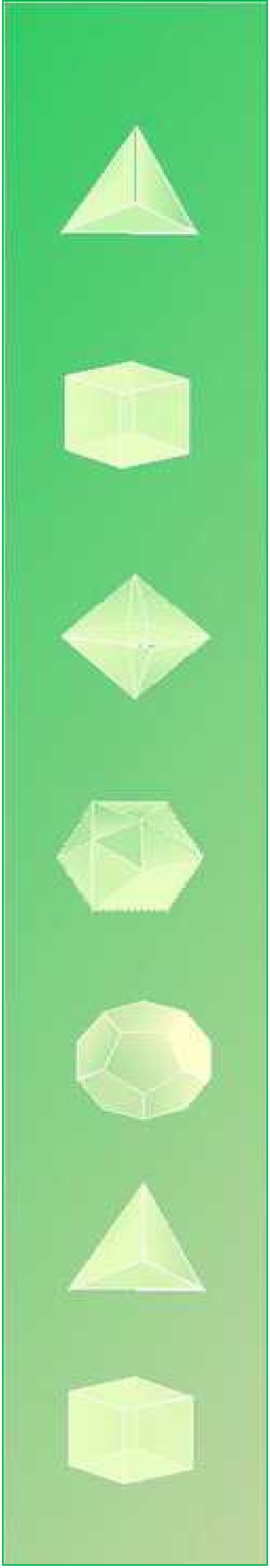


Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4t B d'ESO

Capítol 10:

Funcions i gràfiques

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García i Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo i José Gallegos

Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Un dels conceptes més importants que apareixen a les Matemàtiques és la idea de *funció*. Intuïtivament, una funció és qualsevol procés pel qual es transforma un nombre en un altre. Més formalment, una funció *f és* una correspondència que a un nombre x li assigna un únic nombre y, tal que $y = f(x)$.

No és difícil trobar exemples de funcions. L'espai recorregut en funció del temps, el pes d'una persona en funció de la seua altura, el que paguem de telèfon en funció dels minuts que parlem.

En aquest capítol aprendrem com tractar de manera rigorosa la idea intuïtiva de funció i com estudiar les funcions. Veurem com descriure les seues característiques i estudiarem la manera de fer un model matemàtic d'algunes situacions de la vida real que ens ajude a prendre millors decisions. Pràcticament qualsevol situació real pot ser estudiada amb ajuda de funcions. Tenim per tant molt camp…

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

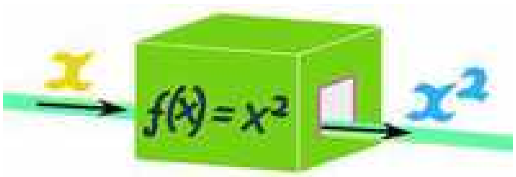
1. FUNCIONS REALS

1.1. Concepte de funció

Una ***funció*** és una relació o correspondència entre dues magnituds, tals que a cada valor de la variable independent, x, li correspon ***un sol*** valor de la dependent, y.

Per a indicar que la variable (y) depén o és funció d'una altra, (x), s'usa la notació $\mathbf{y = f(x)}$, que es llig *"y és funció de x"*.

Les funcions són com a màquines a les què se'ls fica un element, x, i torna un altre valor, $y = f(x)$. Per exemple, en la funció $f(x) = x^2$, s'introdueix valors de x, i ens torna els seus quadrats.



És MOLT IMPORTANT que tinguem un sol valor de y (variable dependent) per a cada valor de x (variable independent). En cas contrari no tenim una funció.
Les funcions es van introduir per a estudiar processos. Si fent el mateix ens poden eixir coses distintes, no es pot estudiar de la mateixa manera.

Exemples:

- *Pensem en la factura de telèfon. Si sabem quants minuts hem parlat (suposant, clar, que costen el mateix tots) també sabem quant ens toca pagar. Els diners que paguem és funció del temps.*

- *Anem al casino i apostem a roig o negre. Si apostem un euro, podem guanyar dues o no guanyar res. Si diem quant apostem no sabem quant guanyarem. Per tant, els guanys en un casino NO són una funció de l'aposta.*

Activitats resoltes

- Indica si les següents situacions representen una funció o no
  a. L'espai recorregut per un cotxe i el temps.
  b. Els guanys en la Borsa en funció del que inverteix.
  c. El quadrat d'un nombre.

Solució:

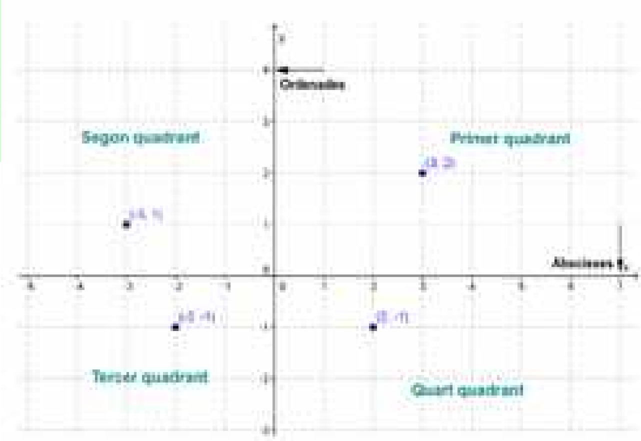
Són funcions la a) i la c). La b) no ho és perquè no sabem quant guanyem.

1.2. Gràfica d'una funció

Moltes vegades, la manera més senzilla de veure com es comporta una funció és dibuixar-la al pla cartesià. Recordarem molt breument què era el pla cartesià (cartesià, ve de *Cartesio*, que era el nom amb què firmava el seu inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referència cartesià** consisteix en dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal el denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.



Sistema de referència cartesià

En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a **quadrants**:

-Primer quadrant: Zona superior dreta

-Segon quadrant: Zona superior esquerra

-Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta.

Per a representar punts, només cal recordar que la primera component (o abscissa) és x, per la qual cosa ha d'anar a l'eix X (eix d'abscisses). La segona component (o ordenada) és y, per tant va a l'eix Y (eix d'ordenades).

El sentit positiu és a la dreta i amunt. Si alguna de les components és negativa, aleshores es col·loca en sentit contrari.

Per a representar una gràfica, el que hem de fer és simplement prendre valors (x, y) o, el que és el mateix (x, $f(x)$) ja que y = $f(x)$. Després els unim, bé amb línies rectes, bé ajustant "a ull" una línia corba. Naturalment, ara ens apareixen dues qüestions:

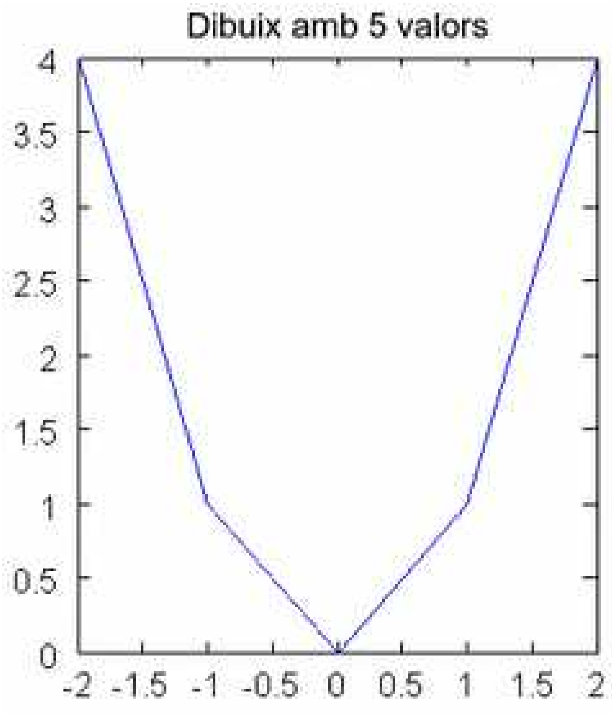
- Quants valors cal donar?
- Quins valors li donem?

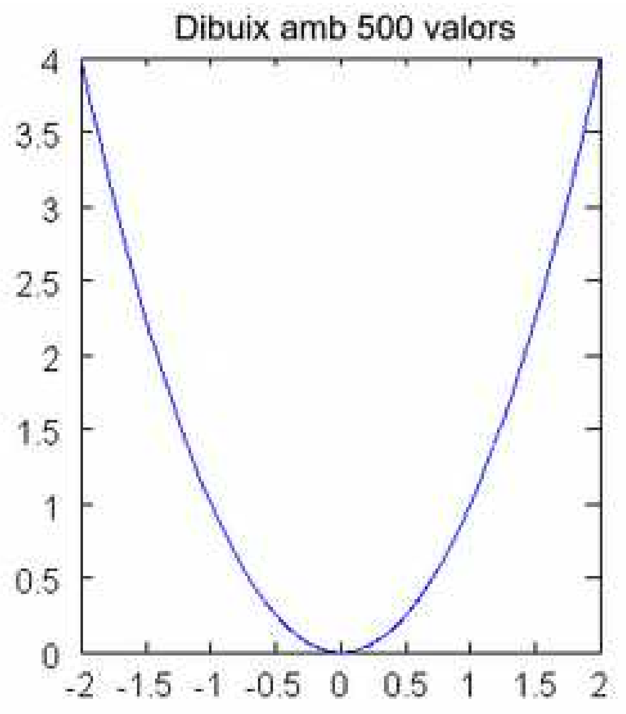
En general, no hi ha una resposta clara a aqueixes preguntes, a part de l'òbvia "quant més, millor". Si una gràfica es dibuixa amb ordinador, normalment se li dóna un interval i el nombre de valors que volem que represente. Típicament, un ordinador dóna MOLTS valors: 500, 1000, ….

Exemple:

- *Dibuixem la funció* $y = x^2$ a l'interval [–2, 2] amb un ordinador (aquest dibuix està fet amb el programa *Octave*, que és codi obert i pots descarregar lliurement).

Fem dues gràfiques, una donant 5 valors i l'altra 500. Observa la diferència entre els dos dibuixos. Observa també que l'ordinador uneix els punts amb segments de rectes.



