Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 8: TRIGONOMETRIA

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Mª Fernanda Ramos Rodríguez y

Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF,

Mª Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Etimològicament *trigonometria* significa *mesurament de triangles*. El seu objectiu és establir les relacions matemàtiques entre les mesures dels costats d'un triangle amb les amplituds dels seus angles, de manera que resulte possible calcular les unes mitjançant les altres.

Els primers escrits relacionats amb ella que apareixen a la història es remunten a l'època babilònica de què es conserven uns llistons amb mesuraments de costats i angles de triangles rectangles. La trigonometria s'aplica des dels seus orígens en agrimensura, navegació i astronomia ja que permet calcular distàncies que és impossible obtindre per mesurament directe.

Inscripció babilònica. Museu Pèrgam de Berlín

En aquest capítol estudiaràs les primeres definicions trigonomètriques i coneixeràs algunes de les seues aplicacions.

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

1. SISTEMES DE MESURA D'ANGLES

1.1. Sistema sexagesimal

Recordaràs que al sistema sexagesimal de mesura d'angles, la unitat és el **grau sexagesimal** que es defineix com la part de circumferència que queda en dividir per tres-cents seixanta un angle complet. Té dos divisors que són el **minut** que és dividir un grau en seixanta parts i el **segon** que és dividir un minut en seixanta parts. Recorda la notació que s'empra en aquest sistema:

1º = 1 grau sexagesimal; 1´ = 1 minut sexagesimal; 1´´ = 1 segon sexagesimal.

Com a conseqüència de la definició:

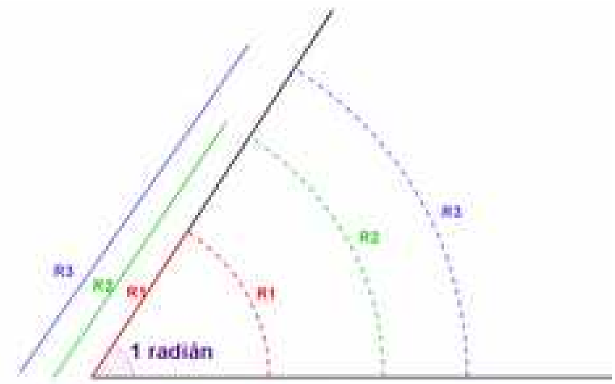
1 angle complet = 360 º; 1 º = 60 ´; 1 ´ = 60 ´´.

1.2. Sistema internacional

Al sistema internacional, la unitat de mesura d'angles és el **radian.**

El **radian** és un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo.

Es denota per **rad.**



A un angle complet li correspon un arc de longitud 2πR, a un radian un arc de longitud R, llavors:

Nr de radians d'un angle complet = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad**

I la relació amb el sistema sexagesimal l'obtenim a partir de l'angle complet:

1 angle complet = 360 º = 2π rad ⇔ 1 angle pla = 180 º = π rad

Per aquesta relació s'obté que 1 rad ≅ 57, 216 º ≅ 57 º 12 ´ 58 ´´.

Activitats proposades

1. Expressa en radians les mesures següents: 45 º, 150 º, 210 º, 315 º.

2. Expressa en graus sexagesimals: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ i $\frac{3\pi}{8}$ radians.

3. Dos angles d'un triangle mesuren respectivament 40 º i $\frac{\pi}{3}$ radians. Calcula en radians el que mesura el tercer angle.

4. Un angle d'un triangle isòsceles mesura $\frac{5\pi}{6}$ radians. Calcula en radians la mesura dels altres dos.

5. Dibuixa un triangle rectangle isòsceles i expressa en radians la mesura de cada un dels seus angles.

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

2. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE AGUT

2.1. Raons trigonomètriques directes d'un angle agut

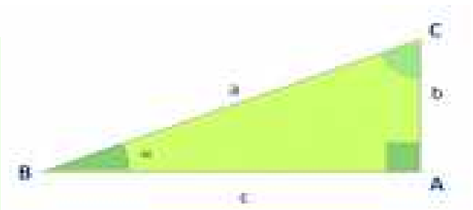
Comencem per considerar un angle agut qualsevol, utilitzarem una lletra grega α (alfa) per a denotar-lo. És sempre possible construir un triangle rectangle de manera que α siga un dels seus angles. Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un d'aquests triangles i situem al vèrtex *B*, l'angle α.

Es defineixen les raons trigonomètriques directes de l'angle α: sinus, cosinus i tangent com:

$$sinus\ \ de\ \ \alpha = sin\,\alpha = sin\,\hat{B} = \frac{catet\ \ oposat}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cosinus\ \ de\ \ \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{catet\ \ adjacent}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tangent\ \ de\ \ \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{catet\ \ oposat}{catet\ adjacent} = \frac{b}{c}$$

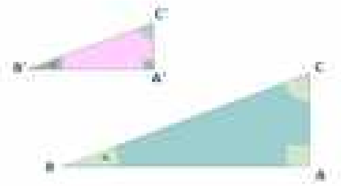


També s'utilitzen les expressions tg α i tag α com a símbols de la tangent de α.

Aquesta definició no depén del triangle triat. Anem a demostrar-ho. Per a això considerem un altre triangle rectangle $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ amb α al vèrtex *B´*.

Sovint s'anomenen els angles d'un triangle amb la mateixa lletra majúscula que el vèrtex corresponent.

Segons el segon criteri de semblança de triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són semblants perquè tenen dos angles iguals 90º i α. Per tant els costats d'ambdós són proporcionals:



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'} \Rightarrow \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'} \Rightarrow \\ \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'} \Rightarrow \end{cases}$$

El sinus és indepent del triangle en què és mesure

El cosinus és indepent del triangle en què és mesure

La tangent és indepent del triangle en què és mesure

Activitats resoltes

- *Calcula les raons trigonomètriques dels angles aguts d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els catets de les quals mesuren b = 30 cm i c = 40 cm.*

Calculem en primer lloc el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow$

$a = \sqrt{2500} = 50$ cm. $\quad \sin\hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ; \ \cos\hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \ ; \ \tan\hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

$$\sin\hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \ ; \ \cos\hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ; \ \tan\hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} .$$

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

2.2. Relacions fonamentals

Si coneixem una de les raons trigonomètriques de l'angle α, és possible calcular les raons trigonomètriques restants, gràcies a les dues relacions trigonomètriques fonamentals següents:

PRIMERA RELACIÓ FONAMENTAL:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

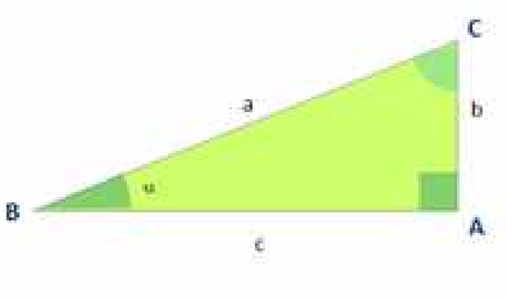
que també veuràs escrita com a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ atés que les potències de les raons trigonomètriques solen escriure's amb el seu exponent sobre la ultima lletra de la seua notació i a continuació el nom de l'angle

La demostració és senzilla. Tornem al triangle inicial del paràgraf anterior:

Pel teorema de Pitàgores $a^2 = b^2 + c^2$

Dividim a ambdós membres entre a^2:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{a} \\ \cos\alpha = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$$



SEGONA RELACIÓ FONAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Al mateix triangle anterior:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b \cdot a}{c \cdot a} = \frac{b}{c} = \tan\alpha$$

Activitats resoltes

- *Sabent que α és un angle agut, calcula les restants raons trigonomètriques de α als casos següents: a)* $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ *b)* $\tan\alpha = 3$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) $\left.\begin{array}{r} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ \sin\alpha=3\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow 10\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

per tant: $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

2.3. Altres raons trigonomètriques. Altres relacions

Altres raons trigonomètriques d'un angle α són la cosecant, la secant i la cotangent de α i les seues notacions són *cosec* α, *sec* α, *cotan* α.

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad ; \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad ; \quad \operatorname{cotan}\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad .$$

Amb la seua definició, apareixen noves identitats trigonomètriques, entre les que destaquen:

a) $\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1 \quad ; \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1 \quad ; \quad \tan\alpha\cdot\operatorname{cotan}\alpha=1 \quad .$

b) $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$

c) $\operatorname{cosec}^2\alpha=1+\operatorname{cotan}^2\alpha$

La primera d'elles és evident per definició. La segona i la tercera tenen una demostració molt pareguda per la qual cosa trobaràs només una de les dues i l'altra com a activitat proposada

Demostració b):

A partir de $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, dividim a ambdós membres entre $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

Activitats proposades

6. Sabent que $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, calcula els raons trigonomètriques secant, cosecant i cotangent de α.

