmetre i 30 *m* de profunditat?

33. Quant cartó necessitem per a construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesure 12 *cm* i que la seua altura siga de 15 *cm*?



34. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 *cm* de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 *cm* de costat i 800 cm^3 de volum.

35. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre de 1,50 *m* d'alt i 135 dm^3 de volum?

36. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 10 *m* de radi de la base i 20 *m* d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplin amb cada dipòsit?

37. Calcula la quantitat de cartolina necessària per a construir un anell de 10 tetraedres cada un dels quals té un centímetre d'aresta.

38. En fer el desenrotllament d'un prisma triangular regular de 5 *dm* d'altura, va resultar un rectangle d'un metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

39. Determina la superfície mínima de paper necessària per a embolicar un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de costat de la base i 5 *cm* d'altura.

40. L'ajuntament de Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es diposita la terra, té 80 *cm* de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 *cm*. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.

41. Una habitació té forma d'ortoedre i les seues dimensions són directament proporcionals als nombres 2, 4 i 8. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 17,3 *m*.

42. Un ortoedre té 0,7 *dm* d'altura i 8 dm^2 d'àrea total. La seua longitud és el doble de la seua amplària, quin és el seu volum?

43. Si el volum d'un cilindre de 15 *cm* d'altura és de 424 cm^3, calcula el radi de la base del cilindre.

44. **(CDI Madrid 2011)** Han instal·lat a casa de Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m^3. b) Quants litres d'aigua caben al dipòsit?

45. (**CDI Madrid 2012**) Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 *cm* de costat. a) Quin és, en cm^3, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

46. Una circumferència de longitud 18,84 *cm* gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum.

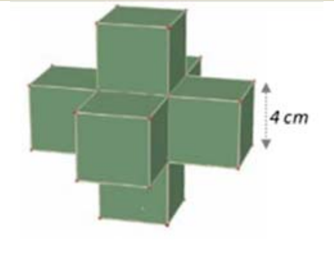
47. Una porta mesura 1,8 *m* d'alt, 70 *cm* d'ample i 3 *cm* de grossària. El preu d'instal·lació és de 100 € i es cobra 5 € per m^2 en concepte d'envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 280 € cada m^3. Calcula el cost de la porta si només es realitza l'envernissat de les dues cares principals.

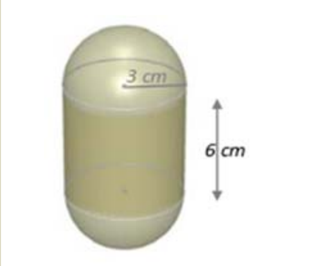
48. L'aigua continguda en un recipient cònic de 21 *cm* d'altura i 15 *cm* de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 15 *cm* de diàmetre de la base. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

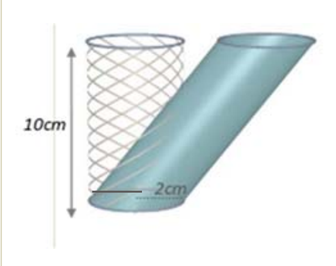
49. Segons Arquimedes, quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 7 *cm* de radi que té la seua mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

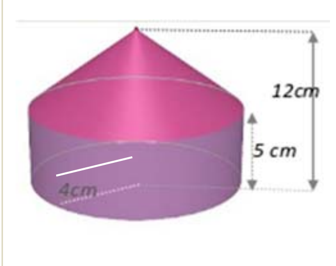
50. Quin és el volum d'una esfera en què la longitud d'una circumferència màxima és 251,2 *m*?

51. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics:

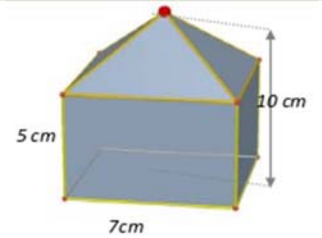




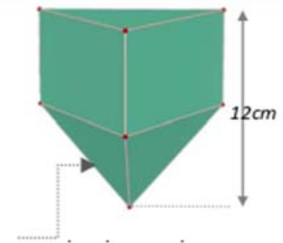




52. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



La base és quadrada



Tetràedre de 5cm d'aresta

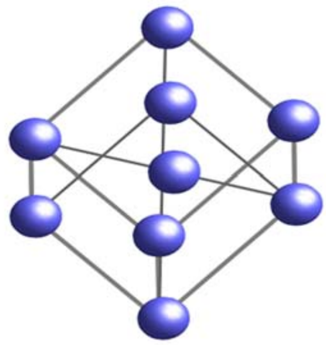
Octàedre de 6cm d'aresta

Piràmides construïdes a l'interior d'una estructura cúbica de 5 dm d'aresta.

53. A la construcció d'un globus aerostàtic esfèric d'un metre de radi s'empra lona que té un cost de 300 €/m^2. Calcula l'import de la lona necessària per a la seua construcció.

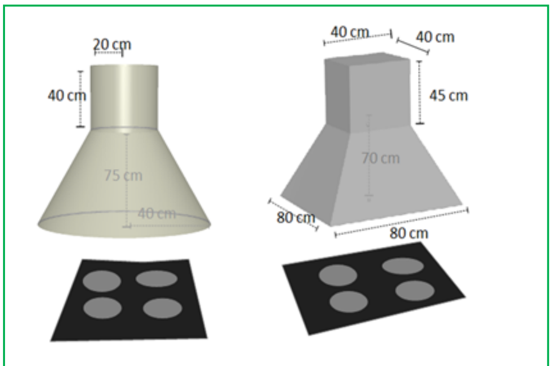
54. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm^3 de volum.

55. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reprodueix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



56. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm^2, quants diners ha costat en total?

57. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.



Quants litres d'aigua són necessaris per a omplir-la?

Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/ m^2?

58. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

59. En un atuell cilíndric de 3 *m* de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,5 *m* el nivell de l'aigua?

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

60. El preu de les teules és de 12,6 €/m^2 Quant costarà reparar una vivenda la teulada de la qual té forma de piràmide quadrangular regular de 1,5 *m* d'altura i 15 m de costat de la base?

61. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 40 *cm* i 26 *cm* formant cilindres de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

62. Cada un dels cubs de la figura té 2 *cm* d'aresta. Quants cal afegir per a formar un cub de 216 cm^3 de volum?

63. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert a la part superior i rematat per una semiesfera a la inferior. Si el radi de la base és d'1 *cm* i l'altura total és de 12 *cm*, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

64. El costat de la base de la piràmide de Keops mesura 230 *m*, i la seua altura 146 *m*. Quin volum tanca?

65. La densitat d'un tap de suro és de 0,24, quant pesen mil taps si els diàmetres de les seues base mesuren 2,5 *cm* i 1,2 *cm*, i la seua altura 3 *cm*?

66. Comprova que el volum d'una esfera és igual al del seu cilindre circumscrit menys el del con de la mateixa base i altura.

67. Calcula el volum d'un octaedre regular d'aresta 2 *cm*.

68. Construeix en cartolina un prisma quadrangular regular de volum 240 cm^3, i d'àrea lateral 240 cm^2.

69. El vidre d'un fanal té forma de tronc de con de 40 *cm* d'altura i bases de radis 20 i 10 *cm*. Calcula la seua superfície.

70. Un bot cilíndric de 15 *cm* de radi i 30 *cm* d'altura té al seu interior quatre pilotes de radi 3,5 *cm*. Calcula l'espai lliure que hi ha al seu interior.

71. Un embut cònic de 15 *cm* de diàmetre té un litre de capacitat, quina és la seua altura?

72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 30 *dm* de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després de mitja hora?

73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular de 0,5 *m* d'altura i 40 *cm* de costat de la base. Es fixa un pal al sòl en què s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl de 1,80 *m*. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quina àrea té l'espai d'ombra que determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'ompli amb 65 litres d'aigua. Si té 65 *cm* de llarg i 20 *cm* d'ample, quina és la seua profunditat?

75. En un gelat de cucurutxo la galeta té 12 *cm* d'altura i 4 *cm* diàmetre. Quina és la seua superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreïx una semiesfera perfecta, quants cm^3 de gelat conté?

Iniciació a la Geometria Analítica

76. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3)$ i $B(2, 5)$.

77. Calcula la distància entre els punts $A(7, 3, 4)$ i $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ té l'origen al punt $A(3, 7)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

81. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ té l'origen al punt $A(3, 7, 5)$. Quines són les coordenades del seu punt extrem?

82. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $A(2, 3)$ i $C(5, 6)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

83. Dibuixa un cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(4, 4, 4)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

84. Siga $X(x, y)$ un punt del pla, i $A(2, 4)$, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.

85. Siga $X(x, y, z)$ un punt a l'espai, i $A(2, 4, 3)$, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de A una distància 3.

86. Escriu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt $A(2, 7)$ i té com a vector de direcció $\boldsymbol{u}=(4,5)$. Representa-la gràficament.

87. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 7)$ i $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

88. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(2, 4, 6)$ i $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

89. Al cub de diagonal $A(1, 1, 1)$ i $B(5, 5, 5)$ escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu també les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

90. Escriu l'equació del cilindre d'eix $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ i radi 3.

91. Escriu l'equació de l'esfera de centre $A(2, 7, 3)$ i radi 4.

92. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ i radi 2.

93. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre $A(3, 7)$ i radi 3.

94. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

AUTOAVALUACIÓ

1. Les longituds dels costats del triangle de vèrtexs $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ i $C(0, 3)$ són:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. Al triangle rectangle de catets 3 i 4 *cm* es multipliquen per 10 totes les seues longituds. L'àrea del nou triangle és:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. L'altura d'un prisma de base quadrada és 20 *cm* i el costat de la base és 5 *cm*, la seua àrea total és:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* d'altura i costat de la base 1 *m*. El volum d'aigua que hi ha en ell és:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $90\sqrt{2}$ m^3

5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 0,5 *m* d'altura i 1000 *cm* de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per a recobrir la teulada, s'utilitzen un total de:

a) 1051 teules. b) 150 teules. c) 245 teules. d) 105 teules.

6. Una caixa de dimensions 30, 20 i 15 *cm*, està plena de cubs d'1 *cm* d'aresta. Si s'utilitzen tots per a construir un prisma recte de base quadrada de 10 *cm* de costat, l'altura mesurarà:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 *dm* de radi de la base i 120 *cm* d'altura és:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llandes cilíndriques de 15 *cm* d'altura i 3 *cm* de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

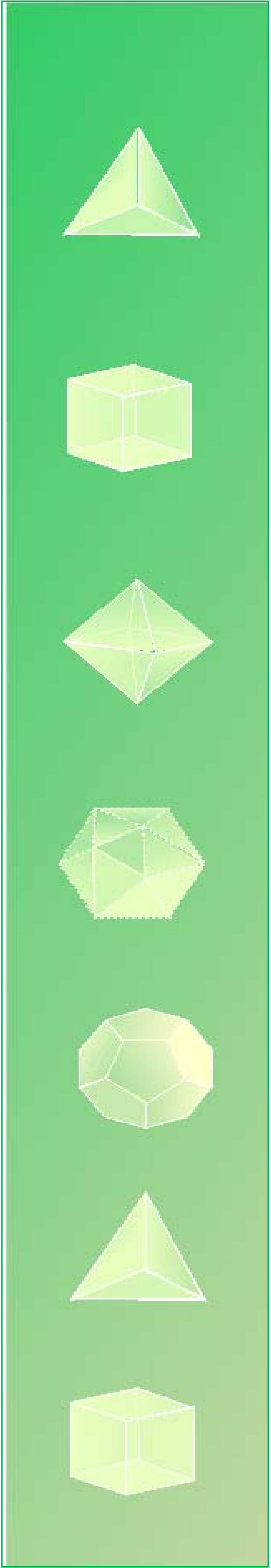
9. L'equació d'una recta al pla que passa pels punts $A(2, 5)$ i $B(1, 3)$ és:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. L'equació de l'esfera de centre A(2, 3, 5) i radi 3 és:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$



Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO
Capítol 6:
Funcions i gràfiques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

La Ciència utilitza models, i molts models s'aconsegueixen ajustant una funció a una taula de valors. Per exemple, en aquest moment estem ajustant unes paràboles a la relació entre la duració del desenrotllament en dies i la temperatura dels diferents estadis de la cotxinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que és una plaga que ataca als cítrics produint des de la mort de l'arbre a la seua desvaloració comercial, i dels seus enemics naturals, com els del gènere *Aphytis*, que davall certes condicions poden arribar a regular les poblacions de tal forma que no facen falta utilitzar altres mesures addicionals de control com a insecticides.

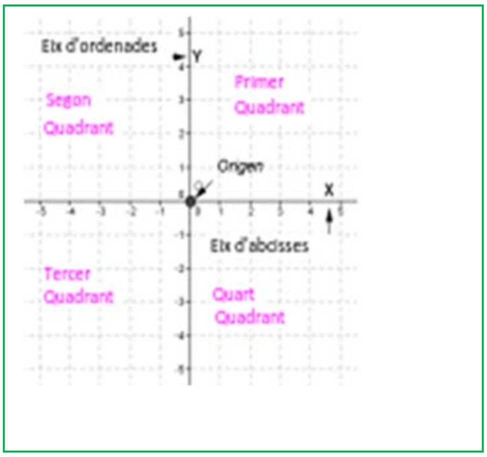
Una vegada aconseguida una funció que s'ajuste a una taula de valors es pot pronosticar el que ocorrerà o donar valors que no es coneixien prèviament.

Ajustar models mitjançant funcions que servisquen en les situacions més variades és una de les seues aplicacions més importants.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. FUNCIONS

1.1. Eixos de coordenades o cartesians. Coordenades cartesianes

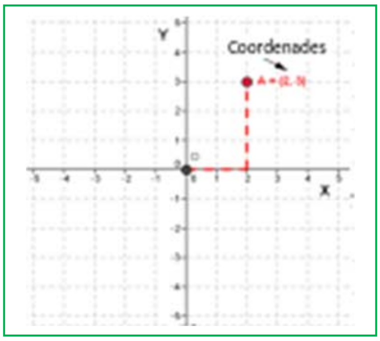


Recorda que:

Un conjunt format per **l'origen** *O*, els dos **eixos de coordenades** i la **unitat de mesura** és un **sistema de referència cartesià**.

Les **coordenades** d'un punt *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, *y*)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** i "y**"** la segona coordenada o **ordenada**. A tota parella ordenada de nombres (*x*, *y*) li correspon un punt del pla.

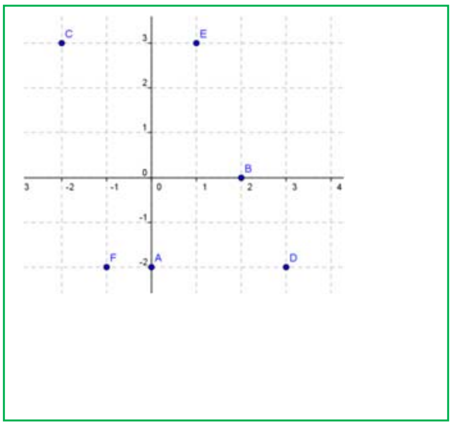
També qualsevol punt del pla queda totalment determinat mitjançant les seues coordenades.



Exemple:

- Al gràfic anterior, el punt *A* té coordenades (2, 3).

Activitats proposades



1. Copia al teu quadern i indica les coordenades de tots els punts que estan assenyalats al pla:

2. Representa gràficament al teu quadern els següents punts del pla: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepte intuïtiu de funció

Ja saps que:

Hi ha multitud de fenòmens a la nostra vida quotidiana en què apareixen relacionades dues magnituds. Per exemple, el preu d'un quilo de pomes i el nombre de quilos que comprem, la duració d'un trajecte i la velocitat a què anem…

Una **funció** és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una, anomenada **variable independent** ("*x*"), li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra, anomenada **variable dependent** ("*y*").

Observa que si a un mateix valor de *x* li corresponen dues o més valors de *y*, aleshores la relació **no** és una funció. En canvi, al revés, en una funció un mateix valor de *y* sí que pot provindre de distints valors de *x*.

Les relacions funcionals es poden establir mitjançant una taula de valors, una gràfica o una expressió matemàtica o fórmula.

Exemple:

- Un quilo de tomaques costa 0,8 €/kg. La funció que estableix quant hem de pagar en funció de la quantitat de tomaques que ens emportem és $y = f(x) = 0,8\ x$.

A l'expressió $y = f(x)$, ***f*** és el nom que li posem a la **funció**, (podríem anomenar-la usant altres lletres, les que s'usen més sovint són "*f*", "*g*" i "*h*").
Entre parèntesis va la variable "***x***" que representa el nombre de quilos que comprem, és la **variable independent** ja que nosaltres triem lliurement la quantitat de tomaques que volem o necessitem. La variable "***y***" representa el preu que hem de pagar, és la **variable dependent** ja que "depèn" de quants quilos ens emportem, és a dir, de "*x*".

L'expressió, ***f*(*x*)**, que es llig "*f* de *x*", se sol usar amb molta freqüència per a designar a la variable dependent perquè resulta molt còmode escriure quant ens costaria comprar una quantitat concreta, per exemple, 5 kg, s'expressaria "*f* de 5" i el seu valor és $f(5) = 0,8·5 = 4$ €.

Activitats proposades

3. De les següents relacions entre dos variables, raona quins són funcionals i quins no:

a. Edat i pes d'una persona concreta al llarg de la seua vida
b. Pes i edat d'aqueixa mateixa persona
c. Un nombre i la seua meitat
d. Un nombre i el seu quadrat
e. Preu de la gasolina i el dia del mes
f. Dia del mes i preu de la gasolina

4. Si hui el canvi d'euros a dòlars està 1 € = 1,3 $, completa en el teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdós, en la que, coneixent els euros, s'obtinguen els dòlars. Es pot expressar de forma única la dita relació? És una funció?

Si quan realitzes el canvi en una oficina et cobren una comissió fixa de 1,5 €, com quedaria la fórmula en aquest cas?

1.3. Grafo i gràfica d'una funció

Ja que en tota funció tenim dos valors que es relacionen de forma única, podem dibuixar ambdós als eixos cartesians de manera que, si unim tots aqueixos punts, obtenim una corba que ens permet visualitzar la dita funció.

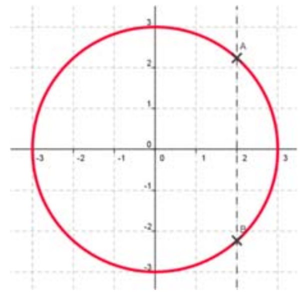
La dita representació té una sèrie de limitacions, moltes d'elles comunes a qualsevol dibuix que es puga fer: és aproximada ja que els instruments que s'utilitzen per a fer-la (regla, compàs, llapis…), per molt precisos que siguen (ordinadors), sempre tenen un marge d'error; també existeixen errades de tipus visual o dels instruments de mesura; o moltes vegades hem de representar els infinits punts del grafo en un espai finit, la qual cosa és impossible i fa que només podem dibuixar una part del que es pretén, però no tot.

A pesar de tots aquests inconvenients, representar gràficament aquesta sèrie de punts relacionats que conformen la funció, encara que siga de forma aproximada, és important, ja que ens permet entendre moltes propietats a simple vista: "val *més una imatge que mil paraules*".

A més, una representació també ens permet descobrir si la mateixa representa a una funció o no, ja que en el dibuix és fàcil interpretar si a un valor de la variable independent li correspon únicament un de la dependent o més de u, propietat fonamental que defineix a les funcions.

Exemple:

- El següent dibuix, que correspon a una circumferència, al valor **0** de la variable independent li corresponen els valors **3** ***i*** –**3** de la dependent. A més, hi ha molts altres valors a què els passa el mateix, com per a *x*= 2, que talla a la gràfica als punts *A* i *B*. La circumferència no pot ser la representació d'una funció.



$x^2 + y^2 = 9$

La fórmula que correspon a dita gràfica és $x^2 + y^2 = 9$ o, també $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

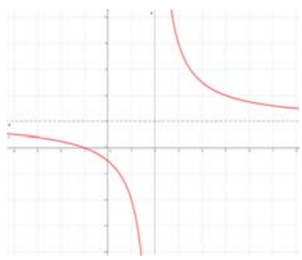
El **grafo d'una funció** és el conjunt de tots els parells ordenats als que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon a què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció:

$$Grafo(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

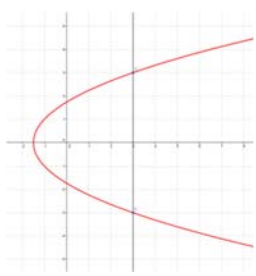
La **gràfica d'una funció** és la representació al pla cartesià de tots els punts que formen el grafo de la mateixa.

Activitat resolta

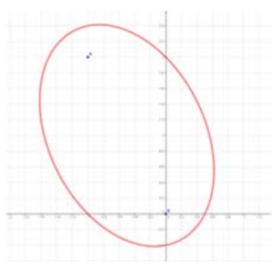
- *Indica quines de les següents gràfiques corresponen a una funció i quines no:*



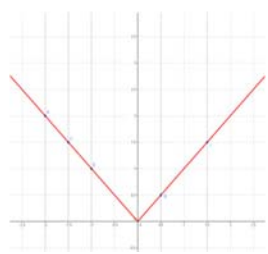
SÍ



NO



NO



SÍ

Quina és la clau o regla per a reconèixer, a partir del dibuix, si aquest correspon a una funció o no?

Si tracem rectes verticals imaginàries i aquestes xoquen amb el dibuix, com a màxim, en un punt, la gràfica correspon a una funció. Si xoca en dues o més punts, no és una funció.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

5. Realitza al teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que corresponga a una funció i una altra que no. Identifica cada una i explica el perquè de la dita correspondència.

6. Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	–	–	1	–	2
f(	–	0	5	4	0

7. Una persona camina a una velocitat de 4 km/h i partix del quilòmetre 10. Escriu l'expressió algebraica de la funció que indica els quilòmetres recorreguts en funció del temps. Assenyala quins són els valors que no té sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això a la gràfica.

8. En un full de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadradet. La seua àrea és 1 u^2. Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5… i calcula les seues àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seua gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Busca una fórmula per a aquesta funció.

9. Per a aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. La tarifa mínima és de 0,50 euros, el temps màxim d'aparcament és de 2 hores, cada mitja hora més costa 0,90 euros, i cada fracció, 0,05 euros. Representa una gràfica de la funció la variable independent de la qual siga el temps que s'espera estarà aparcat el vehicle i la variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.

10. Un fabricant vol construir gots cilíndrics mesuradors de volums, que tinguen de radi de la base 5 cm i d'altura total del got 18 cm. Escriu una fórmula que indique com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeta obtindre l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per a tindre un decilitre?

11. La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Guadarrama:

Quant temps va durar l'excursió?

Quant temps es va descansar? A quines hores?

Quants quilòmetres es van recórrer?

En quins intervals de temps se'n va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?

Fes una breu descripció del desenrotllament de l'excursió.

Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats a la gràfica.

Si a l'eix d'ordenades representàrem la variable "distància al punt de partida", seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?

12. La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components d'un equip de bàsquet, és una relació funcional? Per què? I la relació entre l'edat i l'altura? Escriu tres correspondències que siguen funcionals i tres que no.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

2.1. Domini i continuïtat.

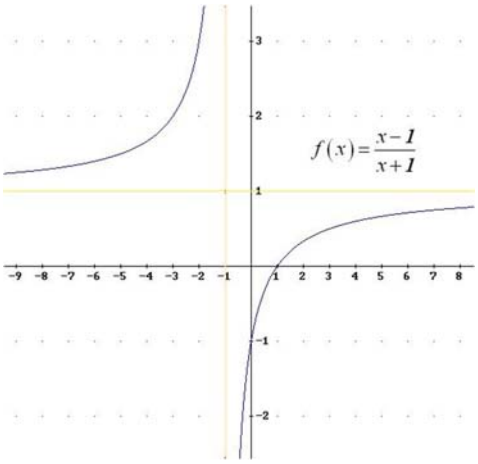
El **domini** d'una funció és el conjunt de punts en què està definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re \mid \exists\, f(x)\}$$

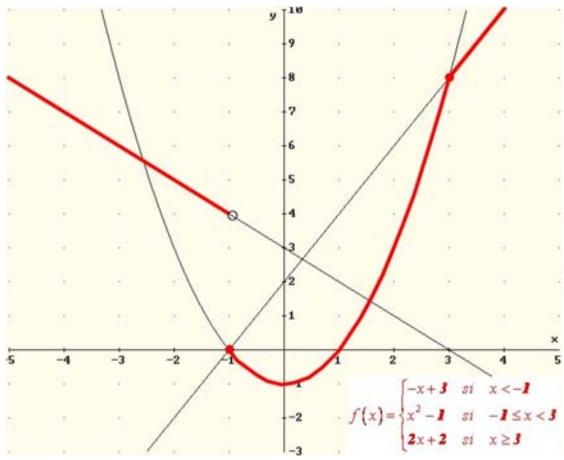
El concepte de **continuïtat** d'una funció és molt intuïtiu ja que es correspon amb que la gràfica es puga dibuixar sense alçar el llapis del paper. Quan açò no ocorre, es produeixen "*bots*" o *"salts"* en determinats punts que reben el nom de discontinuïtats.

Activitat resolta

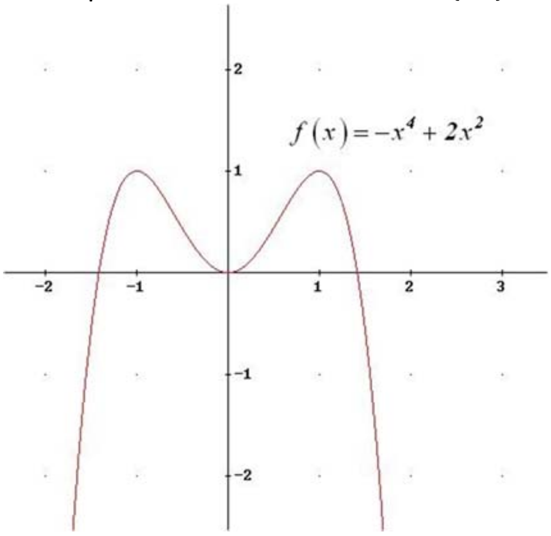
- *Quines funcions són contínues segons la seua gràfica i quines no? Indica en aquestes últimes el/els valor/és de la variable independent on es produeix la discontinuïtat:*



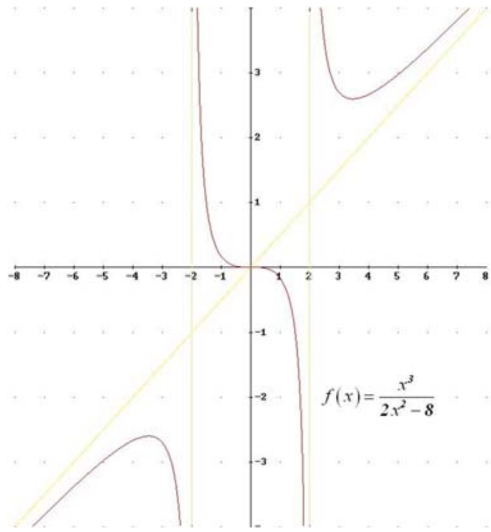
NO és contínua en x = –1 on té un salt infinit. És contínua en la resta dels punts. El seu domini és $\Re$ – {–1}.



NO és contínua en x = –1 on té un salt finit de 4 unitats. A la resta, és contínua.
El seu domini és $\Re$.



SÍ, és contínua per a qualsevol valor de x.
El seu domini és $\Re$.



NO és contínua ni en x = –2 ni en x = 2 on té salts infinits.
És contínua en $\Re$ – {–2, 2}, que és el seu domini.

Textos Marea Verde

2.2. Monotonia: creixement i decreixement.

Una funció és **creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la variable dependent.

Una funció és **decreixent** en un interval si en augmentar el valor de la variable independent disminueix el de la variable dependent.

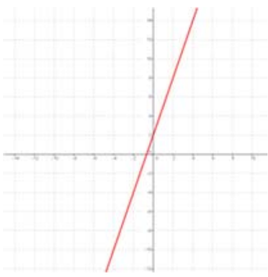
Una funció és monòtona en un interval quan és únicament creixent (o únicament decreixent) al dit interval.

Una funció és constant en un interval quan la variable dependent pren sempre el mateix valor.

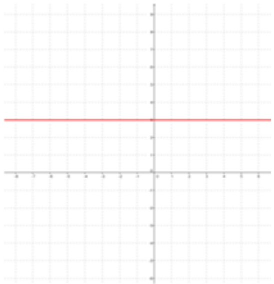
Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

Activitat resolta

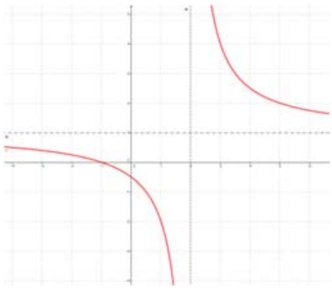
- *Estudia el creixement i el decreixement dels funcions següents:*



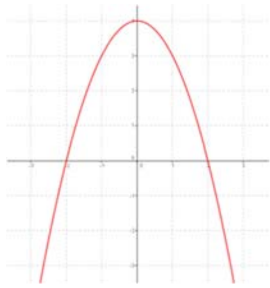
CREIXENT sempre (monòtona)



CONSTANT sempre



DECREIXENT fins a x = 2
DECREIXENT des de x =2



CREIXENT fins a x = 0
DECREIXENT des de x=0

2.3. Taxa de variació

La **taxa de variació** és el que augmenta o disminueix una funció entre dos valors. Es defineix com:

TV = $f(x_2) - f(x_1)$, para $x_2 > x_1$.

Si la funció és creixent en un interval, llavors la taxa de variació és positiva, i si és decreixent, negativa.

La taxa de variació mitjana es defineix com: TVM = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

La TVM és molt important, perquè no és el mateix que una funció varie el seu valor una mateixa quantitat en un interval xicotet que en un interval gran. Per exemple, no és el mateix passar de 0 a 100 km/h en 5 segons que en 20 segons.

Exemple:

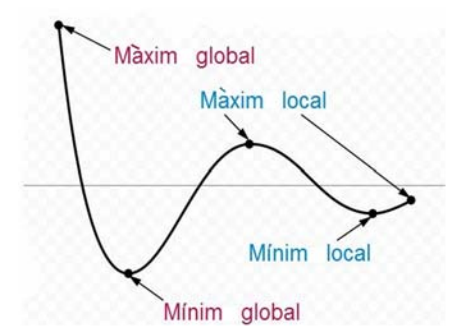
- Al desplaçament d'un vehicle en funció del temps, la taxa de variació, és el que s'ha desplaçat en un interval de temps, i la taxa de variació mitjana indica la velocitat mitjana en aqueix interval de temps.

2.4. Extrems: màxims i mínims

Una funció presenta un **màxim relatiu** (o **màxim local**) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és major que qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*).

(a, $f(a)$) és **màxim relatiu** si $f(a) \geq f(x)$, per a tot $x \in$ Interval

Si, a més, el valor és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció arriba a un **màxim absolut** (o màxim global) en ell.



(a, $f(a)$) és **màxim absolut** si $f(a) \geq f(x)$, per a tot $x \in Dom(f)$

Una funció presenta un **mínim relatiu** (o **mínim local**) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*).

(a, $f(a)$) és **mínim relatiu** si $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in$ Interval

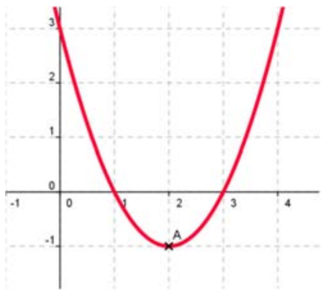
Si, a més, el valor és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció arriba a un **mínim absolut** (o **mínim global**) en ell.

(a, $f(a)$) és **mínim absolut** si $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in Dom(f)$

Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** al dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.

