4t B d'ESO

Capítol 12

Funcions exponencials, logarítmiques i trigonomètriques

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero i Javier Rodrigo

Il·lustracions: Miguel Ángel Paz i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Entre les diverses funcions hi ha algunes que tenen una importància especial, o l'han tingut històricament. En aquests dos capítols et mostrem tres tipus molt importants.

Termes com a *creixement exponencial* o *corba sinusoïdal* deriven d'aquest tipus de funcions.

Tenen unes propietats importantíssimes a l'anàlisi matemàtica, enginyeria, medicina, ciències socials, etc. En aquest capítol aprendràs el càlcul de logaritmes i les propietats de les funcions exponencials i circulars i de les seues gràfiques.

El terme *logaritme* va ser encunyat en 1614 pel matemàtic escocès *John Neper* (1550-1617). Abans de la invenció de les calculadores electròniques, els logaritmes també van ser imprescindibles per al càlcul de potències de nombres no enters.

Les funcions trigonomètriques són molt conegudes i constitueixen un dels exemples més populars de funcions periòdiques. Elles o altres funcions relacionades es troben pertot arreu a la naturalesa i s'utilitzen en física, electrònica, etc. Nombroses gràfiques comparteixen les seues propietats, com per exemple la forma d'una ona, també anomenada *sinusoide*, que deu aquest nom a la funció *sinus*.

John Napier (Neper). Baró de [Merchiston]

1. FUNCIONS EXPONENCIALS

1.1. Funció exponencial

Hi ha dos tipus de funcions **l'expressió analítica** o **fórmula** de la qual és una **potència**:

- Si la variable independent està a la base: $y = x^3$, s'anomena **funció potencial**, i quan a més l'exponent és un nombre natural és una funció polinòmica.
- Si la variable independent està a l'exponent: $y = 3^x$, s'anomena **funció exponencial**.

Exemple:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Una funció exponencial és aquella en què la variable independent està en l'exponent.

En aquest curs estudiem funcions exponencials senzilles, del tipus $y = b^x$, on la base *b* és un nombre positiu diferent d'1.

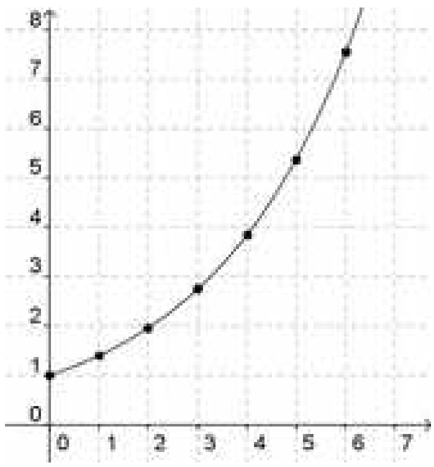
Activitats resoltes

- Si la quantitat de bacteris d'una determinada espècie es multiplica per 1,4 cada hora, podem escriure la següent fórmula per a calcular el nombre *"y"* de bacteris que hi haurà al cap de *"x"* hores (començant per un sol bacteri): $y = 1{,}4^x$.

Nombre de bacteris a cada hora (**Taula de valors de la funció**):

Hores transcorregudes (*x*)	Nombre bacteris (*y*)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gràfica de la funció



Observa que en aquest exemple no s'ha donat a la *"x"* valors negatius, ja que no té sentit un nombre d'hores negatiu. A les funcions exponencials en general la "x" sí que pot tindre valors negatius. No obstant això la base *b* només pot tindre valors positius. Així mateix, observaràs que la variable *"y"* també resulta sempre positiva. Més avant arrepleguem aquestes propietats en parlar de domini i recorregut de la funció exponencial.

Activitats proposades

1. Prova ara a realitzar al teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas semblant, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 3 en compte de per 1,4.

Observaràs que els valors de "y" augmenten molt més de pressa i de seguida *s'ixen del paper*. Mentres que els valors de "x" augmenten d'1 en 1 els valors de y es van multiplicant per 3. Açò s'anomena **creixement exponencial**. Si en compte de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de **decreixement exponencial**.

2. Al teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.

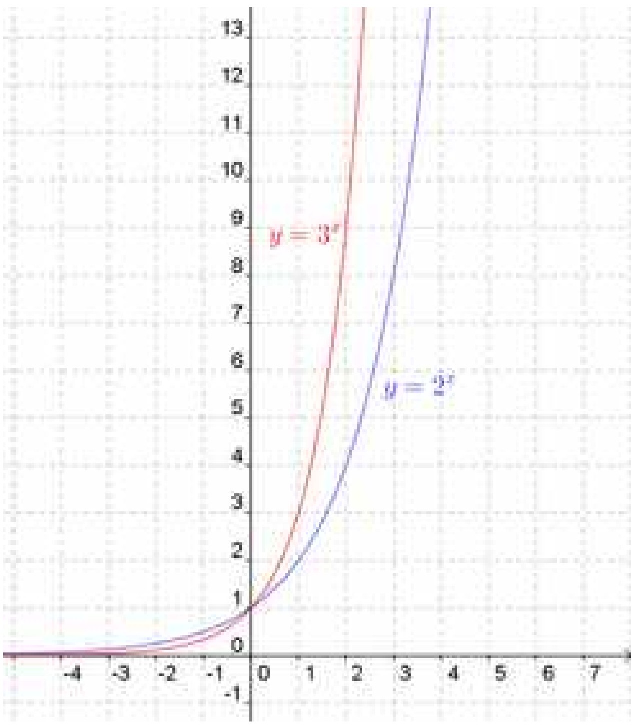
1.2. Distintes funcions exponencials

Les gràfiques de les funcions exponencials $y = b^x$ es diferencien segons el valor de la base "b". Especialment es diferencien si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

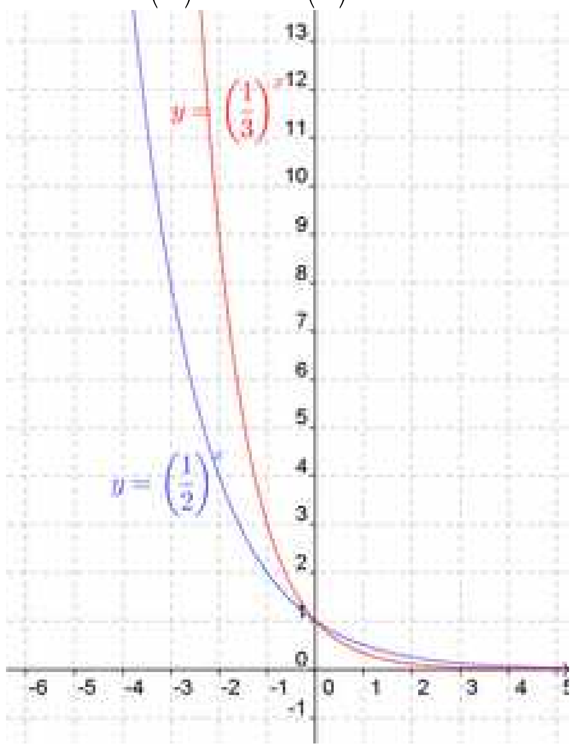
Al cas en què $b = 1$ tenim la funció constant $y = 1$, la gràfica de la qual és una recta horitzontal.

Vegem les gràfiques d'algunes funcions exponencials, comparant-les amb altres:

Funcions $y = 2^x$ **i** $y = 3^x$



Funcions $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **i** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observem els següents aspectes comuns a les quatre gràfiques:

- El seu **domini** és tota la recta real. A més són contínues.
- El seu **recorregut** és (0, +∞). És a dir, "y" mai és zero ni negatiu.
- Passen totes pels punts (0, 1), (1, b) i (–1, 1/b).
- La gràfica de $y=a^x$ i la de $y=(1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix OY.

I observem també aspectes diferenciats en ambdues il·lustracions:

Quan la base és b > 1
Són funcions **creixents**. A més gran és la base el creixement és més ràpid.

Quan $x \to -\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** en la part esquerra de l'eix OX.

Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota vertical, perquè no s'aproximen a cap recta.

Quan la base és 0 < b < 1
Són funcions **decreixents**. A més xicoteta és la base el decreixement és més ràpid.

Quan $x \to +\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** en la part dreta de l'eix OX.

Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota vertical, perquè no s'aproximen a cap recta.

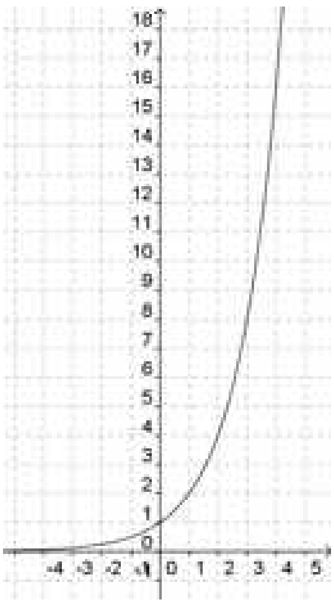
Activitats resoltes

- Representa gràficament les següents funcions exponencials $y=2^x$ i $y=2^{-x}$.