7. Si *cotan* α = 2, calcula les cinc raons trigonomètriques de l'angle α.

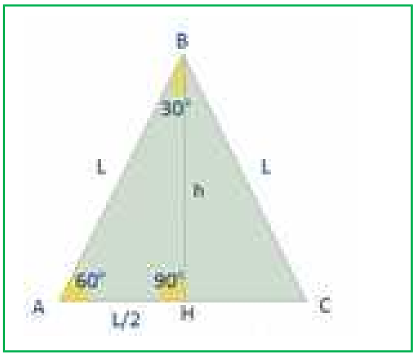
8. Demostra que $cosec^2\,\alpha = 1 + cotan^2\alpha$

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

2.4. Raons trigonomètriques de 30º, 45º i 60º.

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 30º I 60 º

Considerem un triangle equilàter de costat *L*. Tracem l'altura corresponent al costat sobre el qual es recolza. Amb això queda dividit en dos triangles rectangles iguals els angles del qual mesuren 90 º, 30 º i 60 º. A més la hipotenusa mesura *L* i un dels seus catets L/2. Pel teorema de Pitàgores podem obtindre el que ens falta:



$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculem les raons trigonomètriques de 30º i 60 º al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$\sin 60º = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\ L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\ L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin 30º = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60º = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30º = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\ L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\ L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60º = h : \frac{L}{2} = \frac{2h}{L} = \frac{2\sqrt{3}\ L}{2} : L = \frac{2\sqrt{3}\ L}{2L} = \sqrt{3} \qquad \tan 30º = \frac{L}{2} : h = \frac{L}{2} : \frac{\sqrt{3}\ L}{2} = \frac{2L}{2\sqrt{3}\ L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAONS TRIGONOMÈTRIQUES DE 45º

Ara treballarem amb un triangle rectangle isòsceles. Posem que els dos catets tenen una longitud *L*. Utilitzem novament el teorema de Pitàgores i obtenim el valor de la hipotenusa *x* en funció de *L*:

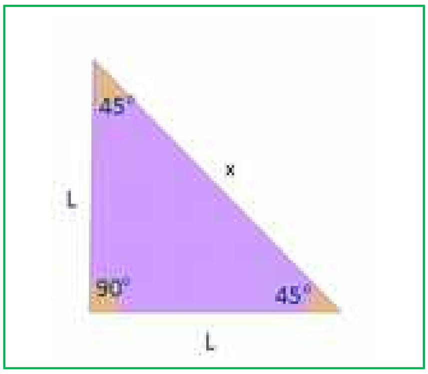
$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Ara podem calcular ja les raons trigonomètriques de 45 º

$$\sin 45º = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45º = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45º = \frac{L}{L} = 1$$



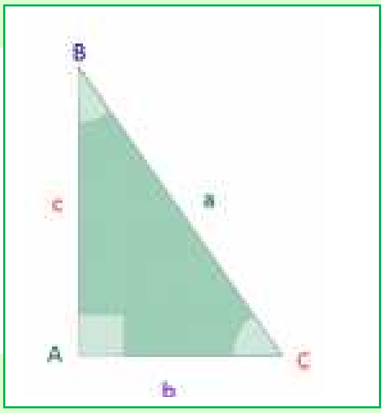
	Sinus	Cosinus	Tangent
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

2.5. Resolució de triangles rectangles.

Resoldre un triangle és calcular les amplituds dels tres angles i les longituds dels tres costats.
Al cas que el triangle seguisca rectangle podem considerar tres casos depenent de les hipòtesis o dades inicials. En cada un d'ells hi ha diverses formes d'obtindre la solució. Descriurem una en cada cas:

Primer cas: És coneixen un angle $\hat{B}$ i la hipotenusa *a*:



Com $\hat{A} = 90^o$ $\hat{C} = 90^o - \hat{B}$

Ara a partir dels raons trigonomètriques de $\hat{B}$ o $\hat{C}$, obtenim els costats que ens falten. També podem utilitzar el teorema de Pitàgores quan coneguem un dels dos catets.

$$\sin\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\sin\hat{B} \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\,\cos\hat{B}$$

Segon cas: És coneixen un angle $\hat{B}$ i un catet *b*:

Com $\hat{A} = 90^o$ $\hat{C} = 90^o - \hat{B}$

També en aquest cas les raons trigonomètriques de $\hat{B}$ o $\hat{C}$ serveixen per a obtindre almenys un dels costats i pot utilitzar-se el teorema de Pitàgores quan trobem el valor d'un costat mes. Una forma de resolució és:

$$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\text{tg}\,\hat{B}} \qquad \sin\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin\hat{B}}$$

Tercer cas: És coneixen dos costats:
En aquest cas utilitzarem en primer lloc el teorema de Pitàgores per a calcular el tercer costat, tant si el que falta és un catet com si és la hipotenusa. Seguint amb el triangle de la figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Per a obtindre el primer dels angles aguts, calcularem en primer lloc una de les seues raons trigonomètriques, per exemple $\sin\hat{B} = \frac{b}{a}$ i per a conéixer el valor de l'angle, aïllem escrivint: $\hat{B} = \text{arc}\sin\frac{b}{a}$ que vol dir "angle *el sinus del qual és* $\frac{b}{a}$ " i que s'obté amb la calculadora activant el comandament ***sin***$^{-1}$ el que aconseguirem amb la seqüència SHIFT sin $\frac{b}{a}$.

Anàlogament, si partim de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ o bé $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ l'angle *B* és $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ o $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$ que obtindrem amb els seqüències SHIFT cos $\frac{c}{a}$ o bé SHIFT tan $\frac{b}{c}$.

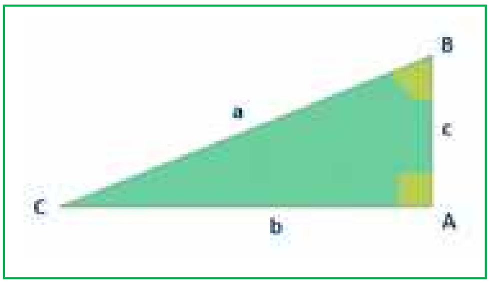
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

Activitats resoltes

- *Resoldre el triangle ABC amb angle recte en A als dos casos següents:*

  a) $\hat{B} = 42^o$ *i la hipotenusa a = 12 m.*

  b) Els catets mesuren 12 dm i 5 dm.



a) Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Càlcul dels costats: $sen\,42^o = \dfrac{b}{12} \Rightarrow b = 12\,sen\,42^o \approx 8{,}03$ m.

$$cos\,42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\,cos\,42^o \approx 8{,}92\,m$$

b) Càlcul de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Càlcul dels angles: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\tan\dfrac{12}{5} = 67^o\,22'\,48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o\,22'\,48'' = 22^o\,37'\,12''$.

2.6. Aplicacions de la resolució de triangles rectangles al càlcul de distàncies

Resolució de triangles rectangles

La resolució de triangles rectangles pot aplicar-se directament en alguns casos al càlcul de distàncies.

Activitats resoltes

- *Calcular l'altura d'un arbre sabent que determina una ombra de 3,5 metres quan els rajos de sol formen un angle de 30º amb el sòl.*

La raó trigonomètrica de 30º que relaciona el costat conegut i el que ens demanen és la tangent:

$$\tan 30^o = \frac{h}{3{,}5} \Rightarrow h = 3{,}5\tan 30^o = 3{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}02 \text{ m.}$$

Tècnica de la doble observació

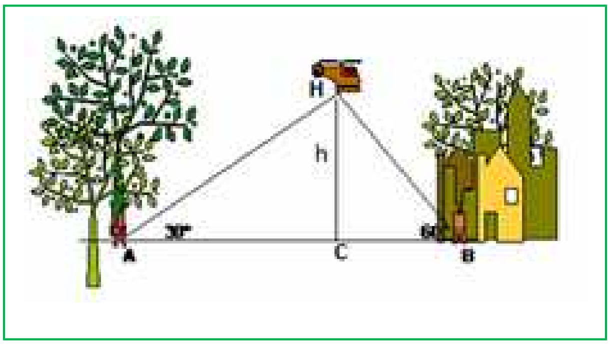
S'utilitza per a calcular altures d'objectes als què resulta difícil arribar com per exemple, edificis, muntanyes, objectes a l'extrem oposat d'un carrer, etc.…

Precisem d'un instrument per a mesurar angles. Habitualment s'utilitza l'anomenat **teodolit**. La tècnica consisteix a prendre la mesura de l'angle que forma una visual dirigida al punt més alt de l'objecte a mesurar amb l'horitzontal, des de dos punts distints i situats a una distància coneguda per a nosaltres.