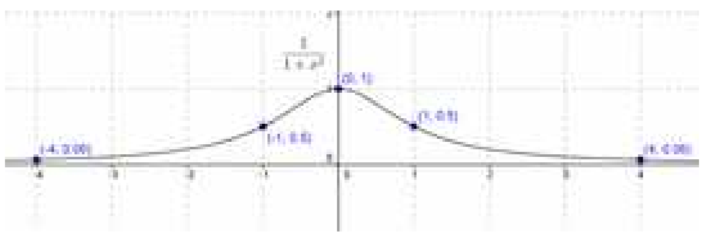


Activitat resolta

- *Dibuixar la funció* $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Més tard indicarem els valors que és recomanable prendre. De moment, ens limitarem a donar uns pocs i unir punts. Per cap raó en especial, prenem –4, –1, 0, 1 i 4. Recordem que en substituir s'usen SEMPRE parèntesi. Així $\dfrac{1}{(-4)^2 + 1} = \dfrac{1}{16 + 1} = \dfrac{1}{17} = 0'06$. Obtenim aleshores la taula de valors i basta unir els punts (donant-los "a ull" un poc de corba).

x	f (x)
–4	0'06
–1	0'5
0	1
1	0'5
4	0'06

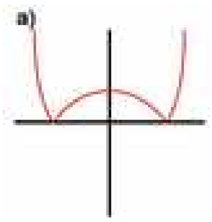


Una qüestió a ressenyar de les gràfiques és el fet de que, directament a partir d'un dibuix podem veure si correspon a una funció o no. Per a veure-ho, basta fixar-se en si hi ha algun valor de *x* que corresponga a més d'un valor de *y*. Si NO n'hi ha, és una funció. Observem que l'exemple anterior és una funció.

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Activitat resolta

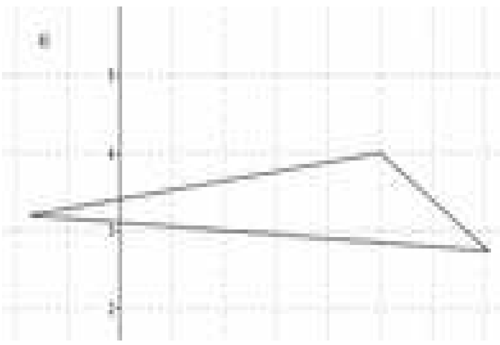
- *Indica quins de les següents representacions corresponen a la gràfica d'una funció:*

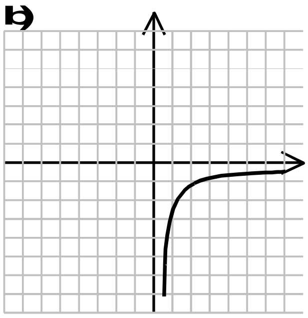


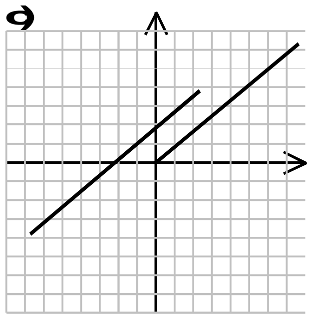
La gràfica a) és una funció. La gràfica b) NO ho és perquè, per exemple el punt *x*=0 té dos valors de *y*.

Activitat proposada

1. De les següents gràfiques indica quines d'elles corresponen a funcions.







1.3. Diferents maneres d'expressar una funció

Recordem, una vegada més, que una funció és la descripció de com es relacionen dues magnituds. Així doncs, aquesta descripció la podem saber de diverses maneres.

Funcions donades per taules

Probablement, la manera més senzilla en la que es pot donar una funció és amb una taula de valors. És a més la manera més experimental: observem un procés i mesurem les quantitats que ens ixen. Així tenim una idea de com es relacionen.

Dibuixar la seua gràfica no pot ser més senzill. Basta posar els punts i, si és el cas, unir-los.

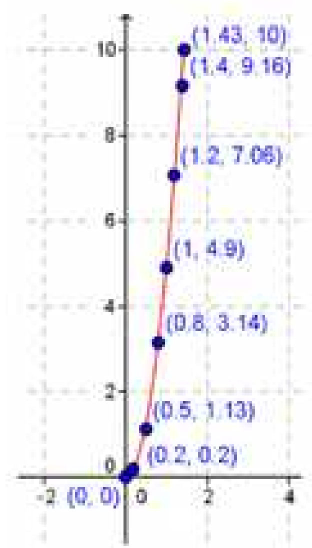
Exemple:

- *Soltem una pilota des de 10 m d'altura i mesurem l'espai recorregut (en segons). Obtenim aleshores la taula següent:*

Espai (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Temps (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

És molt senzill dibuixar la seua gràfica. Basta representar els punts i unir-los (aquesta gràfica està feta amb el programa *Geogebra*, també de codi obert):



Dona't compte que té sentit "*omplir*" l'espai entre punts. Encara que no l'hagem mesurat, la pilota no pot teletransportar-se, per la qual cosa segur es pot parlar d'on està en l'instant 0'7, per exemple. I òbviament, l'espai recorregut estarà entre 1'13 (que correspon a 0'5 segons) i 3'14 (que correspon a 0'8 segons).

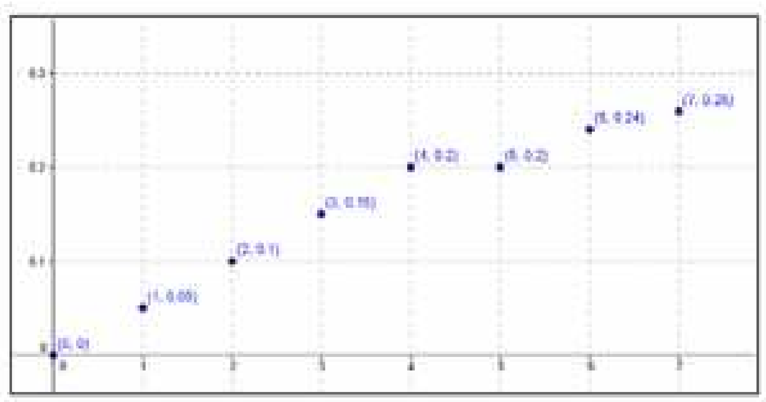
La qüestió que ens plantegem és la següent: és sempre així? Pot haver-hi funcions on NO TINGA SENTIT posar valors intermedis?

Per poc que penses, et donaràs compte que sí n'hi ha. Vegem un exemple:

Exemple:

- *En una llibreria, han posat la següent taula amb el preu de les fotocòpies, depenent del nombre de còpies:*

N de còpies	0	1	2	3	4	5	6	7
Preu (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28



Es pot construir la representació gràfica dibuixant aquests punts.

La qüestió de si podem dibuixar punts intermedis entre els anteriors es respon per si sola.

No es poden fer 1'5 còpies. Només pots fer un nombre enter de còpies.

Per tant, no té sentit plantejar-se tan sols donar valors intermedis ni dibuixar-los.

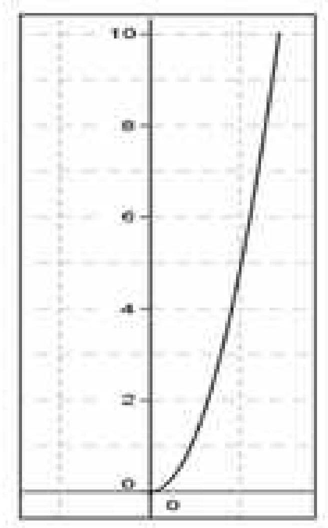
Funcions donades per una expressió

En moltíssimes ocasions, sabem prou de la relació entre dues magnituds com per a conèixer exactament una expressió que les relaciona. Començarem amb un exemple.

Exemple:

- *Tornem al cas que vam veure abans, on soltàvem una pilota.*

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez



No necessitem mesurar els temps i els espais. És un cos en caiguda lliure i per tant el que en Física s'anomena moviment uniformement accelerat. En aquest cas $e = \frac{1}{2}at^2$ on *e* és l'espai, *t* és el temps i *a* és l'acceleració. A més, *a* és coneguda perquè és la gravetat, és a dir 9'8 m/s^2.

Per tant, les dues magnituds, espai i temps, estan relacionades per l'equació $e = \frac{1}{2}9'8t^2$. En Matemàtiques és més usual posar *x* e *y*, per la qual cosa seria $y = \frac{1}{2}9'8x^2$ però és exactament el mateix.

I, com tenim tots els punts que vulguem, podem dibuixar la funció sense cap problema amb els seus punts intermedis. O indicar-li a un ordinador que la dibuixe.

El resultat, naturalment, és el mateix.

Activitats proposades

2. Un ciclista beu 1/2 litre d'aigua cada 10 km de recorregut. Si en el cotxe d'equip porten un bidó de 40 litres, fes una taula que indique la seua variació i escriu la funció que la representa.

3. Un ciclista participa en una carrera recorrent 3 km cada minut. Tenint en compte que no va partir de l'origen sinó 2 km per darrere representa en una taula el recorregut durant els tres primers minuts. Escriu la funció que expressa els quilòmetres en funció del temps en minuts i dibuixa-la.

Funcions definides a trossos

- *Pensa en la següent situació per a la tarifa d'un telèfon mòbil. Es paga un fix de 10 € al mes i amb això són gratis els 500 primers minuts. A partir d'allí, es paga a 5 cèntims per minut.*

És evident que és diferent el comportament abans de 500 minuts i després.

Una **funció definida a trossos** és aquella que ve donada per una expressió distinta per a diferents intervals.

A l'exemple anterior, és fàcil veure que $f(x) = \begin{cases} 10 + 0'05(x - 500) & x > 500 \\ 10, & x \leq 500 \end{cases}$.

Vegem breument per què. Per a valors menors que 500, el gasto és sempre 10 €. Per a valors majors, els minuts que gastem PER DAMUNT DE 500 són (*x* – 500) i per tant el que paguem pels minuts és 0'05(*x* – 500) perquè ho mesurem en euros. Cal sumar-li els 10 € que paguem de fix.

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Activitats proposades

4. Representa les següents funcions a trossos. S'indiquen els punts que has de calcular.

a. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & si\ x < -3 \\ -x + 1, & si\ -3 \leq x < 0 \\ 3, & si\ 0 \leq x < \infty \end{cases}$ Punts: –5, –3'1, –3, –1, –0'1, 0, 1.

b. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & si\ x < -2 \\ 3, & si\ -2 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & si\ 1 \leq x \end{cases}$ Punts: –3, –2'1, –2, 0, 0'9, 1, 4, 9.

1.4. Domini i recorregut d'una funció

Fins ara, no ens hem preocupat de quins valors poden tindre la *x* i la *y*. Però és evident que no sempre poden prendre tots els valors de la recta real. Per exemple, si una funció ens dóna l'altura amb respecte del pes no podrem tindre valors negatius. Per a això existeixen els conceptes de domini i recorregut.

