Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4t B ESO
Capítol 7: Semblança

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

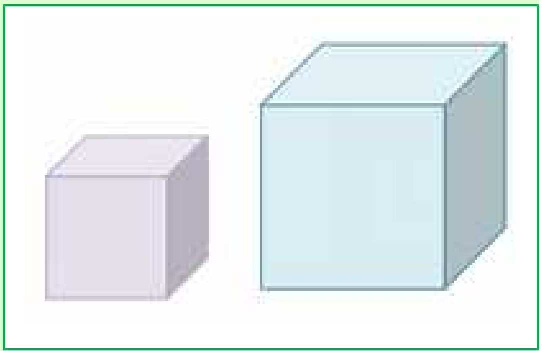
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

Un dels problemes *històrics* de la Matemàtica és el de la **duplicació d'un cub**. A Atenes es va desenrotllar una tremenda pesta que assolava a la població. Inclús el seu governant, Pèricles va morir l'any 429 a. C. Consultat l'oracle d'Apol·lo aquest va dir que s'acabaria amb la pesta si es construïa un altar que fóra doble de què hi havia (que tenia forma de cub).



No es va aconseguir donar amb la solució. S'ha de buscar la raó de proporcionalitat entre els costats perquè el volum siga doble. La pesta es va acabar, però el problema es va quedar sense resoldre durant segles, però tu sabràs solucionar-lo quan estudies aquest capítol.

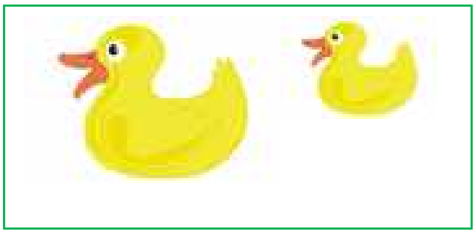
També estudiarem el teorema de Tales i la seua aplicació a reconèixer quan dos triangles són semblants. Són els criteris de semblança de triangles.

Utilitzant la semblança de triangles demostrarem dos teoremes, el teorema de l'altura i el del catet.

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

1. FIGURES SEMBLANTS

1.1. Figures semblants



Durant aquest capítol parlarem únicament de la proporcionalitat geomètrica, la semblança.

Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. És molt útil saber reconèixer la semblança per a poder estudiar una figura i inferir així propietats d'una figura semblant a ella que és més gran o inaccessible. La semblança conserva els angles i manté la proporció entre les distàncies.

Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.

1.2. Raó de semblança. Escala.

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. Quan representem quelcom mitjançant una figura (3D) o un pla (2D) la raó de semblança també s'anomena **escala**.

Al llenguatge matemàtic hi ha dues ferramentes fonamentals per a descriure una proporció: El producte i el quocient.

El producte indica quantes vegades major és la representació enfront del model. Se sol denotar mitjançant el signe de producte **"X"** (10X, 100X, etc.) indicant així la raó de semblança.

Exemple:

- *Una representació a escala* 100X d'una cèl·lula, indica que la representació és 100 vegades més gran que el model, o que 100 cèl·lules en fila tenen la mateixa longitud que la representació.

La divisió indica el camí contrari, o quant més xicotet és el model enfront de la seua representació. Se sol denotar mitjançant el símbol de divisió **":"** (1:100, 1:500, etc.) el que indica la raó de semblança.

Exemple:

- *Un pla de construcció d'un edifici d'escala* 1:100, indica que la representació és 100 vegades més xicoteta que el model. Si una distància en el pla és 10 cm, aqueixa mateixa distància a la realitat serà de 10 m.

Per a escriure una **raó de semblança** en llenguatge algebraic s'utilitzen dos operadors: el producte (x) i el quocient (:).

Quan parlem de semblança geomètrica, ens referim a proporcionalitat en tant a longituds, però també hi ha altres atributs en què podem trobar semblances entre un model i un semblant. En general, qualsevol magnitud que siga mesurable tant al model com al seu semblant, és apta per a establir una relació de semblança.