Activitats resoltes

- *Estudia els màxims i mínims de les funcions següents:*

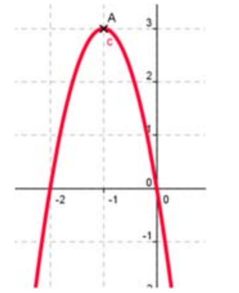


$y = x^2 - 4x + 3$

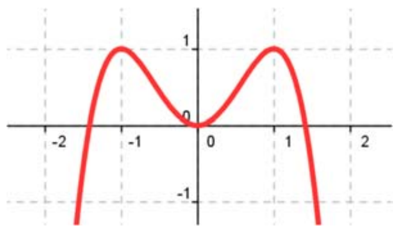
- La paràbola $y = x^2 - 4x + 3$ té un mínim absolut al seu vèrtex (2, –1). No té màxims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex és decreixent i després és creixent.

- La paràbola $y = -3x^2 - 6x$ té un màxim absolut al seu vèrtex (–1, 3). No té mínims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex, per a $x < -1$, la funció és creixent, i després, per a $x > -1$, la funció és decreixent.

Totes les paràboles tenen un màxim o un mínim absolut al seu vèrtex.



$y = -3x^2 - 6x$



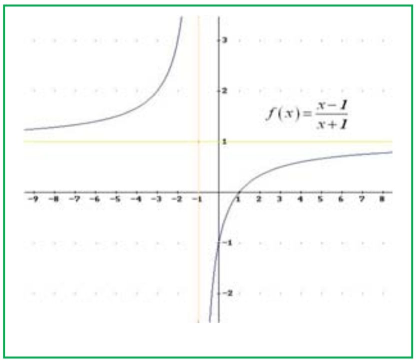
$y = -x^4 + 2x^2$

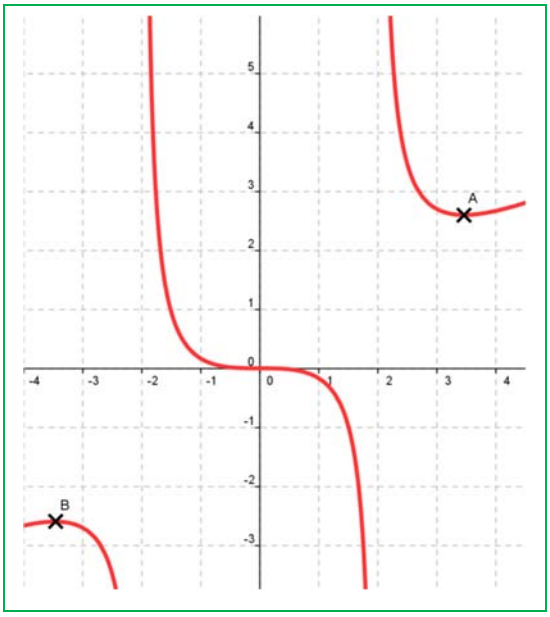
- La funció $y = -x^4 + 2x^2$ té un mínim absolut a l'origen (0, 0) i dos màxims en (1, 1) i en (–1, 1). Per a $x < -1$ és una funció creixent, per a $-1 < x < 0$, és una funció decreixent, per a $0 < x < 1$ és creixent, i per a $x > 1$ és decreixent.

Observa, als **màxims** sempre la funció passa de ser **creixent** a ser **decreixent**, i als **mínims** de ser **decreixent** a ser **creixent**.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- La funció $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ no té ni màxims ni mínims (ni relatius ni absolutis). És una funció sempre creixent.





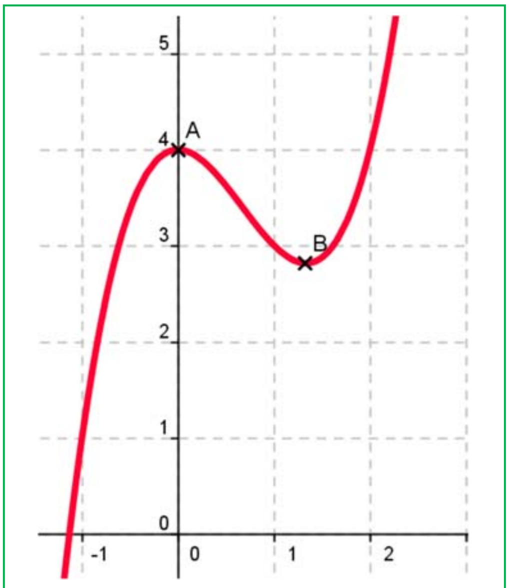
- La gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ no té màxim ni mínim absolut, però té un mínim relatiu cap a x = 3, A(3'46, 2'6), i un màxim relatiu cap a x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínim relatiu, 2'6, és major que la del màxim relatiu, –2'6. Però en valors pròxims al mínim si és el menor valor, per aquest motiu es denominen "*relatiu*", "*local*". No són els valors menors (o majors) als que arriba la funció, però si únicament mirem en un entorn del punt si són valors màxims o mínims.

- La funció $f(x)=x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$ no té cap màxim absolut, però si té dos màxims relatius, un en l'interval (–2, –1) i l'altre en l'interval (0, 1). Té, no obstant això, tres mínims absoluts en els punts (–2, 0), (0, 0) i (1, 0). La funció és sempre positiva i el seu valor mínim absolut és **0**.

***f*(*x*) = x^2 (*x* – 1)^2 (*x* – 2)^2**

La funció

$y=f(x)=x^3-2x^2+4$ no té ni màxims ni mínims absoluts, però té un màxim relatiu en el punt A(0, 4) i un mínim relatiu en el punt B(4/3, 2,8). És creixent per a x < 0, decreixent per a 0 < x < 4/3, i creixent per a x > 4/3.



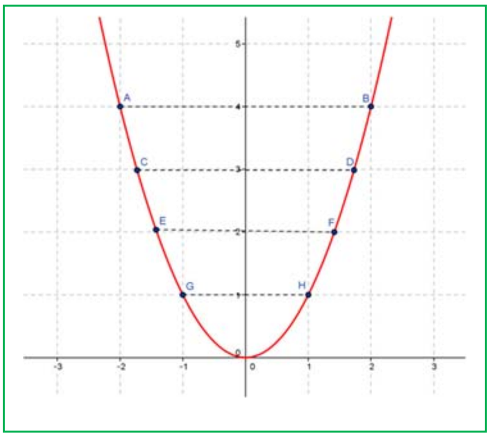
***y* = *f*(*x*) = x^3 – 2x^2 + 4**

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.5. Simetria

Una funció **parell és** aquella en què s'obté el mateix en substituir un nombre que el seu oposat:

$$f(-x) = f(x)$$



Si una funció és parell llavors és **simètrica** respecte a **l'eix d'ordenades**, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

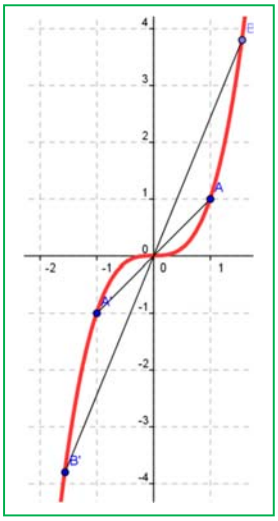
Exemple:

- La funció quadràtica $f(x) = x^2$ és parell:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el contrari en substituir un nombre pel seu oposat:

$$f(-x) = -f(x)$$



Si una funció és imparella llavors és **simètrica** respecte **a l'origen de coordenades**, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-lo cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:

La funció y = x^3 és una funció imparella perquè és simètrica respecte a l'origen.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

El segment *AO* és igual al segment *OA'*, i el segment *BO* és igual al segment *OB'*.

2.6. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què els valors de la funció es repeteixen sempre que se li afig a la variable independent una quantitat fixa, ***T***, anomenada ***període***. Les funcions periòdiques verifiquen que:

$$\boldsymbol{f(x + T) = f(x).}$$

Exemple:

- Un exemple de funció periòdica és el següent, que correspon a un electrocardiograma:

S'observa clarament que la gràfica es repeteix a intervals iguals, ja que els batecs del cor són rítmics.

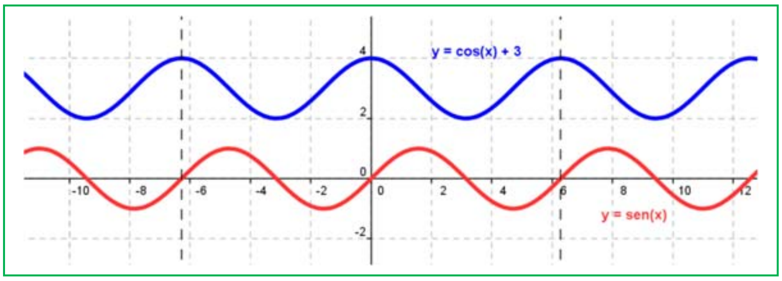
Activitat resolta

- Les funcions:

$$y = sin(x),$$

$$y = cos(x) + 3,$$

són funcions periòdiques. Observa que el seu període és un poc major que 6, és 2·π. En cada interval de longitud 2·π es repeteix una oscil·lació. Verifiquen que.

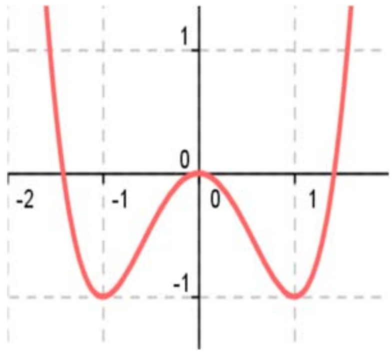


$$sin(x + 2·π) = sin(x), \text{ i que: } cos(x + 2·π) + 3 = cos(x) + 3.$$

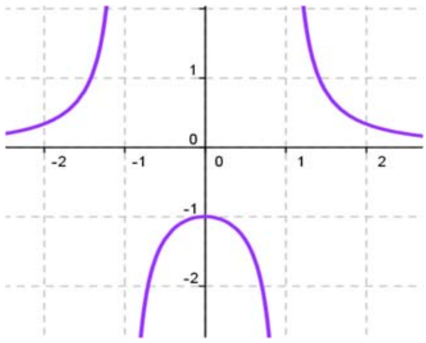
Activitats proposades

13. Copia les següents gràfiques al teu quadern i assenyala totes les característiques que pugues de les funcions representades. Indica el seu domini, si és contínua (o punts de discontinuïtat si els haguera), si és simètrica i tipus de simetria, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, període (si l'haguera)…

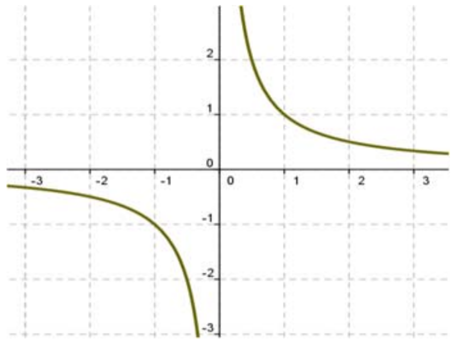
a)



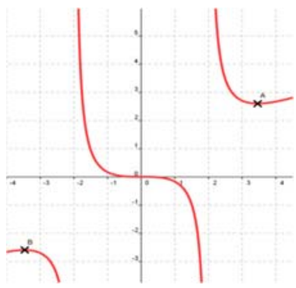
b)



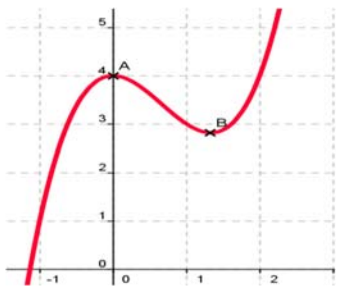
c)



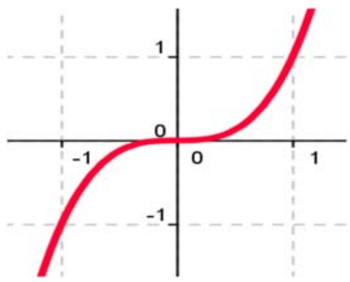
d)



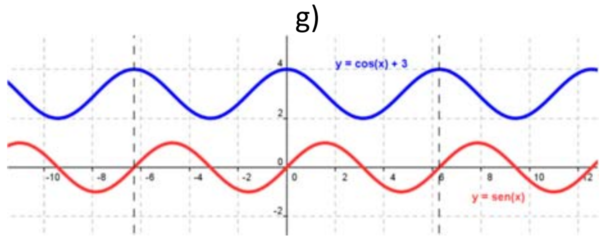
e)



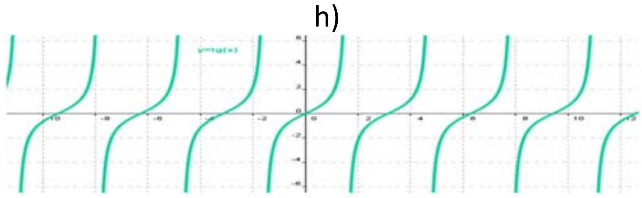
f)



g)



h)



Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. TIPUS DE FUNCIONS

3.1. Funcions polinòmiques de primer grau. La recta

Proporcionalitat directa

Recorda que:

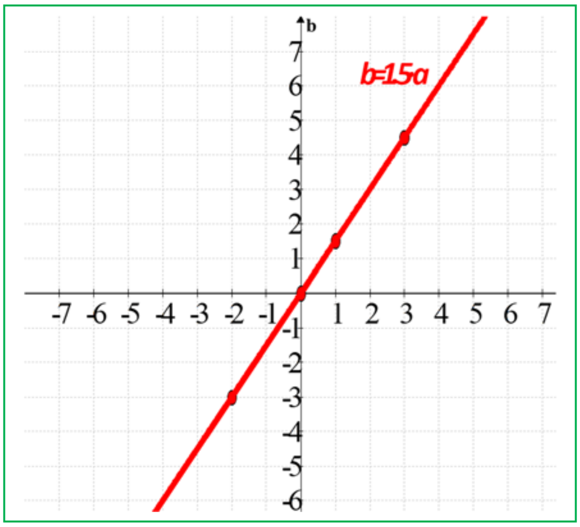
Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:

- Representar gràficament la relació de proporcionalitat donada a la taula següent:

Magnitud A (x)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (y)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-7{,}5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

La relació es defineix així: $y = 1{,}5 \cdot x$.

Recorda que:

La representació gràfica en el pla cartesià de dues **magnituds directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Es pot escriure la relació entre la magnitud A (x) i la magnitud B (y) com y = kx on k és la **raó de proporcionalitat**.

Exemple:

- La relació entre el pes en quilograms i el cost de qualsevol producte, és una proporcionalitat i es representa amb rectes de la forma y = kx, on k és el preu d'un quilo.
- Moltes de les relacions en Física són proporcionals i es representen mitjançant rectes com a espai – temps, pes – densitat , força – massa…

Activitats proposades

14. El consum mitjà d'aigua al dia per habitant és de 150 litres. Representa gràficament el consum d'aigua d'una persona al llarg d'una setmana.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Funció lineal. Rectes de la forma *y* = *m·x*.

Recorda que:

Una **funció lineal** és la que té la fórmula ***y* = *m·x***.

És una funció polinòmica de primer grau a què li falta el terme independent.

Una funció lineal correspon a una relació de proporcionalitat directa.

Per tant, la relació de proporcionalitat directa és una **funció lineal** de la forma ***y* = *m·x***.

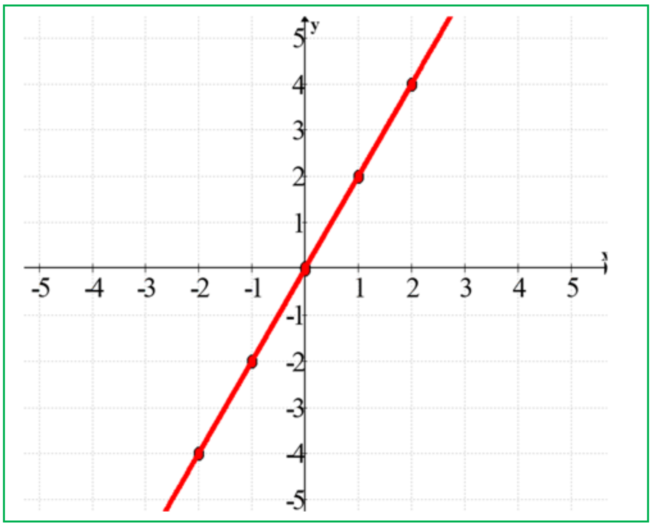
La representació gràfica de dues magnituds directament proporcionals és una **recta** que passa per l'origen.

Per tant la gràfica d'una **funció lineal** és una recta.

Exemple

- Representa la recta $y = 2 \cdot x$

  Nota: per a definir una recta és prou de conèixer dos dels seus punts (1, 2), (0, 0).



Recorda que:

Les rectes $y = m \cdot x$ tenen els següents components:

- *x* és la variable **independent**.
- *y* és la variable **dependent**.
- *m* és el **pendent** de la recta.

Les característiques més importants de les funcions lineals són:

- Passen per l'origen de coordenades, és a dir, el punt (0, 0) pertany a la recta.
- El seu domini i el seu recorregut són tot el conjunt dels nombres reals: tant *x* com *y* accepten qualsevol valor.
- Són simètriques respecte a l'origen, o el que és el mateix, són funcions imparelles.

Interpretació geomètrica del pendent

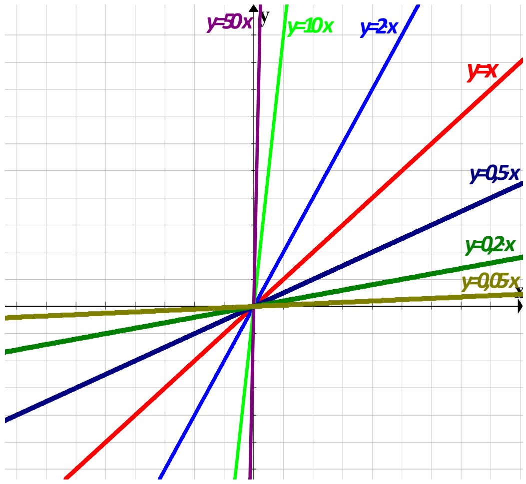
El coeficient *m* (que és la raó de proporcionalitat) s'anomena **pendent de la recta.** El pendent *m* és el que diferència unes funcions lineals d'altres. Mesura la inclinació de la recta respecte a l'eix d'abscisses i determina el seu creixement.

- Si $m > 0$. la funció és **creixent**.
- Si $m < 0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m = 0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix.

A les relacions de proporcionalitat directa, el pendent ve donat per la raó de proporcionalitat *k*.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes



- *Representa gràficament les funcions:*

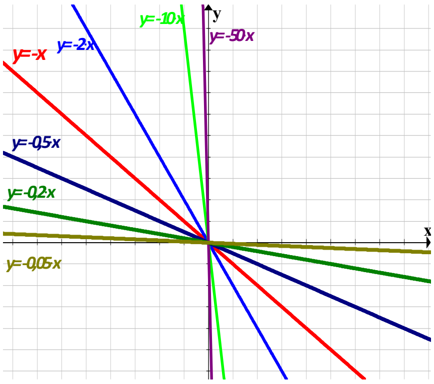
  $y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}2x$; $y = 0{,}05x$.

  Analitza el resultat.

  - La recta $y = x$, té de pendent m=1.

  -Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix *OY*.

  - Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins a convertir-se en l'eix *OX* quan $m = 0$.



- *Representa gràficament les funcions:*

  $y = -x$; $y = -2x$; $y = -10x$; $y = -50x$; $y = -0{,}5x$; $y = -0{,}2x$; $y = -0{,}05x$.

  Analitza el resultat.

  -Si augmenta m (és a dir, disminueix en valor absolut perquè és negatiu), llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix OX y=0.

  - Si disminueix m (és a dir, augmenta en valor absolut perquè és negatiu), llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix *OY*.

El **pendent** de la recta y = *mx* és el valor que mesura la inclinació de la recta, és a dir, mesura el creixement o decreixement de la funció lineal:

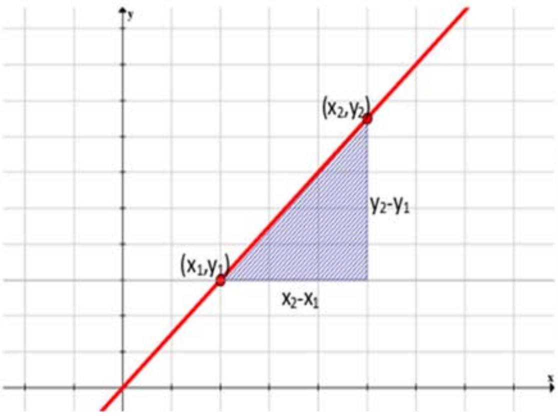
- Si $m > 0$,la recta és creixent.

-Si $m < 0$, la recta és decreixent.

El pendent de la recta no sols indica el creixement i decreixement de la funció, sinó que també mesura quant creix o quant decreix. Es pot dir que el pendent mesura el creixement de la recta en funció del que avança. Hem observat que:

- Si $m > 0$:
  - Per a valors alts de m la recta creix amb major rapidesa, açò és, la recta "puja" molt i avança poc.
  - Per a valors xicotets de m la recta creix amb menys rapidesa, és a dir, "puja" poc i avança molt.
- Si $m < 0$:
  - Per a valors alts de m la recta decreix amb menys rapidesa, és a dir, baixa poc i avança molt.
  - Per a valors xicotets de m la recta decreix amb major rapidesa, açò és, la recta "baixa" molt i "avança" poc.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



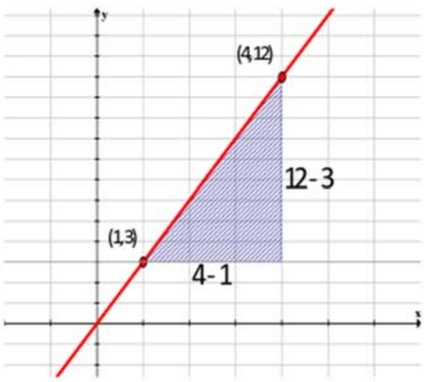
Una manera de calcular el pendent, és dividint el valor del que puja la recta entre el que avança, com es mostra al dibuix següent:

Donats dos punts qualssevol de la recta, el **pendent** es calcula de la manera següent:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

és a dir, $m = \frac{elquepuja}{elqueavança}$

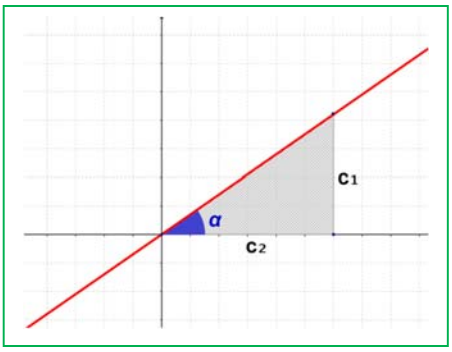
La **taxa de creixement mitjana** d'una funció lineal coincideix amb el seu pendent: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Exemple:

La recta que passa pels punts (1, 3) i (4, 12) puja 12 – 3 = 9 i avança 4–1= 3, llavors

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Per a trobar el pendent es pren com a referència la base i l'altura del triangle rectangle que formen els vèrtexs dels punts de la recta.

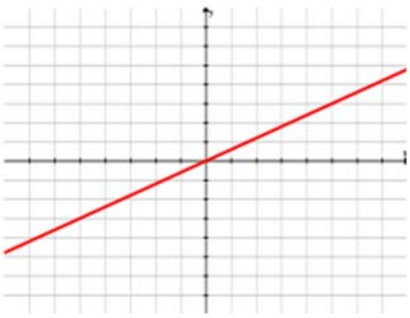
El quocient entre l'altura i la base és el pendent. Com el triangle construït és un triangle rectangle, el pendent és el quocient entre els seus dos catets.

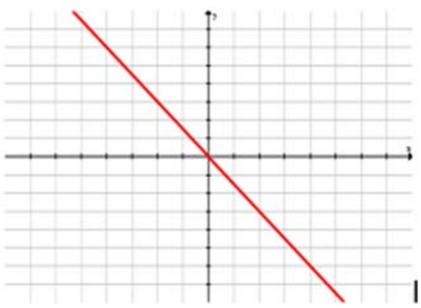
Activitats proposades

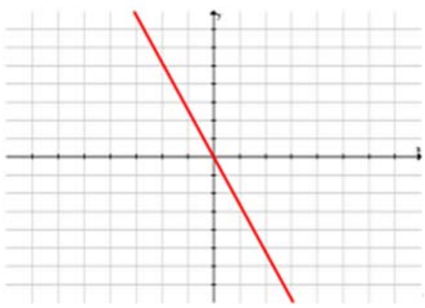
15. Representa al teu quadern, estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals següents:

a) y = 1,25·x; b) y = (3/5)·x; c) y = 3·x; d) y = 0,5·x;

16. Troba el pendent i l'expressió algebraica (fórmula) de les següents rectes:


a.


b.


c.

Funció lineal. Rectes de la forma *y* = *m*·*x* + *n*.

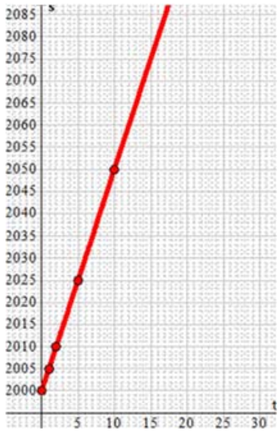
Ja saps que:

Les funcions polinòmiques de primer grau, o **funcions afins**, es descriuen algebraicament de la forma $y = m \cdot x + n$ i es representen mitjançant **rectes**.

Exemple:

- Un ciclista que s'ha traslladat 2 Km abans de començar el recorregut i es desplaça amb una velocitat de 5 m/s. La seua taula de valors i la seua representació gràfica són:

Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027



La fórmula és $s = s_0 + v \cdot t$

La gràfica d'aquesta recta té com a expressió algebraica:

$$y = 5 \cdot x + 2.000,$$

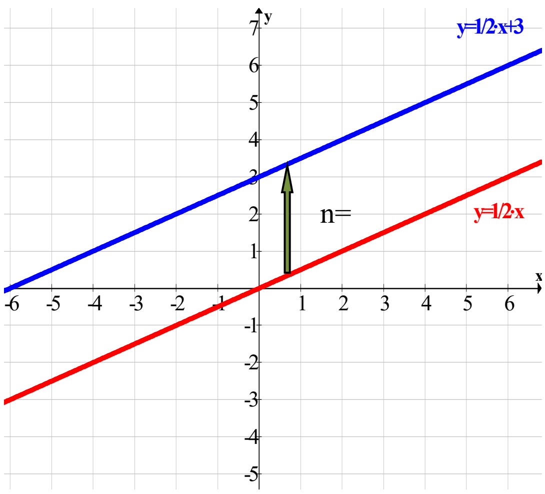
on *x* correspon al temps t i *y* a l'espai *s*, sent 2.000 l'espai inicial s_0.

El **pendent** és 5 però la recta no passa pel punt (0, 0), sinó que talla a l'eix d'ordenades al punt (2000, 0). Es diu que **l'ordenada** a **l'origen** és 2000.

Les rectes de la forma ***y* = *mx* + *n*** tenen el mateix pendent que les rectes *y* = *mx* però estan desplaçades en l'eix d'ordenades (eix *y*) *n* posicions (cap amunt si *n* és positiva, i cap avall si és negativa). Per aquesta raó, a *n* se l'anomena **ordenada a l'origen**, ja que és el valor de la recta en el punt de partida, és a dir, quan *x* = 0.

Activitats resoltes

- *Compara la recta y= (1/2)·x amb la recta y =* (1/2)·*x* + 3.



Les dues rectes tenen el mateix pendent. En ambdós casos m=1/2. Són dues rectes paral·leles.

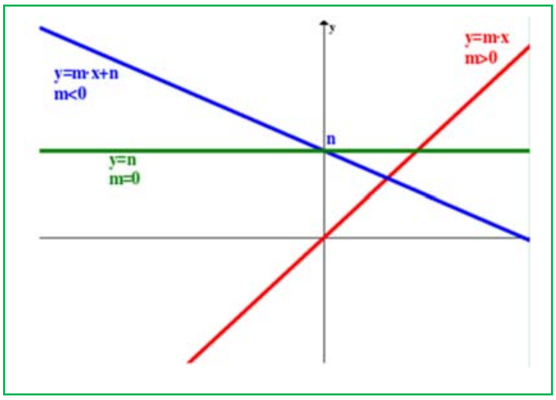
La diferència està al valor de l'ordenada a l'origen *n*: la recta *y*=(1/2)·*x* (on *n* = 0) s'ha desplaçat 3 posicions a l'eix *y* per a convertir-se en la recta *y* = (1/2)·*x* + 3 (on *n* = 3).

La recta y = *mx* + *n* és paral·lela a la recta y = *mx* (tenen el mateix pendent, *m*) desplaçada verticalment *n* posicions.

Les funcions ***y = mx + n*** s'anomenen **funcions afins**, i són també funcions lineals.

Quant al seu pendent, té el mateix significat:

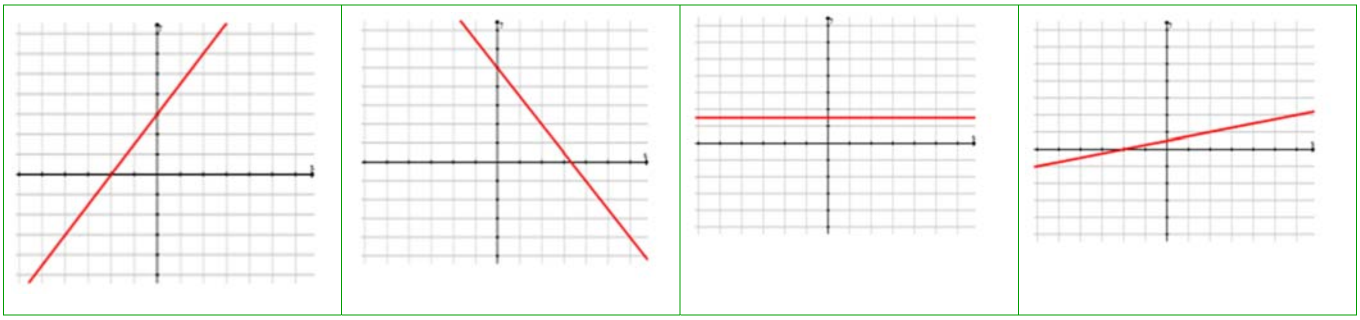
- Si $m > 0$. la funció és **creixent**.
- Si $m < 0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m = 0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix. Passa pel punt (n, 0) i és paral·lela a l'eix x.



La **taxa de creixement mitjana** d'una funció afí també coincideix amb el seu pendent: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, i és constant al llarg de tota la recta.

Activitats proposades

17. Troba l'expressió algebraica de les següents rectes:



18. Escriu tres funcions les gràfiques del qual siguen tres rectes que passen per l'origen de coordenades i els seus pendents siguen 5, –4, i 1/3 respectivament.

19. Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta y = x? I la recta y = –x?

20. Com són entre si dues rectes del mateix pendent i distint ordenada a l'origen?

21. Representa les següents funcions lineals:

a. $y=3\cdot x+4$ b. $y=-\dfrac{3}{7}\cdot x-2$ c. $2x+\cdot 4y=5$

d. $y=5$ e. $y=0$ f. $x=3$

22. Un metre d'una certa tela costa 2,05 €, quant costen 7 metres? I 20 m? I 15,2 m? Quant costen "*x*" metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.