El **domini** d'una funció és el conjunt de valors que la variable independent (*x*) pot prendre. S'escriu *Domf* o *Dom*(*f*).

El **recorregut** o **rang** d'una funció és el conjunt de valors que la variable dependent (*y*) pot prendre. S'escriu *Rgf* o *Rg*(*f*).

Normalment, el recorregut és més directe de calcular. Simplement, mirem la gràfica i veiem quins valors pot prendre la variable dependent (*y*).

El domini sol ser un assumpte prou més complicat. En general, hi ha dues raons per les quals un valor de *x* NO pertanga al domini.

1. La funció no té sentit per a eixos valors. Per exemple, si tenim una funció que represente el consum d'electricitat a cada hora del dia, és evident que *x* ha d'estar entre 0 i 24. Un dia té 24 hores!! De cap manera podem parlar tan sols del que hem gastat l'hora 25.

2. L'operació que ens dóna *f*(*x*) no pot fer-se. Per exemple, no es pot dividir entre 0, per la qual cosa la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ té com a domini el conjunt $\{x \in \Re\ ; x \neq 0\}$, és a dir $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

El primer cas ve donat per l'aplicació pràctica i el nostre sentit comú. El segon és el que té més dificultat i per això anem a dedicar-li un poc més de temps.

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Càlcul de dominis

Hi ha dues operacions que NO estan permeses.

a. Dividir entre 0.

b. Fer arrels quadrades o d'índex parell de nombres negatius. Tin en compte que l'arrel quadrada de 0 SÍ QUE està definida (val 0).

En capítols futurs veurem alguna operació més, però per ara, només aqueixes dues operacions. Veurem un mètode sistemàtic per a calcular el domini.

Mètode per a calcular el domini

1. Quadricula TOTES les operacions problemàtiques.
2. Per a TOTES aqueixes operacions, planteja una equació igualant-la a 0. Resol la dita equació.
3. Representa en una recta totes les solucions de totes les equacions.
4. Dóna valors a la funció. Un valor en cada interval i els valors límit. Si l'operació es pot fer, és que el punt o l'interval pertany al domini. Si no, doncs no. Pots veure si una operació val, o no, fent-la amb la calculadora. Si ix error, és que no es pot. Marca amb un X els valors que no valen i amb un tick (V) si es poden fer.
5. Representa la solució amb intervals. Si el punt de l'extrem està, és un claudàtor com [] i si no, un parèntesi.

Així vist, pot parèixer un poc complicat. Veurem un parell d'exemples.

Activitats resoltes

- *Calcula el domini de les funcions següents:*

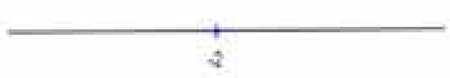
  a. $x+\sqrt{2x+4}$

  b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartat a

Seguirem el procediment fil per randa. L'únic possible problema és l'arrel quadrada de 2x +4

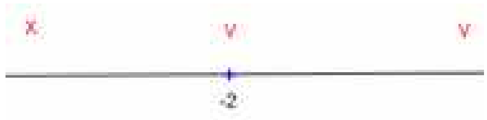
1. Igualem a 0 i resolem: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
2. Representem a la recta els valors.



3. Hem de donar un valor a l'esquerra de –2, el valor –2 i un valor a la dreta. Per exemple, el –3, el –2 i el 0. Els marquem a la recta

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

X	–3	–2	0
És vàlid?	NO	SÍ	SÍ



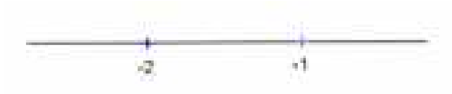
4. El domini és $[-2, +\infty)$ (l'infinit SEMPRE és obert, mai arribem).

Apartat b

1. Tenim dos possibles problemes. L'arrel quadrada de $x+2$ i el denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Hem d'igualar ELS DOS a zero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

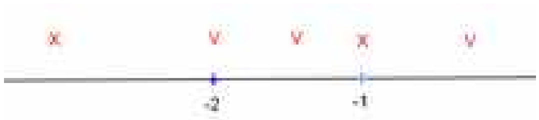
D'altra banda $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevant al quadrat $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representem a la recta els valors.



4. Hem de donar un valor a l'esquerra de –2, el valor –2, un valor entre –2 i –1, el valor –1 i un valor a la dreta del –1. Per exemple, el –3, el –2, el –1'5, el –1 i el 0. Els marquem a la recta

X	–3	–2	–1'5	–1	0
És vàlid?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ



5. El domini és $[-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Activitats proposades

5. Indica el domini de les funcions següents:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$

6. Indica el domini i el recorregut de les funcions següents:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa les següents funcions i indica el seu domini i recorregut:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x \in [-3,0) \\ 2, \text{ si } x \in [0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ si } x \in [-2,1] \\ x, \text{ si } x \in (1,2] \end{cases}$

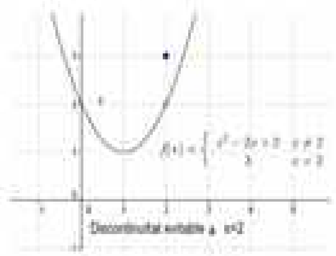
2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

Recorda que: En tercer ja vas estudiar les característiques d'una funció. És molt important. Per la qual cosa insistirem en això.

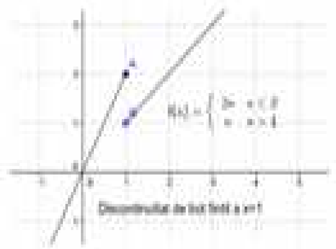
2.1. Continuïtat

Intuïtivament, una funció és contínua si la seua gràfica es pot dibuixar sense alçar el llapis del paper. En cas contrari, es produeixen "bots" o "salts" en determinats valors de la variable independent que reben el nom de discontinuïtats.

Una discontinuïtat pot ser de tres tipus:

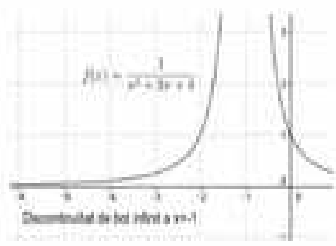


1. **Evitable**: En la funció només "no val" a un punt, en que "no està on hauria d'estar". Més formalment, si ens aproximem al punt per la dreta i per l'esquerra, ens aproximem a un valor que no és el de la funció. En aquest cas, la funció seria contínua sense més que canviar la definició de la funció al punt que ens dóna problemes.



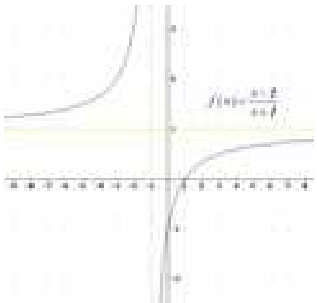
2. **De salt finit:** En un punt, la funció té dues branques diferents de dreta i esquerra del punt. Aquestes branques s'aproximen a valors distints (però finits) per a cada costat. El punt de discontinuïtat pot estar en una qualsevol de les branques o inclús fora d'elles. Dóna el mateix, la discontinuïtat continua sent de salt finit.

3. **De salt infinit:** Com a salt finit, en un punt la funció té dues branques diferents. Però en aquest cas, almenys una de les dues branques (possiblement les dos) es fa immensament gran o immensament negativa (en termes més informals "se'n va a infinit").

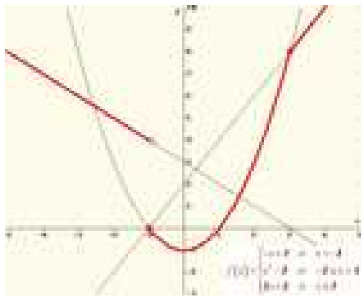


Activitats resoltes

- *Indica en aquestes funcions el/els valor/s de la variable independent on es produeix la discontinuïtat i indica el tipus de discontinuïtat.*



Salt infinit en x = –1



Salt finit en x = –1

2.2. Monotonia: Creixement i decreixement, màxims i mínims

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Les següents definicions potser et resulten conegudes de 3º d'ESO.

Una funció és constant en un interval quan prenga el valor que prenga la variable independent, la dependent pren sempre el mateix valor. En símbols, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **estrictament creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la dependent. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **creixent (en sentit ampli)** en un interval si és estrictament creixent o constant. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2. Pot també dir-se que, en augmentar el valor de la variable independent, el valor de la dependent NO disminueix.

Una funció és **estrictament decreixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent disminueix també el de la dependent. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2.

Una funció és **decreixent (en sentit ampli)** en un interval si és estrictament decreixent o constant. En símbols $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, per a tot x_1 i x_2. Pot també dir-se que, en augmentar el valor de la variable independent, el valor de la dependent NO augmenta.

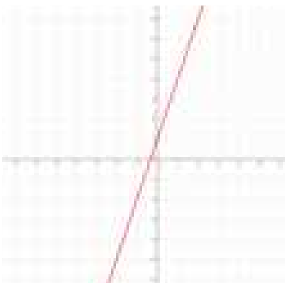
Una funció és **estrictament monòtona** en un interval quan és estrictament creixent o decreixent al dit interval.

Una funció és **monòtona (en sentit ampli)** en un interval quan és creixent o decreixent (en sentit ampli) al dit interval.