Solució:

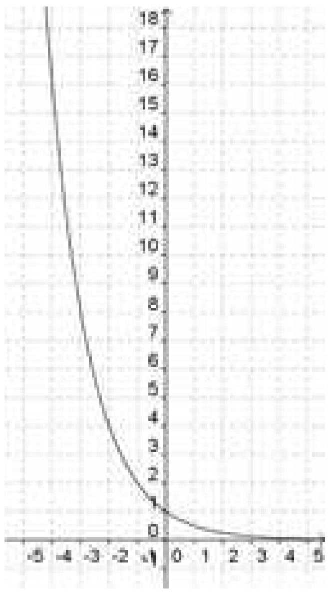
Funció $y=2^x$

x	y
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



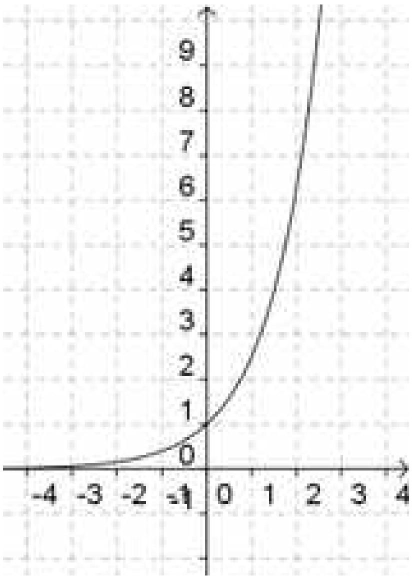
Funció $y=2^{-x}$

x	y
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…

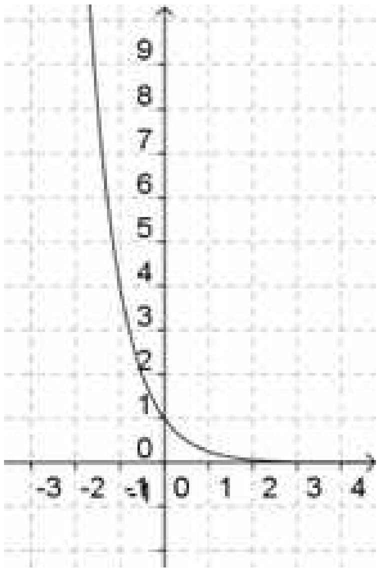


- Identifica les funcions corresponents amb les següents gràfiques:

a)



b)



Solució:

Ambdues són funcions exponencials perquè passen pel punt (0, 1) i tenen per un costat com a asímptota horitzontal l'eix OX, mentres que per l'altre costat tendeixen a + ∞.

La funció (a) és $y = 2{,}5^x$ perquè passa pel punt (1, 2'5).

La funció (b) és $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ perquè passa pel punt (–1, 4).

- Representa la funció $y = 3^{-x}$

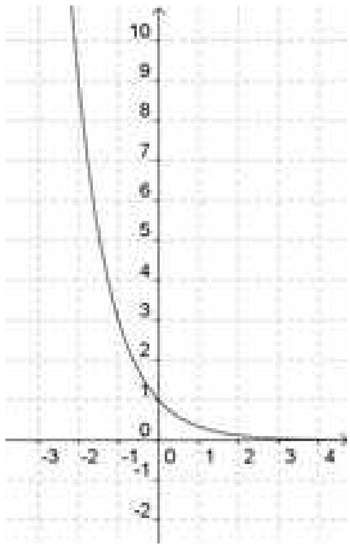
Solució:

Per tindre exponent negatiu és:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Per tant la seua gràfica és la del marge.

Observa que passa pels punts (–1, 3), (0, 1) i (1, 1/3).



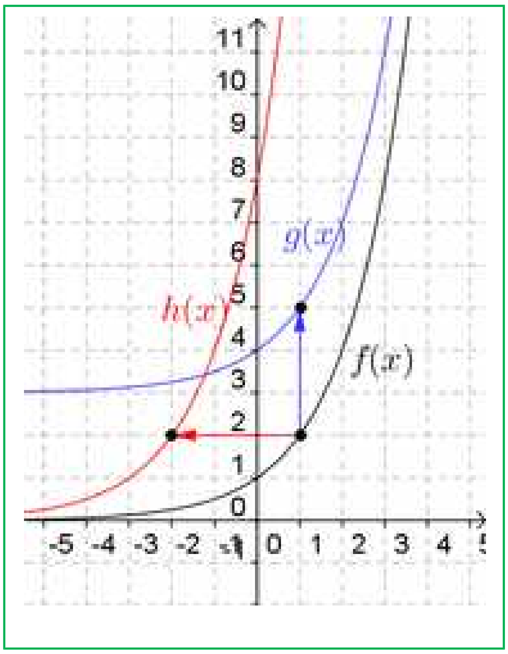
- Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist anteriorment, i sense calcular valors, dibuixa les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x + 3$ i $h(x) = 2^{x+3}$.

Solució:

La funció *g(x)* és la funció *f(x)* desplaçada cap amunt 3 unitats.

La funció *h(x)* és la funció *f(x)* desplaçada cap a l'esquerra 3 unitats.

Per tant les seues gràfiques són aquestes, representades en diferent color:



1.3. El nombre *e*. La funció e^x

El nombre e té una gran importància en Matemàtiques, comparable inclús al nombre π encara que la seua comprensió no és tan elemental i tan popular. Per a comprendre la seua importància cal accedir a continguts de cursos superiors. És un nombre irracional.

El nombre e es defineix com el límit quan n tendix a infinit de la successió següent:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

El seu valor aproximat és e = 2,71828182846...

Es tracta d'un nombre irracional (encara que en veure'l pot parèixer periòdic).

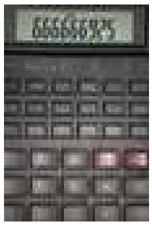
Amb l'ajuda de la calculadora es pot comprovar com els valors de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ s'acosten cada vegada més al valor e = 2,71828182846... a mesura que augmenta el valor de n.

Aquest nombre apareix a les equacions de creixement de poblacions, desintegració de substàncies radioactives, interessos bancaris, etc.

També es pot obtindre directament el valor de e amb la calculadora (sempre com a aproximació decimal, ja que és un nombre irracional). Normalment hi ha una tecla amb l'etiqueta e però pots usar també la tecla etiquetada e^x. Per a això hauràs de calcular el valor de e^1.

La funció $y = e^x$ comparteix les característiques descrites més amunt per a funcions exponencials de base major que 1.

Activitats proposades



3. Utilitzant la calculadora, al teu quadern fes una taula de valors i representa al teu quadern les funcions $y=e^x$, $y=e^{-x}$.

4. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.

a. Escriu al teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.

b. Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.

c. Representa al teu quadern gràficament la dita funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar als eixos.

Cultiu del bacteri Salmonel·la

5. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multiplique per 2/3 cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris, (a) fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap arrere"), i (b) representa gràficament aquestes dades.

6. Representa al teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seues gràfiques:

a) $y=2^x$ b) $y=2^{x+1}$ c) $y=2^{x-1}$

7. Coneixent la gràfica de la funció $f(x)=2^x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa al teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x)=2^x-3$ i $h(x)=2^{x-3}$

2. FUNCIONS LOGARÍTMIQUES

2.1. Definició i càlcul elemental de logaritmes

Recorda que:

L'expressió $\log_b a$ es llig "logaritme de a en base b".
$\log_b a$ és l'exponent a què cal elevar "b" perquè el resultat siga "a".

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

"b" s'anomena **base** i "a" s'anomena **argument**.

Observacions:

- La base ha de ser un nombre positiu i diferent de la unitat.
- L'argument ha de ser positiu i diferent de 0.

Exemples:

a) $log_2 32 = 5$ perquè $2^5 = 32$ b) $log_2 \frac{1}{8} = -3$ perquè $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un parell de propietats elementals

- El logaritme de la base sempre val 1: $log_b b = 1$ perquè $b^1 = b$
- El logaritme d'1 en qualsevol base sempre val 0: $log_b 1 = 0$ perquè $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmes immediats

S'anomenen així els que es calculen directament aplicant la definició.

Exemples:

- perquè $5^3 = 125$
- perquè $3^4 = 81$
- log 10000 = 4 perquè $10^4 = 10000$.

Quan no s'escriu la base vol dir que la base és 10 (*log* x). Els logaritmes en base 10 s'anomenen **logaritmes decimals**. Els logaritmes en base e s'anomenen logaritmes neperians i s'escriuen *ln x*.

Altres logaritmes no són immediats però es poden calcular també aplicant la definició, igualant **exponents**. Açò passa quan la base i l'argument son potències del mateix nombre.

Exemples:

- Per a trobar $log_4 8$ posem $log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Per a trobar $log_4 32$ posem $log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Activitats resoltes

- Troba els logaritmes següents: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0{,}111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; i calcula el valor de x a les igualtats següents: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Solucions:

a) $\log_4 256 = 4$, perquè $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = –5$, perquè $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

c) $\log_2 1/2 = –1$, perquè $2^{-1} = \frac{1}{2}$

d) $\log 1/100 = –2$, perquè $10^{-2} = \frac{1}{100}$

e) $\log_3 0{,}111... = –2$, perquè $0{,}111... = 1/9$, i llavors $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

f) $\log_3 3 = 1$, perquè $3^1 = 3$ (el logaritme de la base sempre val 1)

g) $\log_2 1 = 0$, perquè $2^0 = 1$ (el logaritme d'1 sempre val 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula el valor de x en les igualtats següents:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0{,}1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ no hi ha solució, perquè cap potència dóna 0 com resultat.

l) $\log (–100) = x$ no hi ha solució, perquè el resultat de calcular una potència de base positiva sempre és positiu.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Activitats proposades

8. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició (sense calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0{,}25$ f) $\log 0{,}001$

9. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents (sense calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0{,}125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Troba el valor de *x* en les igualtats següents:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0{,}5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmes decimals i neperians amb la calculadora

Fins ací hem aprés a calcular logaritmes utilitzant la definició. No obstant això només es pot fer així en uns pocs casos (en concret quan l'argument és una potència de la base del logaritme).

Per exemple no es poden calcular log_4 35, log_{10} 7, $log_4 30$, $log_9 5$.

Les calculadores científiques disposen de tecles per a trobar únicament dues o tres tipus de logaritmes (segons el model de calculadora):

Logaritmes decimals (en base 10): 	Logaritmes neperians (en base *e*): **Logaritmes neperians** són els que tenen com a base el nombre e = 2,718281… També s'anomenen **logaritmes naturals**. Els logaritmes neperians s'escriuen de tres maneres: $\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$ 
Logaritmes en qualsevol base: En algunes calculadores pot trobar-se directament posant la base i l'argument. 	

Exemples:

- Comprova amb la teua calculadora que log 7 = 0,845 i que $\ln 7 = 0{,}946$ (valors arrodonits).
- Comprova també que $\log 10 = 1$ i que $\ln e = 1$.

Per a **calcular un nombre coneixent el seu logaritme s'empren** les mateixes tecles utilitzant prèviament la tecla de funció inversa (normalment *SHIFT* o *INV*).

Exemples:

- Comprova amb la teua calculadora que el nombre el logaritme decimal del qual val 1,36 és 22,9 i que el nombre el logaritme neperià del qual val 1,36 és 3,896.