3.2. Funcions polinòmiques de segon grau. Funció quadràtica

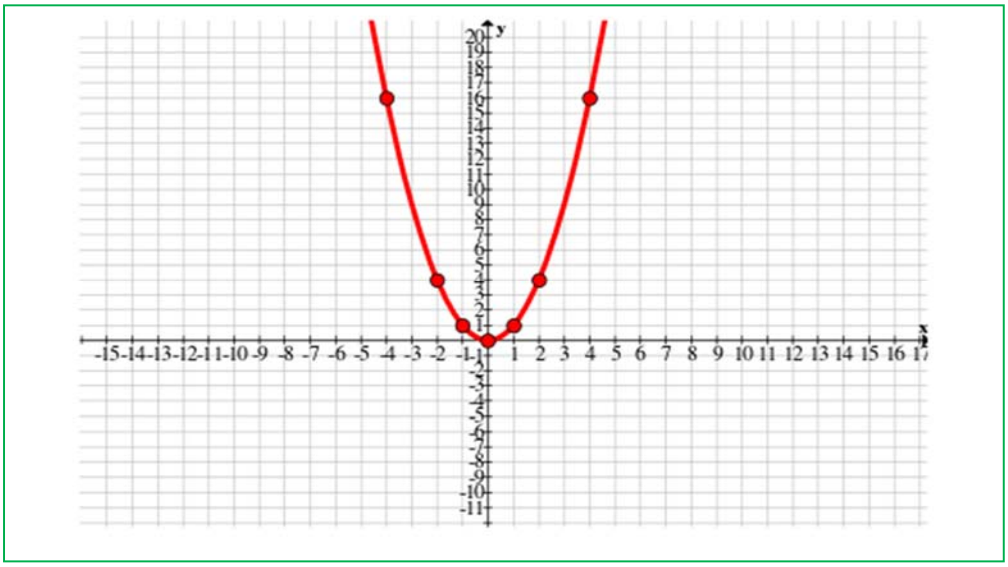
Les **funcions quadràtiques** són aquelles que tenen com a expressió algebraica un polinomi de segon grau, és a dir, són de la forma $\boldsymbol{y = a \cdot x^2 + bx + c}$. La corba que apareix en representar gràficament una funció quadràtica s'anomena **paràbola**.

En Física, la trajectòria de molts moviments es representen mitjançant paràboles, i per això rep el nom de tir parabòlic: llançar un projectil amb un cert angle, l'aterratge d'un avió en un portaavions, etc.

Paràbola $y = a \cdot x^2$

Per a representar la paràbola $y = x^2$ construïm una taula de valors i representem els parells de punts al

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25



pla cartesià.

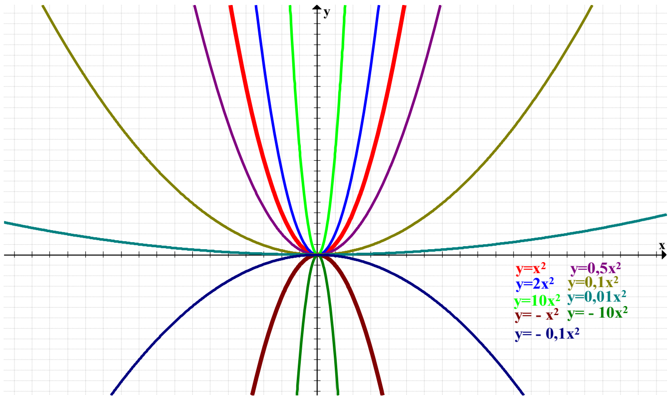
Observem que és **decreixent** fins al 0, i després **creixent**, després té un **mínim** absolut en el (0, 0). Si $a = -1$, $y = -x^2$, la paràbola té la mateixa forma però està oberta cap avall, i en compte d'un mínim, té un màxim al (0, 0).

Activitats resoltes

- *Representa gràficament en uns mateixos eixos coordenats:*

$$y = x^2,\ y = 0{,}5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0{,}1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0{,}01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0{,}01x^2.$$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



S'observa que:

La paràbola l'expressió algebraica de la qual és y= $a\cdot x^2$, té les següents característiques:

- El domini i el recorregut són tots els reals.
- La funció és **contínua**, perquè no presenta salts.
- És **simètrica** respecte a l'eix ***y***, és a dir, és una funció **parell**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Si $a > 0$ té un **mínim absolut** al punt (0, 0):
    - o en augmentar a, la paràbola es fa més estreta, i es va acostant a l'eix y.
    - o en disminuir a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
- Si $a < 0$ té un **màxim absolut** al punt (0, 0):
    - o en augmentar a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
    - o en disminuir a, la paràbola es fa més estreta i es va acostant a l'eix y.

Al punt (0, 0) se l'anomena **vèrtex** de la paràbola $y = a\cdot x^2$.

La **taxa de creixement mitjana** d'una paràbola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varia en moure'ns per la paràbola, i és major quant major és el coeficient a, com s'observa a les gràfiques d'aquestes paràboles.

Activitats proposades

23. Dibuixa en paper quadriculat la gràfica de la funció $y = x^2$.

a) Per a això fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.
b) Prenent valors d'abscissa negativa.
c) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?
d) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.
e) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.
f) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.

24. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa aquest resum. La gràfica de $y = ax^2$ s'obté de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ llavors ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ llavors ¿¿??
c) Si $a < -1$ llavors ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ llavors ¿¿??

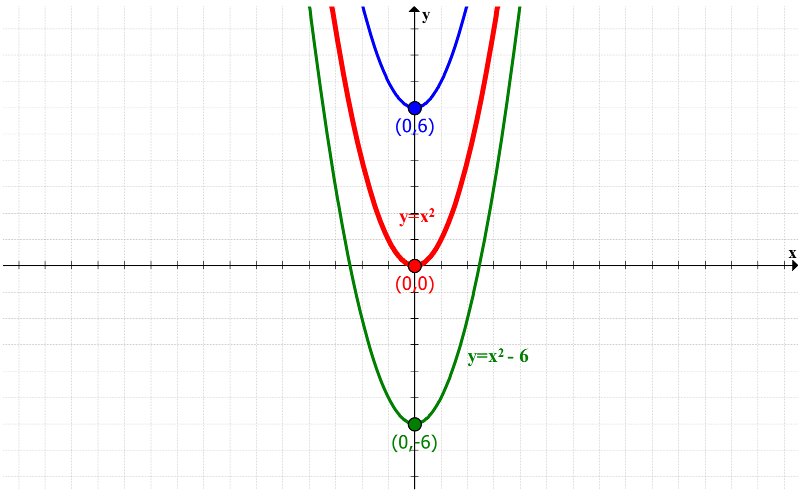
Desplaçaments verticals: Translacions en la direcció de l'eix *y*: $y = x^2 + k$.

Utilitzant com a plantilla la gràfica de $y = x^2$, es poden obtindre les gràfiques d'altres paràboles més complexes, depenent del tipus de desplaçament que utilitzem.

Exemple:

- Comparem les paràboles $y = x^2 + 6$ i $y = x^2 - 6$ amb la nostra plantilla de $y = x^2$.

Comprova que en aquest cas, es tracta de moure la paràbola en direcció vertical, és a dir, cap amunt o cap avall.



En sumar 6 a la paràbola $y = x^2$, la gràfica és idèntica però desplaçada 6 unitats en sentit positiu en l'eix *y*, és a dir, la paràbola ha pujat 6 unitats. El nou vèrtex passa a ser el punt (0, 6).

Una cosa pareguda ocorre quan es resta 6 unitats a $y = x^2$, En aquest cas la gràfica s'ha desplaçat 6 unitats en sentit negatiu fins al vèrtex (0, –6), és a dir, baixa 6 unitats.

La paràbola $y = x^2 + k$ té la mateixa forma que $y = x^2$ però traslladada *k* unitats verticalment en l'eix *i*. Si *k* és positiu, la translació és cap amunt i si *k* és negatiu, cap avall. El **vèrtex** de la paràbola es situa al punt (0, *k*).

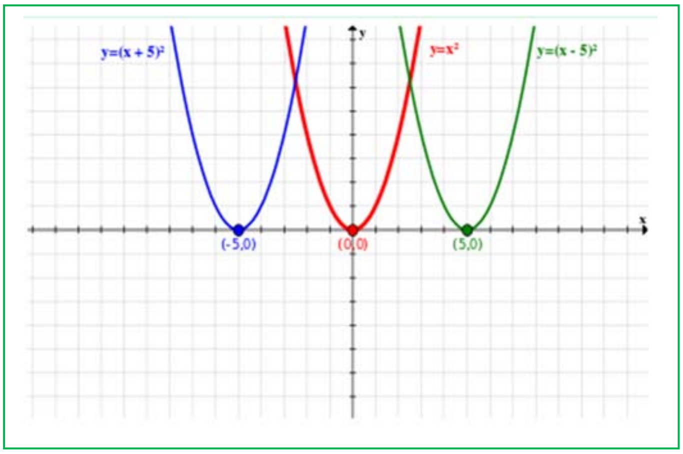
Activitats proposades

26. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y=x^2-1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$; és simètrica (cap avall) de $y = x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y = x^2 + q$.

Desplaçaments horitzontals: Translacions en la direcció de l'eix *x*: $y=(x-q)^2$.

Exemple:

- Compara les paràboles $y = (x + 5)^2$ i $y=(x-5)^2$ amb la plantilla de $y = x^2$.



Ara traslladem la paràbola en direcció horitzontal. Cap a la dreta o cap a l'esquerra.

En aquest cas, en augmentar la variable que s'eleva al quadrat, és a dir, sumar 5 unitats, la gràfica es trasllada horitzontalment cap a l'esquerra 5 unitats, sent el nou vèrtex el punt (–5, 0). En disminuir la dita variable, és a dir, restar 5 unitats, la paràbola es desplaça cap a la dreta sent el nou vèrtex el punt (5, 0).

La paràbola $y = (x - q)^2$ té la mateixa gràfica que $y=x^2$ traslladada q unitats en l'eix x cap a la dreta si $q > 0$ i cap a l'esquerra si $q < 0$. El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt $(q, 0)$**.**

Activitats proposades

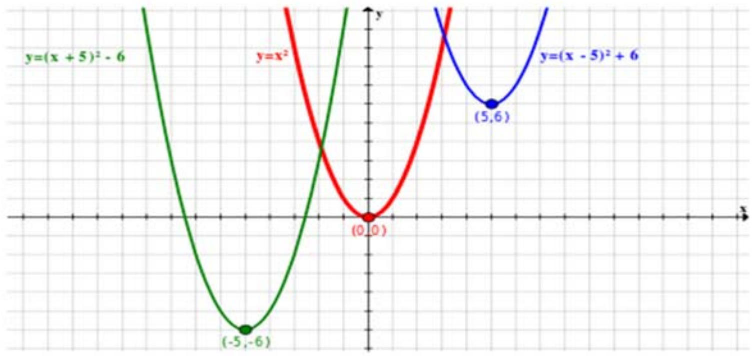
27. Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 2)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 3)^2$. Pel que, en general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - q)^2$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Desplaçaments oblics: translacions en ambdós eixos: $y = (x - q)^2 + k$.

L'últim moviment és el que combina els dos anteriors, és a dir, traslladem la plantilla de $y = x^2$, k posicions de manera vertical i q posicions de manera horitzontal, resultant una translació obliqua al pla.

Exemple:



- Comparem la paràbola $y = (x + 5)^2 - 6$ i $y = (x - 5)^2 + 6$ amb la plantilla de $y = x^2$.

La paràbola $y = (x - 5)^2 + 6$ es trasllada 5 unitats a la dreta i 6 unitats cap amunt, mentre que la paràbola $y = (x + 5)^2 - 6$ es trasllada 5 unitats cap a l'esquerra i 6 unitats cap avall. És a dir, és la composició dels dos moviments anteriors.

La paràbola $y = (x - q)^2 + k$ té la mateixa forma que $y = x^2$ traslladada de la manera següent:

$$q unitats\begin{cases} capaladretasiq > 0 \\ capal\text{'esquerra}siq < 0 \end{cases};\ kunitats\begin{cases} capamuntsik > 0 \\ capavallsik < 0 \end{cases}$$

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt (q, k). L'eix de simetria en $x = q$.

Representació de paràboles de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$.

Sabem representar les paràboles de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mitjançant translacions. Com podem representar la gràfica de les paràboles l'expressió algebraica de les quals és $y = x^2 + r\cdot x + s$?

Activitats resoltes

- *Representa la gràfica de la funció polinòmica $y = x^2 + 6\cdot x - 4$*

  La funció ve donada de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$, i volem convertir-la en $y = (x - q)^2 + k$.

  $$y = x^2 + r\cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

  Sabem que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on ja ens apareix $x^2 + 6x$. Ara hem d'ajustar la resta:

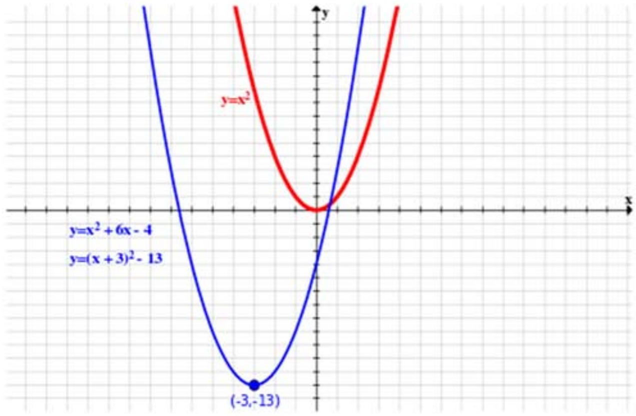
  $$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

  Amb la paràbola expressada d'aquesta manera, n'hi ha prou amb traslladar la gràfica de $y = x^2$, 3 unitats a l'esquerra i 13 unitats cap avall, sent el vèrtex el punt $(-3, -13)$.

  Com a $r = 6$ observa que la primera coordenada del vèrtex és $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituint el valor de $x = -3$ a l'expressió $y = x^2 + 6\cdot x - 4$ s'obté:

  $$y = (-3)^2 + 6\cdot(-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



El vèrtex de la paràbola $y = x^2 + r \cdot x + s$ es troba al punt $x = \frac{-r}{2}$. L'altra coordenada s'obté substituint x a l'expressió de la funció.

Activitats proposades

28. Escriu l'equació d'una paràbola de la mateixa manera que $y = x^2$, però traslladada 7 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 4 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

29. Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a) $y=(x+4)^2 - 5y$ b) $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c) $y = x^2 - 5$

d) $y = x^2 - 6x + 16$ e) $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f) $y = -x^2 + 12x - 26$

g) $y = x^2 - 10x + 17$ h) $y = -x^2 + 2x - 4$ i) $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Funció quadràtica. Paràboles de la forma *y* = *a*·*x*² + *b*·*x* + *c*.

Fins ara només hem estudiat les funcions de tipus $y = x^2 + r \cdot x + s$, que és una paràbola amb la mateixa forma que $y = x^2$ oberta cap amunt, o $y = -x^2$, oberta cap avall.

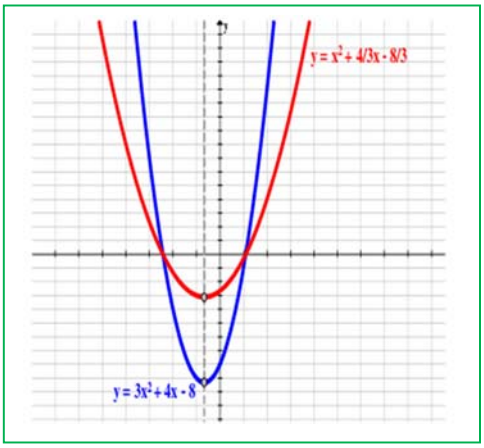
També sabem com afecta el valor del coeficient "*a*" a la gràfica de la paràbola $y = a \cdot x^2$, fent-la més estreta o més ampla.

Per a representar les funcions quadràtiques $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es converteix la dita expressió en una més familiar que sabem representar completant quadrats:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Activitats resoltes

- *Representa la paràbola* $y=3x^2+4x-8$:



Convertim la funció en una expressió més fàcil de representar:

$$y=3x^2+4x-8=3\cdot(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3})$$

i la comparem amb $x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=(x+\frac{4}{6})^2-\frac{20}{9}$$

Les dues paràboles tenen el vèrtex al mateix punt d'abscissa, i la coordenada y queda multiplicada per 3.

Quant a la forma, la paràbola és més estreta, com es va estudiar anteriorment.

La paràbola al cas general és:

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, és a dir, $r=\frac{b}{a}$, llavors la primera coordenada del vèrtex és $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segona coordenada ix en substituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la funció quadràtica.

<u>En resum:</u>

La funció quadràtica $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ té el seu vèrtex al punt d'abscissa $x=\frac{-b}{2a}$, la seua ordenada al que resulta de substituir aqueix valor a l'equació: $y=a\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+b\left(\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2-4ac}{4a}$. La forma dependrà del valor absolut del coeficient *"a"*, sent més ampla per a valors grans més estreta per a valors més xicotets. L'orientació de la paràbola serà :

-cap amunt si $a>0$

-cap avall si $a<0$

Activitats proposades

30. Tornem a usar la plantilla.

a) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (3, 1). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

b) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (–4, –2). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

Elements de la paràbola

Els elements més característics de la paràbola ajuden a representar la seua gràfica.

Coeficient *a*:

Si $a>0$ la paràbola està oberta cap amunt.

Si $a<0$ la paràbola està oberta cap avall.

Vèrtex:

El **vèrtex** de la paràbola està al punt $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Punts de tall amb l'eix OX:

Són els punts on la paràbola talla a l'eix x, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta y=0. Indica quan la paràbola és positiva o negativa. Per a calcular-los, es resol l'equació de segon grau $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punt de tall amb l'eix OY:

És el punt on la paràbola talla a l'eix y, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $x=0$. Quan $x=0$ la paràbola presa el valor de c, per tant el punt de tall és el punt (0, c).

Eix de simetria:

La paràbola és simètrica a la recta paral·lela a l'eix y que passa pel vèrtex de la paràbola, és a dir, **l'eix de simetria** de la paràbola és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

L'eix de simetria també passa pel punt mitjà del segment format pels dos punts de tall amb l'eix x.

A partir d'aquests elements, es pot representar la gràfica d'una funció quadràtica.

Activitats resoltes

- *Determina els elements de la paràbola* $y=-2x^2-12x-10$

o $a=-2$, llavors la paràbola està oberta cap avall.

o Vèrtex: $\begin{cases} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vèrtex: V(-3,8)$

o Punts de tall:

▪ Eix OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5 \Rightarrow (-5,0) \\ x_2=-1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$

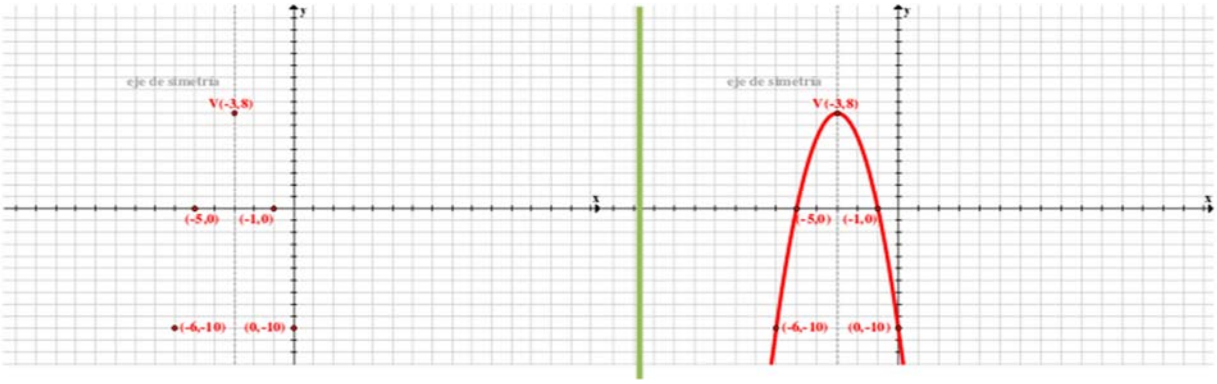
$y=-2x^2-12x-10 = -2\cdot(x+5)\cdot(x+1)$

▪ Eix OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10 \Rightarrow (0,-10)$

La paràbola també passa pel seu simètric: (–6, –10).

o Eix de simetria: recta $x=-3$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



Activitats proposades

31. Troba els elements característics i representa les paràboles següents:

a) $y = 2x^2 + 4x - 6$ b) $y = 6x^2 - 24x$ c) $y = -2x^2 + 4x - 2$

d) $y = 2x^2 + 5x - 12$ e) $y = 3x^2 + 6x - 9$ f) $y = -2x^2 + 7x + 3$

g) $y = 7x^2 + 21x - 28$ h) $y = 5x^2 - 9x + 4$ i) $y = -4x^2 - 4x - 1$

3.3. Ajustos a altres funcions polinòmiques

Hem vist que les rectes, $y = mx + b$, i que les paràboles, $y = ax^2 + bx + c$, serveixen de model per a situacions molt diverses. Però aquestes situacions no són més que una xicoteta part de la gran varietat de situacions que existeixen. Devem per tant d'ampliar l'arsenal de les nostres funcions. Si tenim unes dades en una taula de valors, volem analitzar si som capaços de trobar una fórmula matemàtica que s'ajuste a aqueixes dades, és a dir, que ens permeta fer prediccions respecte a valors de la variable no considerats.

Activitat resolta

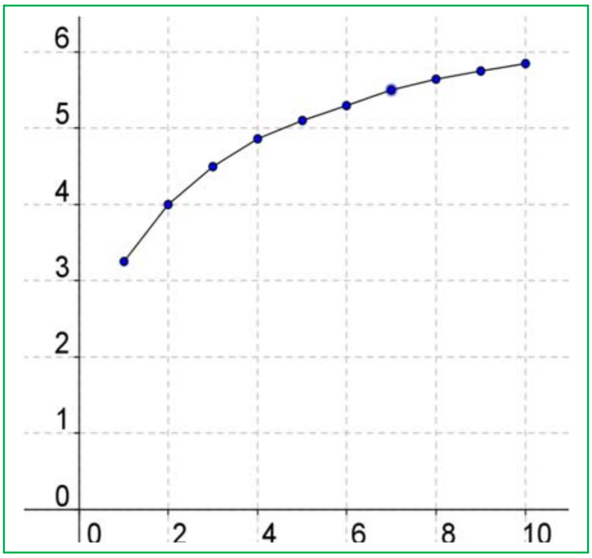
- *Per al tractament d'una malaltia s'està provant un nou medicament amb distintes dosis, anotant, per a cada dosi el percentatge de curacions. Els resultats s'arrepleguen a la taula:*

Dosis (mg): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): y	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Representem gràficament els punts indicats a la taula:

La gràfica dels punts units mitjançant segments ens dóna una idea del model, però no podem encara descobrir la llei. No hi ha una única forma d'unir les dades. Conèixer el millor model està relacionat amb el problema en estudi encara que aquesta primera aproximació gràfica ja ens dóna prou informació. Pareix que, segons s'augmenta la dosi, creix el percentatge de curacions. No pareix plausible que per a una dosi intermèdia, per exemple, 4,5 mg, el percentatge de curacions cresca a 10 o disminuïsca a 3 %, potser podem assegurar que estarà entre 4,86 i 5,1. Podríem estimar-lo mitjançant una interpolació lineal i dir que el percentatge de curacions per a una dosi de 4,5 mg es podria estimar en que serà 4,98.

Les funcions polinòmiques, de les que acabes d'estudiar les rectes i les paràboles, però que són totes aquelles d'equació $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, tenen una interessant propietat.



Si els valors de la x estan en progressió aritmètica, i calculem les diferències entre els valors de la "y", als que anomenarem **diferències primeres**, i indiquem $\Delta_1 y$, quan aquestes diferències són constants, llavors els punts estan en una recta.

Si de nou calculem les diferències, ara de les diferències primeres, i les anomenem **diferències segones**, i les indiquem $\Delta_2 y$, quan aquestes diferències són constants, llavors els punts estan en una paràbola.

En general, els valors de l'abscissa estan en progressió aritmètica i si les diferències n-èsimes, Δn són **constants** els punts s'ajusten a una funció **polinòmica de grau *n***.

Exemple:

- Calcularem les diferències successives de l'activitat resolta anterior:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85
$\Delta_1 y$		0,75	0,5	0,36	0,24	0,2	0,2	0,14	0,11	0,1
$\Delta_2 y$			–0,25	–0,14	–0,12	–0,04	0	–0,06	–0,03	–0,01
$\Delta_3 y$				0,11	0,02	0,08	0,04	–0,06	0,03	0,02

El primer en que ens fixem és que els valors de x estan en progressió aritmètica: 1, 2, 3…

Repassa les operacions per a comprovar que aquestes diferències estan ben calculades. Per exemple, la primera diferència és: 4,0 – 3,25 = 0,75. El primer valor de les segones diferències és: 0,5 – 0,75=–0,25. El primer valor de les terceres diferències és: –0,14 –(– 0,25) = +0,11.

Les diferències primeres no són constants, per tant les dades no s'ajusten a una recta, la qual cosa ja s'observava a la gràfica. Les diferències segones no són tampoc constants, per tant no hi ha una paràbola que s'ajuste a aqueixes dades. Tampoc són constants les diferències terceres, per tant tampoc hi ha una funció polinòmica de tercer grau que s'ajuste a aqueixes dades.

Activitat resolta

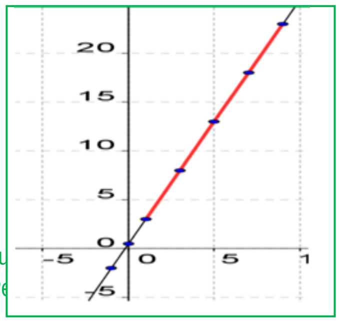
- *Comprova que les dades de la taula següent s'ajusten a una recta i escriu la seua fórmula.*

x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$		5	5	5	5

El primer en que ens fixem és que els valors de x estan en progressió aritmètica: 1, 3, 5, 7, 9…

Les diferències primeres són constants, per la qual cosa les diferències segones són totes zero. Les dades s'ajusten a una recta.

Representem les dades.



Busquem l'equació de la recta y = $mx + b$ imposant que passe per dos dels punts, 3 =m ·1 + b; 8 = 3m + b. Restem: 5 = 2m, per la qual cosa el pendent és: m = 2,5; i en substituir a la primera equació s'obté que l'ordenada a l'origen és b = 0,5. L'equació de la recta és: y = 2,5 x + 0,5.

- *Les dades de la taula indiquen els metres recorreguts per un mòbil en el temps t segons. S'ajusten a una paràbola. Representa'ls gràficament i escriu la seua fórmula. Quina distància haurà recorregut als* 6 segons*? I als* 12 segons*?*

***t* (s):**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
***d* (m):**	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$			2				2			

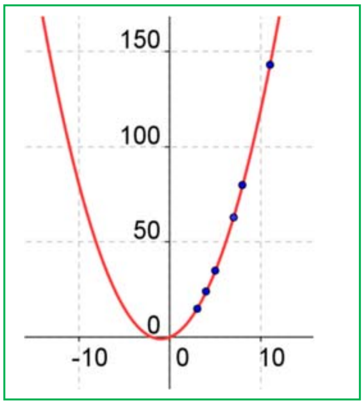
Falten dades, però les dues úniques diferències segones són iguals, per tant com l'enunciat diu que s'ajusten a una paràbola, imposarem que totes les diferències segones siguen iguals a 2, i amb aqueixa informació completem la taula.

***t* (s):**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
***d* (m):**	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$			2	2	2	2	2	2	2	2

Primer hem completat totes les diferències segones iguals a 2. Després les diferències primeres que faltaven. I finalment els metres. Als 6 segons ha recorregut una distància de 48 metres, i als 12 segons de 168 metres.

Busquem la funció polinòmica de segon grau y = $ax^2 + bx + c$, que passa pels punts:

(3, 15), (4, 24) i (5, 35):



15 = a9 + b3 + c

24 = a16 + b4 + c

35 = a25 + b5 + c

Restem: 9 = 7a + b; 11 = 9a + b. Tornem a restar: 2 = 2a. Per tant a = 1; b=11 – 9·1 = 2; c = 15 – 9·1 –3·2 = 0. La paràbola és $y = x^2 + 2x$.

Comprovem que, en efecte passa pels altres punts de la taula:

$$143 = 11^2 + 2·11 = 121 + 22.$$

Activitats proposades

32. Troba la funció quadràtica determinada pels punts: (1, 5); (2, 8); (3, 20). Representa-la gràficament.

33. Troba la funció polinòmica que passa pels punts: (0, 5); (1, 9); (2, 4) i (3, 10).

34. Troba la funció polinòmica determinada pels punts: (0, 3); (1, 6); (2, 9); (3, 12); (4, 15). Calcula les diferències successives i dibuixa la gràfica.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

35. Es fan proves mesurant la distància que recorre un avió des que toca terra en una pista d'aterratge. Les dades estan en la taula adjunta. Hi ha alguna funció polinòmica que s'ajusta a aqueixes dades. Si n'hi ha, escriu la seua fórmula.

Temps (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distància (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fàbrica els preus dels cables d'acer depenen dels diàmetres i ve donat el preu de cada metre en euros en la taula següent. Hi ha alguna funció polinòmica que s'ajuste perfectament a aqueixes dades?

Diàmetre (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Preu (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Donada la taula següent, es pot ajustar exactament una recta? Considera si alguna dada és errònia i si és així, corregeix-ho.

Temps (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distància (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

En realitzar un experiment és molt estrany trobar situacions en què una recta, una funció quadràtica, una cúbica… s'ajusten a les dades a la perfecció.

A l'activitat resolta de les dosis de medicament i percentatge de curacions, si haguérem continuat calculant les diferències successives mai ens hagueren arribat a ser cap d'elles iguals i haguérem arribat a les diferència d'orde 9 m, que ja només seria una, i ens donaria: $\Delta_9 y = -0{,}67$. Hauríem d'escriure una funció polinòmica de grau 9!

Una funció polinòmica de grau *n* es coneix si sabem que passa per *n* + 1 punts.

Així, una recta queda determinada per 2 punts. Una paràbola queda determinada per 3 punts. I la funció polinòmica de grau 9 per 10 punts. Hi ha altres funcions. Les dades del medicament s'ajusten a una hipèrbola: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$, un tipus de funció que estudiarem a continuació.

3.4. Funcions de proporcionalitat inversa. La hipèrbola *y = k/x*

Recorda que:

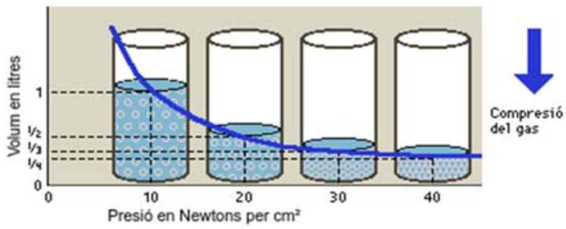
Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La **raó de proporcionalitat inversa** *k* és el producte de cada parell de magnituds: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Exemple

- En Física trobem molts exemples de magnituds inversament proporcionals: La velocitat d'un vehicle i el temps que tarda a recórrer un trajecte són magnituds inversament proporcionals. En aquest cas, l'espai recorregut es manté constant, sent ell, la raó de proporcionalitat inversa $s=v{\cdot}t$. Altres exemples són: la densitat i el volum, la potència i el temps, la pressió i la superfície,…

Activitats resoltes

- *Representa al pla la llei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constant, el volum d'una massa fixa de gas és inversament proporcional a la pressió que aquest exerceix".*



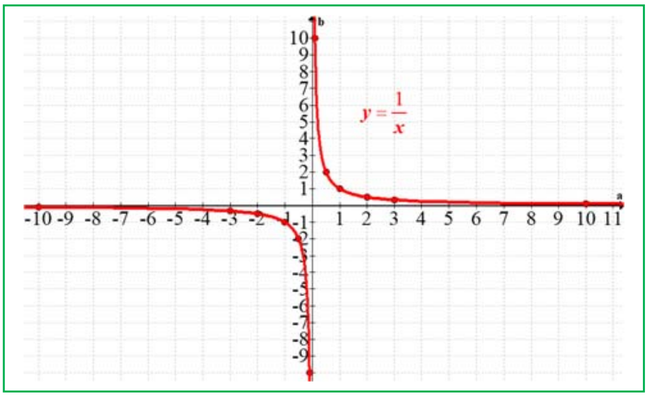
La fórmula que descriu aquesta llei és $P \cdot V = k$.

Si aïllem el volum final V, obtenim l'expressió següent: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gràfica descriu una corba que a mesura que augmenta la pressió inicial, disminueix el volum i es va aproximant a l'eix x, i al contrari, si disminueix la pressió, el volum augmenta.

La **funció de proporcionalitat inversa** es defineix mitjançant l'expressió $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$, on k és la **raó de proporcionalitat inversa** i les variables *x* e *y* són els distints valors que tenen les dues magnituds.

La seua representació gràfica al pla cartesià és una corba anomenada **hipèrbola**.