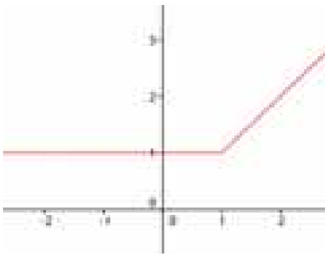
Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval, és a dir, per a un conjunt de nombres reals. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

Exemples:

- *En les funcions següents estudia el creixement i el decreixement.*



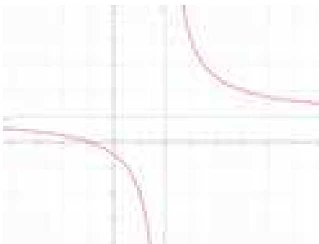
CREIXENT sempre



CONSTANT fins a x = 1

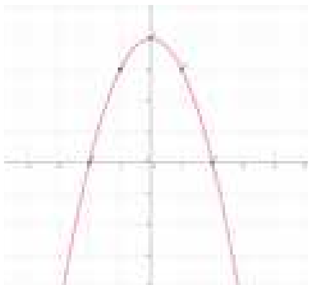
CREIXENT des de x = 1

CREIXENT(EN SENTIT AMPLI) sempre



DECREIXENT fins a x = 2

DECREIXENT des de x =2



CREIXENT fins a x=0

DECREIXENT des de x = 0

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

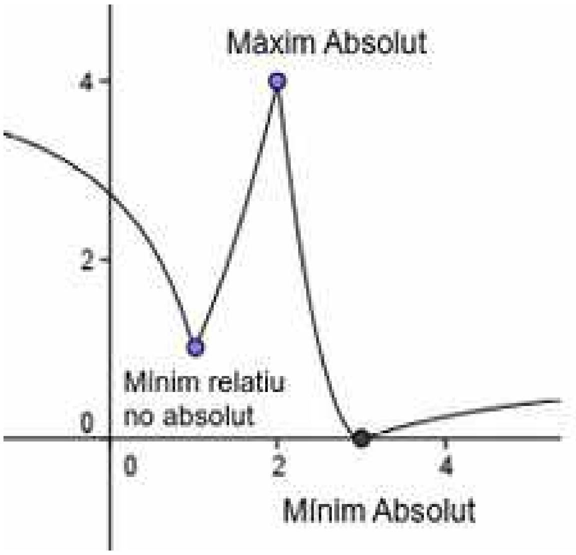
Extrems: màxims i mínims

Una funció presenta un **màxim relatiu** en un punt quan la imatge de la funció al dit punt és major que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, la imatge és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **màxim absolut** a ell.

Una funció presenta un **mínim relatiu** en un punt quan la imatge de la funció al dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, la imatge és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **mínim absolut** a ell.

Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** en el dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.

Exemple:

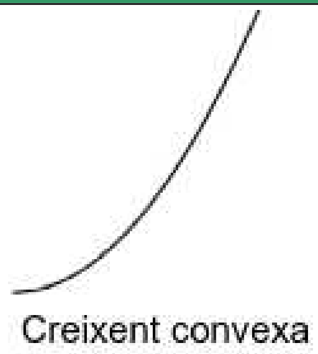
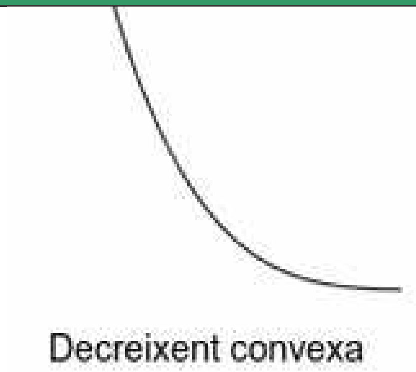
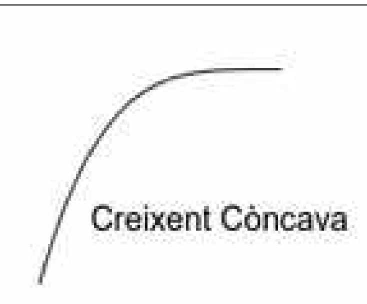
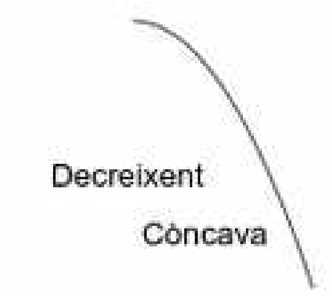


Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

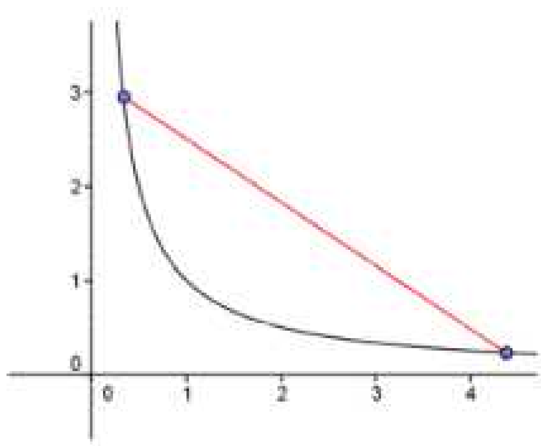
2.3. Curvatura: concavitat, convexitat i punts d’inflexió

Una funció és **convexa** si en unir dos punts de la seua gràfica el segment queda per damunt de dita gràfica. Es diu **còncava** si en fer la mateixa operació queda per davall. Un punt on es canvia de còncava a convexa o viceversa s’anomena **punt d’inflexió**.

Una imatge val més que mil paraules. Així que dibuixarem els quatre tipus de funcions que tenim:

	Creixent	Decreixent
Convexa		
Còncava		

Pots comprovar fàcilment que es compleix la definició. Si uneixes dos punts, el segment que formen està per damunt o per davall de la gràfica, segons correspon. Ací a la dreta pots veure un exemple amb un tram decreixent i convex. Observa com el segment queda per damunt de la gràfica de la funció.



2.4. Simetries.

Una **funció parell** és aquella en què s'obté el mateix en substituir un nombre i el seu oposat:

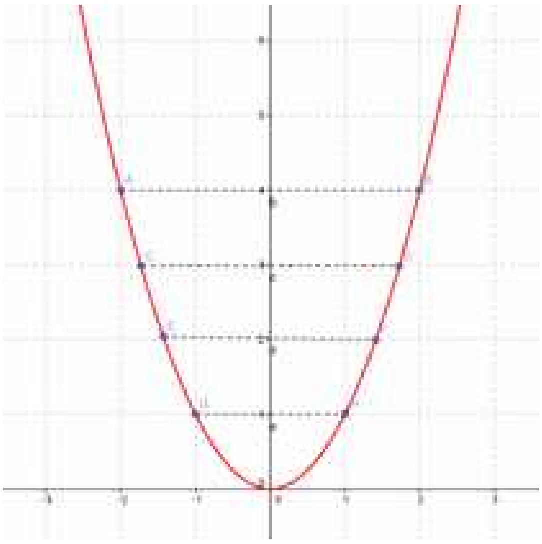
$$f(-x) = f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és simètrica respecte a l'eix d'ordenades, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

Exemple:

- *La funció quadràtica* $f(x) = x^2$ *és parell:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el contrari en substituir un nombre i el seu oposat:

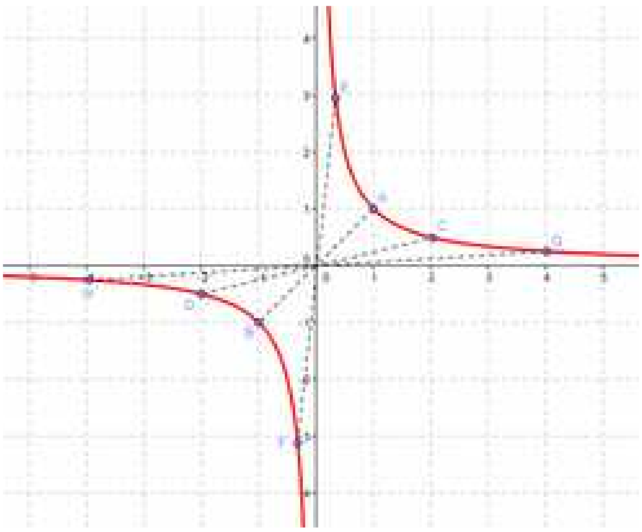
$$f(-x) = -f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és simètrica respecte a l'origen de coordenades, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-lo cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:

La funció de proporcionalitat inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ és imparella perquè:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$



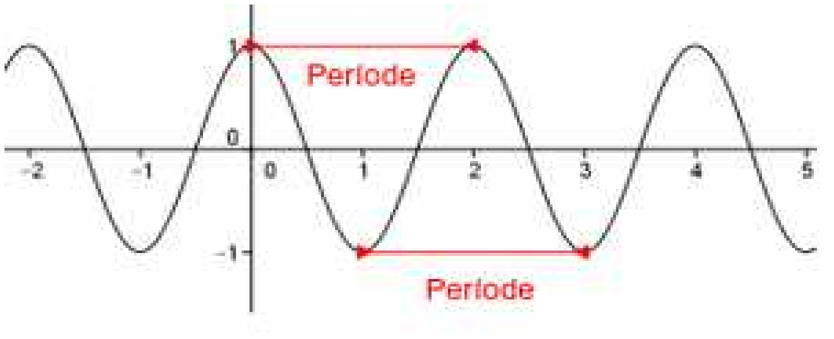
Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

2.5. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què les imatges de la funció es repeteixen conforme se li afig a la variable independent una quantitat fixa, anomenada *període.*

Exemple:

És molt clar que la següent funció és periòdica de període 2. Observa que el període es pot mesurar entre dos "pics" o entre dos "valls". De fet es pot mesurar entre dos punts equivalents qualssevol.



2.6. Comportament a l'infinit

L'infinit és, per pròpia definició, inabastable. Però ens diu molt d'una funció saber com és per a valors molt grans. Per això, es recomana, en dibuixar una gràfica, donar un valor (o diversos) positiu molt gran i un valor (o diversos) molt negatiu.

En algunes funcions simplement ocorre que obtenim valors molt grans i "ens eixim de la taula". Açò simplement ens dóna una idea de cap a on va la funció.

Però en altres, i açò és l'interessant, ens aproximem a un nombre finit. Això significa que, per a valors molt grans de *x*, la funció és aproximadament una recta horitzontal. Aquesta recta s'anomena asímptota.

Activitat resolta

- *Dibuixa la funció* $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *donant valors molt grans i molt negatius.*

Donem valors molt grans i veiem que ens aproximem a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\; f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,\; f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1'000001$$

Si donem valors molt negatius, passa el mateix:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\; f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1'0001,$$

$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1'000001$$

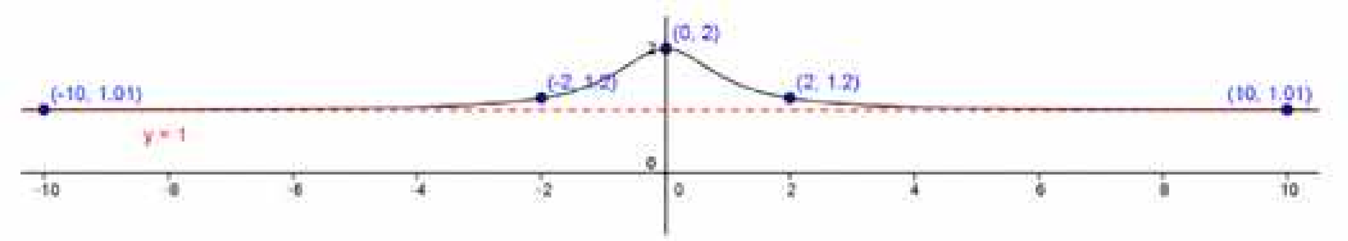
Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Podríem haver vist directament que els valors serien els mateixos perquè la funció és clarament parell $f(-x) = f(x)$ i per tant $f(-10) = f(10)$, $f(-100) = f(100)$ etc.