Apareixen aleshores dos triangles rectangles amb un costat comú que és l'altura a mesurar. És possible plantejar un sistema d'equacions en el plantejament del qual és clau la definició de les raons trigonomètriques d'un angle agut. Vegem alguns exemples:

Activitats resoltes

- *Dues persones, separades **30** metres veuen un helicòpter. La persona situada en A dirigeix una visual a la base del mateix que forma amb el sòl un angle de **30º**. També la persona situada en B dirigeix la seua vista al mateix punt obtenint un angle de **60º**. A quina altura vola l'helicòpter?*



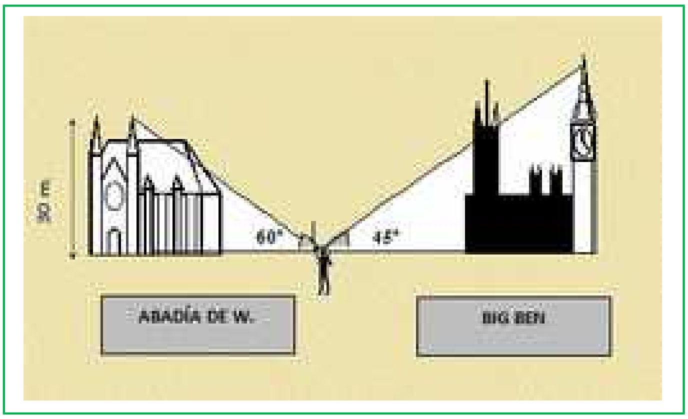
Siga h aquesta altura. Les visuals i el sòl determinen dos triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}$ i $\overset{\Delta}{BHC}$ als que:

$AC + CB = 30 \Rightarrow CB = 30 - AC$ i si fem $AC = x$

$$\left.\begin{aligned} tan\,30º &= \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\,tan\,30º = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ tan\,60º &= \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\;tan\,60º = \sqrt{3}\,(30-x) \end{aligned}\right\} x = (30-x).3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22{,}5\,m$. Substituint, arribem a la solució $h = \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 13\,m$

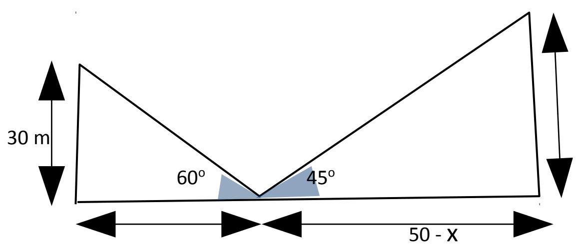
- *En un viatge d'alumnes de 4º d'E.S.O. a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. (Ja saps, sempre hi ha un teodolit a mà).*



En conéixer que les torres de l'Abadia de Westminster tenen **30** metres d'altura, van decidir aprofitar els seus coneixements per a calcular l'altura de la coneguda torre Big Ben. Des d'un punt intermedi entre ambdós edificis es veu el punt més alt de l'Abadia amb angle de **60º,** i el Big Ben amb un angle de **45º**. Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de **50** metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància és trobava de cada edifici? (Nota: Les dades son totalment ficticies)

Al triangle esquerre determinat per *l'Abadia*:

$$tan\,60º = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{tan\,60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\;m$$



Al triangle que determina el *Big Ben*:

$$tan\,45º = \frac{h}{50-10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50-10\sqrt{3}\right).tan\,45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50-10\sqrt{3}\;\;m \approx 32{,}7\;\;m$$

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

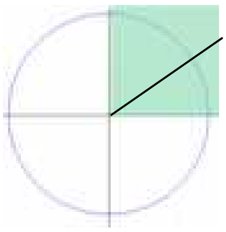
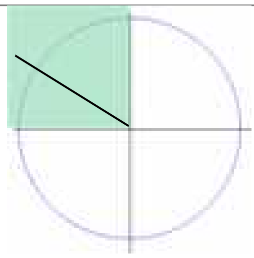
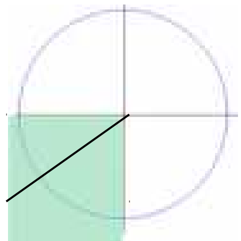
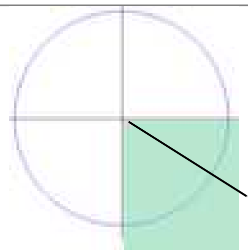
3. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES D'UN ANGLE QUALSEVOL

3.1. Circumferència trigonomètrica. Quadrants

S'anomena **circumferència trigonomètrica** o **goniomètrica** a una circumferència de radi unitat centrada a l'origen de coordenades.

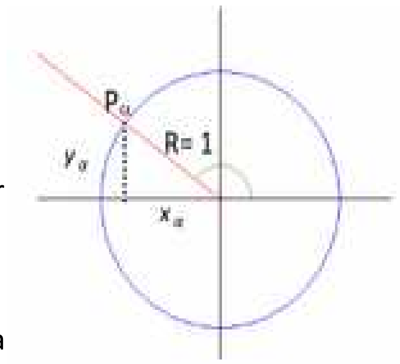
És possible representar qualsevol angle a la circumferència trigonomètrica. Per això sempre es pren un costat fix que és la semirecta definida per la part positiva de l'eix d'abscisses; el segon costat és la semirecta variable que corresponga segons la seua mesura. El sentit d'un angle es mesura *d'OX* $^+$ a la semirecta variable que determina la seua amplitud. S'entén que per a un angle negatiu coincideix amb el dels agulles d'un rellotge analògic i per a un angle positiu, el contrari.

La circumferència trigonomètrica divideix al pla en quatre regions que es denominen quadrants.

			
PRIMER QUADRANT	SEGON QUADRANT	TERCER QUADRANT	QUART QUADRANT

3.2. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol

La semirecta variable que defineix un angle α a la circumferència trigonomètrica és clau per a la definició d'un angle qualsevol. La dita semirecta talla a la circumferència a un punt $P_\alpha\left(x_\alpha, y_\alpha\right)$ a partir del que és defineix:

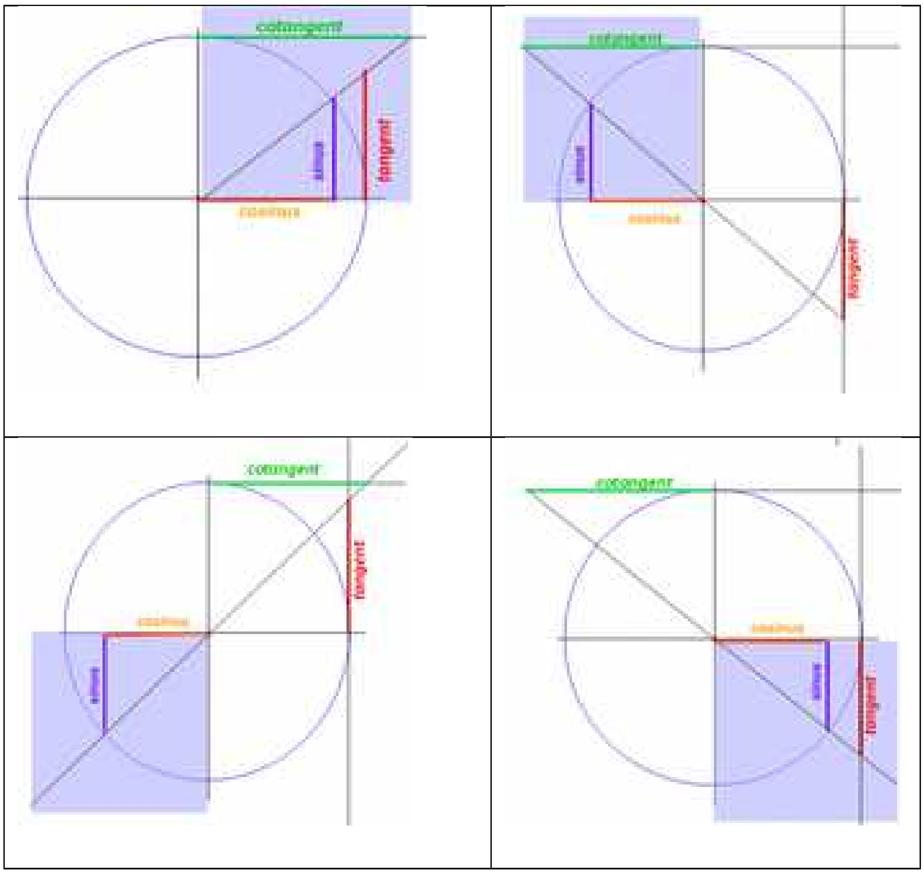


$$sin\,\alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha \quad ; \quad cos\,\alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha \quad ; \quad tag\,\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} \quad .$$

Es conserva la definició per a angles aguts que són angles del primer quadrant i s'amplia a angles de qualsevol signe i amplitud.