2.1.3. Canvi de base de logaritmes

Amb la calculadora també es poden calcular logaritmes que no siguen decimals ni neperians, és a dir, en bases diferents de "10" i "*e*".

Per a això s'empra la **fórmula del canvi de base**:

Per a canviar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exemple:

- Per a calcular log_4 7 utilitzant la calculadora fem $\log_4 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} = \dfrac{0{,}845}{0{,}602} = 1{,}40$

Activitats proposades

11. Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base, i compara els resultats amb els obtinguts a l'activitat:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0{,}125$ f) $\log_3 \dfrac{1}{9}$.

2.2. Propietats dels logaritmes

Les propietats dels logaritmes són les següents:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ ja que $b^0 = 1$ (el logaritme d'1 en qualsevol base és 0)
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ ja que $b^1 = b$ (el logaritme de la base és 1)

- El logaritme d'un **producte** és igual a la suma dels logaritmes dels factors:

$$\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$$

- El logaritme d'un **quocient** és igual a la diferència dels logaritmes:

$$\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$$

- El logaritme d'una **potència** és igual a l'exponent pel logaritme de la base:

$$\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$$

Exemple:

a) $\log_2 10 + \log_2 3{,}2 = \log_2 (10 \cdot 3{,}2) = \log_2 32 = 5$

b) $\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

c) $\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

d) $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \dfrac{1}{5}\log_3 9 = \dfrac{1}{5} \cdot 2 = \dfrac{2}{5}$.

2.2.1. Expressions logarítmiques i algebraiques

Les propietats dels logaritmes s'empren en dos tipus importants d'operació:

- **Prendre logaritmes** en una igualtat és aplicar el logaritme a ambdós membres de la mateixa:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmes** en una igualtat és el contrari: aconseguir que una expressió logarítmica deixe de ser-lo. Per a açò és necessari que cada membre tinga un únic logaritme:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Activitats resoltes

- Sabent que log 2 = 0,301, calcula:

a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0{,}301 = 1{,}505$

b) $\log 0{,}008 = \log (8/1000) = \log 8 - \log 1000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0{,}301 - 3 = -2{,}097$

Observa que el logaritme en base 10 de la unitat seguida de zeros és igual al nombre de zeros que tinga.

- Sabent que log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula:

a) $\log 6 = \log(3\cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

b) $\log 180 = \log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\log 3 + \log 2 + \log 10 = 2 \cdot 0{,}477 + 0{,}301 + 1 = 2{,}255$

c) $\log 15 = \log(3\cdot 5) = \log\left(\frac{3\cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

- Pren logaritmes i desenrotlla:

a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2}\log b + \frac{1}{2}\log c - 2\log x$

- Elimina els logaritmes:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2}\log 5 - 3\log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \dfrac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1000a) = \log \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

$\Rightarrow 1000a = \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resol la següent equació **logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solució:

Per a resoldre-la és necessari eliminar logaritmes:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

L'equació queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ les solucions de la qual són x =2 i x= 2/ 3.

La segona solució no és vàlida perquè en substituir-la a l'equació original quedaria log (x – 1) com a logaritme d'un nombre negatiu, que no existeix. Açò ocorre de vegades a les equacions logarítmiques, igual que a les equacions irracionals, i per això és necessari comprovar la validesa de les solucions trobades.

- Al càlcul **d'interès compost** l'interès produït cada període de temps passa a formar part del capital. Així, si el període de temps és un any, la fórmula de l'interès cada any es calcula sobre un nou capital, que és el capital anterior més els interessos produïts l'any. Per tant, si el percentatge d'interès anual és r, el capital cada any es multiplica per $1 + \dfrac{r}{100}$.

Per exemple si l'interès és del 4 % cal multiplicar per 1,04 cada any transcorregut.

La fórmula del capital acumulat al cap de n anys és: $C_n = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$

. Calcula el capital final acumulat al cap de 4 anys per a 6.000 € al 2 % d'interès compost anual.

Solució:

$C = 6000 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 6000 \cdot 1{,}02^4 = 6.494{,}59$ €.

- A quin interès compost cal invertir 10.000 euros per a obtindre en 10 anys almenys 16.000 euros?

Solució:

$$16.000 = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1{,}6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1{,}6} = 1{,}048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}048$$

Així doncs r = 4,8 %.

- Quan la incògnita és el nombre d'anys (que està a l'exponent) necessitem prendre logaritmes per a resoldre-la: Si ingressem en un banc 3.000 € al 4 % d'interès compost anual, quants anys han de passar per a aconseguir 4.500 €?

Solució:

$4.500 = 3000 \cdot (1 + 0{,}04)^n \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^n \Rightarrow \log 1{,}5 = n \log 1{,}04 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} = 10{,}34$ anys (haurem d'esperar 11 anys).

- La fórmula de l'interès compost també s'utilitza per als problemes de **creixement o decreixement de poblacions**, que és una funció exponencial: Per exemple, si la població d'un país augmenta un 3 % cada any i actualment té 15 milions d'habitants, quants tindrà al cap de 5 anys?

La solució és:

$$15.000.000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 15.000.000 \cdot 1{,}03^5 = 17.383.111 \text{ habitants.}$$

Activitats proposades

12. Sabent que log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula:

a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$

13. Sabent que log 8 = 0,903, i sense utilitzar calculadora, troba els següents:

a) $\log 80$ b) $\log 2$ c) $\log 64$ d) $\log 0{,}8$ e) $\log 1{,}25$ f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Pren logaritmes i desenrotlla:

a) $A = \dfrac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Redueix a un únic logaritme cada expressió:

a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$ b) $2 \log 5 + \dfrac{1}{2}\log 5 - 2$ c) $2 \log 2a - \log a$

16. Resol les següents equacions logarítmiques:

a) $\log (x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log (7 - 3x) - \log (1 - x) = \log 5$

17. Quan va nàixer un xiquet els seus pares van col·locar 1.000 euros en una llibreta d'estalvi al 2,5 % d'interès compost anual. Quants diners tindrà el compte quan el xiquet complisca 15 anys?

18. La població de certs bacteris es multiplica per 1,5 cada dia. Si al començament hi ha 18 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap d'una setmana?

19. A què tant per cent d'interès compost cal invertir un capital de 20.000 euros per a guanyar 1.000 euros en tres anys?

20. Si invertim 7.000 euros al 1,35 % d'interès compost anual, quants anys han de transcórrer per a haver guanyat almenys 790 euros?

21. Calcula en quants anys es duplica una població que creix al ritme del 10 % anual.

22. Si una població de 8 milions d'habitants s'ha convertit en 15 milions en 7 anys, quant ha crescut cada any? (*Ull*: no es tracta de dividir entre 7!).

2.3. Funcions logarítmiques

2.3.1. Gràfica i característiques

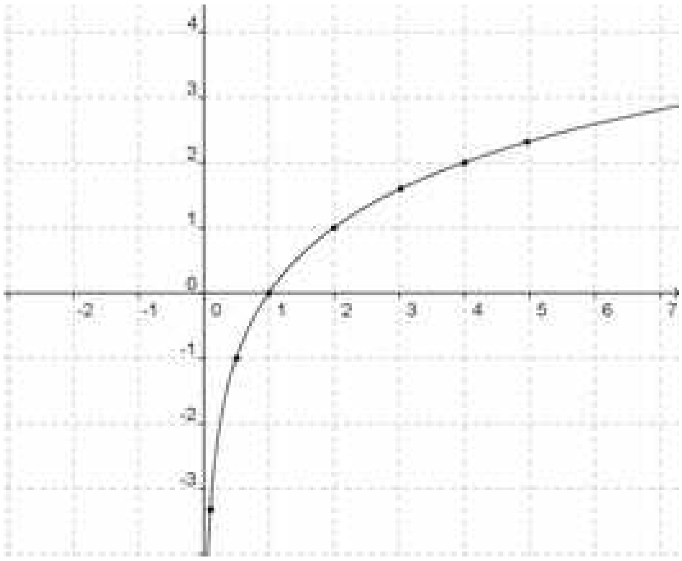
Les funcions logarítmiques són les del tipus $y = \log_b x$

Hi ha una funció distinta per a cada valor de la base b.

Exemples:

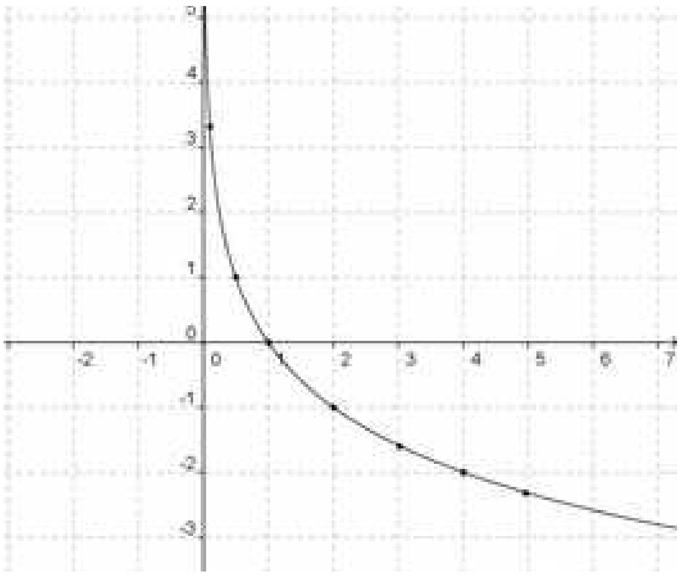
- La taula de valors i la gràfica de la funció $y = log_2 x$ són les següents:

x	$\log_2 x$
0,1	-3,3
0,5	-1,0
0,7	-0,5
1	0,0
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,3
…	…



- La taula de valors i la gràfica de la funció $y = log_{1/2} x$ són les següents:

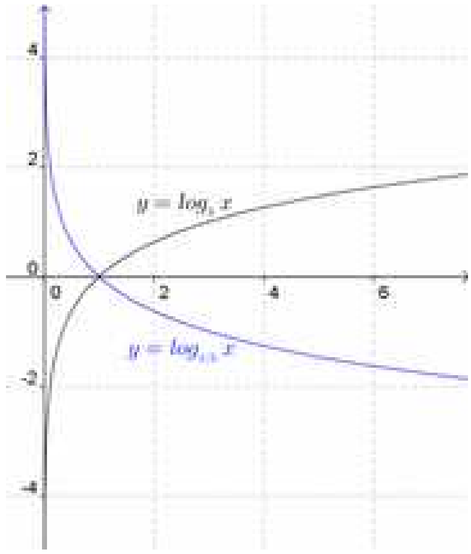
x	$\log_{1/2} x$
0,1	3,3
0,5	1,0
0,7	0,5
1	0,0
2	-1,0
3	-1,6
4	-2,0
5	-2,3…
…	



Les característiques d'aquestes gràfiques ens permeten deduir les de les funcions logarítmiques en general, que són les següents:

- El seu **domini** és (0, +∞). És a dir, només estan definides per a "x" *positiu*.