Exemple

- Representa la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$

x	−10	−3	−2	−1	−1/2	1/2	1	2	3	10
y	−1/10	−1/3	−1/2	−1	−2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completem una taula de valors i representem els punts en un sistema de coordenades.

Es pot observar que la gràfica mai talla als eixos de coordenades, ja que ni la *x* ni la *y* poden valdre 0. El 0 no està al domini i tampoc al recorregut de la funció (no es pot dividir per 0). El seu domini és $\Re - \{0\}$.

Com es veu a la gràfica, i és fàcil comprovar, la funció és contínua en tot el domini i simètrica respecte a l'origen (funció imparella).

Activitats proposades

38. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa al mateix sistema de coordenades:

a) $y = \dfrac{-1}{x}$ b) $y = \dfrac{5}{x}$ c) $y = \dfrac{1}{2x}$ d) $y = \dfrac{3}{8x}$ e) $y = \dfrac{-5}{3x}$ f) $y = \dfrac{-12}{5x}$

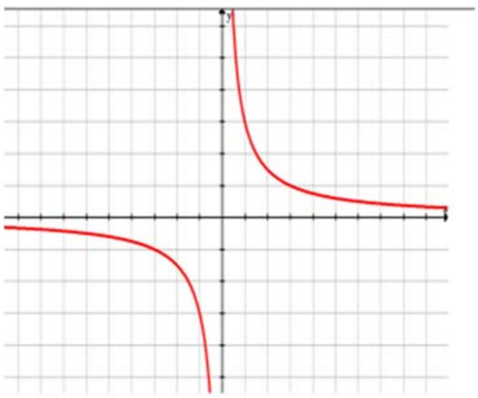
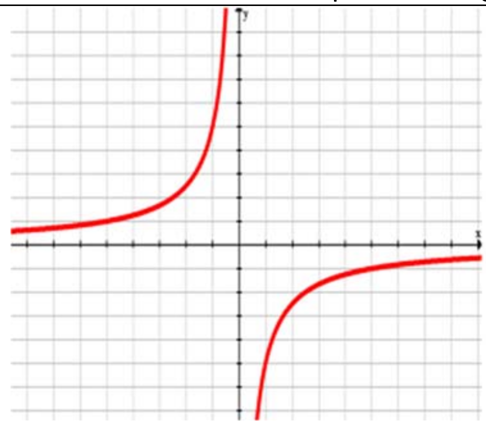
39. Descriu el que succeeix quan varia el valor de *k*. Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

40. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passen per cada un d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a. (5, 3)	b. (2, –1)	c. (1/2, 6)
d. (10, 4)	e. (*a*, 1)	f. (1, *b*)

41. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a. 	b. 	
c. $y=\dfrac{9}{2x}$	d. $y=\dfrac{-5}{3x}$	e. $y=\dfrac{-0,3}{x}$
f. (-5,2)	g. (4,-9)	h. (1,1/2)

En general, les hipèrboles l'expressió de les quals és $y=\frac{k}{x}$ tenen les propietats següents:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - Si el valor absolut augmenta, la corba s'allunya de l'origen de coordenades.
  - Si el valor absolut de k disminueix, la corba s'aproxima a l'origen de coordenades.
- **Domini:** Són tots els reals menys el 0: *Dom* = $\Re$ – {0}.
- **Recorregut:** El seu recorregut són tots els reals menys el 0: $\Re$ – {0}.
- **Continuïtat:** La funció de proporcionalitat inversa és contínua en tot el seu domini, però discontínua a la recta real, ja que el 0 no està al domini, i per tant, en 0 hi ha un salt infinit.
- **Simetria:** Són funcions imparelles, açò és, són simètriques respecte a l'origen de coordenades.
- **Asímptotes:** Són les rectes la distància de les quals a la gràfica és molt xicoteta, quan la corba s'allunya de l'origen.

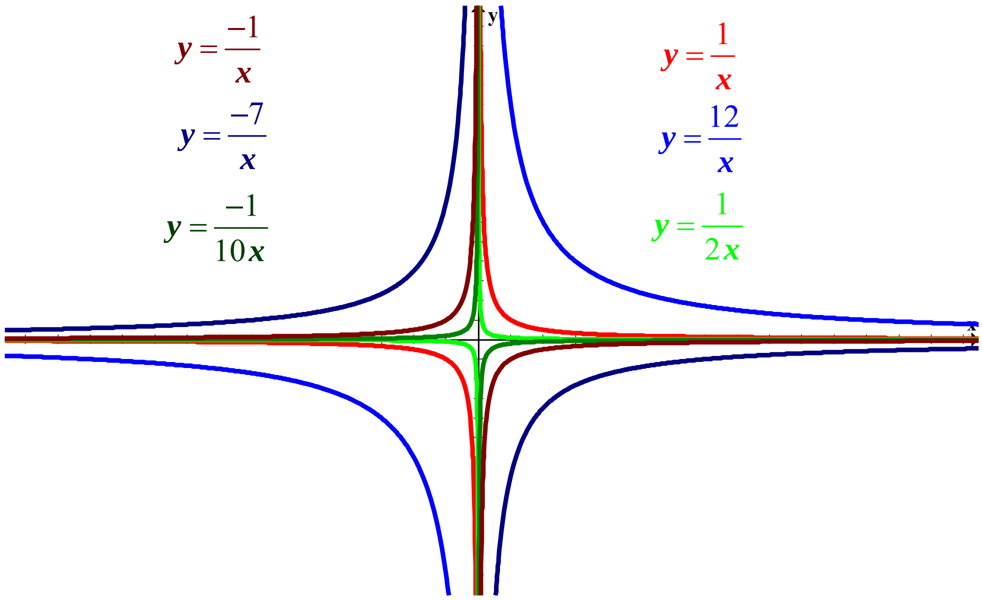
Hem vist que no està definida en 0, però quan el valor de *x* s'acosta a zero, el valor de *y* es fa molt gran en valor absolut. Per això es diu que la recta *x* = 0 és una asímptota vertical de *y* = *k*/*x*.

De la mateixa manera, si ens fixem a les gràfiques, s'observa que quan els valors de *y* creixen en valor absolut, els valors de *x* s'acosten a 0 (sense tocar-lo). Es diu que la recta *y* = 0 és una asímptota horitzontal.

- **Creixement:** depèn del signe de k:
  - Si $k>0$: la funció és **decreixent** a l'interval $(-\infty,0)$ i **creixent** a l'interval $(0,+\infty)$.
  - Si $k<0$: la funció és **creixent** a l'interval $(-\infty,0)$ i **decreixent** a l'interval $(0,+\infty)$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Les asímptotes divideixen a la hipèrbola en dos trossos que reben el nom de **branques de la hipèrbola**.



La hipèrbola $y=\dfrac{k}{x-a}+b$

A partir de la representació de la funció $y=\frac{k}{x}$, és possible representar un altre tipus d'hipèrboles? Igual que ocorre amb les paràboles, podem traslladar les hipèrboles al pla en direcció horitzontal o vertical, segons els valors que prenguen els paràmetres a i b.

Activitats proposades

42. Representa als mateixos aqueixos de coordenades, les hipèrboles següents:

a) $y=\frac{5}{x}$ $\quad y=\frac{5}{x}+3$ $\quad y=\frac{5}{x}-3$

b) $y=\frac{-12}{x}$ $\quad y=\frac{-12}{x-3}$ $\quad y=\frac{-12}{x+3}$

c) $y=\frac{3}{x}$ $\quad y=\frac{3}{x-1}+5$ $\quad y=\frac{5x-2}{x-1}$

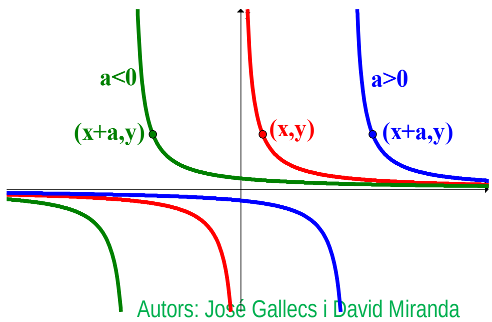
43. Descriu el que succeeix quan varien els paràmetres *a* i *b* a les hipèrboles de l'exercici anterior.

En general, la representació gràfica de les hipèrboles l'expressió algebraica de les quals és$y=\frac{k}{x-b}+a$ és una translació el pla depenent dels valors de a i b.

Desplaçaments horitzontals

En variar el valor de ***a***, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça horitzontalment a unitats:

- Si $a>0$: la hipèrbola es desplaça cap a la dreta.
- Si $a<0$: la hipèrbola es desplaça cap a l'esquerra.



Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x + a, y)$:

$$(x, y) \to (x + a, y)$$

- El vector de translació és el vector $(a, 0)$

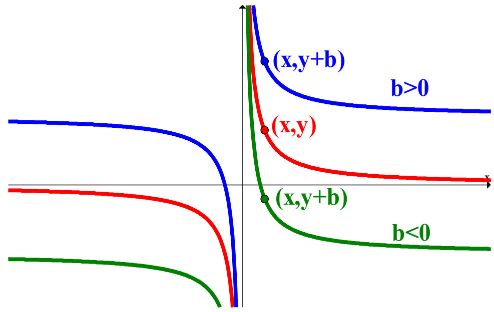
Desplaçaments verticals

En variar el valor de b, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça verticalment b unitats:

- Si $b > 0$: la hipèrbola es desplaça cap amunt.
- Si $b < 0$: la hipèrbola es desplaça cap avall.
- El punt (x, y) es converteix en el punt $(x, y + b)$:

$$(x, y) \to (x, y + b)$$

- El vector de translació és el vector $(0, b)$



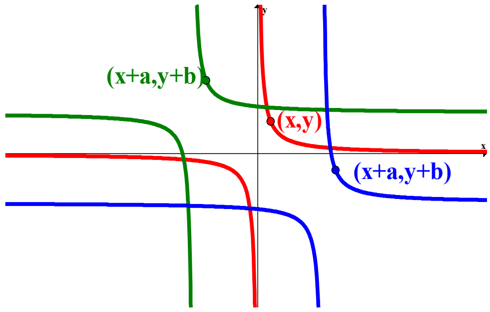
Desplaçaments oblics

En variar tant el valor a com el valor de b, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça diagonalment tantes unitats com siga el valor dels paràmetres:

- Les direccions cap a on es traslladа dependrà dels signes de a i b.
- El punt (x, y) es converteix en el punt $(x + a, y + b)$:

$$(x, y) \to (x + a, y + b)$$

- El vector de translació és el vector (a, b).
- L'origen de coordenades (0, 0)es trasllada al punt (a, b).



Activitats proposades

44. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbola $y = \dfrac{5}{x}$:

a. $y = \dfrac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \dfrac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \dfrac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \dfrac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \dfrac{4}{x}$ f. $y = \dfrac{20}{5-x} - 2$

45. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asímptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.

46. Escriu una regla per a expressar com es traslladen les asímptotes segons els paràmetres a i b.

Hipèrbola $\boldsymbol{y = \dfrac{mx + n}{px + q}}$

Les funcions que es defineixen mitjançant aquesta expressió també es representen mitjançant hipèrboles. Per a això, necessitem fer una modificació en una expressió com l'estudiada a l'apartat anterior que ens resulte més fàcil de manejar i representar:

Dividint $(mx + n) : (px + q) \to y = \dfrac{k}{x-a} + b$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- *Convertir la funció* $y=\frac{3x+2}{x-7}$ *en una funció l'expressió de la qual siga més senzilla de representar.*

Dividim $3x+2$ entre $x-7$:

$$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

Aquesta última expressió és fàcil de representar.

Activitats proposades

47. Representa les hipèrboles següents:

a. $y=\frac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\frac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\frac{4x-12}{x-3}$

d. $y=\frac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\frac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa la gràfica de la funció: $y=7-\frac{15}{x+3}$. A) Quan x creix, "*y*" tendeix a 7? Té una asímptota horitzontal *y* = 7? B) Si *x* s'acosta a –3, la *y* creix? Té una asímptota vertical, *x* = –3? C) Analitza si aquesta hipèrbola s'ajusta als valors de l'activitat resolta de la taula:

Dosi (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.5. Funcions exponencials

Hem estudiat funcions polinòmiques, de proporcionalitat inversa… Ara estudiarem un altre tipus de funcions.

Hi ha dos tipus de funcions **l'expressió analítica** o **fórmula** de les quals és una **potència**:

- Si la variable independent està a la base: $y = x^3$, s'anomena **funció potencial**, i quan a més l'exponent és un nombre natural és una funció polinòmica.
- Si la variable independent està a l'exponent: $y = 3^x$, s'anomena **funció exponencial**.

Exemple:

Són funcions exponencials: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Una funció exponencial és aquella en què la variable independent està a l'exponent.

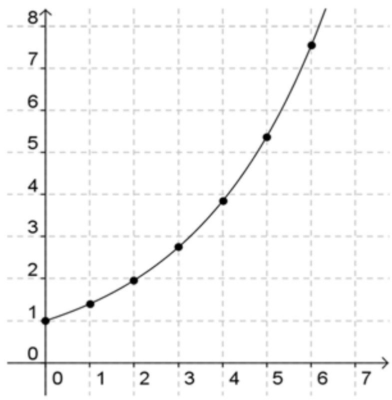
Activitat resolta

- Si la quantitat de bacteris d'una determinada espècie es multiplica per 1,4 cada hora, podem escriure la següent fórmula per a calcular el nombre *"y"* de bacteris que hi haurà al cap de *"x"* hores (començant per un sol bacteri): $y = 1{,}4^x$.

Nombre de bacteris en cada hora (**Taula de valors de la funció**):

Hores transcorregudes (x)	Núm. bacteris (y)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gràfica de la funció



Activitats proposades

49. Prova ara a realitzar al teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas semblant, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 2 en compte de per 1,4.

Observa que els valors de *"y"* augmenten molt més de pressa: mentre que els valors de *"x"* augmenten d'1 en 1 els valors de *y* es van multiplicant per 2. Açò s'anomena **creixement exponencial**. Si en compte de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de **decreixement exponencial**.

50. Al teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de *"x"* entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

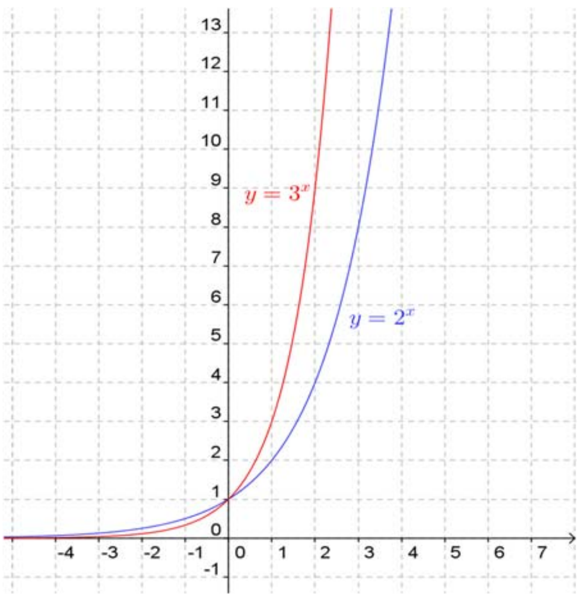
potencial i el creixement exponencial.

Les gràfiques de les funcions exponencials $y = b^x$ es diferencien segons el valor de la base "*b*". Especialment es diferencien si 0 < *b* < 1 o *b* > 1.
Al cas en què *b* = 1 tenim la funció constant *y* = 1, la gràfica de la qual és una recta horitzontal.

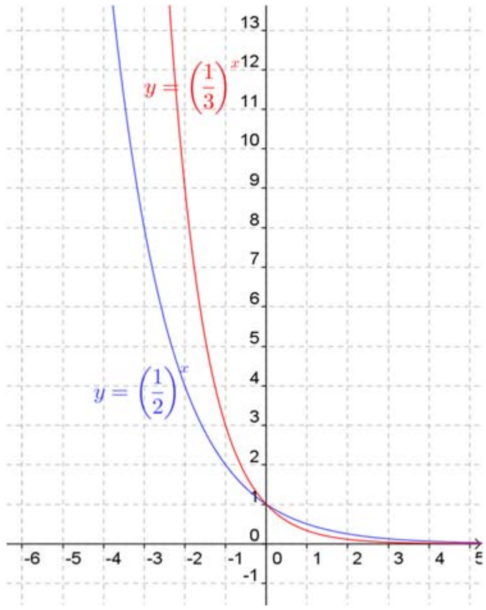
Activitats resoltes

- *Representa les gràfiques de* $y = 2^x$ *i de* $y = 3^x$. *També les gràfiques de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *i de* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. *Analitza les similituds i les diferències.*

Funcions $y = 2^x$ **i** $y = 3^x$



Funcions $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **i** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observem els següents aspectes comuns a les quatre gràfiques:

- El seu **domini** és tota la recta real. A més són contínues.
- El seu **recorregut** és (0, +∞). És a dir, "y" mai és zero ni negatiu.
- Passen totes pels punts (0, 1), (1, *b*) i (–1, 1/*b*).
- La gràfica de $y = a^x$ i la de $y = (1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix OY.

I observem també aspectes diferenciats en ambdues il·lustracions:

Quan la base és *b* > 1
Són funcions **creixents**. Quant major és la base el creixement és més ràpid.
Quan $x \to -\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** a la part esquerra de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparençar-lo, no presenten asímptota vertical, perquè

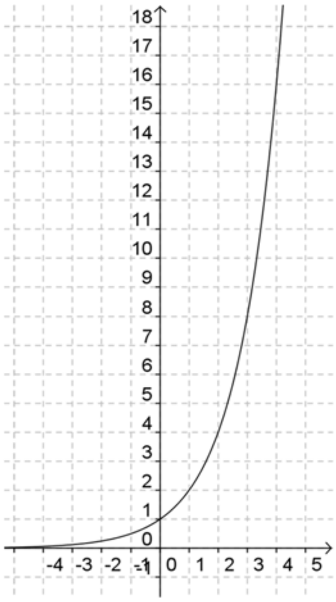
Quan la base és 0 < *b* < 1
Són funcions **decreixents**. Quant menor és la base el decreixement és més ràpid.
Quan $x \to +\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** a la part dreta de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparençar-lo, no presenten asímptota vertical, perquè

no s'aproximen a cap recta. no s'aproximen a cap recta.

- *Representa gràficament les següents funcions exponencials* $y=2^x$ *i* $y=2^{-x}$.

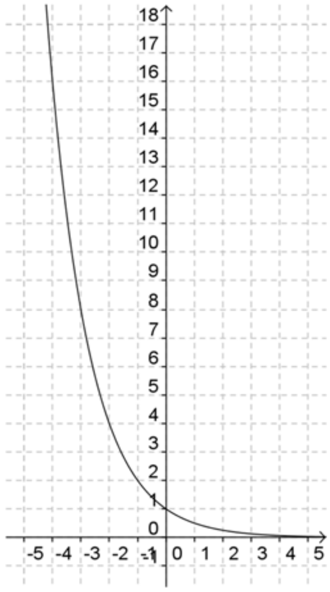
Funció $y=2^x$

x	*y*
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



Funció $y=2^{-x}$

x	*y*
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...



El nombre *e*. La funció *y* = *e*^{x}

El nombre *e* té una gran importància en Matemàtiques, comparable inclús al nombre π encara que la seua comprensió no és tan elemental i tan popular. Per a comprendre la seua importància cal accedir a continguts de cursos superiors. El seu valor aproximat és *e* = 2,71828182846... Es tracta d'un nombre irracional (encara que en veure'l pot parèixer periòdic). Aquest nombre apareix a les equacions de creixement de poblacions, desintegració de substàncies radioactives, interessos bancaris, etc.

També es pot obtindre directament el valor d' *e* amb la calculadora (sempre com a aproximació decimal, ja que és un nombre irracional). Normalment hi ha una tecla amb l'etiqueta *e* però pots usar també la tecla etiquetada e^x. Per a això hauràs de calcular el valor de e^1.

La funció $y=e^x$ comparteix les característiques descrites més amunt per a funcions exponencials de base major que 1.

Activitats proposades

51. Utilitzant la calculadora, fes una taula de valors i representa al teu quadern les funcions $y=e^x$, $y=e^{-x}$.

52. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.

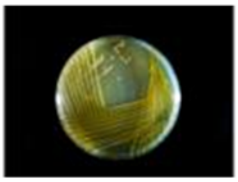
a. Escriu al teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.

b. Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

c. Representa al teu quadern gràficament la dita funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar als eixos.

53. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multiplique per 2/3 cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris, (a) fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap arrere"), i (b) representa gràficament aquestes dades.



Cultiu del bacteri *Salmonella*

54. Representa al teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seues gràfiques:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa al teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x - 3$ i $h(x) = 2^{x-3}$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Diu el premi Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"L'enorme utilitat de les Matemàtiques a les ciències naturals és quelcom que frega el misteri, i no hi ha explicació per a allò. No és en absolut natural que existisquen "lleis de la naturalesa", i molt menys que l'ésser humà siga capaç de descobrir-les. El miracle de com resulta d'apropiat el llenguatge de les Matemàtiques per a la formulació de lleis de la Física és un regal meravellós que no comprenem ni ens mereixem".

Les funcions s'han utilitzat per a fer models matemàtics de les situacions reals més diverses. Abans de l'època dels ordinadors les funcions que solien utilitzar-se eren les funcions lineals (que ja coneixes però que estudiaràs detingudament al pròxim capítol). Es *linealizaban* els fenòmens. En usar altres funcions, com per exemple paràboles poden complicar-se molt les coses. Inclús pot aparéixer el caos.

Saps què és el caos?

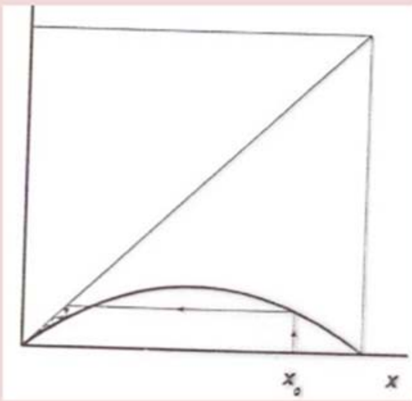
Estudiarem un exemple en què apareix el caos: **L'equació logística**. És un model matemàtic proposat per P. F. Verhulst en 1845 per a l'estudi de la dinàmica d'una població. Explica el creixement d'una espècie que es reprodueix en un entorn tancat sense cap tipus d'influència externa. Es consideren valors x entre 0 i 1 de la població. .

$$y = r(x(1 - x))$$

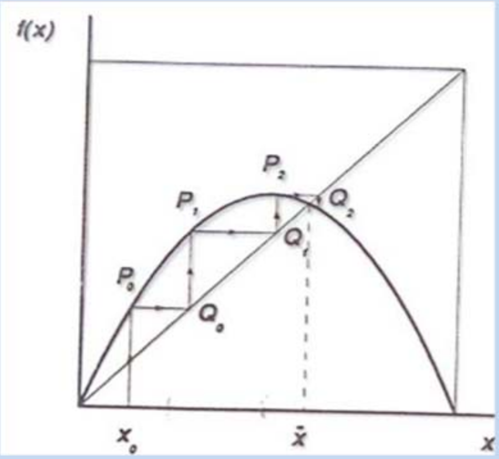
Si ens quedem amb el primer terme, $y = rx$ seria un model lineal, i ens indica el creixement de la població, però té un terme de segon grau que fa que siga un polinomi de segon grau. Si en algun moment $y = x$ la població es mantindrà sempre estable per a aqueix valor. Per exemple, si $x = 0$ llavors $y = 0$, i sempre hi haurà una població de grandària 0. Aquests valors que fan que $y = x$ es denominen **punts fixos**.

El comportament és distint segons els valors que prenga r. Per exemple, per a $r < 1$, s'extingeix l'espècie.

Dibuixem la paràbola per a $r = 0,9$. Imaginem que a l'instant inicial hi ha una població x_0. Busquem, tallant verticalment a la paràbola, el valor de y. Per a transformar-lo en el nou x, tallem a la diagonal del primer quadrant. Observa que la població cada vegada és menor i que va cap a l'extinció. Observa detingudament eixe procés de anar tallant a la paràbola i a la diagonal, per a tornar a tallar a la paràbola i així successivament.



Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



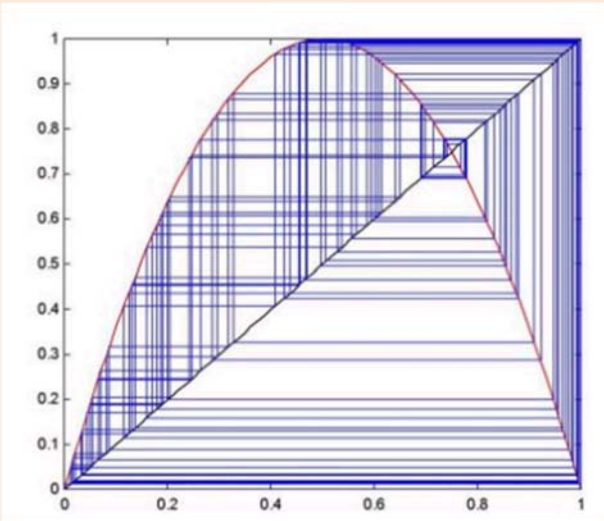
Per a valors de r compresos entre 1 i 3: $1 < r < 3$, aleshores la població s'estabilitza, tendeix a un punt fix.

Hem dibuixat la paràbola per a $r = 2{,}5$, i igual que abans partim d'un valor inicial qualsevol, en aquest cas x_0, que es converteix en $y = P_0$. Eixe valor el prenem com abscissa: $x = Q_0$, i calculem el nou valor de $y = P_1$... Observa com la població s'estabilitza cap a el valor d'intersecció de la parábola amb la diagonal.

Per a valors entre 3 i 3,56994546 les coses comencen a complicar-se, fins que ...

Per a r major o igual a 3,56994546 tenim sensibilitat extrema a les condicions inicials, tenim **caos**.

No sabem què pot ocòrrer. La població canvia constantment. I eixe comportament tan erràtic és per a una funció polinòmica de segon grau!

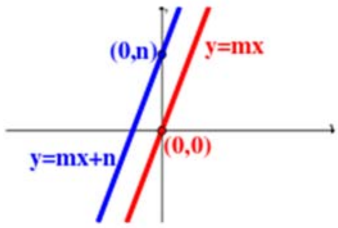
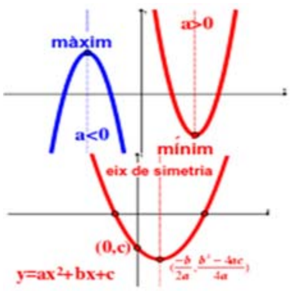
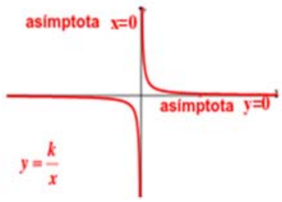
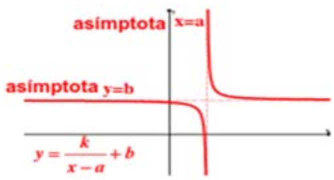
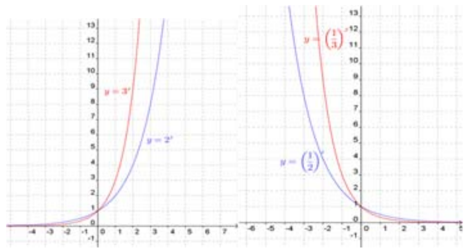


El terme **caòtic** va a indicar que punts pròxims a l'instant inicial poden tindre comportaments diferents al futur.

El meteoròleg americà *Edward N. Lorenz* va utilitzar el terme d'efecte **palometa** per a explicar per què el temps atmosfèric no és predicible a llarg termini, és a dir per a explicar que hi ha una dependència sensible a les condicions inicials: *"L'aleteig d'una **palometa** a Brasil pot provocar un tornado a Texas?"* *Ho havies* sentit?

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

		Exemples
Funció	Relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra.	$y = 2x + 3$
Característiques de les funcions	Continuïtat. Creixement i decreixement. Màxims i mínims. Simetria. Periodicitat.	La recta $y = 2x + 3$ és contínua, creixent, no té màxims ni mínims, ni és simètrica, ni periòdica.
Funció polinòmica de primer grau: Rectes: ***y = mx*** ***y = mx + n***	Es representen mitjançant **rectes**: Hi ha dos tipus: **Funcions lineals o de proporcionalitat directa**: $y=m\cdot x$, passen per l'origen de coordenades. **Funcions afins**: $y=m\cdot x+n$, són translacions a l'eix y , n unitats. Passen pel punt $(0,n)$.	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles ***y = ax²* + *bx* + *c***	Es representen mitjançant **paràboles**: **Vèrtex:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ **Punts de tall amb l'eix OX:** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ **Punt de tall amb l'eix OY:** $x=0$, és el punt $(0,c)$ **Eix de simetria**: és la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles *y =k/x*	$\|k\|$: allunya o acosta la corba a l'origen de coordenades. **Domini i recorregut:** $\Re - \{0\}$ **Continuïtat: Discontínua** en $x = 0$. **Simetria: Funció imparella.** **Asímptotes:** Les rectes $x=0$; $y=0$.	
Hipèrboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Translació de la hipèrbola $y = \frac{k}{x}$ pel vector (*a*, *b*). Domini: $\Re - \{a\}$ Recorregut: $\Re - \{b\}$ - Asímptotes: $x = a$; $y = b$.	
Funció exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ és creixent Si $0 < b < 1$ és decreixent	

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Funcions

1. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència cartesià i en ell, els punts següents, triant una escala als eixos que permeta dibuixar-los tots de forma còmoda. Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si és el cas, en quin eix està: A(2, 4); B(0, 1); C(–3, 0); D(2, –1'5); E(1'5, 0); F(0, 0); G(–1, –2/3).

2. Escriu les coordenades de tres punts situats en el tercer quadrant.

3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents:

A(0, 3); *B*(0, 1'7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). Què tenen en comú tots ells?

4. Escriu les coordenades i representa tres punts de l'eix d'abscisses. Què tenen en comú?

5. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l'angle recte a l'origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.

6. Indica quins de les següents correspondències són funcions:

A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.

A cada circumferència del pla se li associa el seu centre.

A cada circumferència del pla se li associa un diàmetre.

7. La distància, *d*, recorreguda per un tren depèn del nombre de voltes, *n*, que dóna cada roda de la locomotora.

Escriu la fórmula que permet obtindre *d* conegut *n*, sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.

Dibuixa la gràfica.

Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda haja donat mil voltes? (pren com a valor de π el nombre 3,14).

Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?

8. Un baló sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per a mesurar la temperatura a distintes altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Un cert dia la temperatura a la superfície és de 9º C. Determina:

Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?

A quina altura hi haurà una temperatura de –30º C?

Escriu una fórmula que permeta calcular la temperatura T coneixent l'altura A. Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?

Si la temperatura a la superfície és de 12º C, quina és aleshores la fórmula? Quin tipus de funció és?

9. Dibuixa la gràfica de la funció *part sencera*: $y = E(x)$, que indica el nombre enter menor, més pròxim a x, així, per exemple, E(2'3) = 2.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

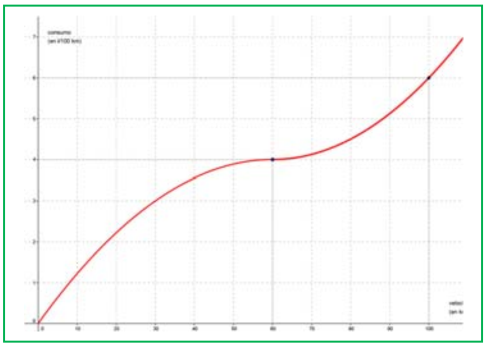
10. Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena *x* a la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dóna l'àrea en funció de *x*. Dibuixa la seua gràfica. Quin tipus de funció és?

11. Una caixa quadrada té una altura de 20 cm. Com depèn el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.

12. Amb un full de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cada uns dels cantons, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.

13. Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l'altura "a" dels cons. Si volem una boia per a assenyalar l'entrada de patinets ens basta amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors es necessita una altura de 1,5 m: quin volum tindrà? Escriu l'expressió de la funció que calcula el volum en funció de l'altura. Dibuixa la seua gràfica.

14. El consum de gasolina d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica. Utilitza la gràfica per a explicar com canvia el consum de gasolina depenent de la velocitat del cotxe. Quin és la variable dependent?



a) I la independent?

b) Quin és el consum per a una velocitat de 50 km/h?

c) A quina velocitat el consum és de 5 l/100 km?

15. En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, als 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajuste a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

a) Durant els primers 30 dies: altura = 4 · temps

b) Als 15 dies següents: altura = 90 + temps

c) A partir del dia 45: altura = 135.

Característiques d'una funció.

16. Ximo ha arribat a un acord amb son pare per a rebre la seua paga. Cobrarà 20 euros al mes el primer any, i 5 euros més per cada any que passe. Quant li correspondrà d'ací a 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seua gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeta calcular la paga quan hagen passat *n* anys.

17. En entrar en l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20 € i les dues primeres hores són gratis per als clients amb targeta de compra del centre. Fes una taula que relacione el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) als casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:

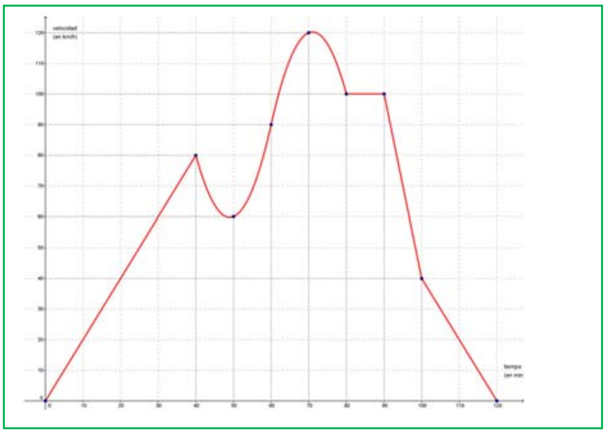
a) Quins valors pren la variable dependent? I la independent?

b) Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?

c) Hi ha punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyala'ls i explica el seu significat.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

18. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic... La següent gràfica reflectix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.



a) És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?

b) Quina és la variable independent? I la dependent?

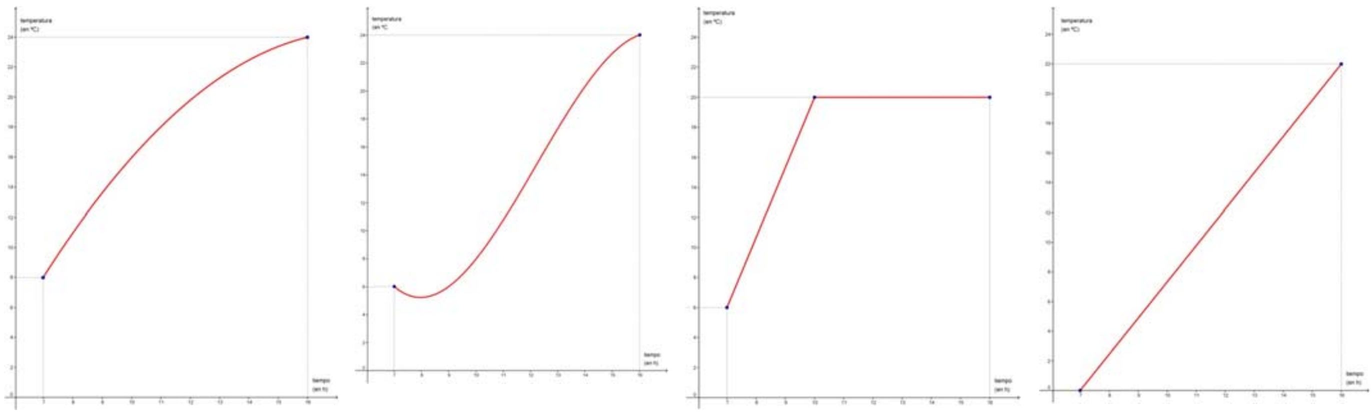
c) A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?

d) Indica els intervals en què la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha sigut constant en algun moment? Quan? Durant quant temps?

e) Quina ha sigut la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I durant la primera hora del mateix?

f) Quina ha sigut la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la primera mitja hora i l'hora i mitja?

19. Les gràfiques següents mostren l'evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la vesprada en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):



a) Explica la monotonia de totes les gràfiques.

b) En alguna ciutat la temperatura s'ha mantingut constant durant tot l'interval? I en part d'ell?

c) Quina ciutat creus que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?

d) Tenint en compte que a Madrid l'increment de la temperatura ha sigut sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s'ha aconseguit després de les 7 h i a Valladolid a partir del mig dia la temperatura va baixar, indica quina gràfica correspon a cada una de les ciutats i explica quines han sigut les temperatures màximes i mínimes en cada una d'elles.

20. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval del mateix, ve donat de la manera següent: Durant les dues primeres hores, la distància "*d*" (en quilòmetres) al punt de partida és: 2·t+1, on "*t*" és el temps (en hores) de duració del trajecte. Entre la 2ª i 3ª hora, la dita distància ve donada per –*t*+ 7. Entre la 3ª i 4ª hora, ambdues inclusivament, *d* = 4. Des de la 4ª i fins a la 6ª (inclusivament), la distància s'ajusta a 3·*t* – 8.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

a) Realitza una taula i una gràfica que arreplegue el dit viatge de la manera més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps en els instants 0, 2, 3, 4 i 6).

b) Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps tardat a recórrer-la és funcional.

c) La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?

d) En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?

e) Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?

f) Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.

g) Troba els punts on la funció aconsegueix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el significat que puguen tindre.

21. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat al capítol: continuïtat, monotonia, extrems, simetria i periodicitat.

a) Valor absolut d'un nombre: $f(x)=|x|$, que es defineix: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.

b) Oposat i invers del nombre *x*: $f(x)=\frac{-1}{x}$.

Tipus de funcions

22. Escriu l'equació de la recta paral·lela a y = 5x + 1 d'ordenada a l'origen 6.
23. Sense representar-los gràficament, estableix si estan alineats els punts A(2, 4), B(6, 9) i C(12, 15).
24. Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema coordenat, les rectes: y = 2x; y = −2x; y = 3x; y = −3x.
25. Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema coordenat, les rectes: y = 2x + 1; y = 2x + 3; y = 2x − 1; y= 2x − 2; y = 2x − 3. Com són?
26. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: El lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: El lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cada una de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per a saber la fórmula més beneficiosa. Escriu les fórmules d'ambdues situacions i dibuixa les seues gràfiques. Raona, a partir de les gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.

27. Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:

a) El seu pendent és 3 i la seua ordenada a l'origen és 5.

b) Passa pels punts *A*(1, 4) i *B*(0, 9).

c) La seua ordenada a l'origen és 0 i el seu pendent és 0.

d) Passa pels punts *C*(–2, 7) i *D*(–3, 10).

e) Passa pel punt (*a*, *b*) i té de pendent *m*.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

28. Dibuixa al teu quadern, sense trobar la seua equació, les rectes següents:

a) De pendent 2 i ordenada a l'origen 0.

b) Passa pels punts $A(1, 3)$ i $B(2, 1)$.

c) El seu pendent és 2 i passa pel punt (4, 5).

29. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seues gràfiques.

a) $y = x^2 + 8x – 13$ b) $y = –x^2 + 8x – 13$ c) $y = x^2 – 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = –x^2 + 4x – 7$

30. Dibuixa la gràfica de $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per a dibuixar la seua gràfica:

a) $y = 2x^2 + 8x – 12$ b) $y = –2x^2 + 8x – 10$ c) $y = 2x^2 – 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ajuda: $2x^2 + 8x – 12 = 2(x^2 + 4x – 6) = 2((x + 2)^2 – 4 – 6) = 2((x + 2)^2 – 10)$. Vèrtex (–2, –10)

31. Ajusta una funció polinòmica a les dades de la taula:

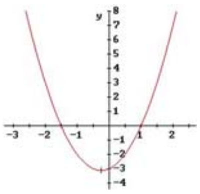
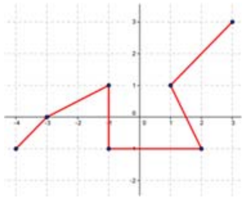
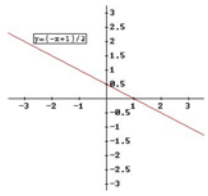
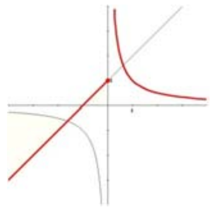
***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

32. Dibuixa les gràfiques de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada cas els punts de discontinuïtat i les asímptotes.

33. Dibuixa les gràfiques de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{–x}$; $y = (1/3)^{–x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

AUTOAVALUACIÓ

1. L’única gràfica que no correspon a una funció és:

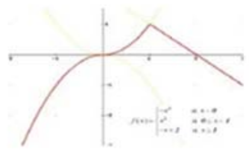
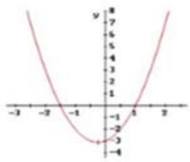
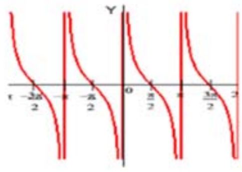
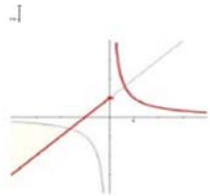
a)  b)  c)  d) 

2. L'única taula que no pot ser d’una relació funcional és:

3. El màxim absolut de la funció s’aconsegueix al punt:

a) b) c) d)

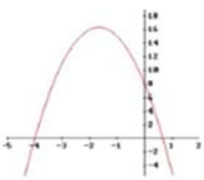
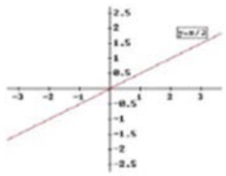
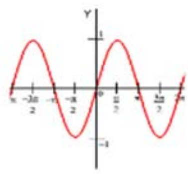
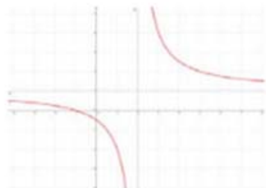
4. L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és:

a)  b)  c)  d) 

5. L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent és:

6. L'única funció afí que, a més, és lineal és:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

a)  b)  c)  d) 

7. L'única funció quadràtica és:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La funció quadràtica que té el seu vèrtex al punt (2, 0) és:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

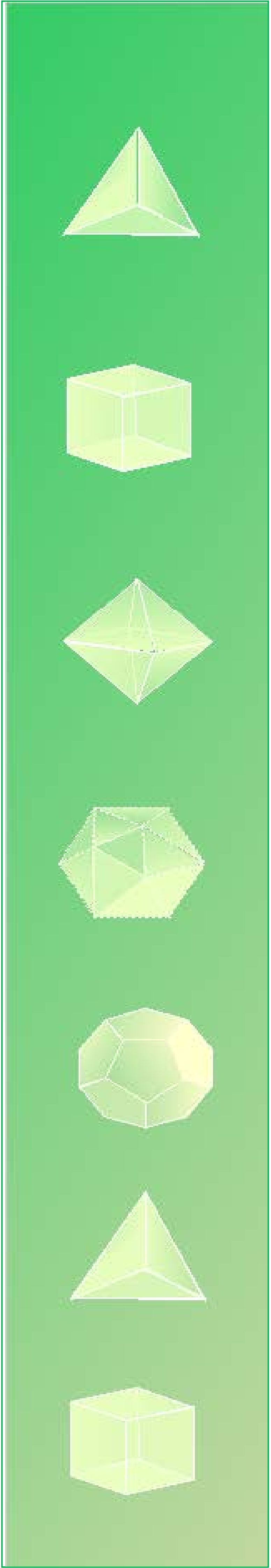
9. La hipèrbola d’asímptotes $x = 3$ i $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. L'única funció exponencial és:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



4t A ESO

Capítol 7: Estadística. Atzar i probabilitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: María Molero y Andrés García Mirantes

Revisoras: Raquel Caro y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

L'Estadística s'ocupa d'interpretar gran nombre de dades. L'Institut Nacional d'Estadística arreplega estudis de qualsevol tipus sobre la població espanyola. Entra en Internet escrivint INE i tindràs un muntó d'informació al teu abast sobre: a) Entorn físic i medi ambient; b) Demografia i població; c) Societat; d)Economia…

En un estudi estadístic conflueixen distintes parts de l'Estadística, la Teoria de Mostres que indica sobre la forma de seleccionar una mostra perquè siga representativa de la població, l'Estadística Descriptiva que utilitza taules, gràfics i paràmetres estadístics com la mitjana i la desviació típica per a descriure les dades, i la Inferència Estadística que utilitza la Teoria de Probabilitats per a obtindre conclusions.

Com sabràs, en temps de Jesucrist ja l'emperador August va fer censos per a conèixer la població a l'Imperi Romà.

La Teoria de la Probabilitat va tindre els seus inicis molt lligats als jocs d'atzar, i és sorprenent que amb aqueix inici haja resultat de tanta utilitat en la Ciència. Es preguntaven què és més probable en tirar dos daus, que la suma de les seues cares superiors siga 9 o siga 10. Analitzant jocs com aquest va ser avançant la Ciència.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. ESTADÍSTICA

1.1. Mostres. Estudis estadístics

Si volem fer un estudi estadístic tenim que:

a) Arreplegar les dades

b) Descriure aqueixes dades amb taules i gràfiques, càlcul de paràmetres estadístics….

c) Extraure conclusions.

Per a arreplegar les dades i determinar els valors de la variable es pot utilitzar tota la població, tot l'univers sobre el qual es realitza l'estudi, o fer una mostra. Moltes vegades no és convenient arreplegar valors de tota la població, perquè és complicat o massa costós, o inclús perquè és impossible com al cas d'un control de qualitat en què es destruïsca l'objecte a analitzar. La part de l'Estadística que s'ocupa de com seleccionar adequadament les mostres es denomina Teoria de Mostres.

Població o univers és tot el conjunt d'individus sobre el qual es realitza l'estudi.

Una **mostra** és un subconjunt representatiu d'aqueixa població.

Cada un dels elements de la població és un **individu**.

Les característiques de la població que s'estudien es denominen **variables estadístiques**, que es classifiquen en **quantitatives** i **qualitatives** segons que els valors que prenguen siguen o no numèrics. Les variables quantitatives que prenen valors aïllats es denominen **variables discretes** i les que poden prendre qualsevol valor d'un interval de la recta real, **variables contínues**.

La part de l'Estadística que ordena, analitza i representa un conjunt de dades per a descriure les seues característiques es denomina **Estadística Descriptiva**.

Per a extraure conclusions s'utilitzen les probabilitats i la part de l'Estadística que s'ocupa d'això és la **Inferència Estadística**.

Exemples:

- Si volem conèixer les preferències en esports de l'alumnat de 4º, és possible preguntar a tota la població (alumnat de 4t), encara que és adequat triar una mostra representativa, seleccionant alguns estudiants.
- En aquest estudi sobre preferències esportives, la variable utilitzada és qualitativa.
- Per a conèixer la intenció de vot davant d'unes eleccions europees, municipals, autonòmiques… s'utilitzen mostres, perquè preguntar a tota la població seria molt costós (i això ja es fa a les eleccions). La variable en aquest cas també és qualitativa.
- Per a estudiar el que més preocupa a una població: desocupació, terrorisme, corrupció… també s'utilitzen mostres. En aquest cas seria molt costós preguntar a tota la població, encara que seria factible. La variable en aquest cas també és qualitativa.
- Però si una fàbrica vol conèixer les hores de vida útil d'una pereta, una nevera, un camió… no pot posar a funcionar a tota la població, (totes les peretes o neveres o camions…) fins que s'espatllen perquè es queda sense producció. En aquest cas és imprescindible seleccionar una

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

mostra. La variable en aquest cas és quantitativa, i el temps presa qualsevol valor, és una variable quantitativa contínua.

- Si preguntem pel nombre de germans és una variable quantitativa discreta.
- En *control de qualitat* es fan estudis estadístics i es prenen mostres.

Activitats proposades

1. Volem realitzar un estudi estadístic sobre el temps dedicat a l'estudi per l'alumnat d'ESO de Madrid. Per a això se seleccionen adequadament 100 alumnes. Indica quina és la població, quina la mostra, quina grandària té la mostra i qui seria un individu.

2. Vols passar una enquesta per a conèixer, el mateix que al problema anterior, el temps dedicat a l'estudi, en aquest cas el dels companys i companyes del teu centre escolar. Se la passaries només a les xiques? Només als xics? Preguntaries als millors de la classe? Als de pitjors notes? Indica el criteri que seguiries per a seleccionar la mostra a què preguntar.

1.2. Variable discreta. Taules i gràfics

Taules

En fer un estudi estadístic o realitzar un experiment aleatori la informació obtinguda es resumeix en una taula o distribució de freqüències.

Exemple:

Possibles resultats	Freqüència absoluta
Els agrada	28
No els agrada	12
Total	40

- Preguntem a 40 estudiants de 4t si els agrada, o no, el futbol. A la taula del marge reflectim els resultats.

  És una taula de freqüències absolutes.

  En dividir la freqüència absoluta entre el nombre total tenim la freqüència relativa, així la freqüència relativa de què els agrada el futbol és 28/40 = 0,7, i la de què no els agrada el futbol és 12/40 = 3/10 = 0,3.

Possibles resultades	Freqüències relatives	Percentatj e
Les gusta	0,7	70
No les gusta	0,3	30
Suma total	1	100

La **freqüència absoluta** és el nombre de vegades que s'ha obtingut aqueix resultat.

La **freqüència relativa** s'obté dividint la freqüència absoluta entre el nombre total de dades.

La suma de les freqüències relatives és sempre igual a 1.

Multiplicant per 100 s'obtenen els percentatges.

Activitat resolta

- *S'han obtingut les dades sobre el nombre de visites que s'han fet dels Textos Marea Verda de Matemàtiques als mesos indicats, i s'han reflectit en una taula. Fes una taula de freqüències absolutes, relatives i percentatges, de freqüències acumulades absolutes i de freqüències relatives acumulades.*

Marea verda	Freqüències absolutes	Freqüències relatives	Percentatges	Freqüències acumulades absolutes	Freqüències acumulades relatives
Setembre	1834	0,51	51	1834	0,52
Octubre	956	0,26	26	2790	0,77
Novembre	432	0,12	12	3222	0,89
Desembre	389	0,11	11	3611	1
TOTAL	3611	1	100		

Observa que les **freqüències acumulades** s'obtenen sumant la freqüència anterior i indica, en aquest exemple, el nombre de visites fins a aqueix moment.

Activitats proposades

3. Copia al teu quadern i completa la següent taula de freqüències absolutes dels valors obtinguts en tirar un dau, amb les freqüències relatives i percentatges, i amb freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.

Resultats	Freqüències absolutes
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

Gràfics estadístics

Les representacions gràfiques ajuden a comprendre el significat de les dades.

Donada una taula de freqüències (absolutes, relatives, percentatges, acumulades absolutes o acumulades relatives) per a representar un **diagrama de rectangles o de barres** es traça per a cada valor de la variable un rectangle o barra d'altura proporcional a la freqüència que s'estiga representant.

Si s'uneixen els punts mitjans dels extrems superiors de les barres tenim un **polígon de freqüències o diagrama de línies**.

En un **diagrama de sectors** es dibuixa un cercle que es divideix en sectors d'amplituds proporcionals a les freqüències.

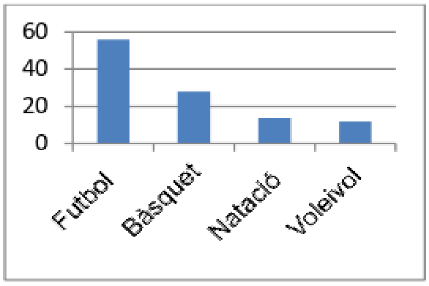
Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitat resolta

- *Tenim un estudi estadístic sobre les preferències esportives de l'alumnat de 4t d'un determinat centre escolar. Representa'ls en un diagrama de barres de freqüències absolutes, en un polígon de freqüències relatives i en un diagrama de sectors.*

Esports	Freqüència Absoluta
Futbol	56
Bàsquet	28
Natació	14
Voleivol	12

Diagrama de barres de freqüències absolutes



Polígon de freqüències relatives o diagrama de línies

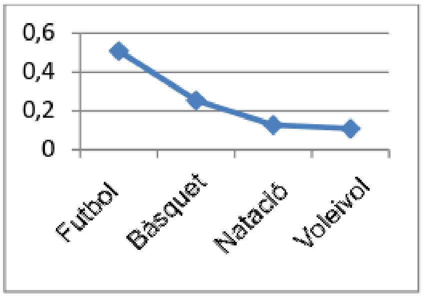
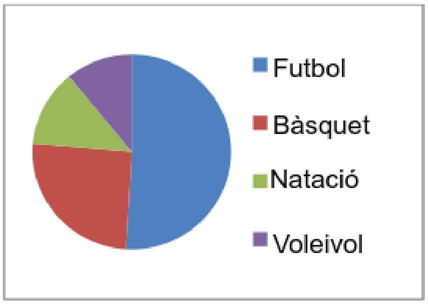


Diagrama de sectors



Activitats proposades

4. Amb la taula de valors de l'exercici anterior, dibuixa al teu quadern el diagrama de freqüències relatives, el polígon de freqüències absolutes acumulades i el diagrama de sectors.

5. Fes un estudi estadístic preguntant als teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que lligen al mes. Confecciona una taula i representa-la en un diagrama de rectangles, un polígon de freqüències i un diagrama de sectors.

6. Selecciona una mostra entre els teus companys i companyes i realitza un estudi estadístic sobre l'esport que més li agrada a cada u. Fes la representació que siga més senzilla d'interpretar.

Utilitza l'ordinador

Els fulls de càlcul són una ferramenta molt útil per a treballar l'Estadística. Sumen, multipliquen, i dibuixen els gràfics amb gran facilitat. Per a l'activitat resolta anterior, copiem la taula amb les dades al full de càlcul a partir de la casella A1. Calculem la suma total a la casella B6, simplement estrenyent la tecla: $\sum$, o bé escrivint =SUMA(B2:B5) que vol dir que volem sumar el que hi ha des de la casella B2 a la B5.

	A	B	C
1	Deportes	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
2	Futbol	56	0,509090909
3	Baloncesto	28	0,254545455
4	Natación	14	0,127272727
5	Balón volea	12	0,109090909
6	SUMA	110	
7			

Per a calcular les freqüències relatives escrivim en C1: Freqüència relativa, i en C2, escrivim el signe igual, (amb el que estem dient al full que calcularem alguna cosa), punxem a la casella B2, escrivim: /, i punxem en B6: =B2/B6, ens ix 0,50909… La casella B2 anirà variant quan calculem C3, C4…, però volem que la casella B6 es quede

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

fixa. Per a dir això, posem el símbol $: =B2/$B$6. I ara arrosseguem fins a la casella C5. (Si arrosseguem abans de posar el $ ens ix un error, perquè està dividint per zero en anar modificant la casella). Tenim les freqüències relatives calculades.

Per a dibuixar els gràfics només hem de seleccionar les files i columnes que ens interessen i al menú de "Inserir" seleccionar el tipus de gràfic desitjat: Columna, Línia, Circular…

1.3. Paràmetres de centralització i dispersió

Paràmetres de centralització

Ja saps que els paràmetres de centralització ens donen informació sobre el "*centre*" d'un conjunt de dades. Estudiem la mitja aritmètica, la moda i la mitjana.

Activitat resolta

- *Neus ha tingut en Matemàtiques les notes següents: 8, 4, 6, 10 i 10. Calcula la seua mitja, la seua moda i la seua mitjana.*
  La seua nota mitja es calcula sumant totes les notes: 8 + 4 + 6 + 10 + 10 = 38, i dividint la suma entre el nombre total de notes que és 5: 38/5 = 7,6.

  La moda és 10 perquè és el valor més freqüent.

  Una forma de calcular la mitjana és ordenar els valors de menor a major, i si el nombre de dades és imparell, el valor central és la mitjana. Si el nombre de dades és parell, la mitjana és la mitja de les dos dades centrals.

  Al nostre cas: $4 \leq 6 \leq \mathbf{8} \leq 10 \leq 10$, per la qual cosa la mitjana és 8.

Per a calcular la **mitja** (**m**) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se sumen tots i es divideix pel nombre total de dades (n).

$$\textbf{Mitja} = \boldsymbol{m = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n}$$

Què és el que està de moda? El que més es porta.

La **moda** (***mo***) d'una distribució de freqüències és el valor més freqüent.

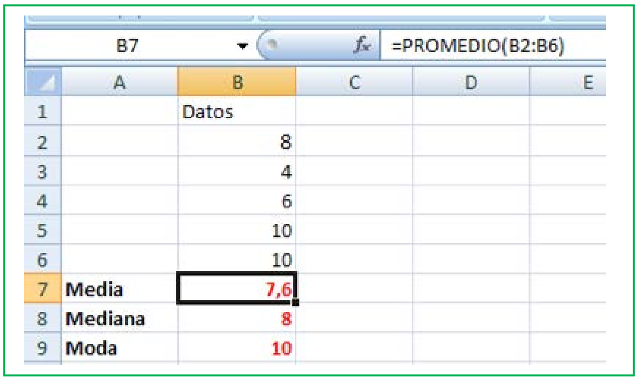
La **mitjana** (***me***) és el valor central que deixa per davall el mateix nombre de valors de la variable que per damunt.

Utilitza l'ordinador

Per a calcular la mitja, la mitjana i la moda amb el full de càlcul, copiem en la casella B2, B3… les dades: 8, 4, 6, 10 i 10. Escrivim en la casella A7, Mitja, i per a calcular la mitja escrivim un signe igual en B7. Busquem, desplegant les possibles funcions, la funció MITJA, i escrivim

=PROMEDIO(B2:B6),

que significa que calcule la mitja dels valors que hi ha en les caselles des de B2 fins a B6.


B7 =PROMEDIO(B2:B6)

	A	B	C	D	E
1		Datos			
2		8			
3		4			
4		6			
5		10			
6		10			
7	Media	7,6			
8	Mediana	8			
9	Moda	10			

De la mateixa manera calculem la mitjana buscant en les funcions o escrivint =MITJANA(B2:B6) i la moda buscant a les funcions o escrivint =MODA(B2,B6).

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

7. Donades les temperatura en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la taula següent:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

a) Calcula la temperatura mitja, la moda i la mitjana.

b) Utilitza l'ordinador per a comprovar el resultat.

8. Calcula la mitja, la mitjana i la moda de les distribucions següents:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats.

Observa en cada cas com influeixen els valors extrems. Influeixen la moda? I a la mitja? I a la mitjana?

Activitat resolta

- *En una classe de 40 alumnes les qualificacions han sigut:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Suma**
f_i	1	2	0	1	2	8	7	6	6	4	3	**40**

A cada nota l'anomenem x_i i a la freqüència absoluta d'aqueixa nota: f_i. Açò vol dir que hi ha hagut un zero, dos uns, cap 2… i 3 deus.

Per a calcular la mitja aritmètica afegim a la taula una fila amb els productes $\mathbf{x_i \cdot f_i}$ i sumem aqueixa fila:

$x_i \cdot f_i$	0	2	0	3	8	40	42	42	48	36	30	**251**

En ser 40 el nombre total d'estudiants la mitja és: **Mitja** = *m* = 251 / 40 = 6,275.

La **moda** és la nota més freqüent, que és *mo* = 5 perquè és la de major freqüència.

Per a calcular la **mitjana** afegim una nova fila, la de les freqüències acumulades:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Freqüències acumulades	1	3	3	4	6	14	21	27	33	37	40

La mitat de les dades és 40/2 = 20, i com 14 < 20 < 21, la mitja és 6.

Si la variable pren els valors $x_1, x_2, …, x_n$, amb una freqüència absoluta $f_1, f_2, …, f_n$, per a calcular la **mitja** es multiplica cada valor per la seua freqüència absoluta, es sumen els dits productes i es divideix per n el total de valors de la variable:

$$\boldsymbol{m} = \textbf{Mitja} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$$

La **moda** és la freqüència més alta.

Pot ocórrer que una distribució de freqüències tinga més d'una moda. Per exemple, la distribució:

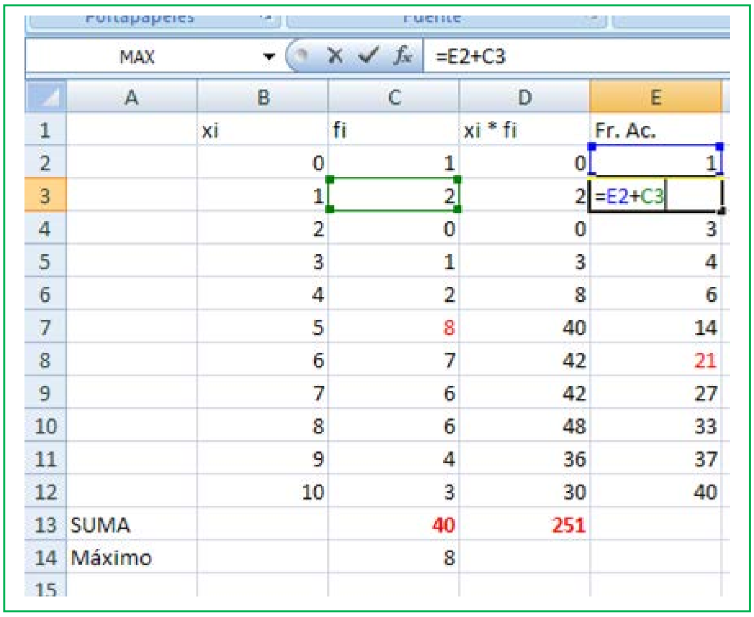
x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	10	9	10	8	7	10

té 3 modes, 1, 3 i 6, ja que el valor més alt de la freqüència absoluta és 10 als tres casos.

La moda permet classificar els conjunts de dades en *unimodals*, *bimodals* o *plurimodals*, segons el nombre de modes que tinguen.

Per a obtindre la **mitjana** es calculen les freqüències acumulades i es busca el valor de la variable que ocupa el lloc central: $n/2$.

Utilitza l'ordinador


MAX =E2+C3

	A	B	C	D	E
1		xi	fi	xi * fi	Fr. Ac.
2		0	1	0	1
3		1	2	2	=E2+C3
4		2	0	0	3
5		3	1	3	4
6		4	2	8	6
7		5	8	40	14
8		6	7	42	21
9		7	6	42	27
10		8	6	48	33
11		9	4	36	37
12		10	3	30	40
13	SUMA		40	251	
14	Máximo		8		
15					

Copiem les dades de l'activitat resolta en un full de càlcul, escrivint xi a la casella B1, fi a la C1. En B2 escrivim 0, i en B3, 1. Seleccionem aquestes dues caselles i arrosseguem fins a la casella B12. Copiem les freqüències a la columna C. En A13 escrivim SUMA. Calculem la suma de les freqüències amb la tecla: $\sum$ i s'obté 40 a la casella C13. A la columna D1 escrivim $x_i \cdot f_i$. A D2 escrivim = i punxem a B2, escrivim * i punxem a C2 (=B2*C2). Seleccionem D2 i arrosseguem fins a D12. Calculem la suma (251) i dividim el valor de la casella D12 entre el de la casella C12.

Podem calcular el valor màxim de les freqüències, que en aquest cas es veu a ull, però si haguera molts més valors, moltes més files, es pot utilitzar la funció MAX.

Per a calcular les freqüències acumulades utilitzem la columna E. En E2 escrivim =C2. En E3 escrivim =E2+C3. Per què? I seleccionant E3 arrosseguem fins a E12.

Activitats proposades

9. S'ha llançat un dau 100 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

a) Calcula la mitja, moda i mitjana.

b) Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats.

10. Llancem 2 daus i sumem els valors obtinguts. Repetim l'experiment 1000 vegades i obtenim les següent taula de freqüències absolutes.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Calcula la mitja, la mitjana i la moda.

b) Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats.

c) Repeteix tu els llançaments, ara només deu vegades, i calcula novament la mitja, mitjana i moda.