A més, aquesta definició permet tindre una representació geomètrica del sinus i el cosinus d'un angle que coincideix amb els segments y_α , x_α, ordenada i abscissa del punt P_α. Les rectes tangents a la circumferència goniomètrica als punts (1,0) i (0,1) proporcionen també representacions geomètriques de la tangent i cotangent que són els segments determinats per aquestes tangents geomètriques, l'eix *OX* i la semirecta corresponent a cada angle.

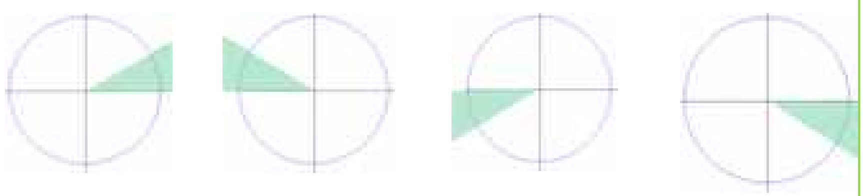
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos



3.3. Reducció al primer quadrant

Els angles α dels quadrants segon, tercer o quart poden relacionar-se amb angles aguts β que podem situar al primer quadrant i que tenen raons trigonomètriques amb els mateixos valors absoluts que els angles α inicials.

Aquestes relacions permeten obtindre les raons trigonomètriques de qualsevol angle α en funció d'un del primer quadrant β. En cada cas calcularem l'amplitud de la zona ombrejada.



Als casos en què desitgem obtindre quins angles corresponen a una raó trigonomètrica donada, resulta especialment important ja que, encara que fem ús de la calculadora, aquesta ens tornarà un únic valor i, no obstant això, hi ha infinits angles solució d'aquest problema. Gràcies a allò què descriurem en aquest epígraf, podrem trobar-los sense dificultat.

Has de pensar que els angles d'aquests quadrants no sempre són positius ni tenen un valor absolut menor que 360º.

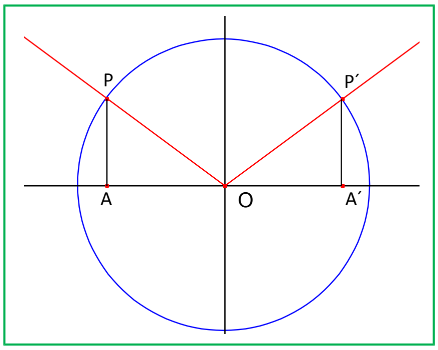
Observa que, si el seu valor absolut és major que 360º, equival al nombre de voltes que t'indique el quocient sencer de la divisió entre 360º més el residu de la divisió.

El signe d'un angle depén només de la forma de recórrer-lo (mesurat des de la part positiva de l'eix OX *cap a* la semirecta que el defineix).

Per a fer més còmoda l'explicació considerarem que a partir de P és mesuren les raons trigonomètriques de l'angle α i a partir de P´ les de l'angle β

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

ANGLES DEL SEGON QUADRANT



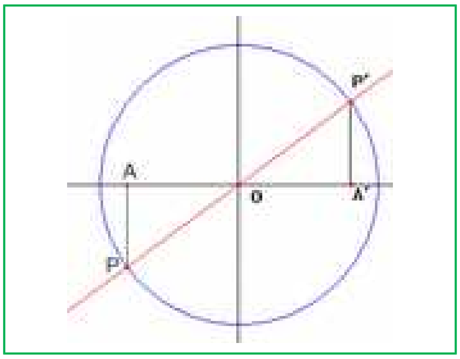
Construïm els triangles rectangles *OPA* i *OP´A´* iguals de manera que la hipotenusa seguisca en ambdós casos el radi de la circumferència goniomètrica i a més β = angle *AOP* = angle *A´OP´*

$$\sin\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -\cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\beta}{-\cos\beta} = -\tan\beta$

ANGLES DEL TERCER QUADRANT



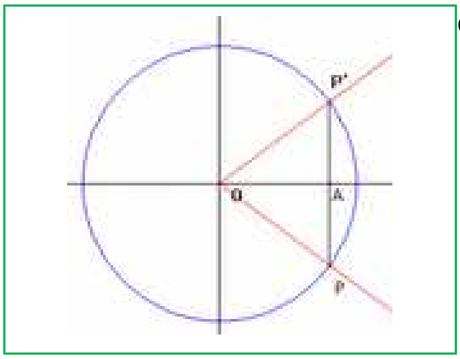
També en aquest cas els triangles rectangles *OPA* i *OP´A´* son iguals. La seua hipotenusa és el radi de la circumferència goniomètrica i els seus catets els segments determinats pels coordenades dels punts *P* i *P´*. La construcció és realitza a més de manera que β = angle *AOP* = angle *A´OP´*

$$\sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O'} = -\cos\beta$$

I dividint membre a membre, obtenim: $\tan\alpha = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$

ANGLES DEL QUART QUADRANT



Finalment construïm els triangles rectangles *OPA* i *OP´A* iguals de manera anàloga a allò que s'ha descrit als dos casos anteriors, observant que, en aquest cas *A* = *A´*.

$$\sin\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -\sin\beta$$

$\cos\alpha = \overline{AO} = \cos\beta$ en ambdós casos

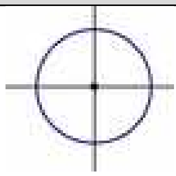
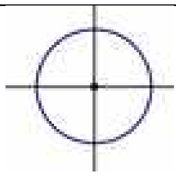
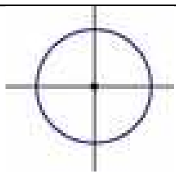
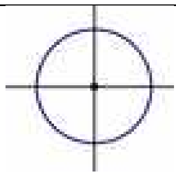
I dividint membre a membre, obtenim:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sin\beta}{\cos\beta} = -\tan\beta$$

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

Activitats proposades

9. Situa al quadrant que corresponga i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus i tangent dels angles següents:

Angle	*quadrant*	*sinus*	*cosinus*	*tangent*
165^{o}				
-230^{o}				
315^{o}				
3625^{o}				

10. Utilitza la calculadora i allò que s'ha aprés en aquest epígraf per a trobar tots els angles positius menors que 360º el sinus dels quals és de 0,4.

11. Ídem tots els angles negatius menors en valor absolut que 360º la tangent dels quals val 2.

12. Ídem tots els angles compresos entre 360º i 720º el cosinus dels quals val 0,5.

ANGLES DETERMINATS PELS SEMIEIXOS.

Els angles $0^{o}+360^{o}n$; $90^{o}+360^{o}n$; $180^{o}+360^{o}n$; $270^{o}+360^{o}n$ estan determinats per semieixos de coordenades i els seues raons trigonomètriques es mesuren a partir de punts dels eixos. Aquests punts són, respectivament $P_1\,(1,0)$,$P_2\,(0,1)$, $P_3\,(-1,0)$ i $P_4\,(0,-1)$ amb el que s'obté amb facilitat:

$sin(0^{o}+360^{o}n)=0$; $cos(0^{o}+360^{o}n)=1$; $tan(0^{o}+360^{o}n)=0$.

$sin(90^{o}+360^{o}n)=1$; $cos(90^{o}+360^{o}n)=0$; $tan(90^{o}+360^{o}n)$ no existeix

$sin(180^{o}+360^{o}n)=0$; $cos(180^{o}+360^{o}n)=-1$; $tan(180^{o}+360^{o}n)=0$

$sin(270^{o}+360^{o}n)=-1$; $cos(270^{o}+360^{o}n)=0$; $tan(270^{o}+360^{o}n)$ no existeix

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

4. RESOLUCIÓ DE TRIANGLES QUALSSEVOL

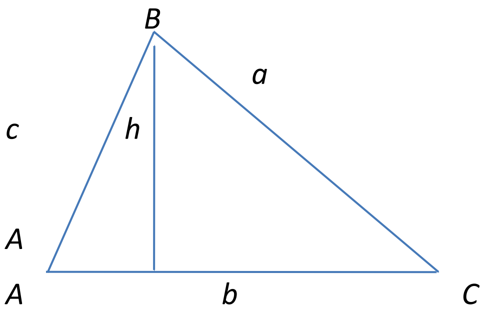
Les definicions de sinus, cosinus i tangent que hem aplicat en triangles rectangles no és poden aplicar en triangles no rectangles. Per a resoldre triangles no rectangles s'apliquen dos teoremes molt importants en trigonometria: el teorema del sinus i teorema del cosinus.