- Són contínues.
- El seu **recorregut** és tota la recta real.
- Passen pels punts (1, 0), (b, 1) i (1/b, –1).
- La gràfica de $y = \log_b x$ i la de $y = \log_{1/b} x$ són simètriques respecte de l'eix OX.



D'altra banda observem unes característiques pròpies en les funcions en ambdues il·lustracions, segons siga la base del logaritme major o menor que la unitat.

Quan la base és b > 1:

- Són funcions **creixents**. Quant major és la base el creixement és més ràpid.
- Quan $x \to 0$ la funció tendeix a –∞. Per tant presenta una **asímptota vertical** a la part negativa de l'eix OY.
- Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota horitzontal, perquè la variable "y" pot arribar a qualsevol valor.

Quan la base és 0 < b < 1:

- Són funcions **decreixents**. Quant menor és la base el decreixement és més ràpid.
- Quan $x \to 0$ la funció tendeix a +∞. Per tant presenta una **asímptota vertical** a la part positiva de l'eix OY.
- Encara que en alguns casos puga aparentar-ho, no presenten asímptota horitzontal, perquè la variable "y" pot arribar a qualsevol valor.

2.3.2. Relació entre les funcions exponencial i logarítmica

Segons la definició del logaritme tenim la relació següent: $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$

Les funcions logarítmica i exponencial porten intercanviat el lloc de la "x" i la "y". Per tant són **funcions inverses**.

En conseqüència, si partim d'un nombre i li apliquem la funció logarítmica, i després al resultat li apliquem la funció exponencial tornem al nombre de partida. El mateix ocorre si primer apliquem la funció exponencial i després la logarítmica.

Exemple:

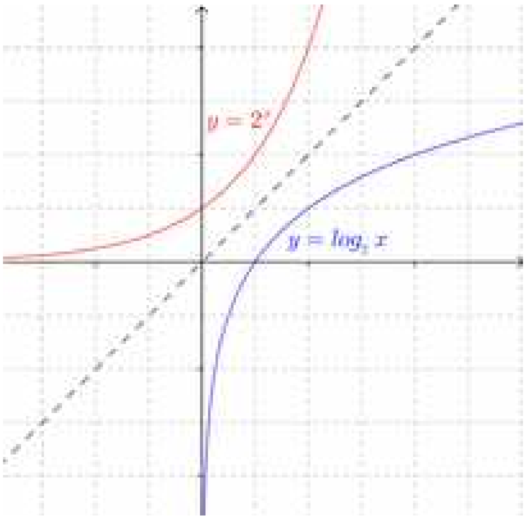
- Partint del nombre 3, utilitzant la calculadora apliquem una funció logarítmica: $\log_5 3 = 0{,}6826$ (recorda la fórmula de canvi de base). A continuació apliquem la funció exponencial: $5^{0{,}6826} = 3$ i obtenim el nombre del principi.
- Fent el mateix en sentit invers, partint del nombre 3 apliquem primer una funció exponencial: $5^3 = 125$. A continuació apliquem la funció logarítmica: $\log_5 125 = 3$ i també hem obtingut el nombre del principi.

Quan dues funcions són inverses les seues gràfiques són **simètriques**, sent el seu eix de simetria la bisectriu del primer quadrant.

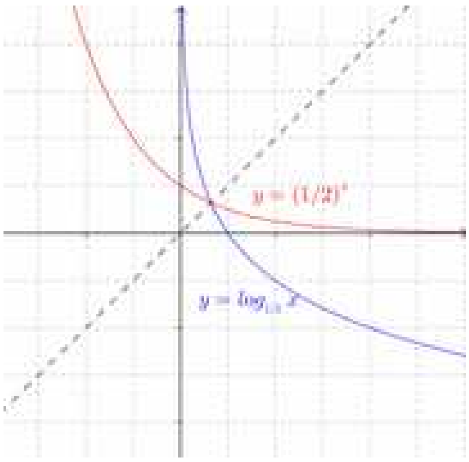
Açò es deu al fet que si el punt (a, b) és de la gràfica d'una d'elles, el punt (b, a) pertany a la gràfica de l'altra.

Exemples:

- Les gràfiques de les funcions $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = 2^x$ tenen la simetria següent:



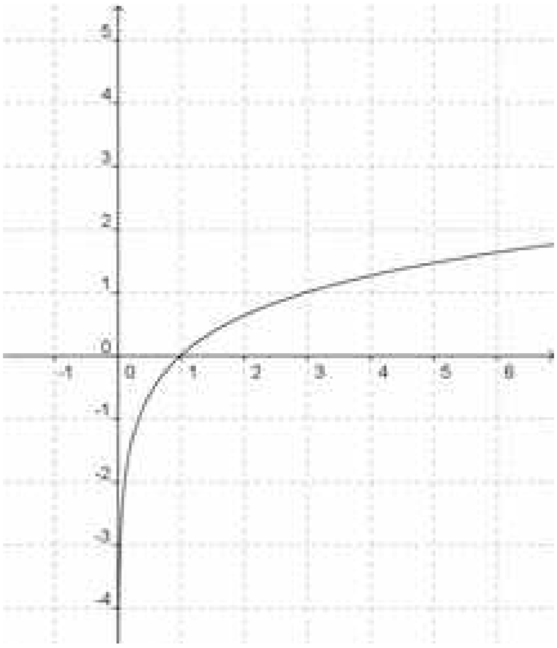
- Les gràfiques de les funcions $f(x) = \log_{1/2} x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tenen la simetria següent:



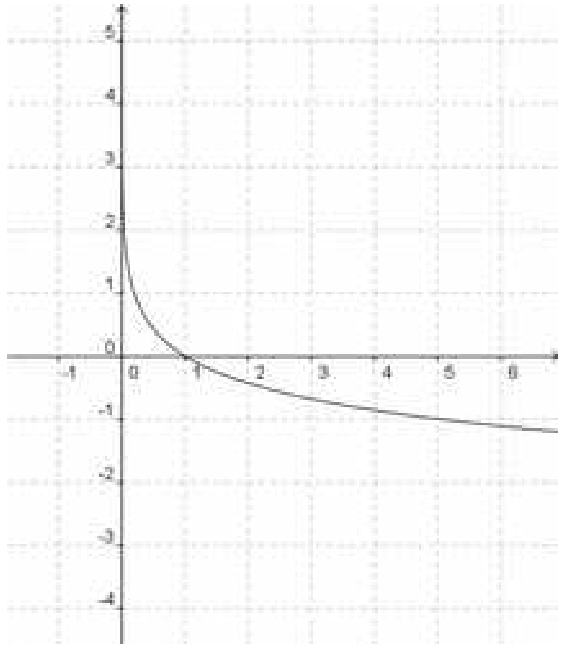
Activitats resoltes

- Identifica les funcions corresponents amb les següents gràfiques:

a)



b)



Solució:

Ambdues són funcions logarítmiques perquè passen pel punt (1, 0) i tenen com a asímptota vertical l'eix OY (bé siga en la seua part positiva o negativa) i per l'altre costat tendeixen a ∞.

La funció (a) és $y = \log_3 x$ perquè passa pel punt (3, 1) i per (1/3, –1).

La funció (b) és $y = \log_{1/5} x$ perquè passa pel punt (5, –1) i per (1/5, 1).

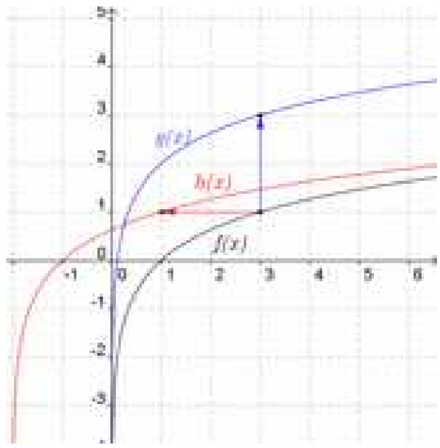
- Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = \log_3 x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular valors, dibuixa les gràfiques de les funcions $g(x) = \log_3 x + 2$ i $h(x) = \log_3(x + 2)$.

Solució:

La funció $g(x)$ és la funció $f(x)$ desplaçada cap amunt 2 unitats.

La funció $h(x)$ és la funció $f(x)$ desplaçada cap a l'esquerra 2 unitats.