11. Utilitza l'ordinador per a calcular la mitja, la mitjana i la moda de la següent taula de freqüències absolutes, que indica el nombre de fills que tenen 200 famílies entrevistades:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

Paràmetres de dispersió

Ens donen una mesura del "*dispersos*" que estan les dades.

La primera mesura ens la dóna el **recorregut**, o el valor màxim menys el valor mínim.

Les més utilitzades són la variància i la desviació típica (o desviació estàndard) que mesura la distància de les dades respecte de la mitja.

Ja saps que la mitjana ens indica el valor de la variable que ocupa el lloc central. Es denomina **primer quartil (Q1)** al valor de la variable que deixa menors o iguals que ell a la quarta part de les dades, (o un 25 %), (sent per tant les tres quartes parts majors o iguals que ell). La mitjana és el segon quartil, que deixa per davall la mitat de les dades o un 50 %. El **tercer quartil (Q3)** és el valor de la variable que deixa menors o iguals que ell les tres quartes parts de les dades o un 75 % (i majors o iguals la quarta part). S'anomena interval **interquartílic** (o recorregut interquartílic) a la distància entre el tercer i el primer quartil (**Q3 – Q1**). Pel que hem dit, en aqueix interval estan la meitat de les dades.

Activitat resolta

Seguim amb la mateixa activitat anterior.

- Neus ha tingut en Matemàtiques les notes següents: 8, 4, 6, 10 i 10. Calcula el seu recorregut, la variància, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartílic.

La major qualificació ha sigut un 10 i la menor un 6, per tant el **recorregut** és 10 – 6 = 4.

Recorregut = Màxim – Mínim.

La mitja ja l'hem calculada i és 7'6. Volem analitzar com les observacions es separen de la mitja. Si a cada valor li restem la mitja, uns ixen positius i altres negatius, i si sumem tots, es compensen, per la qual cosa ix 0. És possible superar aqueixa dificultat calculant aqueixes diferències en valor absolut, o elevant-les al quadrat. Si les elevem al quadrat, sumem tot i dividim pel nombre total de valors de la variable menys 1, obtenim la variància.

Es divideix per n – 1 per a millorar les propietats de l'estadístic: Variància.

Si després calculem l'arrel quadrada, s'obté la desviació típica. Estem avaluant la distància dels valors de la variable a la mitja.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

	x_i	x_i – mitja	(x_i – mitja)^2
1	8	0’4	0’16
2	4	-3’6	12’96
3	6	-1’6	2’56
4	10	2’4	5’76
5	10	2’4	5’76
Mitja = 7’6			Suma = 27’2

Si dividim 27’2 entre 5 (*n)* s’obté 5’44 que és la variància.

Calculem l’arrel quadrada: 2’33 que és la desviació típica.

Variància = ((x_1 – mitja)^2 + (x_2 – mitja)^2 + … + (x_n – mitja)^2)/*n* = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}$

S = Desviació típica = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}}$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\cdot m+m^2)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_i+n\cdot m^2=$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2m(n\cdot m)+n\cdot m^2=$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot m^2$$

Es pot demostrar, fent operacions una fórmula més còmoda per a calcular la variància i la desviació típica:

Variància = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-m^2$ **S** = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-m^2}$

	x_i	x_i^2
	8	64
	4	16
	6	36
	10	100
	10	100
m = 7’6	Suma = 38	Suma = 316

Variància = (316/5) – (7’6)^2 = 63’2 – 57’76 = 5’44.

La desviació típica és l’arrel quadrada de la variància, és a dir, *s* = 2’33.

Per a calcular els quartils hem d'ordenar les dades; 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10.

1	2	3	4	5
4	**6**	8	**10**	10

El primer quartil deixa per davall la quarta part o el 25 % de les dades. Hi ha 5 dades i 5/4 = 1'25, com 1 < 1'25 < 2, el primer quartil és 6. Q1 = 6. El tercer quartil deixa per davall les tres quartes parts o el 75 % de les dades: 3(5/4) = 3'75. Com 3 < 3'75 < 4, llavors Q3 = 10.

Interval interquartílic = Q3 – Q1.

A l'exemple, l'interval interquartílic = Q3 – Q1 = 10 – 6 = 4.

Utilitza l'ordinador

Igual que hem calculat la mitja, la mitjana i la moda, el full de càlcul es pot utilitzar per a obtindre:

- El recorregut calculant MAX – MIN.
- La variància utilitzant VARP.
- La desviació típica usant DESVESTP.
- Els quartils, (QUARTIL), sent el quartil 0 el mínim; el quartil 1, Q1; el quartil 2, la mitja; el quartil 3, Q3; i el quartil 4, el màxim.

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Recorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	
12	CUARTIL 3	10		

Activitats proposades

12. Donades les temperatura en una ciutat d'un exercici anterior:

Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

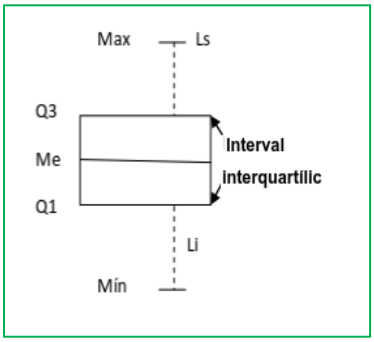
a. Calcula el recorregut, la variància, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartílic.
b. Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats.

13. Calcula el recorregut, la variància, la desviació típica, els quartils i l'interval interquartílic. de les distribucions següents:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000   b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10   c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats.

1.4. Diagrama de caixes



El diagrama de caixes és una representació gràfica en què s'utilitzen els quartils, la mitjana, els valors màxims i mínims… intentant visualitzar tot el conjunt de dades.

Es forma un rectangle (o caixa) els costats del qual són els quartils i on s'assenyala al centre, la mitjana. S'afigen dos braços (o bigots) on s'assenyalen els valors màxim i mínim.

Es poden calcular, a més, uns límits superior i inferior. L'inferior, L1; és Q1 menys 1,5 per l'interval interquartílic, i el superior Ls és Q3 + 1,5 per l'interval interquartílic.

El diagrama de caixa és el de la figura del marge.

A l'exemple anterior, una vegada ordenats les dades: $4 \le 6 \le 8 \le 10 \le 10$, hem calculat que:

Mitjana = Em = 8. Q1 = 6. Q3 = 10. Interval interquartílic = 4.

Els bigots ens indiquen:

Màx = 10. Mín = 4. Ls = Q3 + 4*1,5 = 16. Li = Q1 – 4*1,5 = 0.

En aquest exemple el màxim és igual a 10, que és menor que el possible extrem superior, igual a 16. El mínim és 4, major que l'extrem inferior, per tant no hi ha valors *atípics* que siguen majors que el límit superior o menors que el límit inferior. Els extrems dels bigots, al nostre exemple són 10 i 4.

1.5. Variable contínua: intervals i marques de classe. Histogrames

Recorda que les variables poden ser qualitatives, si no són numèriques, o quantitatives, que al seu torn poden ser discretes o contínues.

Per exemple: Si es fa un estudi estadístic sobre la població d'estudiants, es pot preguntar sobre la professió dels seus pares i mares, que és una variable qualitativa, sobre el nombre de germans, que és una variable quantitativa discreta (ningú té 3,7 germans), o sobre l'edat, l'estatura, la qualificació mitjana… que són variables quantitatives contínues.

Amb les variables quantitatives contínues té sentit agrupar els valors en intervals.

Al valor central de l'interval se'l denomina **marca de classe**.

La representació gràfica més adequada és **l'histograma** que és un diagrama de rectangles en què l'àrea de cada rectangle és proporcional a la freqüència. Té l'avantatge que d'aqueixa forma la freqüència de cada succés ve representada per l'àrea.

Activitat resolta

- Realitza un estudi estadístic sabent que la taula de freqüències absolutes, amb intervals, dels pesos de 40 estudiants d'un centre escolar, és:

Pes	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
Estudiants	2	10	12	9	4	2	1

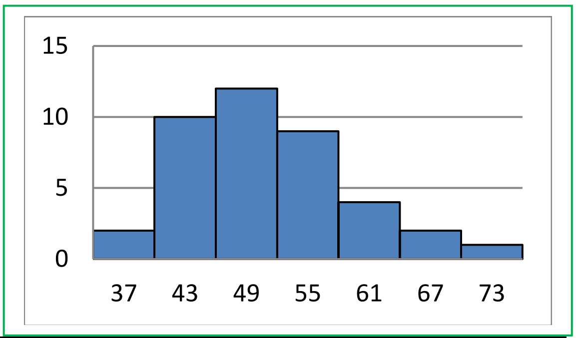
La taula ens diu que hi ha 2 estudiants el pes de la qual és major o igual a 34 i és menor que 40.

Calculem les marques de classe, buscant el punt mitjà de cada interval: (40 – 34)/2 = 3 i 34+3 =37. Tots els intervals en aquest exemple tenen una longitud de 6. Reescrivim la taula amb les marques de classe i les freqüències absolutes:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
f_i	2	10	12	9	4	2	1

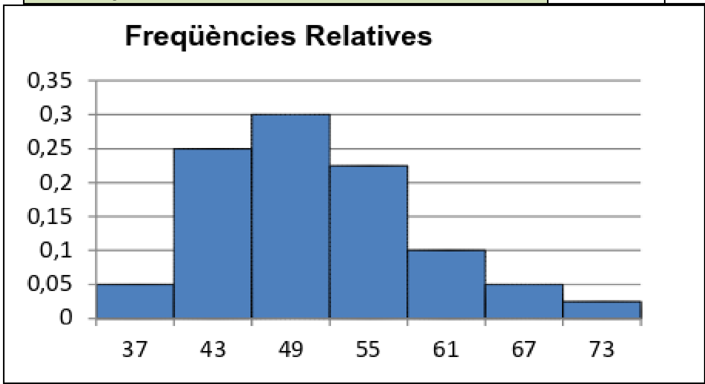
Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

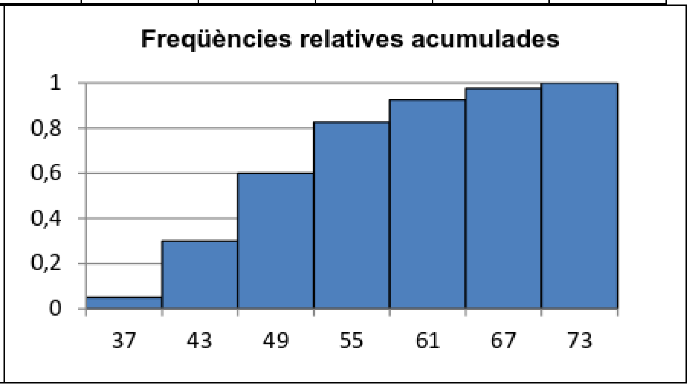
En aquest cas l'histograma de les freqüències absolutes és molt senzill perquè tots els intervals tenen la mateixa longitud. Si no fóra així, caldria calcular amb atenció les altures dels rectangles perquè les àrees foren proporcionals a les freqüències.



Representarem també l'histograma de les freqüències relatives i de les freqüències relatives acumulades:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
Freqüències relatives	0'05	0'25	0'3	0'225	0'1	0'05	0'025
Freqüències relatives acumulades	0'05	0'3	0'6	0'825	0'925	0'975	1





Càlcul de la mitja i la desviació típica:

Procedim de la forma que ja coneixem, calculant el producte de les marques de classe per les freqüències:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i \cdot f_i$	74	430	588	495	244	134	73	2038

La **mitja** és igual a 2038/40 = 50'95

Per a calcular la **desviació típica** restem a cada marca de classe, la mitja, elevem al quadrat i multipliquem per la freqüència relativa:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i - m$	–13'95	–7'95	–1'95	4'05	10'05	16'05	22'05	
$(x_i - m)^2$	194'60	63'2025	3'8025	16'4025	101'0025	257'6025	486'2025	1122'8175
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$(x_i - m)^2 \cdot f_i$	389'20	632'025	45'63	147'62	404'01	515'205	486'2025	2619'9

La suma de les diferències de la mitja al quadrat per les freqüències relatives és 2619'9. Ara dividim entre *n* que al nostre cas és 40, i s'obté 65'5 que és la variància. Calculem l'arrel quadrada. La desviació típica és 8'09.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitat resolta

- Utilitzem l'altra fórmula: *Variància* = $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
x_i^2	1369	1849	2401	3025	3721	4489	5329	22183
$x_i^2 \cdot f_i$	2738	18490	28812	27225	14884	8978	5329	106456

Variància = (106456/40) –(50'95)^2 = 2661'4 – 2595'9 = 65'5 i *desviació típica* = *s* = 8'09.

- *Vegem un altre exemple de càlcul de la mitja i la desviació típica utilitzant l'altra fórmula:* *Variància* = $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2$

x_i	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	Suma
f_i	1	0	2	5	9	22	16	12	8	3	1	1	80
$x_i \cdot f_i$	64	0	132	335	612	1518	1120	852	576	219	74	75	5577
x_i^2	4096	4225	4356	4489	4624	4761	4900	5041	5184	5329	5476	5625	
$x_i^2 \cdot f_i$	4096	0	8712	22445	41616	104742	78400	60492	41472	15987	5476	5625	389063

n = 80.

La **mitja** és igual a *m* = 5577/80 = 69'7.

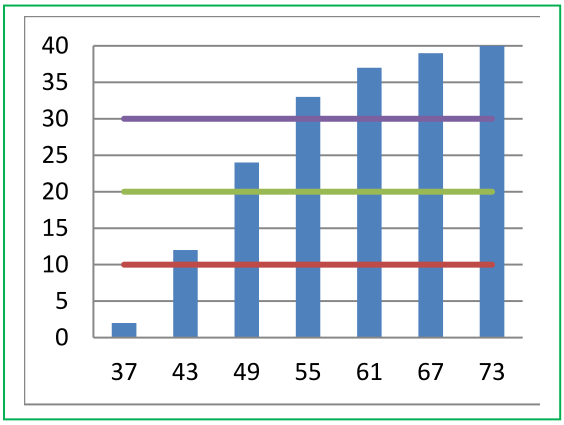
La **variància** és igual a $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot f_i\right)}{n} - m^2 = \frac{389063}{80} - 69{,}7^2$ = 4863'2875 – 4858'09 = 5'1975

La *desviació típica* és igual a l'arrel quadrada de la variància, *s* = 2'28.

Càlcul de la mitjana i els quartils.

Representem l'histograma de freqüències absolutes acumulades, i tallem per les línies *n*/2 per a la mitjana, *n*/4 per al primer quartil, i 3*n*/4 per al segon. Al nostre cas per 20, 10 i 30.

Observem, veient on les rectes horitzontals, *y* = 20, *y* = 10 i *y* = 30 tallen a l'histograma, que la mitjana està a l'interval [46, 52) la marca de classe de la qual és 49, el primer quartil a l'interval [40, 46) la marca de classe del qual és 43, i el tercer quartil a [52, 58) la marca de classe del qual és 55.



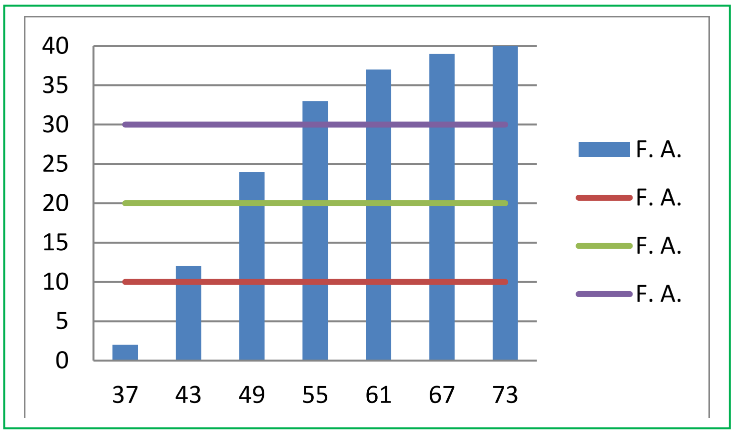
x_i	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
f_i	2	10	12	9	4	2	1
F_i	2	12	24	33	37	39	40

Podem ajustar-lo més fent una interpolació lineal, és a dir, aproximant amb una recta.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Per a la mitjana tracem la recta que passa pels punts (46, 12) i (52, 24) ($y = 2x - 80$) i calculem on talla a la recta $y = 20$. Talla en $x = 50$. Per tant la mitjana és $Em = 50$.

El tercer quartil està a l'interval [52, 58). Calculem l'equació de la recta que passa pels punts (52, 24) i (58, 33), que és $y = (3/2)x - 54$. Calculem on talla a $y = 30$, que és en $x = 56$. Per tant Q3=56.



El primer quartil està a l'interval [40, 46). La recta que passa pels punts:

(40, 2) i (46, 12)

té per equació $y = (5/3)x - 64{,}6666$, que talla a $y = 10$ en $x = 44{,}79999$…. Q1 = 44,8.

Utilitza l'ordinador

Per a dibuixar histogrames amb l'ordinador utilitzant un full de càlcul ens trobem amb la dificultat que aquest dibuixa els rectangles separats. Dibuixa un diagrama de rectangles. Per a arreglar-lo al cas que la longitud de tots els intervals siga la mateixa, has d'assenyalar un dels rectangles, entrar en "donar *format a la sèrie de dades*" i, en "Opcions *de sèrie*" seleccionar en "Ample *de l'interval*" un ample del 0 %, és a dir, "sense *interval*". Si les longituds són distintes s'ha de calcular prèviament les altures dels rectangles.

Activitats proposades

14. Utilitza l'ordinador per a dibuixar histogrames i repetir els càlculs de l'activitat resolta anterior.

15. Es coneixen les quantitats de residus sòlids arreplegats en m^3/setmana durant 12 setmanes d'una urbanització: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes amb quatre intervals: [20, 25), [25, 30), [30, 35) i [35, 40). Calcula les marques de classe. Dibuixa l'histograma de freqüències absolutes. Calcula la mitja i la desviació típica. Calcula gràficament la mitjana i els quartils.

16. Fes un estudi estadístic preguntant als teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que lligen al mes. Confecciona una taula i representa-la en un diagrama de rectangles, un polígon de freqüències i un diagrama de sectors.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2. DADES BIDIMENSIONALS

2.1. Idees generals

Possiblement, l'aplicació més important de l'estadística no siga l'estudi d'una variable aïllada sinó l'anàlisi de les relacions entre variables. Si tenim dues mesures que es donen juntes, és lògic voler saber en quina mesura una influeix en l'altra. Vegem alguns exemples.

Exemples:

- En una botiga de camises, volem saber quantes vendrem (generalment) en funció del preu.
- Si sabem l'altura del pare d'un xiquet, quina serà l'altura del fill?
- Si a un grup d'alumnes li donem una paga i mesurem les seues qualificacions. Les alumnes que reben més diners trauen millors notes? Quant més? Aquest mateix estudi pot fer-se amb els treballadors d'una empresa. Si se'ls paga més augmenta la producció?
- Són més intel·ligents els hòmens que les dones? O viceversa?

Pot parèixer que algun d'aquests casos és elemental. És obvi que els pares alts tenen fills alts i que si baixe el preu, venc més. Però l'important és QUANT. Si jo tinc una botiga, el que jo vull és guanyar diners. I per descomptat que si pose les camises a 0 € vendré molt… però no guanyaré res. El que vull és una estimació de quant venc a cada preu per a poder saber el preu que m'interessa posar.

2.2. Variables bidimensionals. Freqüències conjuntes

Una **variable bidimensional són** dos variables que es mesuren conjuntament. Si *X* i *Y* són les variables, la variable bidimensional és (*X, Y*).

Exemples:

- El preu a què posem les camises (*X*) i el preu anterior (*Y*). L'altura d'un pare (X*) i* l'altura del fill (Y*)*
- El color del pèl (*X*) i el color dels ulls (*Y*).
- El sexe d'una persona (*X*) i el seu coeficient d'intel·ligència (*Y*).

Dóna't compte que les variables bidimensionals poden ser qualitatives o quantitatives i inclús cada una d'un tipus. Així mateix podríem tindre les dades agrupades, i llavors el que hi hauria seria parelles d'intervals.

La representació de forma de taula de freqüències és exactament igual que al cas unidimensional amb l'excepció que ara tenim parelles. Anem primer amb un exemple i després introduirem els conceptes.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemple:

- Tenim una mostra de 8 persones i mirem el seu color d'ulls i cabell. Hi ha 4 morenos d'ulls marrons, 1 moreno d'ulls verds, dos rossos d'ulls blaus i un ros d'ulls verds.

Encara no hem definit les freqüències però creiem que ho pots entendre igual. La taula és:

Individu	Freqüències absolutes	Freqüències relatives
(Moreno, marrons)	4	0'5 = 4/8
(Moreno, verds)	1	0'125 = 1/8
(Ros, blaus)	2	0'25 = 2/8
(Ros, verds)	1	0'125 = 1/10
TOTAL	8	1

Com pots veure, per a que dos elements siguen iguals, han de ser iguals les dues components. La variable *X* és el color del cabell i la variable *Y* el color dels ulls. Es té *X* = {"Moreno", "Ros"} i Y={"Marrons", "Verds", "Blaus"}. No té per què haver-hi el mateix nombre de valors en cada variable.

Les definicions són les mateixes.

La freqüència **absoluta** és el nombre de vegades que s'ha obtingut aqueixa parella de resultats (dues parelles són iguals si les seues dues components són iguals).

La freqüència **relativa** és la freqüència absoluta dividida entre el nombre total de dades.

Taula de freqüències conjunta:

De vegades, en compte de mostrar les dades en parelles, es posen en una **taula de doble entrada o taula de contingència**. S'anomena així perquè la *X* està en vertical i la *Y* en horitzontal. Als encreuaments es posen les freqüències, ja siguen absolutes o relatives. Si es posen les absolutes es diu **taula de doble entrada de freqüències absolutes** i si es posen les relatives aleshores **taula de doble entrada de freqüències relatives**.

La taula anterior, amb (x_i, y_i) no té un nom especial universalment acceptat. Podem anomenar-la **taula de freqüències de parelles.**

Exemple:

- Tenim la mateixa mostra d'abans: 4 morenos d'ulls marrons, 1 moreno d'ulls verds, dos rossos d'ulls blaus i un ros d'ulls verds. Anem a col·locar-los en taules de doble entrada de freqüències absolutes i després relatives.

Ens limitem a posar a la primera columna els dos valors que tenim de la *X*, que és el color de cabell ("Moreno" i "Ros") i a la primera fila els de la *Y*, que és el color dels ulls ("Marrons", "Verds" i "Blaus").

Y / ***X***	**Marrons**	**Verds**	**Blaus**
Moreno	4	1	0
Ros	0	1	2

Observa que en aquesta taula poden aparèixer zeros, que representen que no hi ha ningú amb aqueixa parella de característiques.

Si dividim les freqüències absolutes pel nombre total de dades (que en aquest cas és 8) obtenim la taula de doble entrada de freqüències relatives.

Y / ***X***	**Marrons**	**Verds**	**Blaus**
Moreno	0'5 = 4/8	0'125=1/8	0
Ros	0	0'125=1/8	0'25=2/8

Activitats proposades

17. Amb la taula de valors de l'exemple, construeix la taula de freqüències absolutes i relatives de la variable *X* ("Color de cabell") i la variable *Y* ("Color d'ulls") per separat, com a variables unidimensionals.

18. Completa la següent taula i expressa-la en forma de taula de doble entrada, primer amb freqüències relatives i després amb freqüències absolutes.

(x_i, y_i)	**Freqüència absoluta**	**Freqüència relativa**
(0, 1)	12	
(1,.2)	14	
(2,3)	14	

19. Completa la següent taula de freqüències conjunta i expressa-la en freqüències de parelles (x_i, y_i), tant amb freqüències relatives com absolutes.

2.3. Diagrama de dispersió i recta de regressió

Un **diagrama de dispersió**, també anomenat **núvol de punts** per la seua aparença, és un gràfic que s'obté representant cada parella com un punt del pla cartesià. S'usa principalment amb variables quantitatives i dades sense agrupar (si estigueren agrupades prendríem les marques de classe).

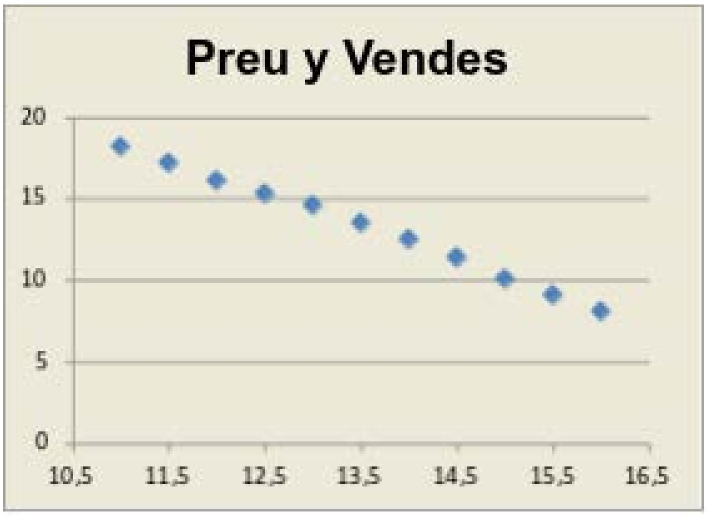
És molt simple de dibuixar. N'hi ha prou amb posar un punt en cada parella. De vegades si hi ha valors repetits es posen els punts més grossos però també és comú posar-los tots igual.

Exemple:

- Tenim una botiga i volem estudiar les vendes d'una camisa en funció del preu. Per a això, provem cada setmana amb un preu distint i calculem les vendes mitges. Obtenim així una taula com la que segueix

Preu	11	11'5	12	12'5	13	13'5	14	14'5	15	15'5	16
Vendes (mitges)	18'2	17'2	16'1	15'3	14'6	13'5	12'5	11'4	10'1	9'1	8'1

Si copiem les dades a un full de càlcul i li donem a dibuixar un diagrama de dispersió, obtenim un diagrama com el següent:

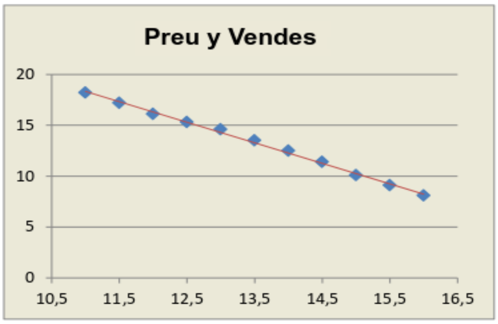


que és el típic gràfic que pot veure's per a fer un estudi de resultats en qualsevol empresa.

La recta de regressió

El problema amb el núvol de punts és que simplement descriu el que passa. Açò certament és important en si mateix, però el que és realment interessant és PREDIR què passarà. A l'exemple anterior, les nostres dades arriben a preus de 16 €. Què passaria si pugem el preu a 17 €? O l'abaixem a 9 €? I amb els preus intermedis, com 12'25 €?

Com hi ha infinits preus, no podrem tindre en compte infinit preus. L'interessant és tindre un model matemàtic que ens diga, per a un preu donat, quin és el valor esperat de les vendes. O, en general, per a un valor de X quin és el valor esperat de Y.



El més fàcil és fer una recta que s'aproxime. Es pot dibuixar pràcticament a mà, però hi ha una fórmula matemàtica que la calcula. Aqueixa fórmula és complicada i està fora de l'abast d'aquest curs però sí que anem a ensenyar-te com fer-la amb ordinador.

Abans de res, anem a mostrar-te a l'exemple anterior la línia de tendència.

Observa que no passa per tots els punts, sinó que uns queden

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

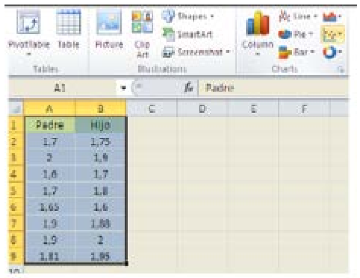
dalt i altres baix. De fet és impossible que una recta passe per tots i, al món real, l'ajust mai és exacte. La recta passa pel mig dels punts.

Utilitza l'ordinador

- La següent taula són dades de l'altura d'un pare i de la del seu fill amb 15 anys d'edat. Les altures estan en metres.

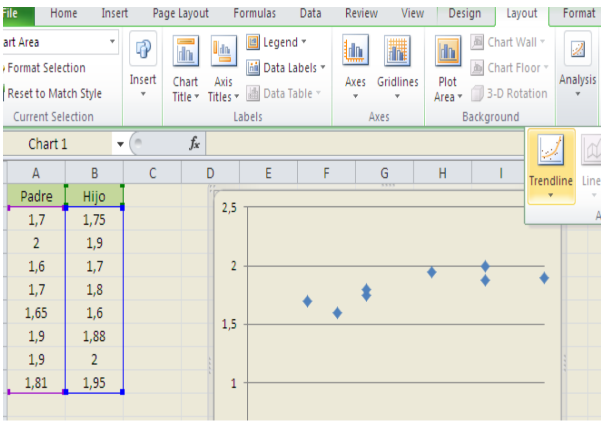
Pare	1'7	2	1'6	1'7	1'65	1'9	1'9	1'81
Fill	1'75	1'9	1'7	1'8	1'6	1'88	2	1'95

Primer, farem el diagrama de dispersió. Copiem les dades en un full de càlcul. Els posarem en vertical perquè es veja millor, però es podria fer exactament igual en horitzontal.



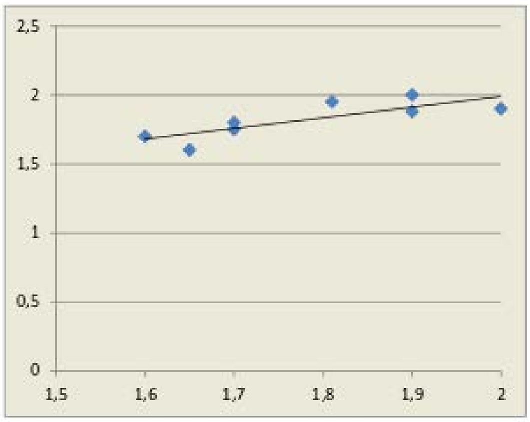
Després, assenyalem les dues sèries i li donem a *inserir gràfic de dispersió*.

Automàticament ens apareix el diagrama de dispersió (núvol de punts). Si jugues un poc amb les opcions pots modificar el títol, el format, l'escala dels eixos…



Més encara, la recta de regressió és molt fàcil de dibuixar. Basta amb què seleccions el gràfic i li dónes a *anàlisi* i a *línia de tendència*. Triant una tendència lineal, ja tens la recta de regressió.

Al final, si ho has fet bé, el dibuix ha de ser més o menys quelcom semblant a açò:



I fixa't, la recta té tots els valors possibles. Per a veure quin valor correspondria a una altura del pare de 1'75 m, ho busquem a la recta.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.4. Interpretació de la recta. Introducció a la correlació

Una vegada hem dibuixat la recta de regressió, podem veure com és la relació entre les dues variables. En essència el tipus de relació ve donada pel pendent de la recta.

1. Si la recta de regressió té pendent positiva (més informalment, "si va cap amunt") es diu que la relació entre les variables és **positiva**.
2. Si la recta de regressió té pendent zero (més informalment, "si queda horitzontal") es diu que la relació entre les variables és **nul·la** o que **no hi ha relació lineal**.
3. Si la recta de regressió té pendent negativa (més informalment "si va cap avall") es diu que la relació entre les variables és **negativa**

La qüestió és, per tant, senzilla. Basta dibuixar la recta i veure cap a on va. Però també ens interessa veure si els punts estan prop de la recta o lluny. En altres paraules, mirar si la recta *ajusta bé* o *ajusta malament*.

Per a calcular açò, s'obté el que s'anomena **coeficient de correlació**. Es defineix com:

$$\rho = r = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{s_x \cdot s_y}$$

Ja veus, molt complicat! Però, com abans, n'hi ha prou amb usar Excel o qualsevol full de càlcul. L'orde en Excel és COEF.DE.CORREL(serie1;serie2).

El coeficient de correlació ens mesura si la relació és positiva, negativa o nul·la. I TAMBÉ ens diu si l'ajust és bo. Veurem en un quadre els detalls.