Sempre que es puguen comparar dues magnituds d'un atribut comú, és possible establir una **raó de semblança**.

Activitats resoltes

- *Si un microscopi té un augment de* 100X, quina grandària (aparent) penses que tindrà la imatge que es veja per l'objectiu si observem un cabell de 0,1 mm de grossària?

0,1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Esbrina l'altura d'una casa que medeix* 20 cm d'alt en un pla d'escala 1:100.

Si H és l'altura de la casa i h la grandària al pla, sabem que $h = H/100$, per tant, $H = 100 \cdot h$.
$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprovació*: És una casa d'uns 7 pisos.

Activitats proposades

1. Mesura la teua altura en una foto i calcula el factor de semblança.

1.3. Semblança en longituds, àrees i volums

Longitud de figures semblants

A les figures semblants la forma no varia, únicament canvia la grandària. Les longituds són proporcionals. Al següent apartat demostrarem el teorema de Tales que és el fonament matemàtic de la semblança.

La **raó de semblança** s'aplica a totes les **longituds** del model per igual.

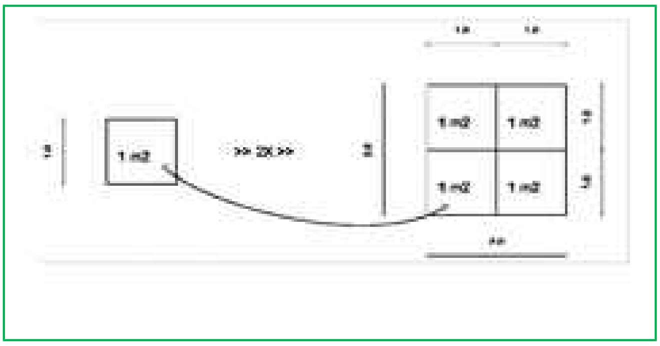
Quan les propietats d'una figura depenen de la longitud, com l'àrea i el volum, aquestes propietats també canvien en la figura semblant, encara que no de la mateixa manera que la longitud.

Exemple:

- *Si l'àrea del quadrat és $A = L^2 = L \cdot L$, l'àrea d'un quadrat semblant de raó* 2*, serà:*

  $A = 2{\cdot}L \cdot 2{\cdot}L = 2{\cdot}2 \cdot L{\cdot}L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Àrees de figures semblants



L'àrea d'una figura és una propietat que depèn de la longitud dels seus segments. En concret, la relació entre la longitud d'una figura i la seua àrea és quadràtica.

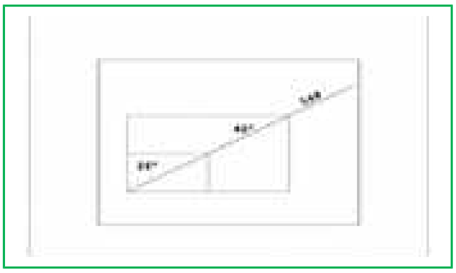
Quan s'aplica el factor de semblança, es conserva la relació quadràtica entre longitud i àrea, per la qual cosa en una figura plana (2D), provocarà un augment de la seua àrea proporcional al quadrat.

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, la relació entre les seues àrees, A i A' *és*:

$A' = k{\cdot}L_1 \cdot k{\cdot}L_2 = k{\cdot}k \cdot L_1{\cdot}L_2 = k^2{\cdot}A$

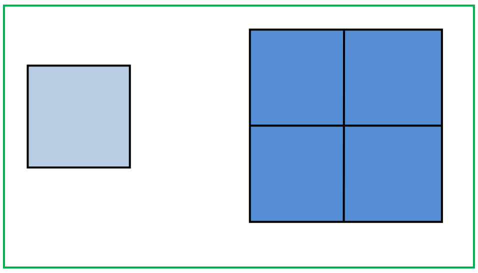
Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:



- *Un televisor de* 40 polzades *costa aproximadament quatre vegades més que un de* 20. Per estrany que parega, l'augment de preu està justificat. La grandària del televisor, indica la longitud del seu diagonal en polzades. Una longitud doble, implica una àrea quatre vegades major i per tant necessita quatre vegades més components electrònics.