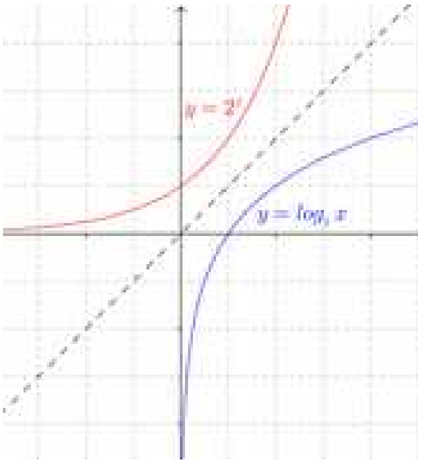
Per tant les seues gràfiques són aquestes:



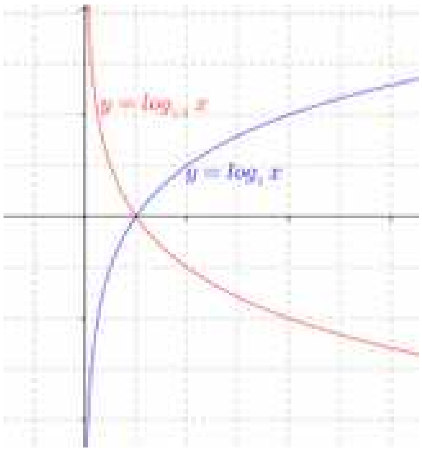
Representa la funció $y = \log_2 x$ usant una taula de valors. A continuació, a partir d'ella i sense calcular valors, representa les funcions següents: $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, i utilitzant també $y = 2^x$ representa $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solució:

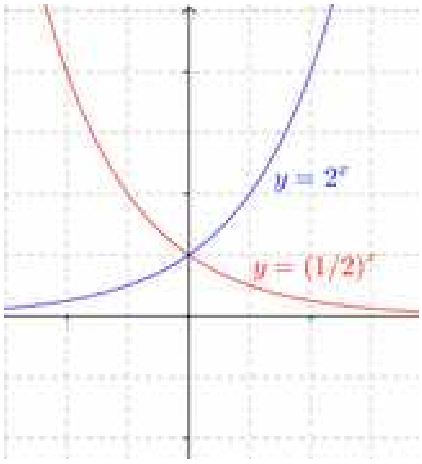
Per la simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant:



Per la simetria respecte a l'eix OX:



Per la simetria respecte a l'eix OY:



Activitats proposades

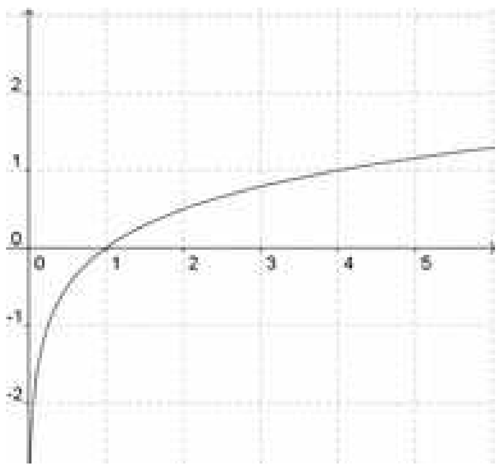
23. Representa al teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les funcions següents:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

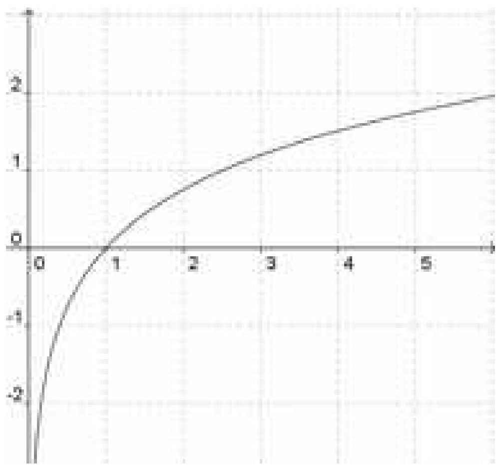
Comprova que a tots els casos passen pels punts (1, 0), (*b*, 1) i (1/*b*, –1).

24. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seues gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

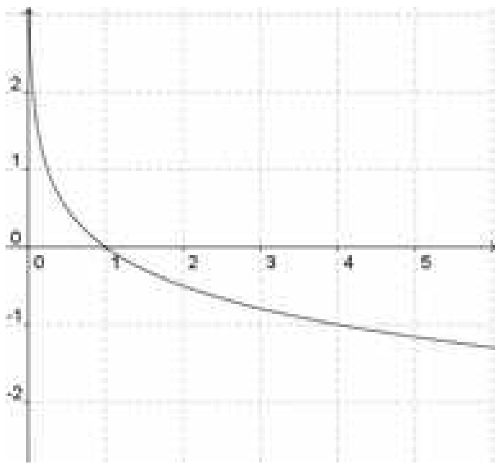
a)



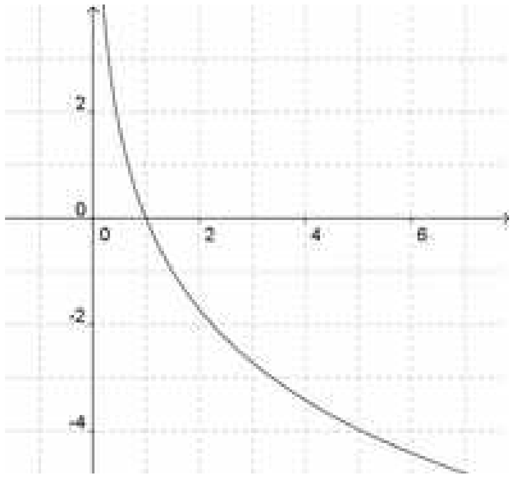
b)



c)



d)



25. Repeteix al teu quadern el dibuix de la funció $f(x)=log_2 x$ representada a l'exercici 23. Després pensa quin desplaçament pateixen respecte a ella les funcions següents i representa-les a la mateixa gràfica sense fer taules de valors:

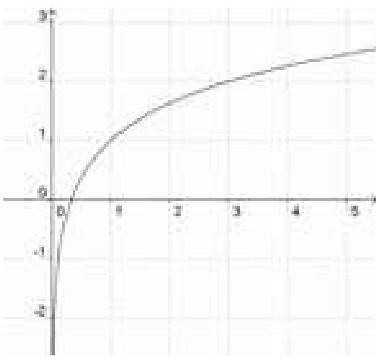
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

26. Fes el mateix procés de l'exercici anterior amb les funcions següents:

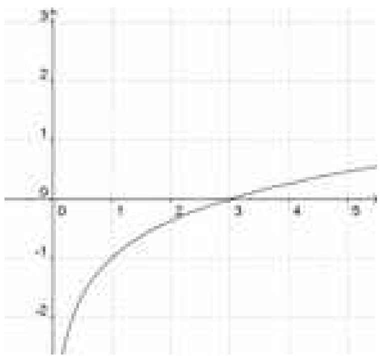
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seues gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:

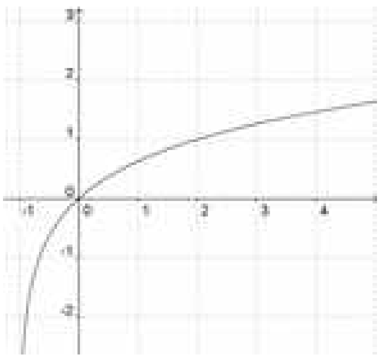
a)



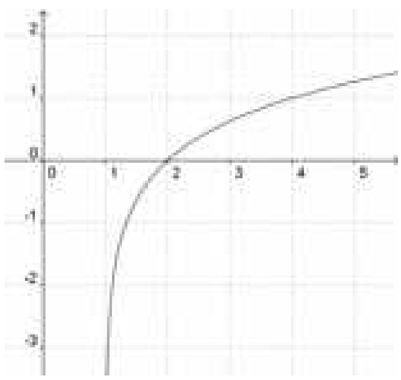
b)



c)



d)



28. Representa al teu quadern la funció y = 3^x usant una taula de valors. A continuació, a partir d'ella i sense calcular valors, representa les funcions següents: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

Al capítol 7 has estudiat Trigonometria, per la qual cosa ja coneixes les raons trigonomètriques sinus, cosinus i tangent d'un angle. Ara estudiarem les funcions trigonomètriques i les seues propietats.

Recorda que:

Un radian es defineix com la mesura de l'angle central l'arc de circumferència de la qual té una longitud igual al radi Per tant:

360º equivalen a 2π radians

D'on es dedueix que :

180º equivalen a π radians

90º equivalen a π/2 radians …

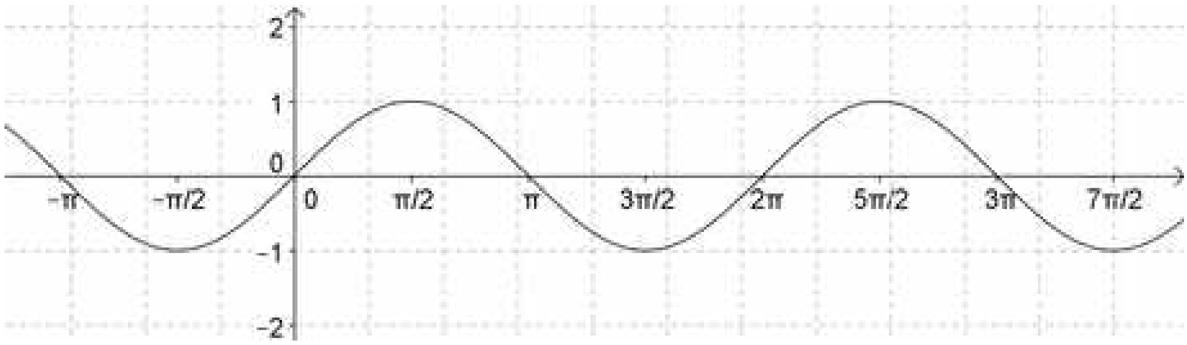
3.1. Les funcions sinus i cosinus

Aquestes dues funcions s'inclouen al mateix apartat perquè són molt paregudes.

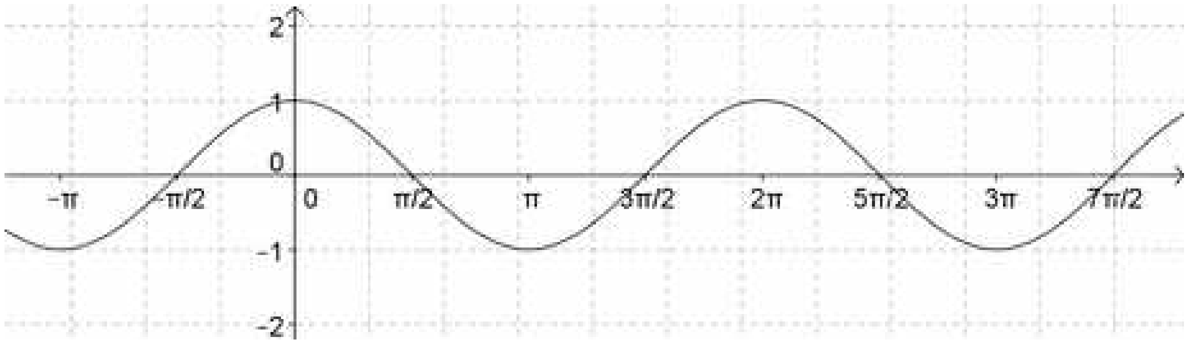
La seua gràfica és l'anomenada *sinusoide*, el nom de la qual deriva del llatí *sinus* (sin).