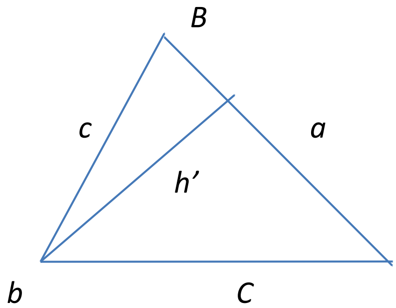
4.1. Teorema del sinus

El **teorema del sinus** afirma que en tot triangle és compleix que els costats son proporcionals als sinus dels angles oposats. És a dir,

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Considerem el triangle *ABC* i tracem dues altures qualssevol *h* i *h´* que divideixen al triangle no rectangle a dos triangles rectangles.





Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé *h*:

$$\sin\hat{A} = \frac{h}{c} \longrightarrow h = c\ \sin\hat{A}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{h}{a} \longrightarrow h = a\ \sin\hat{C}$$

Per tant:

$$c\ \sin\hat{A} = a\sin\hat{C} \longrightarrow \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Aplicant la definició de sinus als triangles en què intervé *h'*:

$$\sin\hat{B} = \frac{h'}{c} \longrightarrow h' = c\ \sin\hat{B}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{h'}{b} \longrightarrow h' = b\ \sin\hat{C}$$

Per tant:

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

$$c\ \sin\hat{B} = b \sin\hat{C} \ \rightarrow \ \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Llavors, és dedueix que: $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

Notes

Si el triangle és obtusangle, un raonament anàleg ens porta a les mateixes formules.

Podem resoldre fàcilment triangles utilitzant el teorema del sinus si coneixem:

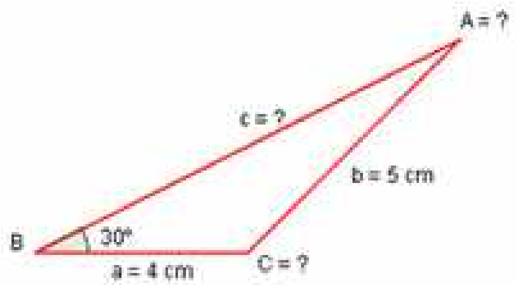
a) dos angles (és a dir, tres angles) i un costat

b) dos costats i l'angle oposat a un d'ells.

Activitats resoltes

Resoldre el següent triangle B = 30º, a = 4 cm i b = 5 cm.:

Coneixem dos costats i l'angle oposat a un d'ells, *b.*



$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \ \rightarrow \ \frac{4}{\sin\hat{A}} = \frac{5}{\sin 30^{o}} \ \rightarrow$$

$$\sin\hat{A} = \frac{4\cdot(1/2)}{5} = 0'4$$

Per tant: $\hat{A}$ = *arcsin* 0,4 = 23,58º

L'angle $\hat{C}$ = 180º–(23'58º+30º)=126,42º.

Per a calcular el costat *c* tornem a aplicar el teorema del sinus:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \ \rightarrow \ \frac{5}{\sin 30^{o}} = \frac{c}{\sin 126{,}42^{o}}$$

Llavors: $c = \frac{5\cdot \sin 126{,}42^{o}}{\sin 30^{o}} = 8{,}1\,cm$

4.2. Teorema del cosinus

El **teorema del cosinus** afirma que en un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol és compleix que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ $\quad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

L'any que ve estudiaràs la demostració d'aquest teorema. De moment només veurem algunes dels seues aplicacions.

Notes

- Si et fixes, el teorema del cosinus és una generalització **del teorema de Pitàgores**. És a

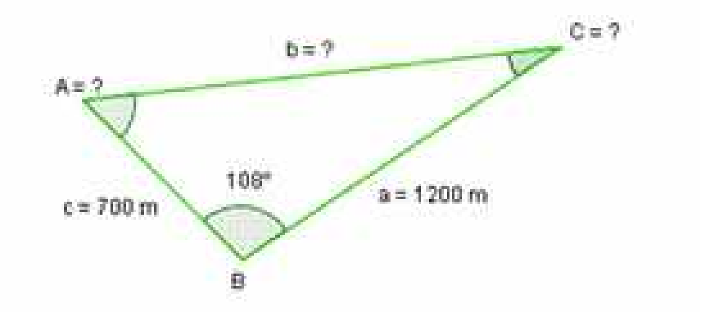
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

dir, quan el triangle és rectangle, el teorema del cosinus i el teorema de Pitàgores és el mateix.

- Podem utilitzar el teorema del cosinus si en un triangle coneixem:
  a) els tres costats,
  b) dos costats i l'angle oposat a un d'ells
  c) dos costats i l'angle que formen.

Activitats resoltes

Resoldre el següent triangle del què coneixem B = 108º, c = 700 m i a = 1200 m:



$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$ per tant $b=\sqrt{1200^2+700^2-2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108} \rightarrow b = 1564,97$ m.

Amb *a, b i c* coneguts, calculem l'angle *C*:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \longrightarrow \cos\hat{C}=\frac{c^2-a^2-b^2}{-2\cdot a\cdot b}=\frac{700^2-1200^2-1564{,}97^2}{-2\cdot 1200\cdot 1564{,}97}=0{,}9 \longrightarrow \hat{C}=25{,}18\,º$$

L'angle $\hat{C}$ també es podria calcular utilitzant el teorema del sinus.

Per a calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$ = 180º – (108º + 25,18º) = 46'82º.

Activitats proposades

13. Calcula la longitud del costat *a* d'un triangle, sabent que *C* = 25º, *b* = 7 cm i *c* = 4 cm.

14. Calcula els angles del triangle de costats: *a* = 6, *b* = 8 i *c* = 5.

4.3. Resolució de triangles qualssevol

Els ferramentes bàsiques per a resoldre triangles qualssevol són els teoremes del sinus i el cosinus que s'han vist anteriorment. El pròxim curs s'ampliarà breument la resolució d'aquests triangles, estudiant casos en què no existirà solució o casos en què hi haja dues solucions.

També és plantejaran problemes de càlcul de distàncies entre punts inaccessibles.

CURIOSITATS. REVISTA

ELS NOSTRES SENTITS ENS ENGANYEN?

La foto mostra un tram de carretera cap a l'horitzó. Totes les línies són rectes, la fotografia no enganya, però els nostres sentits, sí. Segons la nostra percepció, aquestes línies es tallen a un punt de l'horitzó, encara que nosaltres, quan estem en aqueixa situació, sabem que no és així. Llavors, per què ho veiem així? Per dues raons: perquè la llum viatja en línia recta i perquè la nostra percepció visual es basa en els angles, la qual cosa fa que l'amplària de la carretera disminuïsca amb la distància.

Però ara, que coneixes les relacions entre angles i costats d'un triangle, sabràs raonar si els objectes disminueixen la seua dimensió de forma inversament proporcional a la distància a què es troben.

Sabies que...?

El teorema del sinus es va utilitzar al segle XIX per a mesurar de forma precisa el meridià de París i així poder definir el metre.

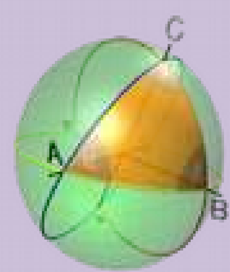
TRIGONOMETRIA ESFÈRICA

La trigonometria esfèrica estudia els triangles que es formen sobre una superfície esfèrica

En la trigonometria esfèrica la distància més curta entre dos punts no és una recta, sinó un arc.

Els angles d'un triangle esfèric sumen més de 180º

És la base de la navegació i l'astronomia. Curiós, no?