Això ens dóna una idea que la recta a què ens aproximem (asímptota) és la recta horitzontal y = 1.

Donarem uns valors més i dibuixem la funció. Els valors negatius són iguals que els positius. Hem arrodonit 1'0099 a 1'01

x	–10	–2	0	2	10
y	1'01	1'2	2	1'2	1'01



Observa la línia horitzontal que és l'asímptota dibuixada en roig a traços.

1.7. Recopilatori

Repassarem el que hem vist fins ara i com utilitzar-ho per a les dues qüestions més importants d'aquest capítol.

Com dibuixar una funció

Dibuixar una funció és essencialment unir punts. Anem, de totes les maneres, a repassar els diferents casos.

1. El primer lloc, mirem si la funció està definida per una taula o per una expressió. Si és una taula no hi ha res a fer més que dibuixar i (si tenen sentit els valors intermedis) unir els punts que ens donen i hem acabat. Passem en aqueix cas al pas 2.
2. Si està definida a trossos, donem el punt o punts on canvia la definició i alguns punts pròxims. Típicament el punt crític +0'1 i –0'1. Per exemple, si canvia en 1, donaríem 1, 0'9 i 1'1.
3. En general, intentem donar un valor molt gran i un altre negatiu, molt gran en valor absolut. Si veiem que s'estabilitza, els posem, és una asímptota.
4. Donem dues o tres punts més qualssevol.
5. Unim els punts (si tenen sentit els valors intermedis).

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Activitats proposades

8. Indica el domini i recorregut de les següents funcions i dibuixa-les:

a. $\frac{1}{2x+6}$ b. $x+\frac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

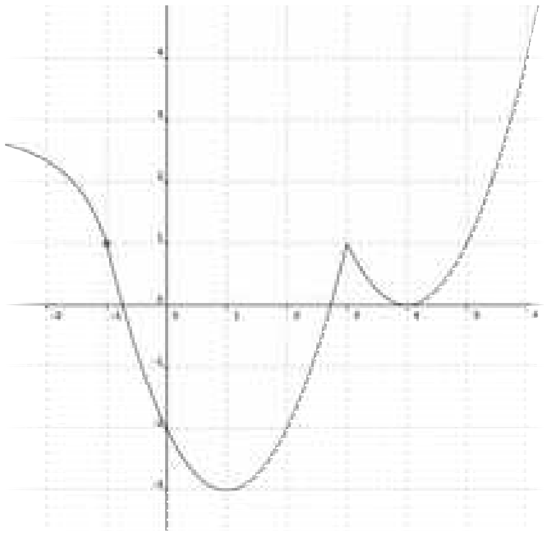
Com descriure una funció

Si ens donen la gràfica d'una funció i ens demanen descriure-la, és senzill:

1. Mirem els valors de *x on* canvia el comportament.
2. Descrivim cada un dels trams
3. Descrivim els màxims i mínims indicant si són relatius o absoluts.

Activitat resolta

- *Descriure la funció*



El primer, la funció és contínua. Els punts on "passa quelcom" són $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ i $x = 4$. Passem a descriure els trams:

A (–∞, –1) decreixent còncau. A (–1, 1) decreixent convex. A (1, 3) creixent convex. A l'interval (3, 4) decreixent convex. A (4, +∞) creixent convex.

De vegades es posa separat el creixement i la curvatura:

Creixent a (1, 3) ∪ (4, +∞)

Decreixent a (–∞, 1) ∪ (3, 4)

Còncava a $(-\infty, -1)$. Convexa a (–1, 3) ∪ (3, +∞)

Finalment hi ha un màxim relatiu en $x = 3$. Hi ha mínims relatius en $x = 1$ i $x = 4$. No hi ha màxim absolut i en $x = 1$ hi ha un mínim absolut.

No hi ha asímptotes. Quan *x* es fa molt gran la *y* tendeix a +∞, i quan la *x* s'acosta a –∞ la *y* tendeix també a +∞.

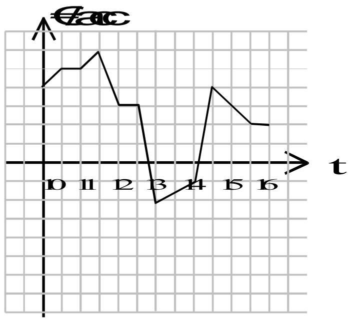
Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

Activitats proposades

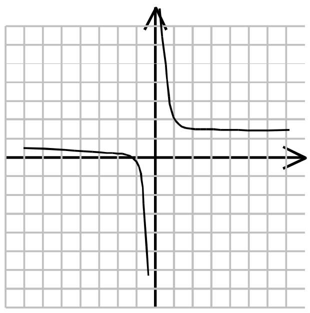
9. Dibuixa les següents funcions i indica els seus intervals de creixement i decreixement.

a) $i = x^3$ b) $\mathbf{i} = x^5$ c) $y = \dfrac{1}{x^2}$

10. La gràfica que es dóna a continuació indica l'evolució d'un valor de la borsa (a l'eix vertical en milers d'euros per acció) durant una jornada. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



11. Estudia la següent gràfica, indicant: domini, recorregut, punts de tall amb els eixos, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.



12. La gràfica que es dóna a continuació representa el volum de combustible en el dipòsit d'una gasolinera al cap d'un dia. Estudia el seu domini, recorregut, punts de tall, simetria, periodicitat, creixement, continuïtat, màxims i mínims.

1.7. Ampliació: Translacions

Amb el que hem vist anteriorment, ja podem dibuixar qualsevol funció. El que descriurem ara és una manera d'estalviar-nos treball en algunes ocasions.

De vegades, hem dibuixat una funció i ens demanen dibuixar una altra de similar. Per exemple, si estudiem un cos en caiguda lliure, l'espai recorregut és $y = \frac{1}{2}9'8x^2$. Però, si el cos ja havia recorregut un espai de 10 m, seria $y = 10 + \frac{1}{2}9'8x^2$. Si la volem dibuixar, en principi hauríem de tornar a donar tots els valors. Però, no podrem evitar-nos esforços i aprofitar la gràfica que JA tenim?

Sí, podem. Anem a veure-ho ara.

Translacions verticals.

Traslladar verticalment K unitats una funció *f*(*x*) és sumar-li a la variable dependent *y* = *f*(*x*) la constant K. En altres paraules, movem la funció cap amunt o baix.

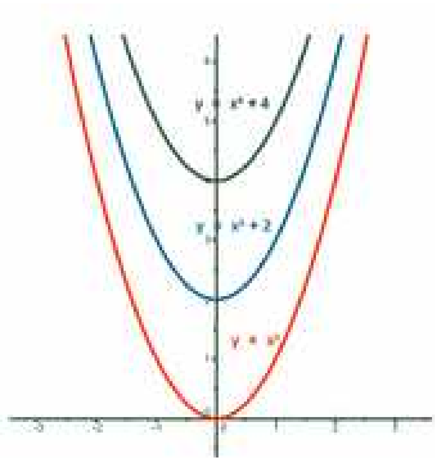
S'obté la funció: ***y* = *f*(*x*) + K**

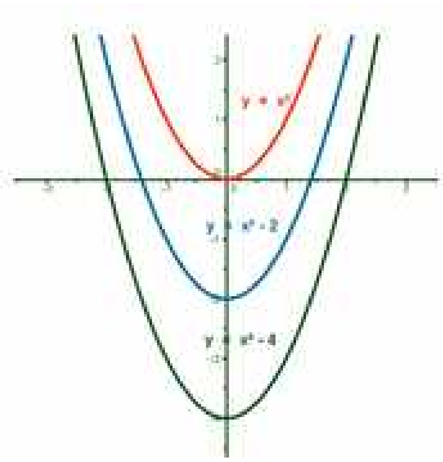
-Si K > 0 la funció es traslladа **cap amunt**.

-Si K < 0 la funció es trasllada **cap avall**.

Exemple:

Representa, mitjançant la realització prèvia d'una taula de valors, la funció $f(x) = x^2$. A continuació, mitjançant translació, la de les funcions $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 2$ i $f(x) = x^2 - 4$.





Translacions horitzontals.

Traslladar horitzontalment K unitats una funció *f*(*x*) és sumar-li a la variable independent *x* la constant K.

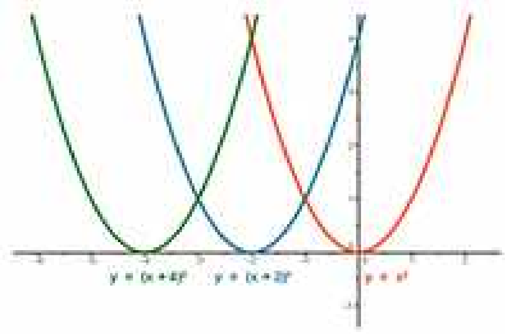
S'obté la funció *y* = *f*(*x* + K)

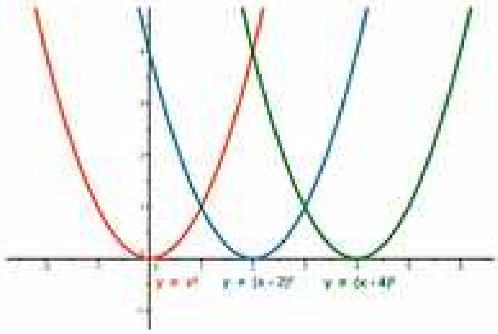
-Si K > 0 la funció es trasllada **cap a l'esquerra**.

-Si K < 0 la funció es trasllada **cap a la dreta.**

Exemple:

- *Representa les funcions* $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$, $f(x) = (x+4)^2$, $f(x) = (x-2)^2$ *i* $f(x) = (x-4)^2$.





Activitats proposades

13. Representa la funció $y = 10 + \frac{1}{2}9'8x^2$ que posàvem com a exemple i interpreta el seu sentit físic.

14. Representa gràficament les funcions següents:

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = 2 - x^2$ c) $y = 2x^2$ d) $y = -2x^2$

15. Representa gràficament les funcions següents:

a) $y = \frac{1}{x} + 5$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{x} - 2$ d) $y = \frac{2}{x} + 3$

16. Representa la funció $f(x) = 4 – x^2$ i, a partir d'ella, dibuixa les gràfiques de les funcions:

a) y = $f(x) – 3$ b) y = $f(x) + 3$ c) y = $f(x – 3)$ d) y = $f(x + 3)$

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

3. VALORS ASSOCIATS A LES FUNCIONS

Moltes vegades, ens interessa el comportament d'una funció en un valor concret i alguna mesura sobre ella. Per exemple, si considerem l'espai que recorre un cotxe, la qual cosa ens pot interessar no és tot el recorregut, sinó només la velocitat en passar junt amb un radar. Les mesures més importants anem a descriure-les ara.