Exemple:



- *Observa la figura del marge.* Si multipliquem per 2 el costat del quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades la del xicotet.

Volums de figures semblants

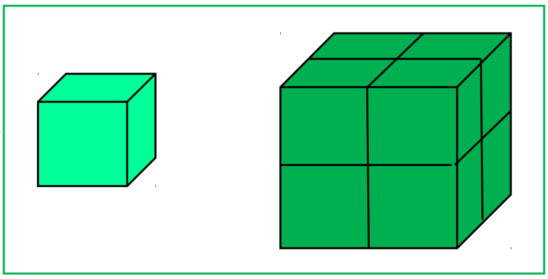
El volum d'una figura és una propietat que depèn de la longitud dels seus segments. En aquest cas, la relació entre les longituds d'una figura i el seu volum és cúbica.

Quan s'aplica el factor de semblança, aquesta relació cúbica provocarà un augment del seu volum proporcional al cub (k^3). Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, i el volum de partida és $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: en aplicar la semblança es té:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \text{k·k·k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és ***k***, llavors entre els seus volums és ***k*³**.

Exemple:



- *Observa la figura del marge*. En multiplicar per 2 el costat del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum del cub gran és 8 (2^3) vegades el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\ 000\ 000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

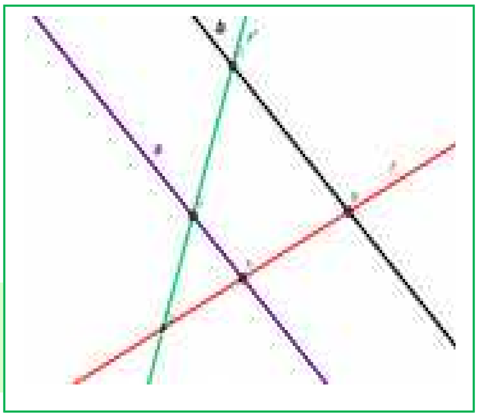
Si la Torre Eiffel mesura 300 *m* d'altura (mesura un poc més, 320 m), i anomenem x al que mesura la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ *m*. Medeix metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

2. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 *cm*. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?
3. En la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 3 €, 6 € i 9 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 *cm*, 20 *cm* i 30 *cm*, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.
4. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tinga una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tindre la maqueta?

2. EL TEOREMA DE TALES

2.1. Teorema de Tales



Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen en el punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*. Aleshores el Teorema de Tales afirma que els segments són proporcionals:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$$

Es diu que els triangles *OAC* i *OBD* estan en posició de ***Tales***. Són **semblants**. Tenen un angle comú (coincident) i els costats proporcionals.

Activitats resoltes

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició de Tales. El perímetre d'OBD és* 20 *cm, i OA medeix* 2 *cm, AC medeix* 5 *cm i OC medeix* 3 *cm. Calcula les longituds dels costats d'OBD.*

Utilitzem l'expressió: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$ substituint les dades:

$$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

pel que aïllant, sabem que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, i *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecte: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetre del triangle.

- *Conta la llegenda que Tales va mesurar l'altura de la piràmide de Keops comparant l'ombra de la piràmide amb l'ombra del seu bastó. Tenim un bastó que medeix* 1 *m, si l'ombra d'un arbre medeix* 12 *m, i la del bastó, (a la mateixa hora del dia i al mateix moment), medeix* 0,8 *m, quant medeix l'arbre?*

Les altures de l'arbre i del bastó són proporcionals a les seues ombres, (formen triangles en posició *Tales*), pel que, si anomenem *x* a l'altura de l'arbre podem dir:

$\frac{0{,}8}{1} = \frac{12}{x}$. Per tant *x* = 12/0,8 = 15 metres.