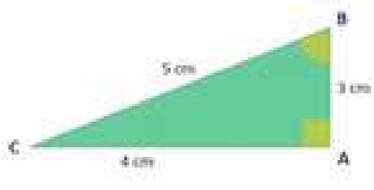
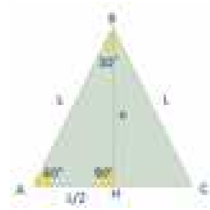
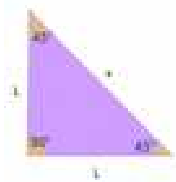
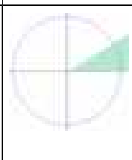
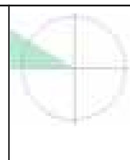
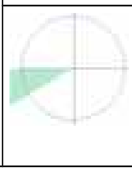
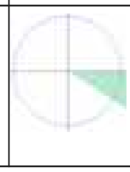


Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

RESUM

<table>
<tr><th></th><th colspan="4"></th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Radian</td><td colspan="4">És un angle tal que qualsevol arc que se li associe mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per a traçar-lo. És denota per rad.
Nr. de radians d'un angle complet = 2π rad</td><td>90^{o} són π/2 rad</td></tr>
<tr><td>Raons trigonomètriques d'un angle agut</td><td colspan="4">$\sin α=\frac{catet\ \ oposat}{hipotenusa}=\frac{b}{a}$

$\cos α=\frac{catet\ adjacent}{hipotenusa}=\frac{c}{a}$

$\tan α=\frac{catet\ oposat}{catet\ adjacent}=\frac{b}{c}$</td><td>
$\sin C=\frac{3}{5}$, $\cos C=\frac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Relacions fonamentals</td><td colspan="4">• $(\sin α)^2+(\cos α)^2=1$
• $\tan α=\frac{\sin α}{\cos α}$</td><td>$(\sin 30^{o})^2+(\cos 30^{o})^2=$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$</td></tr>
<tr><td>Altres raons trigonomètriques</td><td colspan="4">$cosec\ α=\frac{1}{\sin α}$ $sec\ α=\frac{1}{\cos α}$ $cotan\ α=\frac{1}{\tan α}$</td><td>cosec 90º =1
sec 90º No existeix
cotan 45º=1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Raons trigonomètriques de 30º, 45º i 60º</td><td></td><td>sinus</td><td>cosinus</td><td>tangent</td><td rowspan="4">
</td></tr>
<tr><td>30º</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45 º</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60º</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Reducció al primer quadrant</td><td colspan="4">Les raons trigonomètriques de qualsevol angle α poden expressar-se en funció de les d'un angle agut β</td><td> 
 </td></tr>
</table>

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

<table>
<tr><td rowspan="3">Reducció al primer quadrant</td><td>2n QUADRANT</td><td>$\sin\alpha=\sin\beta$ i $\cos\alpha=-\cos\beta$</td><td rowspan="3">$\sin 135^o=\sin 45^o$
$\sin 200^o=-\sin 20^o$
$\cos(-60^o)=\cos 60^o$</td></tr>
<tr><td>3r QUADRANT</td><td>$\sin\alpha=-\sin\beta$ i $\cos\alpha=-\cos\beta$</td></tr>
<tr><td>4t QUADRANT</td><td>$\sin\alpha=-\sin\beta$ i $\cos\alpha=\cos\beta$</td></tr>
<tr><td>Resolució de triangles</td><td colspan="2">Resoldre un triangle és calcular les mesures dels seus angles i dels seus costats.
<u>Si el triangle és rectangle</u>, usarem les definicions de les raons trigonomètriques, el teorema de Pitàgores i el resultat que afirma que la suma dels angles d'un triangle és 180º
<u>Si el triangle no és rectangle</u>, a més del resultat de que la suma dels angles d'un triangle és 180º, usarem els teoremes del sinus i el cosinus.</td><td></td></tr>
<tr><td>Teorema del sinus</td><td colspan="2">En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol:
$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$</td><td></td></tr>
<tr><td>Teorema del cosinus</td><td colspan="2">En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol:
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$</td><td></td></tr>
</table>

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Expressa les següents mesures d'angles en radians:
   a) 30º b)60º c)100º d)330º

2. Quant mesura en graus sexagesimals un angle d'1 rad? Aproxima el resultat amb graus, minuts i segons.

3. Troba la mesura en graus dels següents angles expressats en radians:

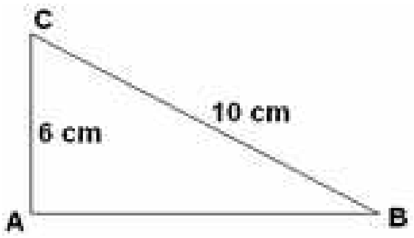
   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de :

   a) 28º b) 62º

   Trobes alguna relació entre els raons trigonomètriques d'ambdós angles?

5. Troba el sinus i el cosinus dels angles *B* i *C* del dibuix. Quina relació trobes?



6. En un triangle rectangle *ABC* amb angle recte en *A*, si *tan B* = 1,2 i *b* = 3 cm, quant mesura *c*?

7. Treballant amb angles aguts, és cert que a major angle li correspon major sinus?

   I per al cosinus?

8. Usant la calculadora troba el sinus, el cosinus i la tangent de 9º i 81º. Trobes alguna relació entre les raons trigonomètriques d'ambdós angles?

9. Si *a* és un angle agut i *cos a* = 0,1, quant valen els altres dues raons trigonomètriques?

10. Comprovar les relacions trigonomètriques fonamentals amb 30º, 45º i 60º sense utilitzar decimals ni calculadora.

11. Si *a* és un angle agut i *tan a* = 0,4, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?

12. Completa al teu quadern la següent taula sabent que α és un angle agut.

$sen\ \alpha$	$cos\ \alpha$	$tg\ \alpha$
	0,7	
1/3		
		2

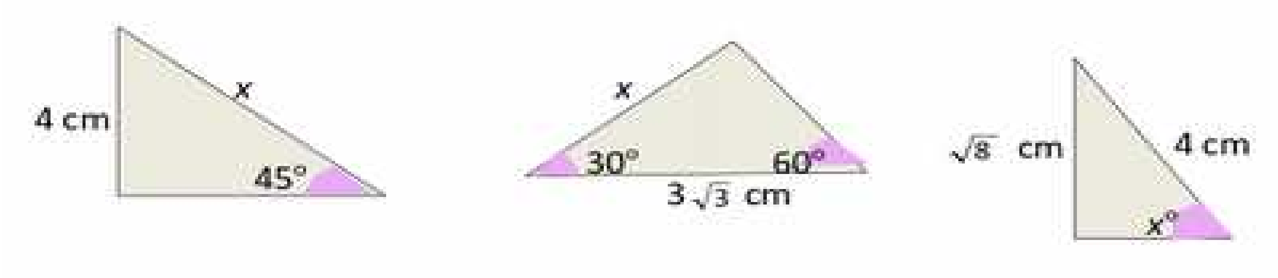
13. És rectangle un triangle els costats del qual mesuren 12, 13 i 5 cm? En cas afirmatiu determina el sinus, cosinus i tangent dels dos angles aguts.

14. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 i 12 cm. Calcula les raons trigonomètriques dels seus angles aguts. Quina amplitud tenen?

15. Si α és un angle agut tal que $sin\,\alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

i. Les restants raons trigonomètriques de α
ii. Les raons trigonomètriques de 180º – α
iii. Les raons trigonomètriques de 180º + α
iv. Les raons trigonomètriques de 360º – α

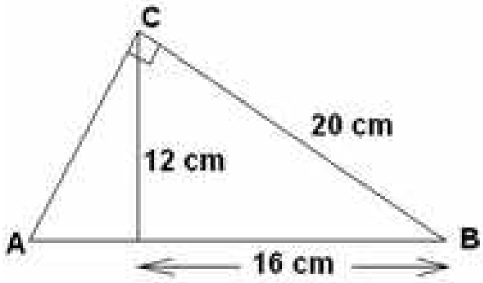
16. Sense utilitzar calculadora, calcula el valor de *x* als següents triangles rectangles:



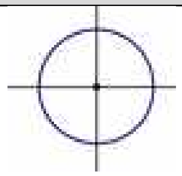
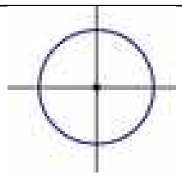
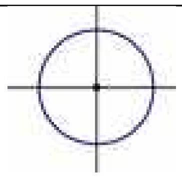
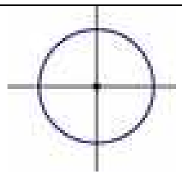
17. Beatriu subjecta un catxirulo amb una corda de 42 m. A quina altura es troba aquest al moment en què el cable tens forma un angle de 52º 17' amb el sòl?