3.1. Taxa de variació i taxa de variació mitjana (velocitat)

La **taxa de variació** d'una funció entre dos punts *a* i *b* és la diferència entre el valor de la funció per a *x*=*a* i el valor per a *x* = *b*. En símbols:

$$TV[a,b] = f(b) - f(a)$$

La **taxa de variació mitjana** (**velocitat mitjana**) d'una funció entre dos punts *a* i *b* és el quocient entre la taxa de variació entre els mateixos i la diferència *a* i *b*. En símbols:

$$TVM[a,b] = \frac{TVM[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Aquests conceptes poden parèixer estranys al principi. Però realment són coses que s'apliquen molt a la vida diària. Pensem en un cotxe que es mou. L'espai que recorre entre dos moments de temps és la taxa de variació. La velocitat mitjana al que els ha recorregut és la taxa de variació mitjana.

Activitat resolta

- *El cotxe en què circulem recorre 100 Km a 50 Km/h i després altres 100 Km a 100 Km/h. En conseqüència, l'espai recorregut ve donat per la funció* $f(t) = \begin{cases} 50t, & t \le 2 \\ 100 + 100(t-2), & t > 2 \end{cases}$. *Es demana:*

  1. Justificar la funció que dóna l'espai recorregut.
  2. Calcular i interpretar les taxes de variació TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2'5, 3]
  3. Calcular i interpretar les taxes de variació mitjanes TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2'5, 3]
  4. Per què la velocitat mitjana NO han sigut 75 Km/h, que és la mitjana de les velocitats?

Apartat 1.

Per a justificar la funció, només hem de recordar la superconeguda fórmula $e = vt$. L'única cosa que cal veure és quan canvia la velocitat.

Si el cotxe va a 50 km/h, òbviament en 2 h arriba als 100 km i canvia la velocitat. Fins aleshores, l'espai recorregut és 50*t* (velocitat per temps). A partir d'allí, seria 100(*t* – 2) ja que comptem el temps des de l'instant 2. A això se li ha de sumar l'espai ja recorregut, que són 100.

Apartat 2. La taxa de variació no és més que l'espai recorregut. N'hi ha prou amb aplicar la definició. Com ja hem dit abans, no ens ha de donar cap por les funcions definides a trossos. Simplement substituïm on corresponga i punt.

$TV[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100\cdot(3-2)] - 50\cdot 0 = 200$. Entre 0 i 3 hores hem recorregut 200 Km.

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50\cdot 2 - 50\cdot 1 = 50$. Entre 1 i 2 hores hem recorregut 50 Km.

$TV[2'5,3] = f(3) - f(2'5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2'5-2)] = 100 \cdot (3 - 2'5) = 50$. Hem recorregut 50 Km entre les 2’5 hores i les 3.

Apartat 3. La taxa de variació mitjana és el que en el llenguatge del carrer s’anomena velocitat (mitja). I per a calcular-la es divideix l’espai entre el temps, sense més.

Km/h. Entre 0 i 3 hores la nostra velocitat mitjana ha sigut de 66’67 Km/h, una mitja (ajustada pel temps) de les velocitats.

$TVM[1,2] = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 i 2 hores la nostra velocitat ha sigut de 50 Km/h, com plantejava de fet el problema.

$TVM[2'5,3] = \frac{f(3) - f(2'5)}{3 - 2'5} = \frac{50}{3-2'5} = 100$. Entre 2’5 i 3 hores la nostra velocitat ha sigut, com era d’esperar, de 100 Km/h

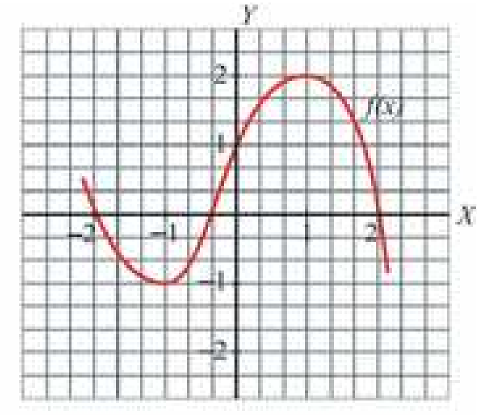
Apartat 4. Ja que hem passat més temps circulant a 50 Km/h que a 100 Km/h i per tant la nostra velocitat mitjana ha d’estar més prop de 50 que de 100.

Activitats proposades

17. Donada la funció $f(x) = (x-1)^3$, calcula la taxa de variació mitjana a l’interval [0, 1]. És creixent o decreixent la funció al dit interval?

18. Donada la funció $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la taxa de variació mitjana a l’interval [–3, –1]. És creixent o decreixent la funció al dit interval?

19. Calcula la TVM d’aquesta funció *f*(*x*) als intervals següents: a) [–1, 0] i b) [1, 2].



20. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Troba la taxa de variació mitjana a l’interval [0, 2] i indica si és creixent o decreixent a aqueix interval.

21. Troba la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 3x$ a l’interval [1, 2] i indica si *f*(*x*) creix o decreix a aqueix interval.

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

3.2. Taxa de creixement

"… l'afiliació al Règim General de la Seguretat Social, on hi ha 13,1 milions de treballadors, a penes va repuntar en 16.852 persones respecte a febrer del 2013, un 0,13 % més" (Diari El Món, edició digital, 04/03/2014).

Segur que has llegit (o vist a la tele) notícies com aquesta un muntó de vegades. La mesura que estan utilitzant és el que es coneix com la taxa de creixement. Procedirem a definir-la.

La **taxa de creixement** d'una funció entre dos punts *a* i *b* és el quocient entre la taxa de variació i el valor de la funció en *x* = *a*. En símbols: $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ o bé $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Se sol expressar en tant per cent, per la qual cosa normalment es multiplica per 100. Les fórmules passen a ser llavors $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100$ o $T_{Crec}[a,b]=\dfrac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100$

Si $f(a)$ = 0 la taxa de creixement **no està definida**. NO ES POT DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que la taxa de creixement pot ser negativa, indicant una disminució. Créixer al –5 % significa haver perdut el 5 %.

Exemple:

- *Comprovarem que en el periòdic han calculat bé la taxa de creixement.*

Els instants del temps no són importants. A l'instant inicial és $f(a)=13.100.000$ treballadors. A l'instant final cal sumar-li l'augment $f(b)=13100000+16852$ = 13.116.852.

Aplicant la fórmula

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100=\frac{13.116.852-13.100.000}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\,\%$$

que s'arrodoneix al 0'13 %. Està ben calculat.

Observa que la taxa de variació és 16852 per tant la podíem haver calculat directament amb l'altra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100=\frac{16852}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\,\%$$

i, òbviament, ix el mateix.

Activitats proposades

22. Donada la funció $f(x)=(x+1)^3$, calcula la taxa de creixement a l'interval [0, 1].

23. La funció $f(x)=1000\cdot(1'03)^x$ representa el resultat d'ingressar 1000 € en el banc (*x* = 0 és l'estat inicial i, naturalment, val 1000 €). Calcula la seua taxa de creixement entre 0 i 1, entre 1 i 2 i entre 2 i 3. Quina relació hi ha entre elles? Pots donar una explicació de per què?

24. La següent taula representa la població mundial (estimada) en milions de persones. Calcula la taxa de creixement per a cada interval de 5 anys. Què observes?

Any	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Població	3692	4068	4435	4831	5264	5674	6071	6456	6916

25. Podries donar un exemple d'una funció la taxa de creixement del qual siga constantment 2?

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

CURIOSITATS. REVISTA

Diu el premi Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:
"L'enorme utilitat de les Matemàtiques a les ciències naturals és quelcom que frega el misteri, i no hi ha explicació per a allò. No és en absolut natural que existisquen "lleis de la naturalesa", i molt menys que l'ésser humà siga capaç de descobrir-les. El miracle de com resulta d'apropiat el llenguatge de les Matemàtiques per a la formulació de lleis de la Física és un regal meravellós que no comprenem ni ens mereixem".
Les funcions s'han utilitzat per a fer models matemàtics de les situacions reals més diverses. Abans de l'època dels ordinadors les funcions que solien utilitzar-se eren les funcions lineals (que ja coneixes però que estudiaràs detingudament al pròxim capítol). Es *linealizaban* els fenòmens. En usar altres funcions, com per exemple paràboles poden complicar-se molt les coses. Inclús pot aparéixer el caos.

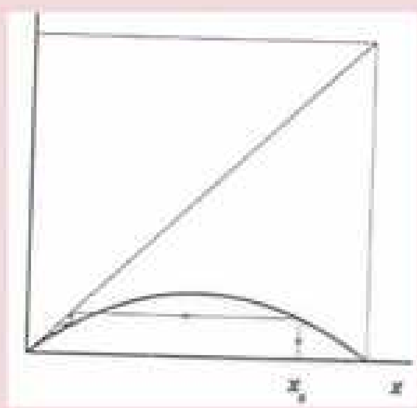
Saps què és el caos?

Estudiarem un exemple en què apareix el caos: **L'equació logística**. És un model matemàtic proposat per P. F. Verhulst en 1845 per a l'estudi de la dinàmica d'una població. Explica el creixement d'una espècie que es reprodueix en un entorn tancat sense cap tipus d'influència externa. Es consideren valors x entre 0 i 1 de la població. .

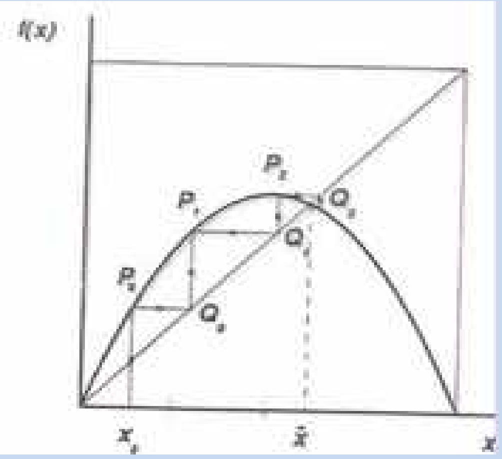
$$y = r(x(1 - x))$$

Si ens quedem amb el primer terme, $y = rx$ seria un model lineal, i ens indica el creixement de la població, però té un terme de segon grau que fa que siga un polinomi de segon grau. Si en algun moment $y = x$ la població es mantindrà sempre estable per a aqueix valor. Per exemple, si $x = 0$ llavors $y = 0$, i sempre hi haurà una població de grandària 0. Aquests valors que fan que $y = x$ es denominen **punts fixos**.
El comportament és distint segons els valors que prenga r. Per exemple, per a $r < 1$, s'extingeix l'espècie.