Activitats proposades

5. En una foto hi ha un xiquet, que sabem que medeix 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l'altura del xiquet i de l'edifici en la foto, i resulten ser: 2 *cm* i 10 *cm*. Quina altura té l'edifici? *Comprovació*: El resultat et pareix real? És possible que un edifici tinga aqueixa altura?

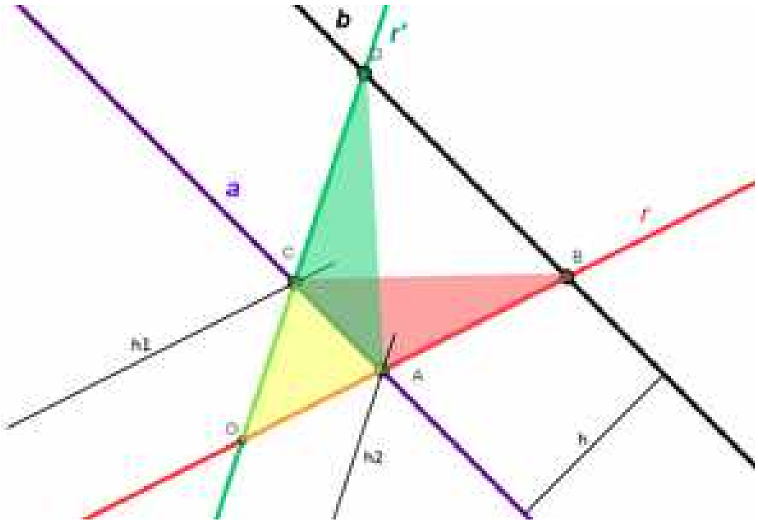
6. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seues diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats d'ambdós hexàgons.

7. En un triangle regular *ABC* de costat 1 *cm*, tracem els punts mitjans, *M* i *N*, de dos dels seus costats. Tracem les rectes *BN* i *CM* que es tallen en un punt *O*. Són semblants els triangles *MOS* i *COB*? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat *MN*?

8. Una piràmide regular hexagonal, de costat de la base 3 *cm* i altura 10 *cm*, es talla per un pla a una distància de 4 *cm* del vèrtex, amb la qual cosa s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seues dimensions?

2.2. Demostració del teorema de Tales

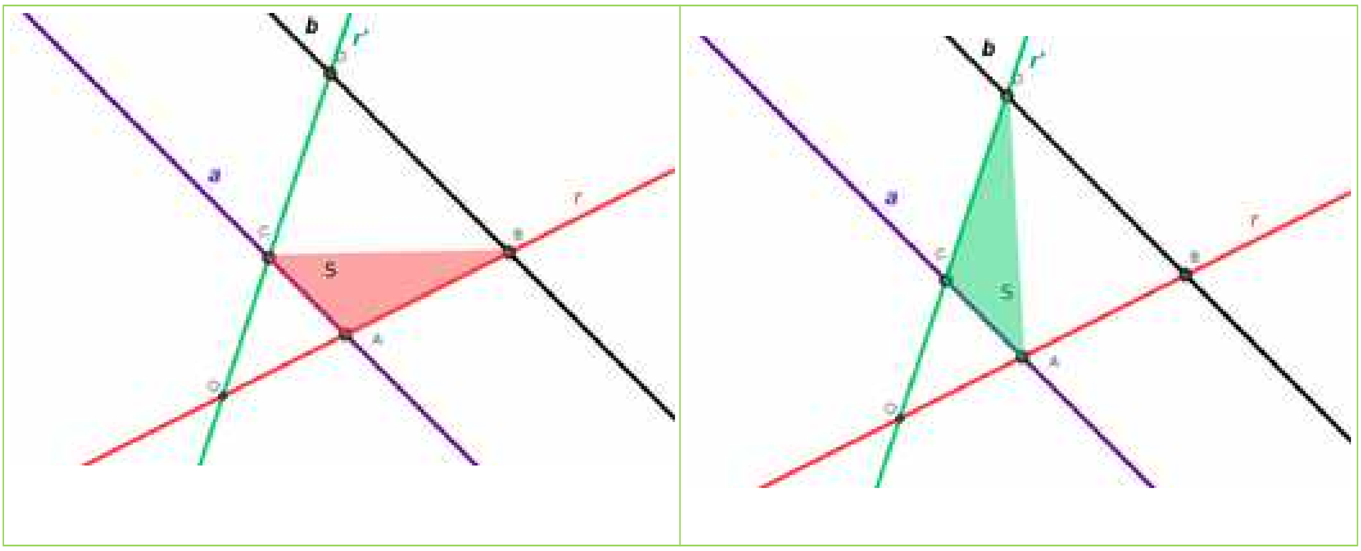
Per a la demostració s’utilitzen els triangles *ABC*, *ADC* i *OCA,* que es mostren a la figura.