Ja saps que als estudis de Matemàtiques se sol utilitzar com a unitat per a mesurar els angles el radian. Per tant és necessari conèixer aquestes gràfiques expressades en radians. Les pots obtindre fàcilment amb la calculadora. Fixa't en les seues similituds i en les seues diferències:

Gràfica de la funció $f(x) = \sin x$



Gràfica de la funció $f(x) = \cos x$



Ja saps quant val π, π = 3,14…. Tin-ho en compte en dibuixar les gràfiques.

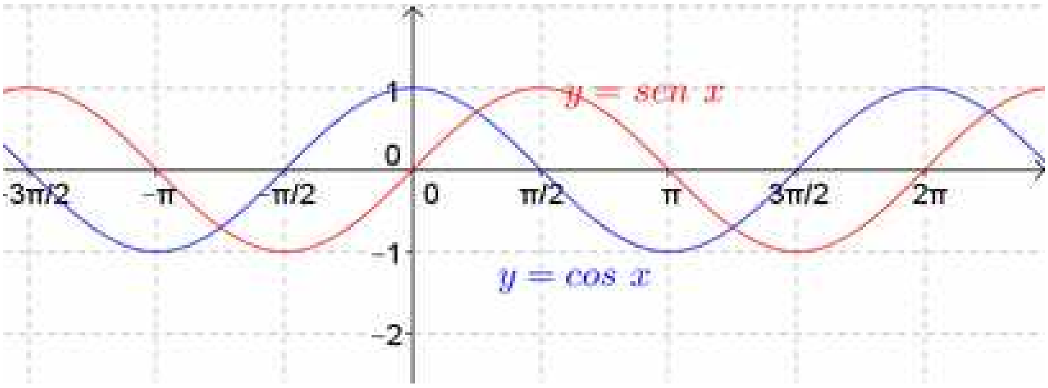
Propietats d'aquestes funcions:

- Ambdues són periòdiques i el valor del seu període és 2π.

$$sin\ (x + 2\pi) = sin\ x \qquad cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$$

- Són funcions contínues a tot el seu domini.
- El seu domini són tots els nombres reals.
- El seu recorregut és l'interval [–1 , 1].
- La funció sinus té simetria imparella (simètrica respecte a l'origen de coordenades, és a dir, $sin\ x = -sinus\ (-x)$) i la funció cosinus té simetria parella (simètrica respecte de l'eix OY, és a dir, $cos\ x = cos\ (-x)$).
- Ambdues funcions tenen la mateixa gràfica però desplaçada en $\frac{\pi}{2}$ radians en sentit horitzontal. És a dir:

$$\sin\ (x + \pi/2) = \cos\ x$$

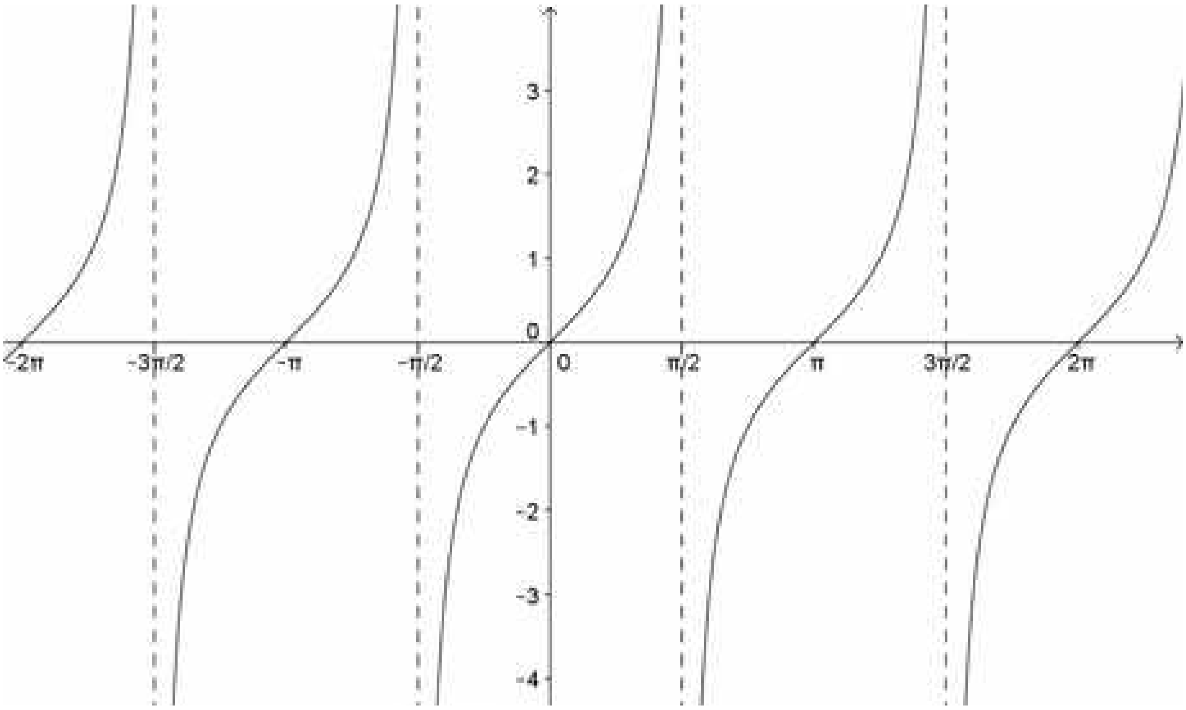


3.2. La funció tangent

Aquesta funció és diferent de les altres dues. Per aqueixa raó la presentem separadament.

Ja saps que com a raons trigonomètriques: tg x = sin x/ cos x.

La gràfica de la funció *f(x) = tg x* és la següent:



Recordem en primer lloc que no existeix la tangent per als angles de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Les propietats d'aquesta funció són les següents:

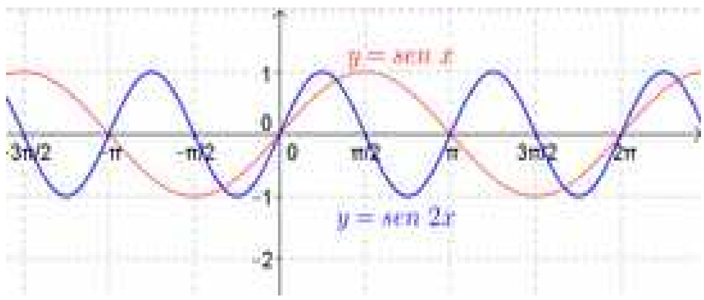
- És una funció periòdica i el valor del seu període és ara menor, és π: tg $(x+\pi)$ = tg x.
- El seu domini són tots els nombres reals excepte els múltiples de π/2 per un nombre imparell (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), on no existeix. En aqueixos valors presenta discontinuïtats anomenades discontinuïtats *inevitables*, perquè no es podrien "tapar" mitjançant un punt.
- Té asímptotes verticals en aqueixos mateixos valors de la x. Les hem representat al gràfic mitjançant línies discontínues.
- Té simetria imparella: és simètrica respecte a l'origen de coordenades, ja que tg(x)=–tg(–x)

Activitats resoltes

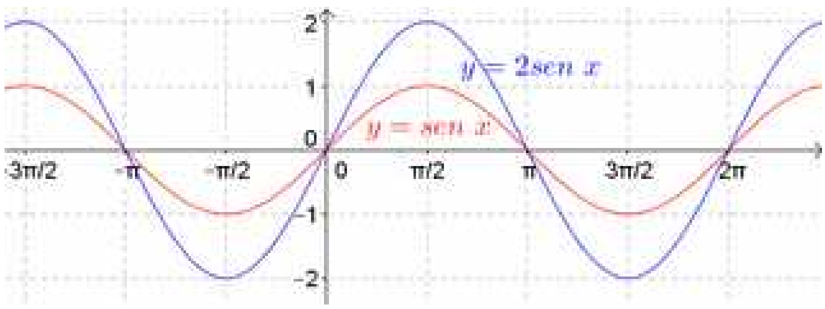
- Representa les gràfiques de les funcions y = sin$(2x)$ i y = 2sin x comparant-les després amb la gràfica de y = sin x.

Solució:

Donant valors amb la calculadora obtenim les següents gràfiques, representades en blau junt amb la de la funció sin x, representada en roig:



La gràfica de y=sin $(2x)$ és igual a la de y=sin x contraient-la horitzontalment. Canvia el període, que ara és de π.



La gràfica de y = 2sin x és igual a la de y = sin x expandint-la verticalment. Tenen el mateix període, però canvia l'amplitud. Quan y=sin$x$ aconsegueix en π/2 un valor màxim d'1, y=2sen$x$ aconsegueix en π/2 un valor màxim de 2. Diem que la seua amplitud val 2.

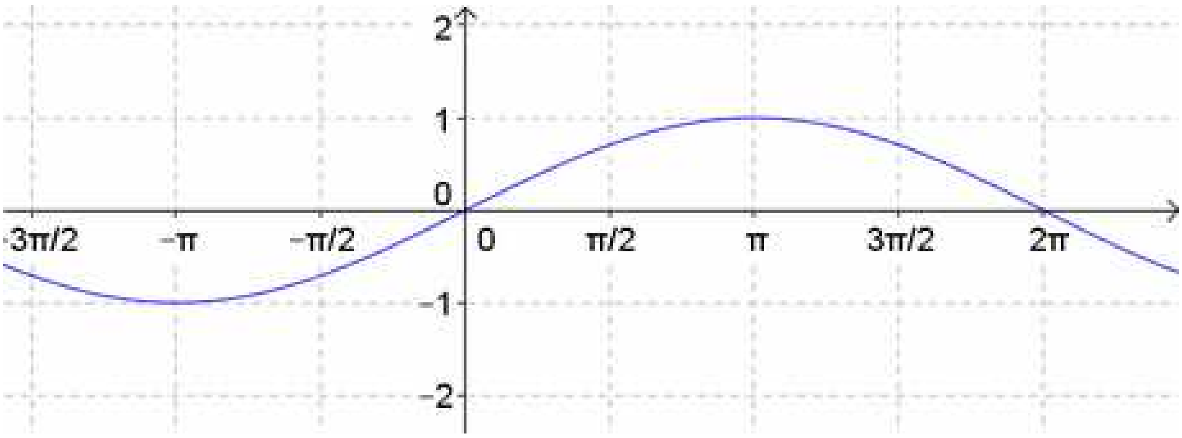
Activitats proposades

29. Representa al teu quadern les gràfiques de les funcions y = cos x, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ i $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparant-les després amb la gràfica de y = cos x.