El **coeficient de correlació, ρ,** mesura la relació entre dues variables. És un nombre entre –1 i 1 (pot ser exactament –1 o exactament 1).

Si el coeficient de correlació és exactament 1 la relació és **perfecta positiva**. La recta va cap amunt i TOTS els punts estan sobre ella.

Si el coeficient de correlació està a l'interval (0, 1) la relació és **positiva**. La recta va cap amunt però no passa per tots els punts.

Si el coeficient de correlació és exactament 0, la relació és **nul·la** (no hi ha relació lineal).

Si el coeficient de correlació està en (–1, 0) la relació és **negativa**. La recta va cap avall però no passa per tots els punts.

Si el coeficient de correlació és exactament –1 la relació és **perfecta negativa**. La recta va cap avall i TOTS els punts estan sobre ella.

Resum

ρ = 1 → correlació perfecta positiva

ρ = –1 → correlació perfecta negativa

ρ = 0 → correlació nul·la

ρ ∈ (0, 1) → correlació positiva

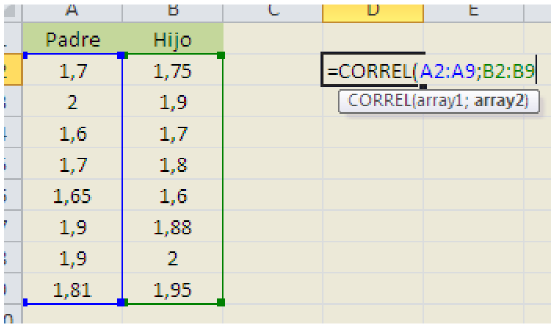
ρ ∈ (–1, 0) → correlació negativa

Açò és el que és objectiu. En algunes ocasions, es parla de correlació positiva forta (si està pròxima a 1) o positiva dèbil (si està entre 0 i 1 però pròxima a 0) i el mateix negativa. Però clar, això depèn de la interpretació de cada u. Així, una correlació de 0'96 és positiva forta i una de –0'02 és negativa dèbil.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Però, i 0’55? això depèn del que consideres. El que sí que és objectiu és si és perfecta o nul·la, positiva o negativa.

Utilitza l’ordinador



- Amb les dades de l’activitat anterior, calcularem el coeficient de correlació.

L’única cosa que cal fer és posar, en la casella corresponent =COEF.DE.CORR. al nostre exemple és la casella D2.

Automàticament ens dóna a triar dos matrius i triem primer de la *X* i després de la *Y*.

Ens dóna el coeficient de correlació, que en aquest cas resulta ser 0’81. És una relació positiva forta com ja imaginàvem pel núvol de punts i la recta de regressió.

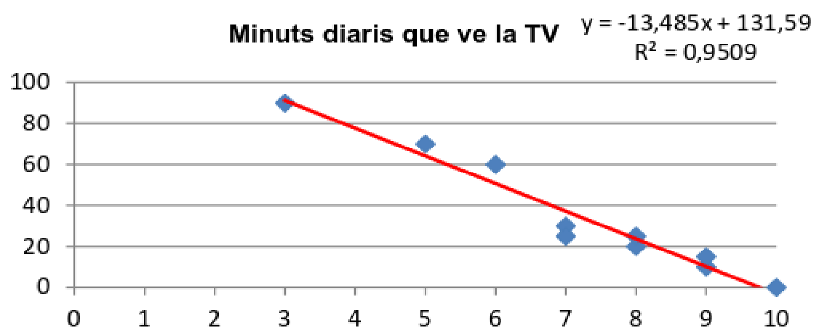
Utilitza l’ordinador

- Preguntem a 10 alumnes de 4t ESO per les seues qualificacions en Matemàtiques, pel nombre de minuts diaris que veuen la televisió, pel nombre d’hores setmanals que dediquen a l’estudi, i per la seua estatura en centímetres. Les dades s’arrepleguen a la taula adjunta. Volem dibuixar els núvols de punts que els relacionen amb les qualificacions de Matemàtiques, el coeficient de correlació i la recta de regressió.

Qualificacions de Matemàtiques	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minuts diaris que veu la TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Hores setmanals d’estudi	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Per a fer-ho, entrem en Excel, i copiem les dades. Seleccionem la primera i la segona fila, després la primera i la tercera i finalment la primera fila i la quarta.

Amb la primera i segona files seleccionades, inserirem, *Dispersió* i triem el *núvol de punts*. Podem aconseguir que l’eix d’abscisses vaja de 0 a 10 en “*Donar format a l’eix*”. Punxem sobre un punt del núvol, i triem “*Agregar línia de tendència*”. Perquè dibuixe l’ordinador la recta de regressió la línia de tendència ha de ser *Lineal*. A la pantalla que apareix marquem la casella que diu: “*Presentar equació en el gràfic*” i la casella que diu “*Presentar el valor de R quadrat en el gràfic*”.



Observa, la recta de regressió, en color roig, és decreixent i la seua equació és aproximadament:

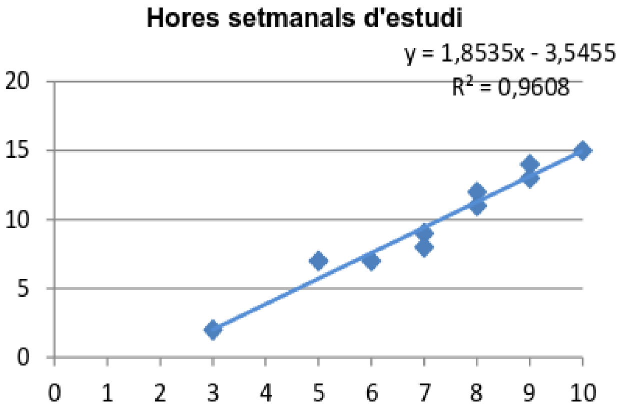
$$y = -13'5\,x + 132.$$

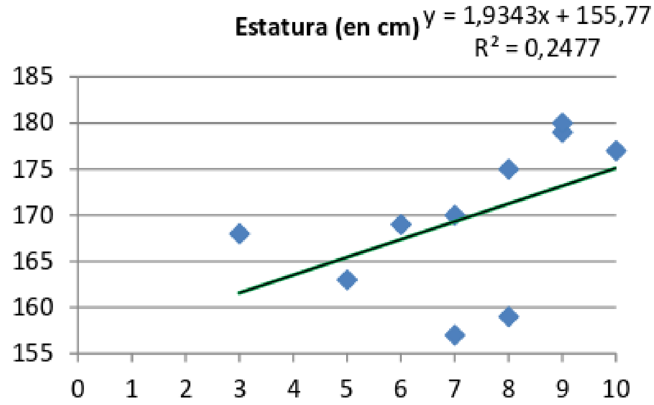
El quadrat del coeficient de correlació és ρ^2 = 0’95. La correlació és negativa i alta:

$$\rho = \sqrt{0'95} = -0{,}975$$

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Fem el mateix amb la primera i tercera fila i amb la primera i quarta fila. Obtenim els gràfics:





Observa que en ambdós casos el pendent de la recta de regressió és positiva però al primer el coeficient de correlació, positiu, és pròxim a 1, $\rho = \sqrt{0'96} = 0{,}98$. La correlació és alta i positiva.

Al segon $\rho = \sqrt{0'25} = 0{,}5$.

Activitats resoltes

- El propietari d'una instal·lació mixta solar-eòlica està realitzant un estudi del volum d'energia que és capaç de produir la instal·lació. Per a això, mesura la dita energia al llarg d'un total de N = 16 dies que considera prou representatius. L'energia (en kWh) produïda als dits dies per les instal·lacions solar i eòlica es troba arreplegada a la taula següent:

Generació solar (x_i)	13'1	10'5	4'1	14'8	19'5	11'9	18	8'6	5'7	15'9	11'2	6'8	14'2	8'2	2'6	9'7
Generació eòlica (y_i)	8'5	14'3	24'7	4	2'3	6'4	3'6	9'2	13'5	1'4	7'6	12'8	10'3	16'5	21'4	10'9

Realitzarem una activitat resolta completa utilitzant les fórmules de la mitjana, la desviació típica i de la correlació perquè puguen servir-te de models si necessites alguna vegada calcular-les sense ajuda de l'ordinador.

Denotarem a la generació solar com a variable ***X*** i la generació eòlica com a variable ***Y***. Afegim noves files a la nostra taula, els quadrats de x, de y i els productes d'ambdues:

Generació solar (x_i)	13'1	10'5	4'1	14'8	19'5	11'9	18	8'6	5'7	15'9	11'2	6'8	14'2	8'2	2'6	9'7
Generació eòlica (y_i)	8'5	14'3	24'7	4	2'3	6'4	3'6	9'2	13'5	1'4	7'6	12'8	10'3	16'5	21'4	10'9
x_i^2	171'6	110'3	16'81	219'0	380'3	141'6	324	73'96	32'49	252'8	125'4	46'24	201'6	67'24	6'76	94'09
y_i^2	72'25	204'5	610'1	16	5'29	40'96	12'96	84'64	182'3	1'96	57'76	163'8	106'1	272'3	457'9	118'8
$x_i \cdot y_i$	111'4	150'2	101'3	59'2	44'85	76'16	64'8	79'12	76'95	22'26	85'12	87'04	146'2	135'3	55'64	105'7

Càlcul de les mitges:

Sumant la primera fila i dividint per N = 16, obtenim la mitja de la Generació Solar en Kwh.

Recorda $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$:

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13'1+10'5+4'1+14'8+19'5+11'9+18+8'6+5'7+15'9+11'2+6'8+14'2+8'2+2'6+9'7}{16} = 10'925$$ Kwh

Sumant la segona fila i dividint per N = 16 obtenim la mitja de la Generació Eòlica en Kwh:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8'5+14'3+24'7+4+2'3+6'4+3'6+9'2+13'5+1'4+7'6+12'8+10'3+16'5+21'4+10'9}{16} = 10'463$$ Kwh

Les mitges són:

$\overline{x} = 10'925$ Kwh i $\overline{y} = 10'463$ Kwh,

Molt paregudes.

Càlcul de les desviacions típiques:

A la tercera fila hem calculat els quadrats dels valors de la primera variable i els utilitzem per a calcular la variància:

Recorda $s_x{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N} - \overline{x}^2$:

$$s_x{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{13'1^2+10'5^2+4'1^2+14'8^2+19'5^2+11'9^2+18^2+8'6^2+5'7^2+15'9^2+11'2^2+6'8^2+14'2^2+8'2^2+2'6^2+9'7^2}{16} - 10'9^2 = \frac{141'5}{16} - 10'9^2 = 22'16$$

A la quarta fila els quadrats dels valors de la segona variable i calculem la seua variància:

$$s_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i{}^2}{N} - \overline{y}^2 = \frac{8'5^2+14'3^2+24'7^2+4^2+2'3^2+6'4^2+3'6^2+9'2^2+13'5^2+1'4^2+7'6^2+12'8^2+10'3^2+16'5^2+21'4^2+10'9^2}{16} - 10'5^2 = \frac{150'48}{16} - 10'5^2 = 41'01$$

La desviació típica és l'arrel quadrada de la variància, per tant:

$s_x = \sqrt{22'16} = 4'71$ i

$$s_y = \sqrt{41'01} = 6'4$$

Càlcul del coeficient de correlació:

Per a calcular el coeficient de correlació calculem en la cinquena fila els productes de la variable *x* per la variable *y*. Així, 13'1 · 8'5 = 111'4.

Volem calcula el terme: $\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i)}{N}$.

En sumar aqueixa fila obtenim 1401'2, que dividim entre 16, li restem el producte de les mitges i dividim pel producte de les desviacions típiques:

$$\rho = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i)}{N} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{1401'2}{16} - (10'9 \cdot 10'5)}{4'71 \cdot 6'4} = \frac{-26'728}{4'71 \cdot 6'4} = -0'887$$

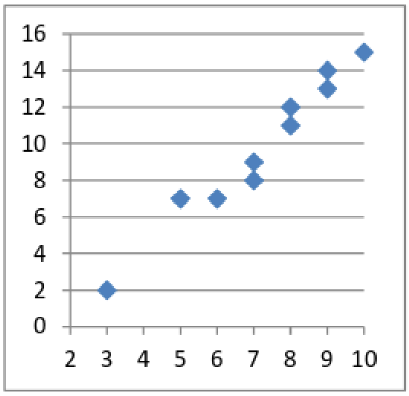
Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Aquest coeficient de correlació negatiu i pròxim a –1 ens indica que la relació entre les dues variables és negativa i prou important.

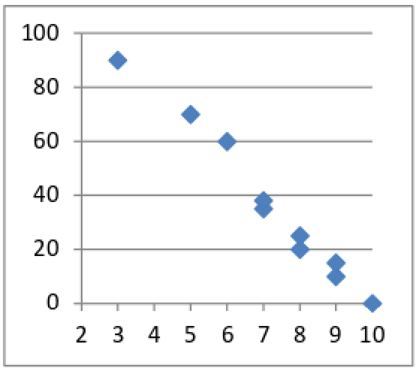
Activitats proposades

20. Maria ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjunts, i ha obtingut: –0,05, 0,98 i –0,99, però ara no recorda quin és de cada una. Pots ajudar-la a decidir quin coeficient correspon amb cada núvol?

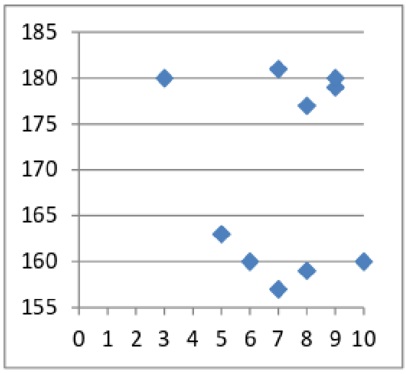
A



B



C



21. Fes una enquesta entre els teus companys de classe. Amb ella realitzaràs un treball d'investigació i presentaràs un informe. Tria amb atenció les preguntes. Preguntaràs a cada un dels teus companys seleccionats, la mostra, dues preguntes, com per exemple el que mesura la seua mà i la seua nota en llengua, però a tu poden interessar-te altres qüestions molt distintes.

a. La primera cosa que faràs és tabular les respostes i confeccionar dues taules de freqüències absolutes. Després completa aqueixes mateixes taules amb les freqüències relatives i les freqüències acumulades. Fes representacions gràfiques d'aqueixes freqüències: de barres, de línies, de sectors.

b. Calcula les mitges, modes i mitjanes així com recorregut, desviació típica, quartils, interval interquartílic… Representa les dades en una taula de doble entrada i dibuixa el núvol de punts. Calcula el coeficient de correlació. Presenta un informe d'aquest treball.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. ATZAR I PROBABILITAT

3.1. Experiment aleatori i succés

Un **fenomen o experiment aleatori** és aquell que, mantenint els mateixes condicions en l'experiència, no és pot predir el resultat.

- Són experiments aleatoris:

a) Llançar una moneda i anotar si ix cara o creu.

b) Llançar un dau i anotar el nombre de la cara superior.

c) Llançar dos daus o dues monedes.

d) Si a una urna hi ha boles blanques i roges, traure una a l'atzar i anotar el color.

e) Traure una carta d'una baralla.

f) Traure, sense reemplaçament, dues cartes de la baralla.

g) Obrir un llibre i anotar la pàgina per la qual s'ha obert.

No obstant això, calcular el cost d'una mercaderia, sabent el pes i el preu per kg, no és un experiment aleatori. Tampoc ho és calcular el cost del rebut de la llum sabent el gasto.

- No són experiments aleatoris

a) Eixir al carrer sense paraigües quan plou i veure si et mulles.

b) El preu de mig quilo de rosquilles si les rosquilles costen a 3 € el quilo.

c) Soltar un objecte i veure si cau.

Activitats proposades

22. Indica si són, o no, fenòmens aleatoris:

a) La superfície de les comunitats autònomes espanyoles.

b) Anotar el sexe del pròxim bebè nascut en una clínica determinada.

c) L'àrea d'un quadrat del que es coneix el costat.

d) Tirar tres daus i anotar la suma dels valors obtinguts.

e) Saber si l'any que ve és bixest.

En realitzar un experiment aleatori hi ha diversos possibles resultats o **successos possibles**.

En realitzar un experiment aleatori sempre s'obtindrà un dels **possibles resultats**.

S'anomena **succés elemental** a cada un dels possibles resultats d'un experiment aleatori.

El conjunt dels possibles resultats d'un experiment aleatori es denomina **espai mostral**.

Un **succés** és un subconjunt del conjunt de possibles resultats, és a dir, de l'espai mostral.

Activitat resolta

- ***Per exemple*** els possibles resultats en tirar una moneda són que isca *cara* o isca *creu*. El conjunt de successos elementals és {cara, creu}.
- *El conjunt de possibles resultats dels experiments aleatoris següents:*

a) Extraure una bola d'una bossa amb 9 boles blanques i 7 negres és {*blanca*, *negra*}.

b) Traure una carta d'una baralla espanyola és {AO, 2O, 3O, ..., SO, CO, RO, AC, ..., RC, AB, ..., RB, AE, ..., RE }.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

c) Tirar dues monedes és:*{(cara*, *cara*), (*cara*, *creu*), (*creu*, *cara*), (*creu*, *creu*)}.

- *En llançar un dau,* el conjunt de possibles resultats és {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el succés obtindre parell és {2, 4, 6}, el succés obtindre imparell és {1, 3, 5}, el succés obtindre múltiple de 3 és {3, 6}, traure un nombre menor que 3 és {1, 2}.
- *En llançar dues monedes* el *conjunt* de possibles resultats és {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El succés traure *zero cares* és {(+, +)}, traure *una cara* és {(C, +), (+, C)} i traure *dues cares* {(C, C)}.

Activitats proposades

23. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "*Escriure en cinc targetes cada una de les vocals i traure una a l'atzar*".

24. Escriu el conjunt de possibles resultats de l'experiment aleatori: "*Tirar una xinxeta i anotar si cau de punta o no*".

25. Inventa dos successos de l'experiment aleatori: *Tirar dues monedes*.

26. Al joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les unitats del primer premi.

27. Escriu tres successos aleatoris de l'experiment aleatori traure una carta d'una baralla espanyola.

3.2. Freqüència i probabilitat

No definirem "probabilitat", perquè hi ha diverses definicions possibles. Hi ha una axiomàtica deguda a *Kolmogorov* relativament recent (1930), però abans ja s'havia sigut usat aquest concepte per exemple per *Fermat* i *Pascal* al segle XVII que es van escriure cartes reflexionant sobre el que ocorria als jocs d'atzar. Quan no comprenien com assignar una determinada probabilitat, jugaven moltes vegades al joc que fóra i veien a quin valor s'aproximaven les freqüències relatives. Així, la **probabilitat d'un succés** podria definir-se com el **límit a què tendeixen les freqüències relatives** d'aqueix succés quan el nombre d'experiments és molt alt. Per tant:

Per a calcular probabilitats s'usen dues tècniques, una experimental, analitzant les freqüències relatives de què ocórrega el succés, i l'altra per simetria, quan se sap que els successos elementals són **equiprobables,** és a dir, que **tots ells tenen la mateixa probabilitat**, llavors es **divideix el nombre de casos favorables pel nombre de casos possibles.**

Açò últim, quan es pot usar, simplifica la forma d'assignar probabilitats i es coneix com a ***Regla de Laplace*** que diu que: *"Si els successos elementals són equiprobables, la probabilitat d'un succés és el nombre de casos favorables dividit pel nombre de casos possibles"*.

Activitat resolta

- La probabilitat que isca cara en tirar una moneda és 1/2, perquè només hi ha dos casos possibles {*cara*, *creu*}, un únic cas favorable, *cara*, i suposem que la moneda no està trucada. Si sospitàrem que la moneda estiguera trucada per a assignar aqueixa probabilitat caldria tirar la moneda un muntó de vegades per a observar cap a quin valor s'acosta la freqüència relativa d'obtindre cara.
- La probabilitat de traure un 5 en tirar un dau és 1/6 perquè hi ha sis casos possibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un únic cas favorable, 5, i suposem que el dau no està trucat, després tots ells són equiprobables.
- La probabilitat que en creuar el carrer t'atropelle un cotxe NO és 1/2, encara que només hi ha dos casos possibles, que t'atropelle el cotxe i que no t'atropelle, perquè ja t'hauria agarrat un muntó de vegades. Per a calcular aqueixa probabilitat s'arrepleguen dades de vianants atropellats i es calcula utilitzant les freqüències relatives.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- La probabilitat de traure una bola roja d'una bossa amb 7 boles roges i 3 boles blanques és 7/10.
- La probabilitat que un bebè siga xiqueta és aproximadament 0,5, però en fer l'estudi amb les freqüències relatives s'ha vist que és 0,49.
- Si considerem una baralla espanyola de 40 cartes i triem una carta, alguns dels successos que poden ocórrer són "*traure un or*", o "*traure un as*", o "*traure el cavall de copes*"… Com per endavant no sabem el que ocorrerà diem que aquests successos són *aleatoris* o *d'atzar*. Abans de traure cap carta totes elles són igualment factibles, i com pot eixir una qualsevol de les 40 cartes diem que la probabilitat, de per exemple, *traure el cavall de copes* és 1/40, la de *traure un or* és 10/40, i la d'un *as* és 4/40.
    - Quina és la probabilitat de traure el rei de copes? I de traure un rei? I una copa?

La probabilitat de traure *l'as de copes* és 1/40. Però el succés *traure un as* es compleix si ix l'as d'ors, o de copes, o de bastos o d'espases. És a dir, no és un succés simple, està format, en aquest cas per 4 successos elementals, per tant la seua probabilitat és 4/40 = 1/10. El mateix li ocorre a *traure una copa*. És un succés compost, i com hi ha 10 copes la seua probabilitat és 10/40 = 1/4.

Activitats proposades

28. Calcula la probabilitat que en traure una carta de la baralla siga una espasa.

29. Per a saber la probabilitat que un xiquet de bolquers siga esquerrà, et basaries a l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?

3.3. Assignació de probabilitats

Succés contrari

Activitats resoltes

- *Quina és la probabilitat de traure un as en la baralla de 40 cartes? I de **no** traure un as? I de traure una copa? I de **no** traure una copa?*

El succés *no traure un as* és el succés **contrari** al de *traure un as*. Cartes que no són asos hi ha 36, per tant la probabilitat de no traure as és 36/40 = 9/10. Observa que s'obté que p(as) + p(no as) = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilitat de *traure copa* és 10/40, i hi ha 30 cartes que no són copes, per tant la probabilitat de ***no** traure copa* és 30/40, i 10/40 + 30/40 = 1.

Si designem per p(X) a la probabilitat d'un succés X i per p(noX) a la probabilitat del seu **succés contrari** resulta que:

$$\mathbf{p(X) + p(noX) = 1.}$$

La probabilitat d'un succés més la probabilitat del seu succés contrari és igual a 1.

Activitats proposades

30. Quina és la probabilitat de *no* traure un 5 en tirar un dau? I de *no* traure un múltiple de 3? I de *no* traure un nombre menor que 2?

31. En tirar una moneda dues vegades, quina és la probabilitat de no traure cap cara? I de traure almenys una cara? Observa que traure almenys una cara és el succés contrari de no traure cap cara.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Successos dependents i independents

Exemple:

- Tenim una bossa amb 3 boles roges i 2 boles negres. Quina és la probabilitat de *traure una bola roja*? Si traiem dues boles, quina és la probabilitat de *traure dues boles roges*?

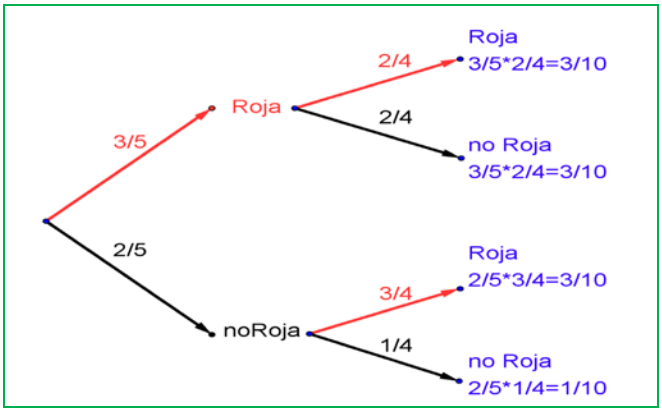
La probabilitat de traure una bola roja és 3/5. Però la de traure dues boles roges, depèn!

Depèn de si tornem a ficar en la bossa la primera bola roja, o si la deixem fora.

Al primer cas diem que és **amb reemplaçament** i al segon, **sense reemplaçament**.

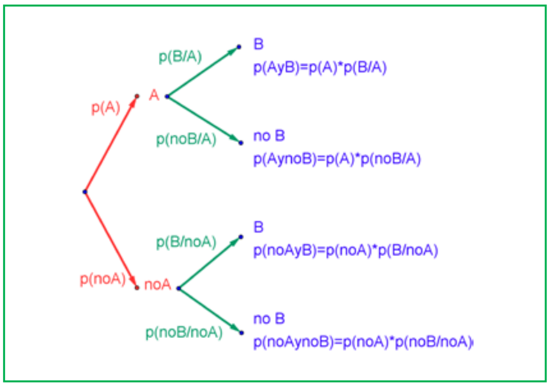
Si la tornem a ficar, la probabilitat de traure bola roja tornarà a ser 3/5, i la probabilitat de traure dues boles roges és 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilitat d'aquesta segona bola *no depèn* del que ja hagem tret, i en aquest cas la probabilitat s'obté multiplicant.

Si els successos A i B són independents**: p(A i B) = p(A) · p(B)**.



Però si la deixem fora, ara a la bossa només hi ha 4 boles i d'elles només queden 2 boles roges, per tant la probabilitat que aqueixa segona bola siga roja és 2/4, i està condicionada pel que abans hagem tret. S'escriu: p(Roja/Roja) i es llig *"probabilitat de roja condicionat a haver tret roja"*. La probabilitat de traure dues boles roges és ara: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama d'arbre i comprova que la probabilitat de traure primer una bola roja i després una bola negra (no roja) és 3/5 · 2/4 = 3/10 perquè després de traure una bola roja a la bossa queden només 4 boles i d'elles 2 són negres. La probabilitat de traure primer una bola negra i després bola roja és 2/5·3/4 = 6/20 = 3/10, i la de traure dues boles negres és: 2/5·1/4 = 2/20 = 1/10. Però observa més coses.



Per exemple, 3/5 + 2/5 = 1; 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.

Els successos no són independents. El que ocórrega A, o no ocórrega A, afecta la probabilitat de B. Per això es diu que B està **condicionat** a A.

Si els successos A i B són **dependents** llavors:

p(A i B) = p(A) · p(B/A)

Activitats resoltes

- *Traiem dues cartes d'una baralla de 40 cartes sense reemplaçament. Quina és la probabilitat de traure dos asos?*

Si fóra amb reemplaçament la probabilitat seria 4/40 · 4/40, però en ser sense reemplaçament la probabilitat del segon *as* ve condicionada per que hagem tret un as prèviament. Ara a la baralla ja no queden 40 cartes sinó 39, i no queden 4 asos sinó només 3, per tant la probabilitat és:

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Si dos successos són **dependents** llavors: **p(B/A) ≠ p(B)**.

Però si dos successos són **independents** llavors: **p(B/A) = p(B/noA) = p(B)**.

Activitats proposades

32. Al teu quadern fes un diagrama en arbre semblant a l'anterior amb els successos A i B: A = *traure un as* a la primera extracció (noA = no traure'l), i B = *traure un as* a la segona extracció (no B = no traure'l). Quina és la probabilitat de traure *as* a la segona extracció condicionat a no haver-lo tret a la primera? I la de no traure as a la segona extracció condicionat a no haver-lo tret a la primera? Quina és la probabilitat de traure *dos asos*? I la de traure un sol as?

33. Al diagrama d'arbre anterior indica qual és la probabilitat de "*no ixen 2 asos*" i la de "*no ix cap as*".

34. A l'experiment "traure tres cartes seguides", quina és la probabilitat de traure *tres asos*? Primer amb reemplaçament, i després sense reemplaçament.

35. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat que isca un sis doble.

36. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat de traure almenys un 6. *Ajuda*: Potser et siga més fàcil calcular la probabilitat de *no traure cap* 6, i utilitzar el succés contrari.

Successos compatibles i incompatibles

Exemple:

- Quina és la probabilitat de, en una baralla de 40 cartes, traure una copa o un or?

Hi ha 10 copes i 10 ors, i cap carta és al mateix temps copa i or, per tant la probabilitat és 20/40.

- Quina és la probabilitat de, en una baralla de 40 cartes, traure un as o un or?

Hi ha 4 asos i hi ha 10 ors, però hi ha *l'as d'ors*, per tant les cartes que són o bé un as o bé un or són 13, per tant la probabilitat és 13/40.

Anomenem successos incompatibles als què, com a copa i or, no poden realitzar-se al mateix temps, i successos compatibles a què, com a as i or, poden realitzar-se al mateix temps.

Designem p(A o B) a la probabilitat del succés "es *verifica A o bé es verifica B"*. Hem vist a l'exemple que si els successos són incompatibles la seua probabilitat és igual a la suma de les probabilitats.

P(A o B) = p(A) + p(B), si A i B són incompatibles.

Però si A i B si poden verificar-se al mateix temps caldrà restar aqueixos casos, aqueixes vegades en què es verifiquen A i B al mateix temps.

P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B), si A i B són compatibles.

Aquesta segona expressió és més general que la primera, ja que en el cas en què A i B són incompatibles llavors p(A i B) = 0.

Activitats resoltes

- Calcula la probabilitat dels successos següents: a) Traure un rei o una figura; b) No ix un rei o ix un rei; c) Traure un bast o una figura.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

a) Hi ha 4 reis i hi ha 4 · 4 = 16 figures (as, sota, cavall i rei), però els quatre reis són figures, per tant p(Rey o Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0,4.

b) Hi ha 40 – 4 = 36 cartes que no són reis, i hi ha 4 reis, per tant p(no rei o rei) = 36/40 + 4/40 = 1. Aquesta conclusió és més general. Sempre:

p(noA o A) = 1,

ja que un succés i el seu contrari ja vam veure que verificaven que p(A) + p(noA) = 1.

c) Hi ha 10 bastos i hi ha 12 figures, però hi ha 4 figures que són al mateix temps bastos (as, sota, cavall i rei), per tant p(Basto o Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Resum:

Succés contrari: **p(X) + p(noX) = 1.**

Successos dependents: p(A i B) = p(A) · p(B/A).

Successos compatibles: P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A i B).

Activitats proposades

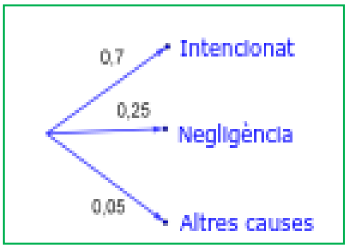
37. Llancem dos daus que no estiguen trucats i anotem els nombres de la seua cara superior. Considerem el succés A què la suma de les dues cares siga 8, i el succés B que aqueixos nombres diferisquen en dues unitats. a) Comprova que p(A) = 5/36 (2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) i que p(B)=8/36 ((1,3), (2, 4), …). b) Calcula les probabilitats de: p(A i B); p(A o B); p(A i noB); p(noA i B); p(noA i noB). c) Calcula p(A/B); p(A/noB); p(noA/B).

3.4. Experiències compostes: taules de contingència i diagrames d'arbre

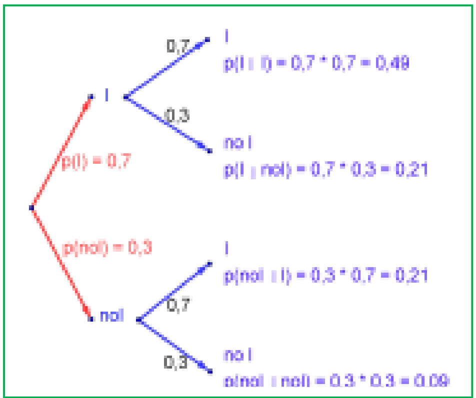
Diagrames d'arbre

Exemple:

- Es fa un estudi sobre els incendis i es comprova que en una determinada zona el 70 % dels incendis són intencionats, un 25% es deuen a negligències i 5 % a causes naturals com a rajos o a altres causes. Representa aquesta situació amb un diagrama d'arbre.