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

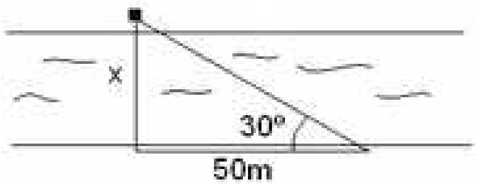
18. Calcula el sinus, cosinus i tangent de l'angle *A* al dibuix següent:



19. Si *a* és un angle del segon quadrant i *cos a* = –0,05, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
20. Si *a* és un angle obtús i sin *a* = 0,4, quant valen les altres dues raons trigonomètriques?
21. Dibuixa al teu quadern la taula següent i situa al quadrant que corresponga i expressa en funció d'un angle agut, el sinus, cosinus, tangent, secant, cosecant i cotangent dels següents angles. Si pots, calcula'ls:

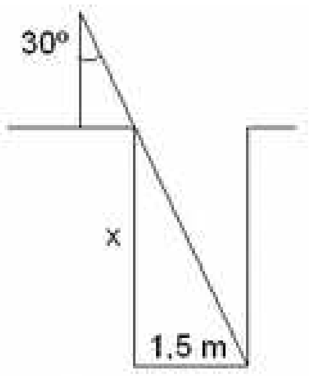
Angle	*quadrant*	*sinus*	*cosinus*	*tangent*	*secant*	*cosecant*	*cotangent*
–225º							
150º							
–60º							
3645 e							

22. Calcula l'amplària del riu representat a la figura següent:

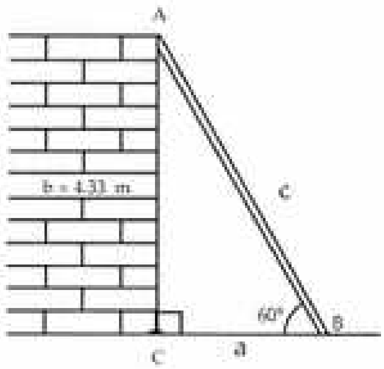


Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

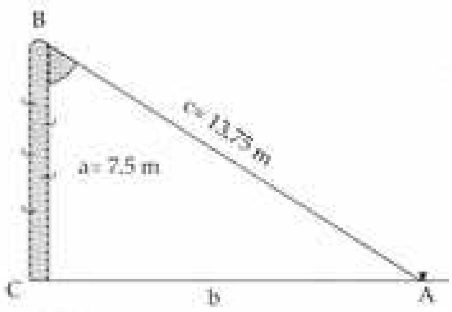
23. Esbrina l'altura de la torre d'una església si a una distància de 80 m, i mesurat amb un teodolit d'altura 1,60 m, l'angle d'elevació del parallamps que està a la part alta de la torre és de 23º.
24. Troba l'àrea d'un hexàgon regular de costat 10 cm.
25. Calcula la profunditat d'un pou de 1,5 m de diàmetre sabent l'angle indicat a la figura de la dreta.



26. Quina és l'altura d'una muntanya el cim de la qual, si ens situem a una distància de 3000 m del peu de la seua vertical i mesurem amb un teodolit d'altura 1,50 m, presenta un angle d'inclinació de 49º.
27. Quin és l'angle d'inclinació dels rajos solars al moment en què un bloc de pisos de 25 m d'alçària projecta una ombra de 10 m de longitud?
28. Troba l'altura i l'àrea d'un triangle isòsceles la base del qual mesura 20 cm i l'angle desigual del qual val 26º.

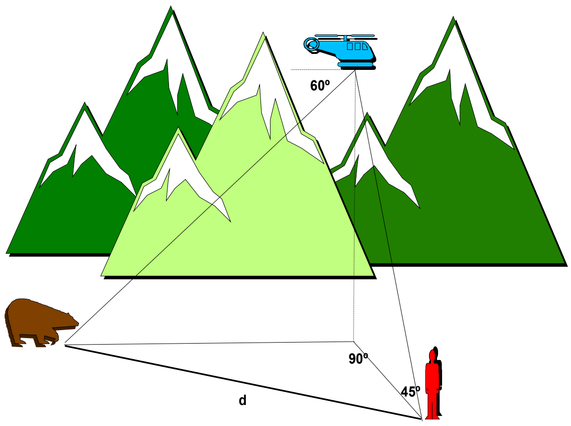


29. Troba l'àrea d'un dodecàgon regular de costat 16 cm.
30. Obtindre la longitud d'una escala recolzada en una paret de 4,33 m d'alçària que forma un angle de 60 º respecte al sòl
31. El fil d'un catxirulo totalment estés mesura 150 m, i forma un angle amb el sòl de 40º mentres el subjecte a 1,5 m del sòl. A quina altura del sòl està el catxirulo?
32. Per a mesurar l'altura d'un campanar a la base del qual no podem accedir, tendim una corda de 30 m de llarg des de l'alt de la torre fins a tensar-la al sòl, formant amb aquest un angle de 60º. Quina és l'altura del campanar?



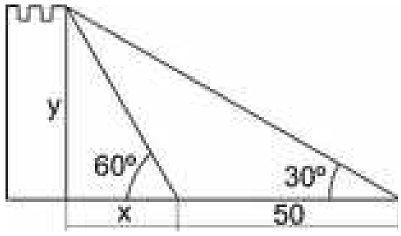
33. Obtindre l'angle que forma un pal de 7.5 m d'alt amb un cable tirant que va, des de la punta del primer fins al pis, i que té un llarg de 13.75 m
34. Dos amics observen des de sa casa un globus que està situat en la vertical de la línia que uneix les seues cases. La distància entre les seues cases és de 3 km. Els angles d'elevació mesurats pels amics són de 45º i 60º. Troba l'altura del globus i la distància d'ells al globus.

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

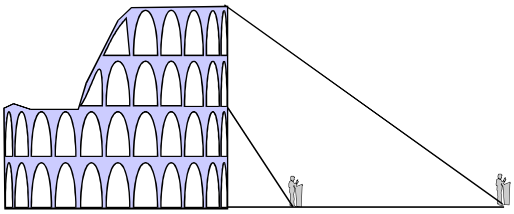


35.Un biòleg es troba al port de Somiedo fent un seguiment dels óssos terrosos. Compta amb l'ajuda d'un càmera i un pilot que volen en un helicòpter, mantenint-se a una altura constant de $40\sqrt{3}$ m.

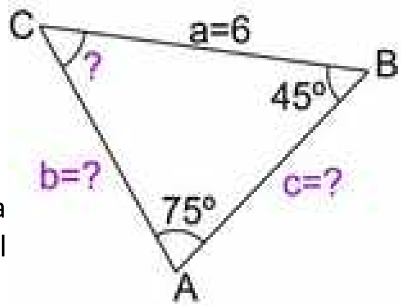
Al moment que descriu la figura, el càmera veu des de l'helicòpter a l'ós amb un angle de depressió (angle que forma la seua visual amb l'horitzontal marcat al dibuix) de **60º**. El biòleg dirigeix una visual a l'helicòpter que forma amb el sòl un angle de **45º**. Calcular la distància entre el biòleg i l'ós.



36.Des d'un cert lloc del sòl es veu el punt més alt d'una torre, formant la visual un angle de 30º amb l'horitzontal. Si ens acostem 50 m a la torre, aqueix angle és fa de 60º. Calcula l'alçària de la torre.



37. Amb un teodolit d'1 metre d'altura, dues persones pretenen mesurar l'altura del *Coliseu de Roma.* Una d'elles s'acosta a l'amfiteatre, separant-se **40 m**. de l'altra. Aquesta última obté que l'angle d'elevació del punt més alt és de **30º.** L'altra no divisa el Coliseu complet pel que mesura l'angle d'elevació al punt que marca la base del tercer pis , obtenint **60º** com resultat**.** Calcular l'altura del Coliseu i la distància dels dos observadors a la base del mateix.



38. Ressol el triangle: $a = 6$; $B = 45º$; $A = 75º$

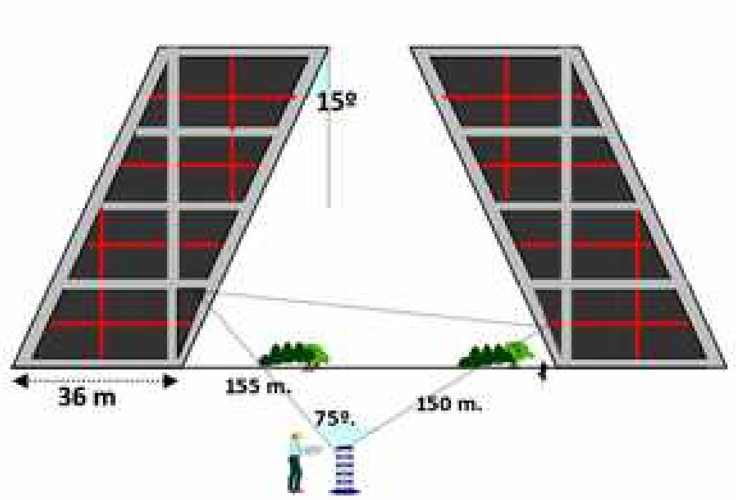
39. Els pares de Pere tenen una parcel·la al camp de forma triangular els costats de la qual mesuren 20, 22 i 30 m. Pere vol calcular els angles. Quins són aqueixos angles?