Dibuixem la paràbola per a $r = 0,9$. Imaginem que a l'instant inicial hi ha una població x_0. Busquem, tallant verticalment a la paràbola, el valor de y. Per a transformar-lo en el nou x, tallem a la diagonal del primer quadrant. Observa que la població cada vegada és menor i que va cap a l'extinció. Observa detingudament eixe procés de anar tallant a la paràbola i a la diagonal, per a tornar a tallar a la paràbola i així successivament.



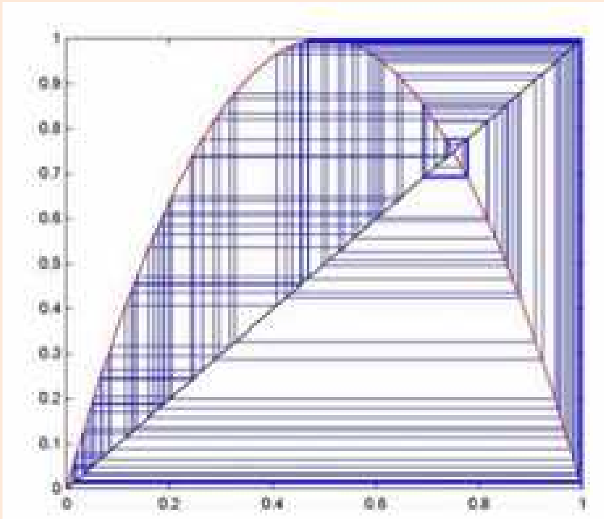
Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez



Per a valors de *r* compresos entre 1 i 3: 1 < *r* < 3, aleshores la població s'estabilitza, tendeix a un punt fix. Hem dibuixat la paràbola per a *r* = 2,5, i igual que abans partim d'un valor inicial qualsevol, en aquest cas x_0, que es converteix en $y = P_0$. Eixe valor el prenem com abscissa: $x = Q_0$, i calculem el nou valor de $y = P_1$... Observa com la població s'estabilitza cap a el valor d'intersecció de la parábola amb la diagonal.

Per a valors entre 3 i 3,56994546 les coses comencen a complicar-se, fins que …

Per a *r* major o igual a 3,56994546 tenim sensibilitat extrema a les condicions inicials, tenim **caos**. No sabem què pot ocòrrer. La població canvia constantment. I eixe comportament tan erràtic és per a una funció polinòmica de segon grau!

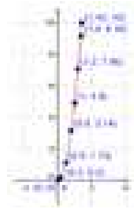
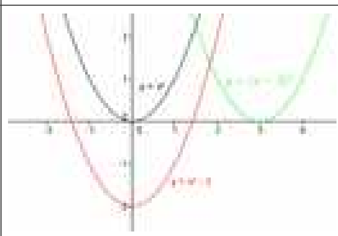


El terme **caòtic** va a indicar que punts pròxims a l'instant inicial poden tindre comportaments diferents al futur.

El meteoròleg americà *Edward N. Lorenz* va utilitzar el terme d'efecte **palometa** per a explicar per què el temps atmosfèric no és predicible a llarg termini, és a dir per a explicar que hi ha una dependència sensible a les condicions inicials: *"L'aleteig d'una **palometa** a Brasil pot provocar un tornado a Texas?"*
Ho havies sentit?

Aquest és un exemple de caos dibuixat amb l'ordinador. Hi ha 5 òrbites ben definides, però un punt de la frontera entre òrbites no sabem en quina acabarà.

RESUM

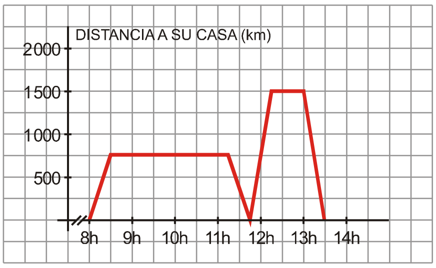
<table>
<tr><th></th><th></th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Funció</td><td>Una relació o correspondència entre dues magnituds, tals que a cada valor de la variable independent, x, li correspon un sol valor de la dependent, y.</td><td>$y = 2x + 3$, $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$</td></tr>
<tr><td>Gràfica d'una funció</td><td>Són els (normalment infinits) punts pels quals passa. És a dir, tots els valors $(x, f(x))$ ja que y = f(x).</td><td></td></tr>
<tr><td>Maneres de descriure una funció.</td><td>- Donant una taula de valors. Com en la columna del costat
- Donant una expressió. $y = 2^x$
- A trossos: Diverses expressions.
$$y = \begin{cases} x + 1, x > 2 \\ x, x \le 2 \end{cases}$$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>–3</td><td>2</td></tr><tr><td>–2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Domini i recorregut.</td><td>- Domini. Són els valors de "x" on la funció tinga sentit.
- Recorregut. Són els valors de "y" que s'aconsegueixen.</td><td>El domini de la funció $\sqrt{2 - x}$ és $(-\infty, 2)$ i el seu recorregut $[0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>Característiques d'una funció</td><td>Hem d'estudiar la seua continuïtat, creixement, màxims i mínims, curvatura, simetries i comportament en l'infinit.</td><td>$y = x^2 + 2$ és contínua, creixent en $(-\infty, 0)$, decreixent en $(0, \infty)$, té un mínim absolut en 0 i és sempre convexa</td></tr>
<tr><td>Translacions</td><td>- Vertical. y = f(x) + K. En sentit de K: Si K és positiu cap amunt, si no cap avall.
- Horitzontal. y = f(x + K). En sentit contrari de K: Si K és positiu cap a l'esquerra, si no cap a la dreta.</td><td></td></tr>
<tr><td>Valors associats</td><td>- Taxa de variació (TV): $f(b) - f(a)$
- Taxa de variació mitjana (TVM):
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- Taxa de creixement T_{crec}: $\dfrac{f(b) - f(a)}{f(a)}$</td><td>$y = x + 2$
$TV[3,5] = 2$
$TVM[3,5] = \dfrac{2}{5 - 3} = 1$
$T_{crec}[3,5] = \dfrac{2}{5} = 40\%$</td></tr>
</table>

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Pau va eixir de sa casa a les 8 del matí per a anar a l'institut. Al pati, va haver de tornar a sa casa per a anar amb son pare al metge. La següent gràfica reflecteix la situació:

a. A quina hora comencen les classes i a quina hora comença el pati?
b. A quina distància de sa casa està l'institut? Quina velocitat porta quan va a classe?
c. A quina distància de sa casa està el consultori mèdic? Quina velocitat porten quan es dirigeixen allí?
d. Quant temps ha estat en classe? I al consultori mèdic?

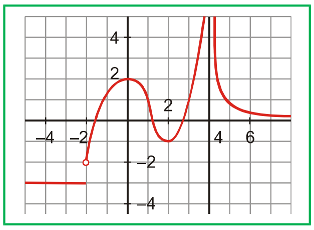


2. Donada la funció a través de la següent gràfica:

a) Indica quin és el seu domini de definició.

b) És contínua? Si no ho és, indica els punts de discontinuïtat.

c) Quins són els intervals de creixement i quins els de decreixement de la funció? Què ocorre a l'interval $(-\infty, -2]$?



3. Dibuixa les gràfiques d'aquestes hipèrboles i determina els seus dominis, calcula les seues asímptotes i els punts de tall amb els eixos de coordenades:

a. $y = \dfrac{2x}{x-2}$ b. $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ c. $y = \dfrac{4x}{2x+1}$

4. Dibuixa la gràfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x & si \quad 1 < x \end{cases}$ i explica si és contínua en $x = 1$.

5. Tres quilos de peres ens han costat 4,5 €; i, per set quilos, hauríem pagat 10,5 €. Troba l'equació de la recta que ens dóna el preu total, "y", en funció dels quilos que comprem, "x". Representa-la gràficament.

6. Descriu les següents funcions quadràtiques i fes un esbós de la seua gràfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula els punts de tall amb els eixos i el vèrtex de les següents paràboles i utilitza aquestes dades per a representar-les gràficament.

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. L'altura sobre el sòl d'un projectil llançat des de l'alt d'una muralla ve donada, en funció del temps, per $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, on t s'expressa en segons, i h, en metres. Dibuixa la gràfica d'aquesta funció i calcula:

a. L'altura de la muralla.

b. L'altura màxima aconseguida pel projectil i el temps que tarda a aconseguir-la.

c. El temps que tarda a impactar contra el sòl.

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez

9.

10.

11.

12.