Activitats resoltes



Si considerem que la probabilitat que un incendi siga intencionat és 0,7, quina és la probabilitat que en considerar dos incendis, almenys un haja sigut intencionat?

Anomenem I al succés "ser intencionat" i noI al succés "no ser intencionat". Representem la situació en un diagrama d'arbre. Com el que un incendi siga intencionat és independent de com siga el segon, tenim que:

P(I i I) = 0,7 · 0,7 = 0,49

P(I i noI) = 0,7 · 0,3 = 0,21

ja que és la probabilitat que el primer incendi siga intencionat i el segon no.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

$$P(\text{noI i I}) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$$

$$P(\text{noI i noI}) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$$

La probabilitat que almenys un haja sigut intencionat la podem calcular sumant les probabilitats de (I i I), (I i noI), i (noI i I) que és 0,49 + 0,21 + 0,21 = 0,91. Però més senzill és calcular la probabilitat del succés contrari p(noI i noI) = 0,09 i restar-la d'1:

$$p(\text{al menys un intencionat}) = 1 – 0,09 = 0,91.$$

Activitats proposades

38. Dibuixa al teu quadern un diagrama en arbre per a tres incendis, i calcula la probabilitat que almenys un haja sigut intencionat sent p(I) = 0,7.

39. En una aeronau s'han instal·lat tres dispositius de seguretat: A, B i C. Si no funciona A es posa B en funcionament, i si també B deixa de funcionar comença a funcionar C. Les probabilitats que funcione correctament cada dispositiu són: p(A) = 0,95; p(B) = 0,97 i p(C) = 0,98. a) Calcula la probabilitat que no funcionen els tres dispositius. b) Calcula la probabilitat que tot vaja bé.

40. Una fàbrica de nines rebutja normalment el 0,5 % de la seua producció per errades degudes a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) En agafar dues nines a l'atzar haja que rebutjar ambdues. b) En agafar dues nines a l'atzar haja que rebutjar només una. c) En agafar dues nines a l'atzar no haja que rebutjar cap d) Verifiquem 4 nines, calcula la probabilitat de rebutjar únicament la tercera nina triada.

41. Llancem una moneda fins que aparega dues vegades seguides del mateix costat. Calcula les probabilitats que: A) L'experiència acabe al segon llançament. B) Acabe al tercer llançament. C) Acabe al quart. D) Acabe com a màxim al quart llançament (és a dir, que acabe al segon o al tercer o al quart llançament).

Taules de contingència

Exemple:

- S'han estudiat 500 malalts del fetge analitzant per un procediment nou si les lesions són benignes o malignes. Després se'ls va tornar a analitzar pel procediment usual determinant quins diagnòstics havien sigut correctes i quins incorrectes. Els valors obtinguts es representen a la taula:

	Diagnòstic correcte	**Diagnòstic incorrecte**	**Totals**
Lesió maligna	206	12	218
Lesió benigna	268	14	282
Totals	474	26	500

Determinem la taula de freqüències relatives:

	Diagnòstic correcte (C)	**Diagnòstic incorrecte (I)**	**Totals**
Lesió maligna (M)	0,412	0,024	0,436
Lesió benigna (B)	0,536	0,028	0,564
Totals	0,948	0,052	1

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- *Imagina que aquestes freqüències relatives pogueren prendre's com a probabilitats. Interpretem llavors el significat de cada un d'aquests valors.*

0,412 seria la probabilitat que el diagnòstic de lesió maligna fóra correcte: p(M i C).

0,024 = p(M i I); 0,536 = p(B i C); 0,028 = p(B i I).

I 0,436? El nombre de lesions malignes és 218, per tant 0,436 = p(M).

De la mateixa manera: 0,564 = p(B); 0,948 = p(C); 0,052 = p(I).

Observa que p(M) + p(B) = 1 i que p(C) + p(I) = 1. Són successos contraris.

- *Són dependents o independents els successos M i C?*

Recorda que p(M i C) = p(M) · p(C/M), per tant: 0,412 = 0,436 · p(C/M), d'on p(C/M) = 0,412/0,436 = 0,945 que és diferent de 0,948 que és la probabilitat de C. Es pot afirmar que M i C són dependents ja que p(C/M) $\neq$ p(C).

En general es denomina **taula de contingències** a:

	A	**No A**	
B	P(A i B)	P(noA i B)	P(B)
No B	P(A i noB)	P(noA i noB)	P(noB)
	P(A)	P(noA)	1

En una taula de contingències figuren totes les probabilitats o contingències dels successos compostos.

Observa que, com sabem per la probabilitat del succés contrari:

p(A) + p(noA) = 1 i p(B) + p(noB) = 1.

Observa també que:

p(A) = p(A i B) + p(A i no B), de la mateixa manera que p(B) = p(A i B) + p(noA i B)

ja que s'obtenen sumant respectivament la primera columna i la primera fila.

També:

p(noA) = p(noA i B) + p(noA i no B) i p(noB) = p(A i noB) + p(noA i noB).

Activitats proposades

42. S'ha fet un estudi estadístic sobre accidents de tràfic i s'han determinat les següents probabilitats reflectides a la taula de contingència:

	Accident en carretera (C)	**Accident en zona urbana (U)**	**Totals**
Accident amb víctimes (V)	0,27		0,56
Accident amb només danys materials (M)			
Totals	0,58		1

a) Còpia la taula al teu quadern i completa-la.

b) Determina les probabilitats següents: p(V i C); p(V i U); p(M i C); p(M i U); p(V); p(M); p(C) i p(U).

c) Calcula p(U/V); p(C/V); p(V/U); p(V/C). Són dependents o independents els successos: accident amb víctimes i accident en carretera?

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

43. Inventa una taula de contingència considerant que els accidents puguen ser de carretera (C) o urbans (U), però que ara els classifiquem en lleus (L), greus (G) o mortals (M). *Observa que* el més important per a confeccionar la taula és que els successos siguen incompatibles dos a dos.

Diagrames d'arbre i taules de contingència

Els diagrames d'arbre i les taules de contingència estan relacionats. Donat un arbre pots obtindre la taula de contingència, i viceversa. Té interés aquesta relació perquè amb les dades del problema a vegades és més senzill construir un d'ells i donar la solució passant a l'altre.

Activitats resoltes

- Donada la taula de contingència, obtindre el diagrama d'arbre que comença amb A i noA.

	A	**No A**	
B	2/9	5/9	7/9
No B	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Coneixem la p(A) = 3/9 = 1/3, p(noA) = 6/9 = 2/3, p(B) = 7/9 i p(noB) = 2/9.

També coneixem p(A i B) = 2/9; p(A i noB) =1/9; p(noA i B) = 5/9 i p(noA i no B) = 1/9.

Ens falta conèixer p(B/A) que podem obtindre dividint p(A i B) entre p(A):

$$p(B/A) = p(A \text{ i } B)/p(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

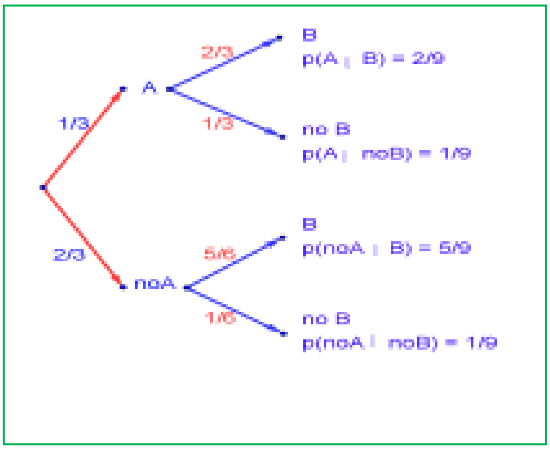
De la mateixa manera calculem:

$$p(noB/A) = p(A \text{ i } noB)/p(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

$$p(B/noA) = p(noA \text{ i } B)/p(noA) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

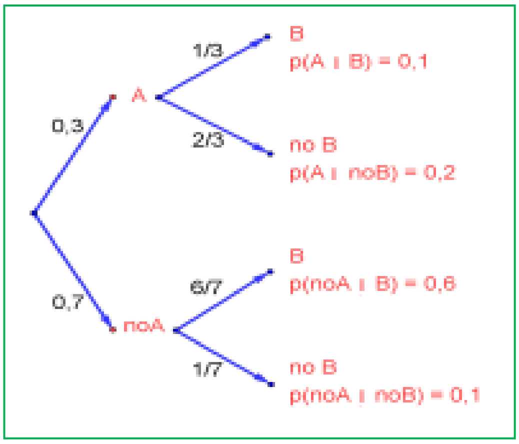
$$p(noB/noA) = p(noA \text{ i } noB)/p(noA) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

L'arbre és :



Activitats resoltes

- Recíprocament, donat el diagrama d'arbre obtindre el diagrama de contingència:



Ara coneixem p(A) = 0,3 i p(noA) = 0,7. A més coneixem

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

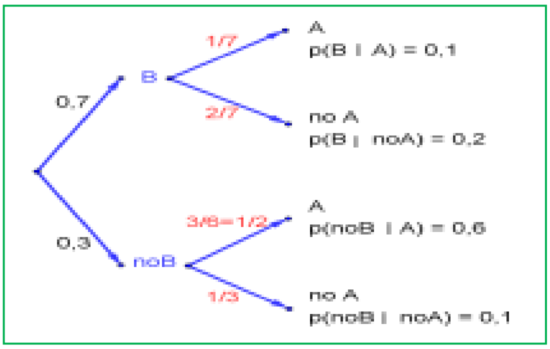
p(B/A)= 1/3; p(B/noA)= 6/7; p(noB/A) = 2/3 i p(noB/noA) = 1/7.
Calculem, multiplicant: p(A i B) = 0,3·(1/3) = 0,1; p(A i noB) = 0,3·(2/3) = 0,2; p(noA i B) = 0,7·(6/7) = 0,6 i p(noA i noB) = 0,7·(1/7) = 0,1 que posem també a l'arbre.
Omplim amb aquestes dades, una taula de contingència:

	A	No A	
B	0,1	0,6	
No B	0,2	0,1	
	0,3	0,7	1

Calculem, sumant, les caselles que ens falten, p(B) = 0,1 + 0,6 = 0,7 i p(noB) = 0,2 + 0,1 = 0,3.

	A	No A	
B	0,1	0,6	0,7
No B	0,2	0,1	0,3
	0,3	0,7	1

Pot ser molt interessant passar d'un diagrama d'arbre a la taula de contingència i d'aquesta, a l'altre diagrama d'arbre, amb el que podem conèixer p(A/B) = 0,1/0,7 = 1/7; p(noA/B) = 0,2/0,7 = 2/7; p(A/noB) = 0,3/0,6 = 3/6 = 1/2 i p(noA/noB) = 0,1/0,3 = 1/3.

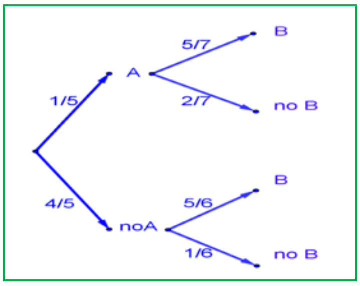


Activitats proposades

44. Donada la taula de contingència, construeix dos diagrames d'arbre.

	A	No A	
B	0,4	0,2	0,6
No B	0,15	0,25	0,4
	0,55	0,45	1

45. Donat el diagrama d'arbre, construeix la taula de contingència, i després l'altre diagrama d'arbre.



46. Tenim dues urnes, A i B. La primera amb 8 boles blanques i 2 boles negres. La segona amb 4 boles blanques i 6 boles negres. Es trau una bola a l'atzar, d'una de les dues urnes, també a l'atzar i resulta ser negra. Quina és la probabilitat de què procedisca de l'urna A?

47. S'està estudiant un tractament amb un nou medicament, per al que se seleccionen 100 malalts. A 60 se'ls tracta amb el medicament i a 40 amb un placebo. Els valors obtinguts es representen a la taula adjunta

	Medicament (M)	Placebo (no M)	
Curats (C)	50	30	80
No curats (no C)	10	10	20
	60	40	100

S'utilitzen aqueixos valors per a assignar probabilitats. Calcula:

a) La probabilitat que un malalt curat haja sigut tractat amb el medicament. *Ajuda*: p(M/C)

b) La probabilitat que un malalt curat haja sigut tractat amb el placebo. *Ajuda*: p(noM/C).

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS I REVISTA

Estadística

El nom d'Estadística prové del s. XIX, no obstant això ja s'utilitzaven representacions gràfiques i altres mesures en pells, roques, pals de fusta i parets de coves per a controlar el nombre de persones, animals o certes mercaderies des de la Prehistòria. Els babilonis usaven ja envasos d'argila per a recopilar dades sobre la producció agrícola. Els egipcis analitzaven les dades de la població i la renda del país molt abans de construir les piràmides. Els antics grecs realitzaven censos la informació dels quals s'utilitzava cap a 600 aC.

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Cavaller de la Meré

Al *Cavaller de la Meré* li agradava jugar i era un gran jugador, per això sabia que era favorable apostar, en tirar un dau "traure almenys un 6 en 4 tirades d'un dau" i que no ho era en tirar dos daus el "traure almenys un 6 doble en 24 jugades".

Es veu que habia jugat molt per a saber que les freqüències relatives li deien que el primer succés tenia una probabilitat superior a 0,5, i el segon la tenia inferior. Però no ho comprenia. No era matemàtic i sols sabia la regla de tres. Açò no és una proporcionalitat! Va dir 6 : 4 = 36 : 24. Però les freqüències relatives li deien que no era així, per la qual cosa va escriure a Pascal per a que li solucionara el problema.

Tu ja saps suficient per a resoldre'l. Abans de continuar llegint, tracta de resoldre'l.

En lloc de calcular la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 llançaments, calcula la probabilitat de *no traure un 6*, que és el seu succés contrari, i és $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Per tant la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 tirades és:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculem de la mateixa manera la probabilitat de traure *al menys un sis doble* en llançar dos daus 24 vegades, calculant la del seu succés contrari, la de *no traure cap sis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, per tant traure al menys un 6 doble és:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Quantes vegades va haver de jugar el Cavaller de la Meré per a donar-se compte de eixa xicoteta diferència en les

Galileu,

Al segle XVI va plantejar el problema següent: En tirar tres daus, per què és més probable obtindre que la suma de les cares superiors siga 10, que siga 9?

Continuava la reflexió amb les possibles descomposicions en aqueixes sumes:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambdós casos hi ha 6 descomposicions possibles, no obstant això, tirant moltes vegades els 3 daus comprovava que és més probable traure un 10.

Si fas un diagrama en arbre comprovaràs que totes aqueixes descomposicions no són igualment probables.

Per exemple: (3, 3, 3) té una probabilitat d'1/216, mentres que la suma 6 + 2 + 2, pot eixir amb tres successos (6, 2, 2), (2, 6, 2) i (2, 2, 6), per tant la seua probabilitat és 3/216.

Calcula les probabilitats de cada una de les sumes i la de traure 10 i de traure 9.

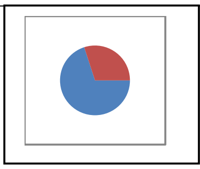
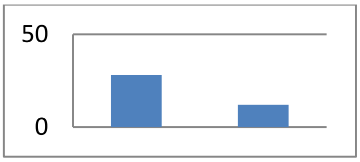
Si vols saber més, has de buscar:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers va arribar a Montecarlo amb uns pocs francs a la butxaca i, durant un mes va anotar els nombres que eixien en cada ruleta, i en quatre dies va guanyar dos milions quatre-cents mil francs. *Jaggers* va aconseguir trencar la banca a *Montecarlo* analitzant les freqüències relatives de cada nombre de la ruleta i observant que s'havia desgastat alguna cosa del mecanisme d'una d'elles, amb la qual cosa tots els valors no tenien la mateixa probabilitat. Va apostar als nombres més probables i va guanyar.

RESUM

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Població i mostra</td><td>Població: Tot el conjunt d'individus sobre el qual es fa l'estudi. Mostra: Una part d'aqueixa població.</td><td>Per a conèixer la intenció de vot, la població és tot el país, i se selecciona una mostra</td></tr>
<tr><td>Freqüència absoluta, relativa i acumulada</td><td>Freqüència absoluta: Nombre de vegades que s'ha obtingut aqueix resultat. Freqüència relativa: S'obté dividint la freqüència absoluta pel nombre total. Freqüència acumulada: S'obté sumant les freqüències anteriors.</td><td><table><tr><th></th><th>Fr. Absoluta</th><th>Fr. Relativa</th><th>Fr. Acumulada Absoluta</th></tr><tr><td>A</td><td>28</td><td>0,7</td><td>28</td></tr><tr><td>B</td><td>12</td><td>0,3</td><td>40</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gràfics estadístics</td><td>Diagrama de barres
Diagrama de línies
Diagrama de sectors
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Mitja</td><td>Mitja = m = ($x_1 + x_2 + \ldots + x_n$)/n</td><td>Amb: 8, 4, 6, 10 i 10. Mitja = 38/5 = 7,6</td></tr>
<tr><td>Moda</td><td>És el valor més freqüent</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Mitjana</td><td>Deixa per davall la meitat</td><td>4 < 6 < 8 < 10 = 10. Me = 8.</td></tr>
<tr><td>Variància i Desviació típica</td><td>Variància = $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2$. s = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - m^2}$</td><td>Variància = 5,4.
s = 2,33.</td></tr>
<tr><td>Quartils</td><td>Q1 deixa per davall la quarta part. Q3 deixa per davall les tres quartes parts. Interval interquartílic = Q3 – Q1.</td><td>Q1 = 6; Q3 = 10; Interval interquartílic = Q3 – Q1 = 4.</td></tr>
<tr><td>Histograma</td><td>L'àrea de cada rectangle és proporcional a la freqüència .</td><td></td></tr>
<tr><td>Correlació</td><td>El coeficient de correlació, ρ, mesura la relació entre dos variables. És un nombre entre –1 i 1.</td><td>$\rho = 1 \to$ correlació perfecta positiva
$\rho = -1 \to$ correlació perfecta negativa
$\rho = 0 \to$ correlació nul·la
$\rho \in (0, 1) \to$ correlació positiva
$\rho \in (-1, 0) \to$ correlació negativa</td></tr>
<tr><td>Succés</td><td>En realitzar un experiment aleatori hi ha diversos possibles resultats o successos possibles.
Un succés és un subconjunt del conjunt de possibles resultats.</td><td>Tirem un dau. Possibles resultats = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés obtindre múltiple de 3 = {3, 6}</td></tr>
<tr><td>Probabilitat</td><td>Límit a què tendeixen les freqüències relatives.
Si els successos elementals són equiprobables llavors:
p = casos favorables / casos possibles.</td><td>P(5) = 1/6.
P(traure múltiple de 3) = 2/6</td></tr>
<tr><td>Assignació de probabilitats</td><td>Succés contrari: p(X) + p(noX) = 1.
Successos dependents: p(A i B) = p(A) · p(B/A).
Successos compatibles: P(A o B) = p(A) + p(B) – p(A y B).</td><td>P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6.
P(5 o múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6
P traure primer un 5 i després múltiple de 3 =1/6·2/6 =2/36</td></tr>
</table>

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Estadística

1. En una classe es mira el color dels ulls de cada alumne i alumna i s'obté el següent:

N := negre; A := blau i V := verd.

N, N, A, V, N, V, A, N, A, N, V, A, A, N, N, N, V, A, N, N, A, N, V, N, N, A, N, A, N, N.

Fes una taula de freqüències absolutes, representa els valors en un diagrama de sectors i calcula la moda.

2. Les notes d'un conjunt d'alumnes de 4t són:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

a) Fes una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
b) Calcula la mitja, la mitjana i la moda.
c) Calcula la desviació típica i els quartils.

3. S'ha preguntat a 40 alumnes pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
Nombre de vegades	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes i un diagrama de línies de freqüències relatives.
b) Calcula la mitja, la mitjana i la moda.

4. S'han llançat quatre monedes 100 vegades i anotat el nombre de vegades que ha eixit cara. Els resultats estan reflectits a la taula següent:

Nombre de cares	0	1	2	3	4
Nombre de vegades	7	25	36	26	6

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
b) Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes acumulades, un diagrama de línies de freqüències relatives i un diagrama de sectors de freqüències absolutes.
c) Calcula la mitja i la desviació típica.
d) Calcula la mitjana i els quartils.

5. Per a conèixer la distribució d'un cert país de les persones segons la seua edat s'ha arreplegat una mostra de deu mil persones i els valors obtinguts vénen reflectits a la taula següent:

Edats	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,100)
Nombre de persones	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

a) Utilitza les marques de classe i escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
b) Representa un histograma de freqüències absolutes. *Atenció*: Els intervals no són tots iguals. Recorda*: L'àrea* dels rectangles ha de ser proporcional a les freqüències.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

c) Calcula la mitja i la desviació típica.
d) Calcula la mitjana i els quartils de forma gràfica usant un histograma de freqüències absolutes acumulades.

6. Amb les dades del problema anterior calcula l'interval [mitja – desviació típica, mitja + desviació típica]. Quantes persones estan al dit interval? Quin percentatge? Calcula també l'interval [mitja – 2*desviació típica, mitja + 2*desviació típica] i [mitja – 3*desviació típica, mitja + 3*desviació típica]. Si la distribució fora normal hi hauria al primer interval un 68 % de la mostra, al segon un 95 % i al tercer més d'un 99'7 %. Compara els teus resultats amb aquests.

7. Amb les mateixes dades calcula l'interval interquartílic, i indica quantes persones estan al dit interval i quin percentatge.

8. Una companyia d'assegurances desitja establir una pòlissa d'accidents. Per a això, selecciona a l'atzar a 200 propietaris i els pregunta quants euros han gastat en reparacions de l'automòbil. S'han agrupat en intervals els valors de la variable obtinguts:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Nombre de persones	40	30	20	40	50	20

a) Calcula les marques de classe i escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
b) Representa un histograma de freqüències relatives. *Atenció*: Els intervals no són tots iguals.
c) Calcula la mitja i la desviació típica.
d) Calcula la mitjana i els quartils de forma gràfica usant un histograma de freqüències absolutes acumulades.

9. Dos fabricants de bateries de cotxes ofereixen el seu producte a una fàbrica al mateix preu. La fàbrica vol triar la millor. Per a això tria una mostra de 60 bateries de cada marca i obté de cada una els mesos que ha funcionat sense espatllar-se. Obté la taula següent:

Vida de la bateria en mesos	20	22	24	26	28	30	32
Marca A	2	7	13	16	12	8	2
Marca B	1	4	17	20	15	3	0

Quina marca creus que triarà?

Per a prendre la decisió, calcula la mitja, la moda i la mitjana per a cada marca.

Si encara no et decideixes, calcula el recorregut, la desviació típica, l'interval [$m - s$, $m + s$] i l'interval interquartílic.

10. Fes un treball. Passa una enquesta als teus companys i companyes de classe. Fes-los una pregunta amb dades numèriques, com per exemple, quant mesura la seua mà, quin nombre de sabata calcen, el nombre de llibres que lligen en un mes, el nombre d'hores que veuen la televisió a la setmana, diners que gasten al mes en comprar música… Representa les dades obtingudes en una taula. I fes un estudi complet. Pots utilitzar l'ordinador:

a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
b) Dibuixa un diagrama de barres, un diagrama de línies i un diagrama de sectors.
c) Calcula la mitja, la mitjana i la moda
d) Calcula la variància i la desviació típica

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

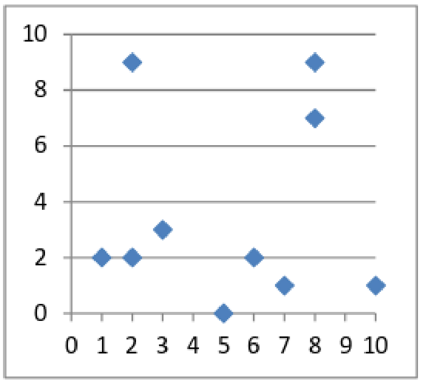
e) Calcula els quartils i l’interval interquartílic.

f) Reflexiona sobre els resultats i escriu un informe.

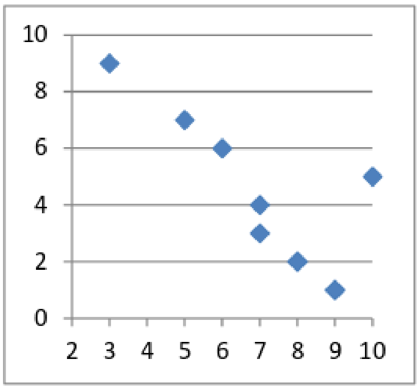
Coeficient de correlació

11. Andrés ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjunts, i ha obtingut: –0,8, 0,85 i 0,03, però ara no recorda quin és de cada una. Pots ajudar a decidir quin coeficient correspon amb cada núvol?

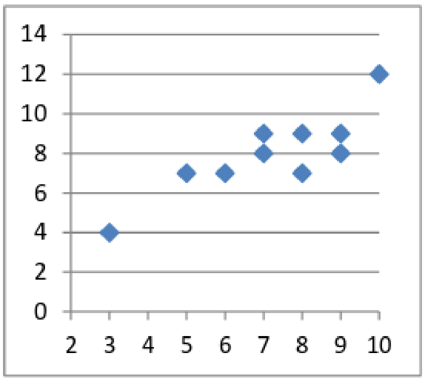
A



B



C



Probabilitat

12. En un col·legi se selecciona un grup de 200 estudiants dels quals tots estudien francès o anglès. D’ells 150 estudien anglès i 70 estudien francès. Quants estudien francès. i anglès? En un altre centre escolar s’estudien diversos idiomes: francès., anglès, alemany, italià. Se seleccionen també 200 estudiants dels quals, 150 estudien anglès, 70 francès. i 40 ambdós idiomes, quants estudiants d’aqueix centre no estudien ni francès. ni anglès?

13. Llancem un dau. Calcula la probabilitat de: a) Traure un nombre imparell. b) No traure un 3. c) Traure un nombre més gran que 3. d) Traure un nombre més gran que 3 i que siga imparell. e) Traure un nombre més gran que 3 o bé que siga imparell.

14. En una classe hi ha 24 xics i 14 xiques. La meitat de les xiques i la tercera part dels xics tenen els ulls blaus. Es tria un estudiant a l’atzar. A) Calcula la probabilitat que siga xic i tinga els ulls blaus. B) Calcula la probabilitat que siga xic o tinga els ulls blaus.

15. Antoni, Joan i Jordi tenen una prova de natació. Antoni i Joan tenen la mateixa probabilitat de guanyar, i doble a la probabilitat de Jordi. Calcula la probabilitat que guanye Joan o Jordi.

16. Llancem dues monedes distintes, una de 50 cèntims i una altra d’un euro. Calcula la probabilitat que: A) En la moneda d’un euro isca cara. B) Isca una cara. C) Isca almenys una cara. D) No isca cap cara. E) Isca una cara i una creu.

17. Llancem tres monedes. Calcula les probabilitats de: A) No isca cap cara. B) Isca almenys una cara. C) Isquen dues cares i una creu.

18. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats de que la suma siga 1, siga 2, siga 3, …. siga 12.

19. Què és més probable en tirar tres daus, que la suma de les seues cares superiors siga 9 o siga 10? Escriu el succés “siga 9” i el succés “siga 10” i calcula les probabilitats dels seus successos elementals. Saps ja més que *Galileu*!

20. Llancem al mateix temps una moneda i un dau. Anomena A al succés “Isca cara i un nombre parell”. B al succés “Isca creu i un nombre primer” i C al succés “isca un nombre primer”. Calcula les

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

probabilitats de A, B i C. Com són aquests successos? Indica quins d'ells són compatibles i quins són incompatibles.

21. Llancem una moneda 50 vegades, què és més probable, obtindre 50 cares seguides o obtindre en les primeres 25 tirades cara i en les 25 següents creu? Raona la resposta.

22. Una moneda està trucada. La probabilitat d'obtindre cara és doble que la d'obtindre creu. Calcula les probabilitats dels successos obtindre cara i d'obtindre creu en tirar la moneda.

23. Tres xics i dues xiques juguen un torneig d'escacs. Tots els xics tenen idèntica probabilitat de guanyar, i totes les xiques, també. Però la probabilitat de guanyar una xica és doble de la de guanyar un xic. Calcula la probabilitat que un xic guanye el torneig.

24. Set parelles de nóvios estan en una habitació. Se seleccionen dues persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: a) Siguen un xic i una xica. b) Siguen una parella de nóvios. Ara es trien 4 persones a l'atzar. Calcula la probabilitat de: c) Hi haja almenys una parella de nóvios. d) No hi haja cap parella de nóvios.

25. Tenim un dau trucat de manera que els nombres imparells tenen una probabilitat doble a la dels nombres parells. Calcula les probabilitats de: A) Isca un número imparell. B) Isca un nombre primer. C) Isca un nombre primer imparell. D) Isca un nombre que siga primer o siga imparell.

26. En un grup de 12 amigues hi ha 3 rosses. Es trien dues xiques a l'atzar. Calcula la probabilitat que: A) Ambdues siguen rosses. B) Almenys una siga rossa. C) Cap siga rossa. D) Una siga rossa i l'altra no.

27. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que: A) Els nombres obtinguts siguen iguals. B) Els nombres obtinguts diferisquen en 3 unitats. C) Els nombres obtinguts siguen parells.

28. Llancem una moneda fins que isca cara. Calcula la probabilitat que: A) Isca cara abans del quart llançament. B) Isca cara després del huité llançament.

29. Un lot de 20 articles té 2 defectuosos. Es trauen 4 a l'atzar, quina és la probabilitat que cap siga defectuós?

30. Es llancen dos daus i la suma de les cares superiors és 7. Quina és la probabilitat que en un dels daus haja eixit un 3?

31. Es tenen 3 caixes, A, B i C. La caixa A té 10 boles de les quals 4 són negres. La caixa B té 6 boles amb una bola negra. La caixa C té 8 boles amb 3 negres. S'agafa una caixa a l'atzar i d'aqueixa caixa es trau una bola, també a l'atzar. Comprova que la probabilitat que la bola siga negra és 113/360.

32. Tenim una moneda trucada la probabilitat de de la qual obtindre cara és 3/5 i la de creu és 2/5. Si ix cara es tria a l'atzar un nombre de l'1 al 8, i si ix creu, es tria un nombre de l'1 al 6. Calcula la probabilitat que el nombre triat siga imparell.

33. En un procés de fabricació de mòbils es detecta que el 2 % ixen defectuosos. S'utilitza un dispositiu per a detectar-los que resulta que detecta el 90 % dels mòbils defectuosos, però assenyala com defectuosos un 1 % que no ho són. A) Calcula la probabilitat que siga correcte un mòbil que el dispositiu ha qualificat com defectuós. B) Calcula la probabilitat que siga defectuós un mòbil que el dispositiu ha qualificat com correcte. *Ajuda*: Utilitza primer un diagrama en arbre i després una taula de contingència.

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ

Amb les dades següents, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. La mitja:

a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7

2. La mitjana:

a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7

3. La moda:

a) 5 b) 5'5 c) 6 d) 7

4. La desviació típica:

a) 2 b) 2,27 c) 2,46 d) 2,65

5. L'interval interquartílic

a) 3 b) 2,75 c) 4 d) 2

6. En tirar dos daus, la probabilitat de traure almenys un 5 és:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

7. En tirar 3 monedes, la probabilitat de traure exactament dues cares és:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

8. En tirar 3 monedes, la probabilitat de traure almenys dues cares és:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

9. Traiem una carta d'una baralla de 40 cartes, la probabilitat que siga un or o un múltiple de 2 és:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

10. Indica quina de les afirmacions següents és **sempre** correcta:

a) P(A) + P(noA) = 1

b) P(A i B) = P(A) · P(B)

c) P(A o B) = P(A) + P(B)

Autores: María Molero i Andrés García
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades

4t A d'ESO.

ÍNDEX