40. Estant situat a 100 m d'un arbre, veig la seua copa baix un angle de 30º. El meu amic veu el mateix arbre baix un angle de 60º. A quina distància està el meu amic de l'arbre?

41. Les conegudes *torres Kio* de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt a la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.

a) Amb les dades que apareixen a la figura, determina la seua altura.

b) Des de dues oficines situades en torres distintes s'han estés dos cables fins a un mateix punt que mesuren 155 i 150 metres i que formen un angle de 75º al punt de trobada. Quina distància en línia recta hi ha entre ambdues?

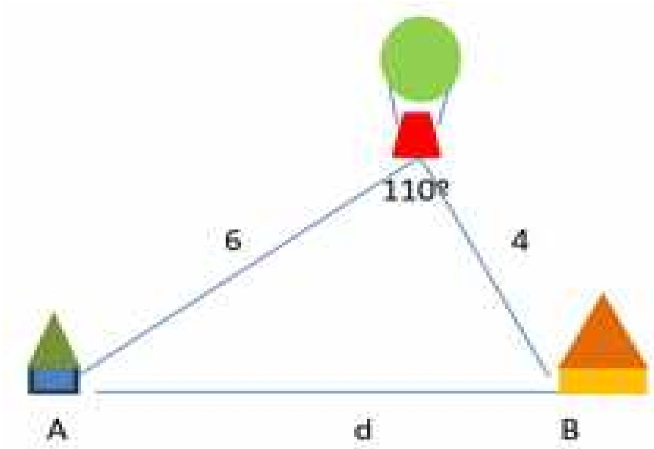


42. Tres pobles estan units per carreteres: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km i l'angle format per *AB* i *BC* és de 120º. Quant disten *A* i *C?*

43. Han de construir un túnel del punt *A* al punt *B*. És pren com a referència una antena de telefonia (*C*) visible des d'ambdós punts. És mesura llavors la distància *AC* = 250 m. Sabent que l'angle en *A* és de 53º i l'angle *B* és de 45º calcula quina serà la longitud del túnel.

44. Calcula el costat d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 6 m.

45. El punt mes alt d'un repetidor de televisió, situat a la cima d'una muntanya, es veu des d'un punt del sòl *P* baix un angle de 67º. Si ens acostem a la muntanya 30 m el veiem baix un angle de 70º i des d'aqueix mateix punt veiem la cima de la muntanya baix un angle de 66º. Calcular l'altura del repetidor.
46. Des de l'alt d'un globus s'observa un poble *A* amb un angle de 50º. Un altre poble, *B* situat al costat i en línia recta s'observa des d'un angle de 60º. El globus és troba a 6 km del poble *A* i a 4 km de B. Calcula la distància entre *A* i *B*.



47. Ressol els triangles:
    a) a = 20 m; *B* = 45º; *C* = 65º
    b) *c* = 6 m, *A* = 105º, *B* = 35º
    c) *b* = 40 m; *c* = 30 m, *A* = 60º.

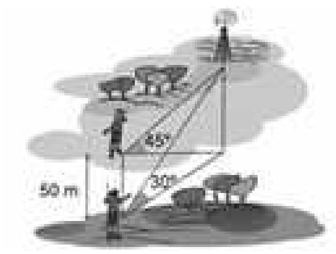
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

48. Donat el triangle de vèrtexs A, B, C, i sabent que A = 60º, B = 45º i que b= 20 m. Resoldre'l i calcula la seua àrea.

49. Calcula la longitud dels costats d'un paral·lelogram les diagonals del qual són de 20 i 16 m. i les diagonals formen entre si un angle de 37º.

50. Un triangle isòsceles amb base 30 m té dos angles iguals de 80º. Quant mesuren els altres dos costats?

51. Tres amics es situen en un camp de futbol. Entre Àlvar i Bartolo hi ha 25 m i entre Bartolo i Cèsar, 12 metres. L'angle format al cantó de Cèsar és de 20º. Calcula la distància entre Àlvar i Cèsar.



52. Un home que està situat a l'oest d'una emissora de ràdio observa que el seu angle d'elevació és de 45º. Camina 50 m cap al sud i observa que l'angle d'elevació és ara de 30º. Troba l'altura de l'antena.

53. Els braços d'un compàs mesuren 12 cm i formen un angle de 60º. Quin és el radi de la circumferència que pot traçar-se amb aqueixa obertura?

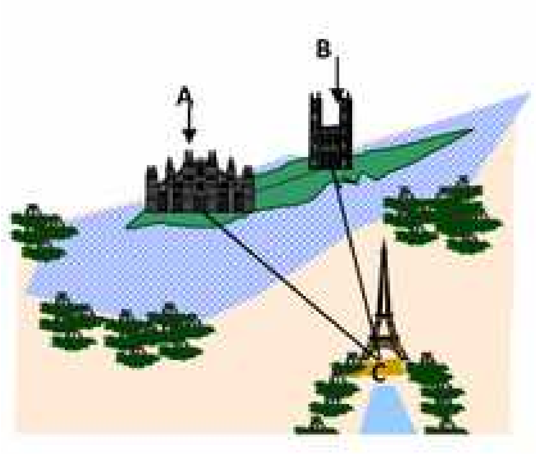
54. Escriu quatre angles amb el mateix sinus que 135º.

55. Troba dos angles que tinguen la tangent oposada a la de 340º.

56. Busca dos angles amb el mateix sinus que 36º i cosinus oposat.

57. Quins angles negatius, compresos entre –360º i 0º tenen el mateix sinus que 60º?

58. A París i en *l' Île de la Cité* és troben *Nôtre Dame* i *la Sainte Chapelle* a una distància de **200 metres**. Imaginem que un observador situat en *A* veu *B* i *C* amb un angle de **56º** i que un altre, situat en *B* veu *A* i *C* amb un angle de **117º.** Calcular les distàncies entre la torre *Eiffel* (*C*) i *Nôtre Dame* (*B*), així com entre la torre *Eiffel* (*C) i* la *Sainte Chapelle* (A).



Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Autores: Fernanda Ramos Rodríguez i Milagros Latasa Asso
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF, Milagros Latasa i Fernanda Ramos

AUTOAVALUACIÓ

1. L'expressióen radians de 65º és :

   a) 1,134 rad b) 1,134π rad c) 2,268 rad d) 2,268π rad

2. El valor de la hipotenusa en un triangle rectangle amb un angle de 25º i amb un dels catets de 3 cm és:

   a) 3,3 cm b) 7,1 cm c) 6,4 cm d) 2,2 cm

3. Si α és un angle agut i $\sin\alpha = 0{,}8$, la tangent de α és:

   a) 0,6 b) –0,6 c) –1,33 d) 1,33

4. Selecciona l'opció correcta:

   a) $\tan \hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $\sin\hat{A} = 2$ i $\cos\hat{A} = 3$

   b) La secant d'un angle sempre està compresa entre –1 i 1

   c) Al segon i quart quadrants la tangent i cotangent d'un angle tenen signe negatiu

   d) El sinus d'un angle és sempre menor que la seua tangent.

5. Si el sinus d'un angle del segon quadrant és $\frac{4}{5}$, llavors la seua tangent i secant són respectivament:

   a) $-\frac{3}{5}$ i $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ i $\frac{3}{4}$

6. L'altura d'un edifici és de 50 m, la mesura de la seua ombra quan els rajos del sol tenen una inclinació de 30º amb l'horitzontal és de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. L'angle de 420º és un angle que se situa a

   a) El primer quadrant b) El segon quadrant c) El tercer quadrant d) El quart quadrant

8. Si α és un angle agut i β és el seu suplementari, es compleix:

   a) $\sin\alpha = -\sin\beta$ *i* $\cos\alpha = \cos\beta$ b) $\sin\alpha = \sin\beta$ *i* $\cos\alpha = -\cos\beta$

   c) $\sin\alpha = \sin\beta$ *i* $\cos\alpha = \cos\beta$ d) $\sin\alpha = -\sin\beta$ *i* $\cos\alpha = -\cos\beta$

9. Per a calcular l'altura d'una muntanya es mesura amb un teodolit des d'*A* l'angle que forma la visual a la cima amb l'horitzontal, que és $\hat{A} = 30^o$. Avançant 200 m, és torna a mesurar i l'angle resulta ser $\hat{B} = 35{,}2^o$. L'altura de la muntanya és de:

   a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

10. Si el radi d'un pentàgon regular és 8 cm, la seua àrea mesura

    a) 305,86 cm² b) 340,10 cm² c) 275,97 cm² d) 152,05 cm²