13. .

a) E

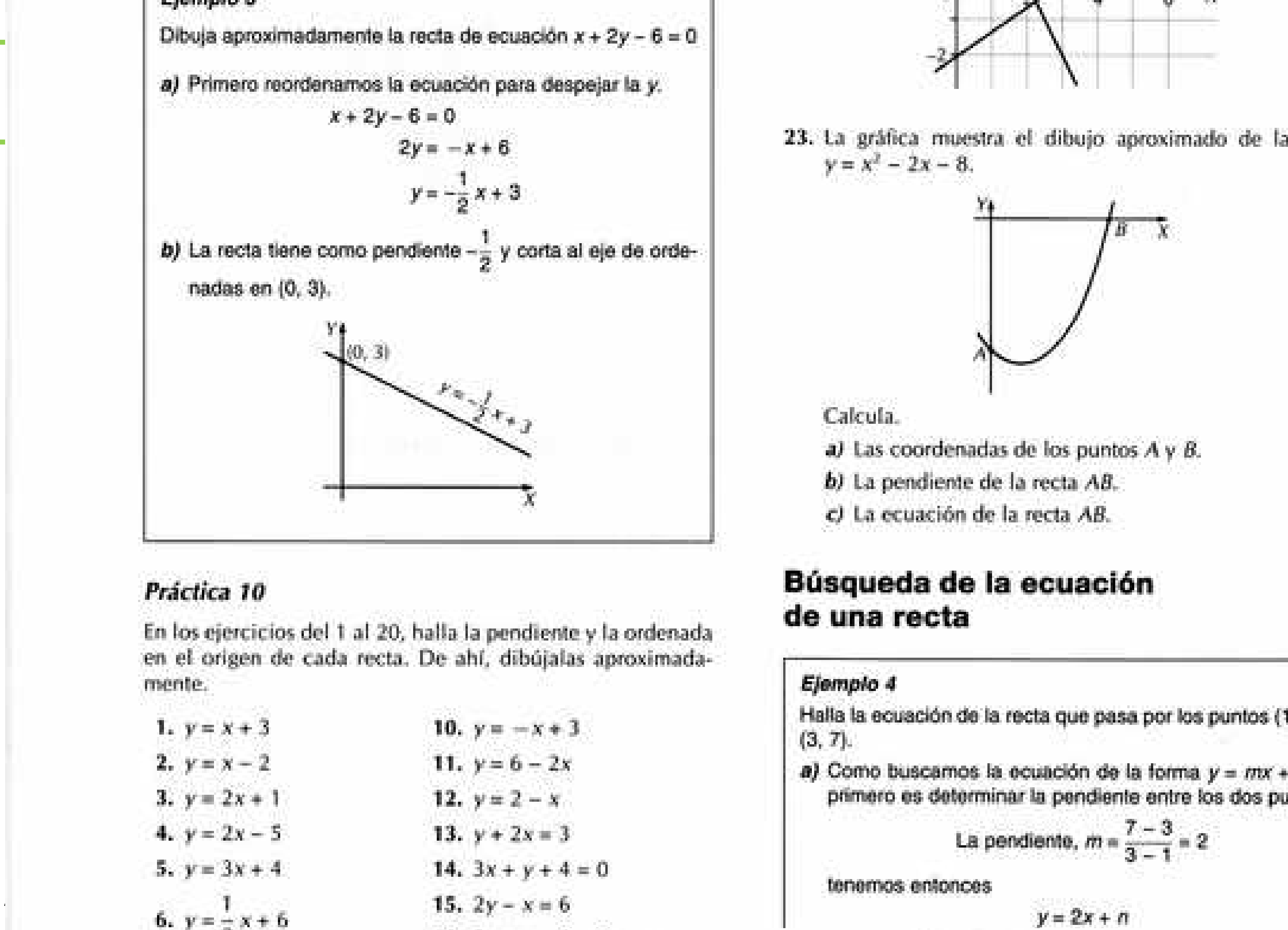
b) A

cam

c) Fe

d) I:

l'últ



Ejemplo 3

Dibuja aproximadamente la recta de ecuación $x + 2y - 6 = 0$

a) Primero reordenamos la ecuación para despejar la *y*.

$$x + 2y - 6 = 0$$
$$2y = -x + 6$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

b) La recta tiene como pendiente $-\frac{1}{2}$ y corta al eje de ordenadas en (0, 3).

Práctica 10

En los ejercicios del 1 al 20, halla la pendiente y la ordenada en el origen de cada recta. De ahí, dibújalas aproximadamente.

1. $y = x + 3$
2. $y = x - 2$
3. $y = 2x + 1$
4. $y = 2x - 5$
5. $y = 3x + 4$
6. $y = \frac{1}{2}x + 6$
7. $y = 3x - 2$
8. $y = 2x$
9. $y = \frac{1}{4}x - 4$
10. $y = -x + 3$
11. $y = 6 - 2x$
12. $y = 2 - x$
13. $y + 2x = 3$
14. $3x + y + 4 = 0$
15. $2y - x = 6$
16. $3y + x - 9$
17. $4x - y = 5$
18. $3x - 2y =$
19. $10x - y =$
20. $y - 4 = 0$

14 Gráficas y álgebra

23. La gráfica muestra el dibujo aproximado de la $y = x^2 - 2x - 8$.

Calcula.

a) Las coordenadas de los puntos *A* y *B*.

b) La pendiente de la recta *AB*.

c) La ecuación de la recta *AB*.

Búsqueda de la ecuación de una recta

Ejemplo 4

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1 (3, 7).

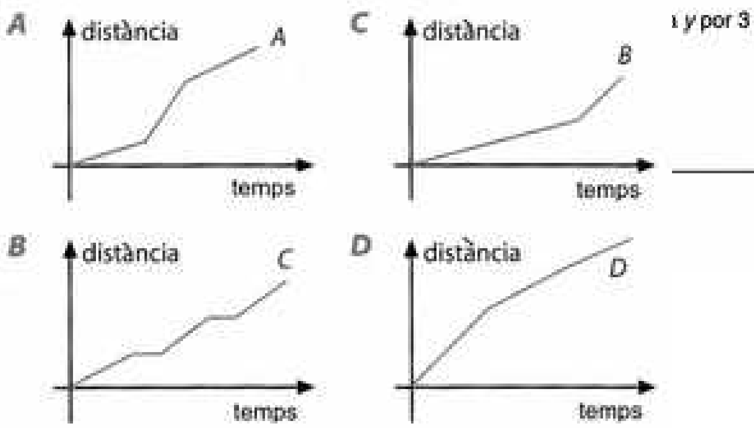
a) Como buscamos la ecuación de la forma $y = mx +$ primero es determinar la pendiente entre los dos pu

La pendiente, $m = \frac{7-3}{3-1} = 2$

tenemos entonces

$$y = 2x + n$$

y por 3



prop de l'Institut.

14. Un rectangle té un perímetre de 14 cm. Suposant que la base del mateix té una longitud de *x* cm,

a. Provar que l'àrea del mateix *A* està donada per la funció $A(x)=x(7-x)$.

b. Dibuixa la gràfica corresponent a aquesta funció, prenent per a això valors de *x* de 0 a 7. Utilitzant la gràfica, calcula els següents apartats.

c. L'àrea del rectangle quan $x=2{,}25\ cm$.

d. Les dimensions del rectangle quan la seua àrea és 9 cm^2.

e. L'àrea màxima del rectangle.

f. Les dimensions del rectangle corresponents a aqueixa àrea màxima.

15. La velocitat *v* en m/s d'un míssil *t* segons després del seu llançament ve donada per l'equació $v=54t-2t^3$. Utilitzant la gràfica d'aquesta funció, calcula:

a. La màxima velocitat que aconsegueix el míssil.

b. El temps que necessita per a accelerar fins a aconseguir una velocitat de 52 m/s.

c. L'interval (aproximat, resol gràficament) de temps en el qual el míssil vola a més de 100 m/s.

16. El preu del viatge de fi de curs d'un grup d'alumnes és de 200 euros per persona si van 30 alumnes o menys. En canvi, si viatgen més de 30 i menys de 40, rebaixen un 5 % per cada alumne que sobrepasse el nombre de 30, i si viatgen 40 o més, el preu per persona és de 100 euros. Troba l'expressió i dibuixa la gràfica de la funció que fa correspondre al nombre de viatgers el preu del viatge.

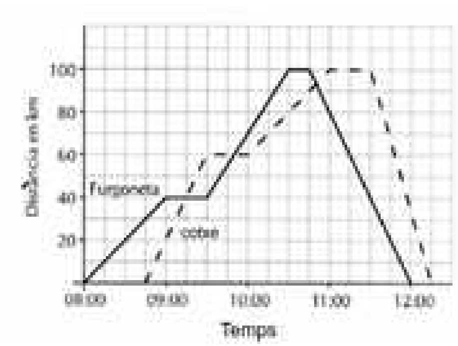
17. Troba el domini de les funcions següents:

a. $y = \dfrac{5x - 3}{4x - 1}$ c. $y = \sqrt{3x + 6}$ e. $y = \dfrac{4x^2 - 3x}{1 + 5x - 6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \dfrac{3}{x^2 - 3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

18. La següent gràfica mostra els viatges fets per una furgoneta i un cotxe eixint des de Terol cap a la població d'Alcanyís, anada i tornada.

a. Quant temps es va detindre la camioneta durant el trajecte?
b. A quina hora va avançar el cotxe a la furgoneta?
c. Quina velocitat portava la furgoneta entre les 9:30 i les 10:00?
d. Quin va ser la major velocitat aconseguida pel cotxe durant el viatge?
e. Quina va ser la velocitat mitjana del cotxe en el viatge complet?



19. Representa gràficament la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x < -2 \\ \dfrac{-1}{2}x^2 & si \quad -2 \le x \end{cases}$$

. Una vegada representada estudia les zones de creixement i decreixement, els extrems (màxims-mínims) i la seua continuïtat.

20. Representa gràficament una funció, *f*, que complisca les condicions següents:

a. Dom (*f*) = [–5, 6]
b. Creix als intervals (–5, –3) i (0, 6); decreix a l'interval (–3, 0).
c. És contínua al seu domini.
d. Talla a l'eix X als punts (–5, 0), (–1, 0) i (4, 0).
e. Té un mínim a (0, –2) i màxims a (–3, 3) i (6, 3).

21. Construeix una gràfica que represente l'audiència d'una determinada cadena de televisió durant un dia, sabent que:

a. A les 0 hores hi havia, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.
b. Aquest nombre es va mantindre pràcticament igual fins a les 6 del matí.
c. A les 7 del matí va aconseguir la xifra de 1'5 milions d'espectadors.
d. L'audiència va descendir novament fins que, a les 13 hores , hi havia 1 milió d'espectadors.
e. Va anar augmentant fins a les 21 hores, moment en què va aconseguir el màxim: 6'5 milions d'espectadors.
f. A partir d'aqueix moment, l'audiència va ser descendint fins a les 0 hores, que torna a haver-hi, aproximadament, 0'5 milions d'espectadors.

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina de les següents expressions algebraiques és una funció real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estem confeccionant una taula de valors de la funció $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica quin punt no hauria d'estar a la taula:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. El domini de la funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ *és*:

a) La recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipus de discontinuïtat o continuïtat presenta la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ al punt $x = 1$:

a) És contínua b) Té una discontinuïtat evitable

c) Té un salt finit de grandària 2 d) Té un salt infinit

5. Assenyala la funció que té simetria parell:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

6. Assenyala la funció que té com a asímptota horitzontal a la recta y = 1:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$

7. La taxa de variació de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. La taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

9. La taxa de creixement de la funció $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2,1] \\ x, & si\ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 i 2 és igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] = 0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. La funció $y = x^2 + 3$ té un mínim absolut al punt:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

Autors: Andrés García i Javier Sánchez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Andrés García i Javier Sánchez