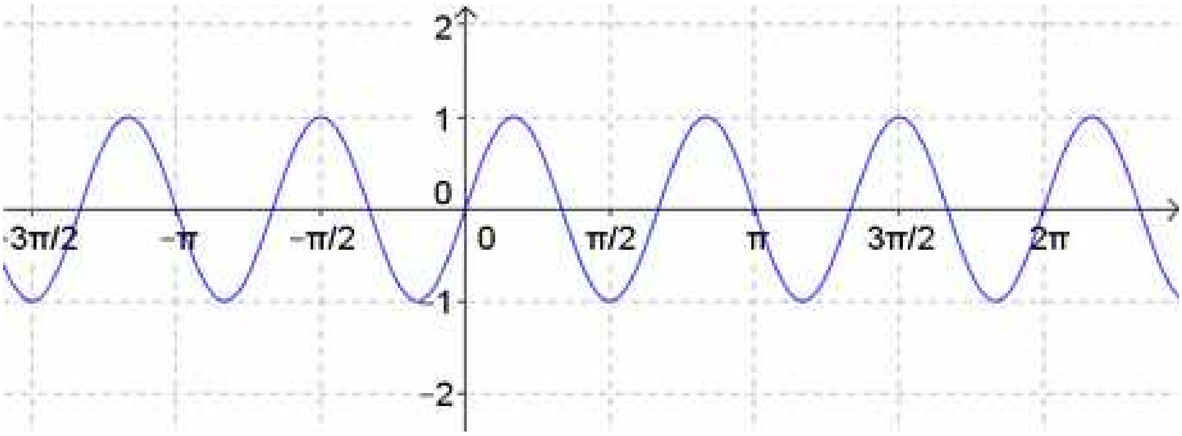
30. Partint de la gràfica de la funció y = sin x, representa al teu quadern, sense fer taules de valors, les gràfiques de y = 1 + sin x i de y = sin (x + π/6).

31. Identifica les gràfiques de les següents funcions trigonomètriques:

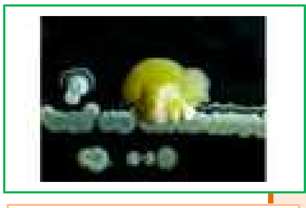
a)

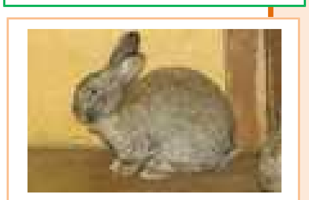


b)


2
1
0
-1
-2
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π

CURIOSITATS. REVISTA





Les poblacions creixen exponencialment

Als models que s'utilitzen per a estudiar les poblacions s'utilitza la funció exponencial. Se suposa que una població d'una certa espècie creix exponencialment mentres tinga aliment suficient i no existisquen depredadors. Arriba un moment en què la població ha omplit el territori (la Terra és finita) i aleshores canvia la funció que s'utilitza, estabilitzant-se el creixement.

Açò permet estudiar el creixement dels bacteris que es reprodueixen per fissió binària, o el creixement de les cèl·lules del fetus, o la població de conills quan van arribar a Austràlia... Malthus va afirmar que si la població humana creixia de forma exponencial i la producció d'aliments creixia de forma lineal hi hauria greus fams.

Logaritmes

No fa tant temps no existien les calculadores. Per a calcular logaritmes s'usaven "taules". Hi havia unes taules de logaritmes que eren un llibre amb un llom d'uns tres dits d'ample. S'usaven en problemes d'Astronomia en què calia utilitzar fórmules de trigonometria per a resoldre'ls i s'usaven nombres amb moltes xifres decimals (més de 10). Imagines el que és multiplicar o dividir nombres amb aqueixes xifres decimals! Resultava molt convenient transformar les multiplicacions en sumes i les divisions en restes. Aquesta mateixa idea és la que va portar a John Napier (o Neper) a inventar els logaritmes.

No tot ho pots calcular amb calculadora.

Utilitza la teua calculadora per a calcular 45^{79}.Veuràs que dóna *error*. Però si uses logaritmes pots calcular-lo fàcilment.

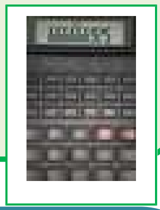
$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130{,}6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0{,}6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0{,}6037886} = 4{,}016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4{,}016 \cdot 10^{130}.$$



Decreixement exponencial

Molts fenòmens es modelen amb funcions exponencials de base menor que 1, com

La desintegració d'àtoms d'una substància radioactiva.

La intensitat lluminosa d'un feix de llum

La probabilitat de supervivència de certes espècies que no tenen genèticament determinat l'envelliment cel·lular

Carboni 14

El carboni 14 és un isòtop radioactiu amb un període de semi-desintegració (vida mitjana) de 5568 anys, molt utilitzat per a datar restes orgàniques. Les plantes, per fotosíntesi, i els animals per ingestió incorporen el carboni en la mateixa proporció que existeix a l'atmosfera, i en morir el ser viu comença el procés de desintegració.

Sophia Kovalevkaya

Coneixem molt ben moltes anècdotes de la vida de Sophia (o Sònia com a ella li agradava que la cridaren), una dona matemàtica amb teoremes amb el seu nom, perquè va escriure la seua biografia en un preciós llibre anomenat "*Una infància a Rússia*"

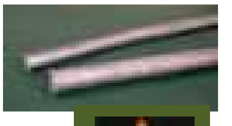
Quan Sophia tenia 14 anys, la seua família va rebre la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un veí professor de física, que va deixar la família una còpia del seu nou llibre sobre aquesta matèria. Sonia va començar a estudiar-lo i es va quedar embossada en arribar a la secció d'òptica en què s'utilitzaven raons trigonomètriques que no havia vist mai. Aleshores va anar directament a Tyrtov a preguntar-li què era exactament un *sinus*, però ell, sense fer-li massa cas, li va contestar que no ho sabia. De manera que Sònia va començar a analitzar i a explicar el que era un sinus partint de les coses que ja coneixia arribant a substituir-lo per l'arc, que, atés que les fórmules que tractava el llibre s'aplicaven en angles molt xicotets, l'aproximaven prou bé. La següent vegada que Tyrtov va ser de visita a la casa, Sònia li va demanar que discutiren sobre el seu llibre i ell, després d'intentar canviar de tema, va concloure que el trobava massa difícil per a ella. Sònia li va comentar que el text no havia tingut cap dificultat per a ella, i inclús li va explicar com havia anat deduint tot allò que no coneixia i que s'utilitzava al llibre. Tyrtov va quedar estupefacte i li va comentar al pare de Sònia que el seu desenrotllament sobre el concepte de sinus havia sigut exactament el mateix amb el què històricament s'havia introduït tal concepte a les Matemàtiques.

Fourier i el concepte de funció

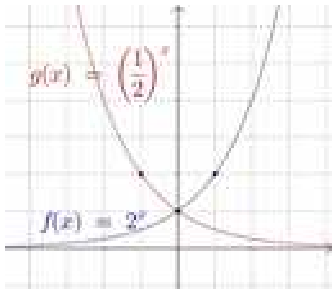
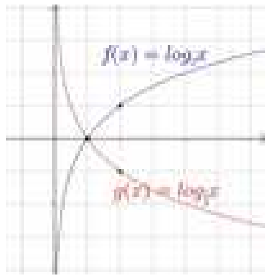
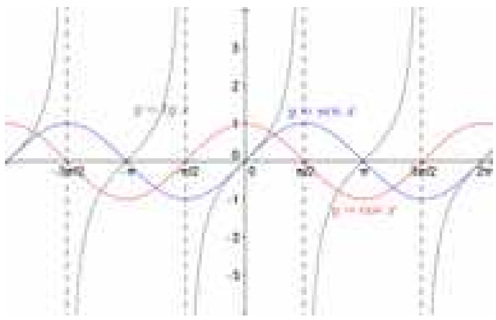
El concepte de funció ha tardat molt a ser comprés inclús pels matemàtics, només disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència va tardar un temps a aparéixer.

Va ser *Joseph Fourier* a la seua obra *"La teoria analítica de la calor"* el motor per a l'aprofundiment del concepte de funció. Fourier va viure durant la Revolució Francesa i va participar en l'expedició de Napoleó a Egipte. Era molt fredolí i per aqueix motiu li interessava la propagació de la calor. A la seua obra afirma que "tota" funció podia escriure's com una suma infinita de funcions sinus i cosinus.

Antoni Zygmund va escriure *"Aquesta teoria ha sigut una font de noves idees per als analistes durant els dos últims segles i probablement ho serà als pròxims anys. Moltes nocions i resultats bàsics de la teoria de funcions han sigut obtinguts per matemàtics treballant sobre sèries trigonomètriques". Afig* que aqueixa obra de Fourier va ser el catalitzador per a fixar el concepte de funció, la definició d'integral, aprofundir a la Teoria de Conjunts i actualment amb la Teoria de Funcions Generalitzades o Distribucions.



RESUM

		Exemples
Funció exponencial $y = b^x$	Domini: Tots els nombres reals. Recorregut: Tots els nombres reals positius. Contínua en tot el domini Asímptota horitzontal: y = 0 $b > 1$, ⇔ *Creixent* en tot el domini. $0 < b < 1$ ⇔ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definició de logaritme	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Conseqüències elementals: $\log_b b = 1 \qquad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Canvi de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} = 1{,}40$
Operacions amb logaritmes	Log. d'un producte: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Log. d'un quocient: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Log. d'una potència: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Funció logarítmica $y = \log_b x$	*Domini*: Tots els nombres reals positius. *Recorregut*: Tots els nombres reals. **Contínua** en tot el domini Asímptota vertical: x=0 $b > 1$ ⇔ Creixent en tot el domini. $0 < b < 1$ ⇔ Decreixent en tot el domini Punts destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funcions trigonomètriques $y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg } x$	<u>**Funcions sinus i cosinus**</u>: *Domini*: Tots els nombres reals *Recorregut*: $[-1, 1]$ Contínues en tot el domini. Periòdiques de període 2π <u>**Funció tangent**</u>: *Domini i continuïtat*: Tot ℜ excepte $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En aqueixos valors hi ha asímptotes verticals) *Recorregut*: Tots els nombres reals. Periòdica de període π. <u>**Simetria**</u>: Funcions sinus i tangent: simetria imparella. Funció cosinus: simetria parell.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Funció exponencial

1. Representa mitjançant una taula de valors les funcions següents:

a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y = 2^{x/2}$ d) $y = 3^{-2x}$

2. Representa mitjançant una taula de valors la funció $y = 3^x$ i a continuació, sense taula de valors, representa aquestes altres sobre el mateix dibuix:

a) $y = 3^x - 1$ b) $y = 3^x + 1$ c) $y = 3^{x+1}$ d) $y = 3^{x-1}$

3. Troba una funció exponencial $f(x) = b^x$ sabent que $f(2) = 9$.

4. Troba una funció $f(x) = k{\cdot}b^x$ sabent que $f(4) = 48$ i que $f(0) = 3$.

5. Si un capital de 3.500 euros es multiplica cada any per 1,02 representa en un gràfic l'evolució d'aqueix capital als 10 primers anys. Tria unes proporcions adequades per als eixos.

6. Un cert tipus de cèl·lules es reprodueix per bipartició, comprovant-se que el nombre d'elles es duplica cada dia. Si en un dia determinat el nombre de cèl·lules era de 4 milions:

a) Expressa mitjançant una funció el nombre de cèl·lules en funció del nombre de dies.

b) Troba el nombre de cèl·lules que haurà d'ací a 3 dies i el que hi havia fa 3 dies.

c) En quin dia penses que el nombre de cèl·lules era de 31.250?

7. La descomposició d'un cert isòtop radioactiu ve donada per la fórmula $y = y_0{\cdot}2{,}7^{-0{,}25t}$, on y_0 representa la quantitat inicial i t el nombre de mil·lennis transcorregut. Si la quantitat actual és de 50 grams, quina serà la quantitat que quede al cap de 8.000 anys? Quina era la quantitat que hi havia fa 5.000 anys?

Funció logarítmica

8. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i sense utilitzar la calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0{,}2$ f) $\log 0{,}1$

9. Calcula els següents logaritmes utilitzant la definició i igualant exponents, sense calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0{,}125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0{,}333\ldots$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1000}$

10. Calcula els següents logaritmes amb la calculadora utilitzant la fórmula del canvi de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0{,}1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1000}$

11. Utilitzant els valors log 2 = 0,301 i que log 3 = 0,477 calcula, aplicant les propietats dels logaritmes i sense calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Si anomenem log 9 = *x* expressa en funció de *x* els logaritmes següents:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0,\hat{1}$ d) $\log 0,9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resol les següents equacions logarítmiques:

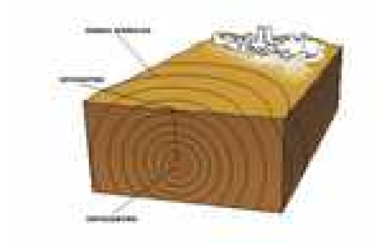
a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. Quina relació hi ha entre el logaritme d'un nombre *x* i el del seu invers 1/*x*?

15. Si es multiplica per 36 el nombre *x*, el seu logaritme en una certa base augmenta en dues unitats. Quina és la dita base?

16. L'escala Richter, *usada* per a mesurar la intensitat dels terratrèmols, és una escala logarítmica: un terratrèmol de magnitud 5 és 100 vegades més intens que un de magnitud 3, perquè 5=log 100.000 i 3= log 1.000. Tenint açò en compte, si el famós terratrèmol de San Francisco (en 1906) va tindre una magnitud de 8,2 i el d'Haití (en 2010) va ser de 7,2 quantes vegades més fortes va ser un que un altre?



Terratrèmol

Funcions trigonomètriques

17. Determina tots els angles que verifiquen que sin *x* = 1/2.

18. Determina tots els angles que verifiquen que sin *x* = –1/2.

19. Determina tots els angles que verifiquen que *cos x* = 1/2.

20. Determina tots els angles que verifiquen que *cos x* = –1/2.

21. Determina tots els angles que verifiquen que *tg x* = –1.

22. Calcula sin *x* i *cos x* si *tg x* = –3.

23. Calcula sin *x* i *tg x* si *cos x* = 0,4.

24. Calcula *tg x* i *cos x* si sin *x* = –0,3.

25. Calcula les raons trigonomètriques dels angles expressats en radians següents:

a) 17π/3 b) –20π/3 c) 13π/2 d) –9π/2.

26. Dibuixa al teu quadern sobre uns mateixos eixos les gràfiques de les funcions sinus, cosinus i tangent i indica el següent: a) Si el sinus val zero, quant val el cosinus, i la tangent? b) Si el cosinus val zero, quant val el sinus i la tangent? c) Si la tangent val zero, quant val el sinus i el cosinus? d) Quan la tangent tendix a infinit, quant val el cosinus?

27. Dibuixa la gràfica de la funció *y* = *sin*(2*x*), completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sin(2x)$					
y					

a) L'amplitud és l'ordenada del màxim. Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) La freqüència és la inversa del període, quina és la seua freqüència?

28. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
πx	0	π/2	π	3π/2	2π
$sin(\pi x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

29. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2sin((\pi/3)x) + \pi/2$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$(\pi/3)x$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sin((\pi/3)x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

30. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3sin(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	π/2	π	3π/2	2π
$sin(\pi x+2)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?
b) Quin és el seu període?
c) Quina és la seua freqüència?

31. Dibuixa la gràfica de la funció $y = cos(2x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(2x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

32. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 3cos(\pi x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

33. Dibuixa la gràfica de la funció $y = 2cos(\pi x + 2)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x+2)$					
y					

a) Quina és l'amplitud d'aquesta funció?

b) Quin és el seu període?

c) Quina és la seua freqüència?

34. Dibuixa la gràfica de la funció $y = tg(2x)$, completant prèviament la taula següent al teu quadern:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$tg(2x)$					
y					

Quin és el seu període?

Problemes

35. Per efecte d'un antibiòtic el nombre de bacteris d'una colònia es redueix en un 7 % cada hora. Si en el moment d'administrar-se l'antibiòtic hi havia 40 milions de bacteris, quantes hi haurà al cap de 10 hores?

36. Una persona ingereix a les 8 del matí una dosi de 10 mg de medicament. El dit medicament es va eliminant a través de l'orina, i la quantitat que queda al cos al cap de t hores ve donada per la fórmula $M(t)=10\cdot 0{,}8^{t}$. Perquè el medicament faça efecte ha d'haver-hi almenys una quantitat de 2 mg al cos. Quant temps continuarà fent efecte després de la seua ingestió?

37. La mesura de la pressió atmosfèrica P (en mil·libars) a una altitud de *x* quilòmetres sobre el nivell del mar està donada per l'equació $P(x)=1035\cdot e^{-0{,}12x}$.

a) Si la pressió al cim d'una muntanya és de 449 mil·libars, quina és l'altura de la muntanya?

b) Quina serà la pressió al cim de l'Everest (altitud 8.848 metres)?

38. A què tant per cent cal invertir un capital per a duplicar-lo en 10 anys?

39. Quants anys ha d'estar invertit un capital perquè al 5 % d'interès es convertisca en 1,25 vegades el capital inicial?

40. Coneixes aqueixes nines russes que porten dins una altra nina igual però més xicoteta, i així successivament? Suposem que cada nina té dins una altra que ocupa 2/3 del seu volum. Si la nina major té un volum de 405 cm^3 i la més xicoteta és de 80 cm^3, quantes nines hi ha en total a la sèrie? Podries donar una fórmula general per a aquest càlcul?

41. Indica, sense dibuixar la gràfica, el període, l'amplitud i la freqüència de les funcions següents:

a) $y = 2\, sin\, (x/2)$, b) $y = 0{,}4\, cos\, (\pi x/2)$, c) $y = 5\, sin\, (\pi x/3)$, d) $y = 3\, cos\, (\pi x)$.

AUTOAVALUACIÓ

1. El valor de x que verifica l'equació exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ és:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. La funció exponencial y = e^x tendeix a *** quan x tendeix a –∞ i a *** quan x tendeix a +∞. Indica amb quins valors caldria omplir els asteriscos:

a) 0, +∞ b) +∞, 0 c) 0, –∞ d) –∞, 0

3. Indica quina és la funció exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ és:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Un altre valor

5. L'equació logarítmica log x log + 6 log = 30 té com a solució :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

6. Indica l'afirmació verdadera:

a) La funció exponencial de base major que 1 és decreixent

b) La funció logarítmica de base major que 1 és decreixent

c) La funció exponencial sempre és creixent

d) La funció exponencial de base major que 1 és creixent

7. L'expressió general de tots els angles la tangent dels quals val 1, on k és un nombre enter, és:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. La funció $f(x) = 3\, sin(4x)$ té d'amplitud, període i freqüència, respectivament:

a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2

9. El sinus el cosinus i la tangent de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivament:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \; -\frac{\sqrt{2}}{2}, \; 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{1}{2}, \; \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{2}, \; \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \; \frac{\sqrt{2}}{2}, \; 1$

10. El sinus, el cosinus i la tangent de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivament:

a) $\frac{1}{2}, \; \frac{\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{1}{2}, \; \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \; \frac{1}{2}, \; \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \; \frac{\sqrt{2}}{2}, \; 1$