Donarem diversos passos per a demostrar el teorema de Tales.

- L'àrea del triangle *ABC* és la mateixa que l’àrea del triangle *ADC* perquè tenen la mateixa base, (*AC),* i la mateixa altura (*h*), la distància entre les rectes paral·leles ***a*** i ***b***:

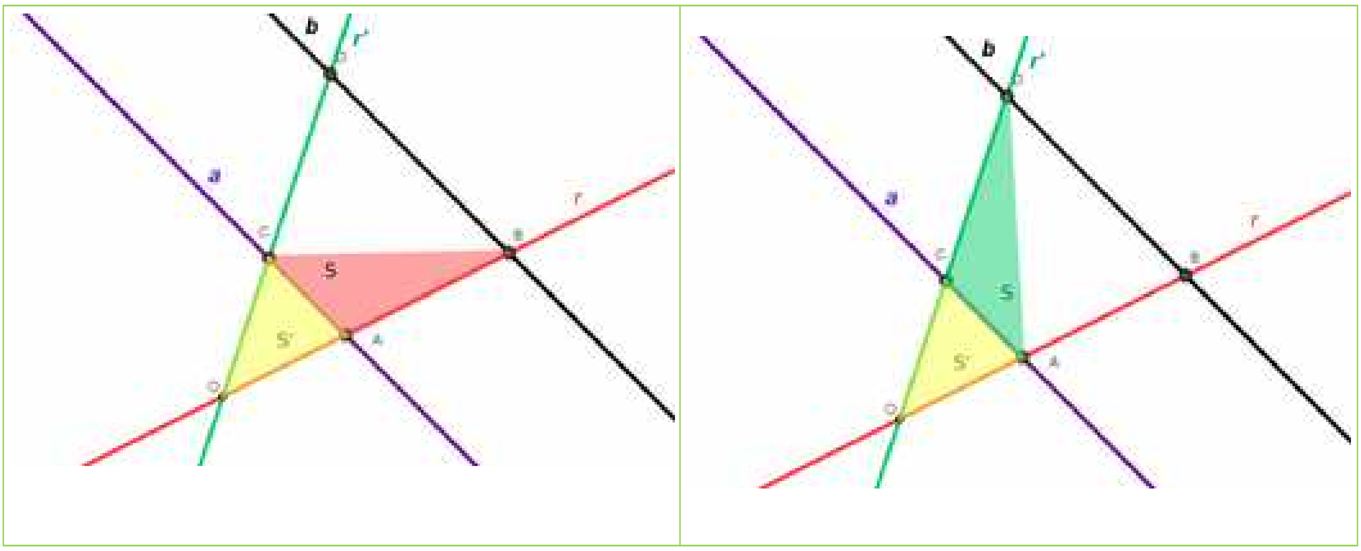
$$\acute{A}rea\ (ABC) = \acute{A}rea\ (ADC) = CA \cdot h/2 = S$$



- L'àrea del triangle *OCB* és la mateixa que l’àrea del triangle *OAD* perquè hem sumat a les àrees dels triangles anteriors, l’àrea del triangle *OAC*:

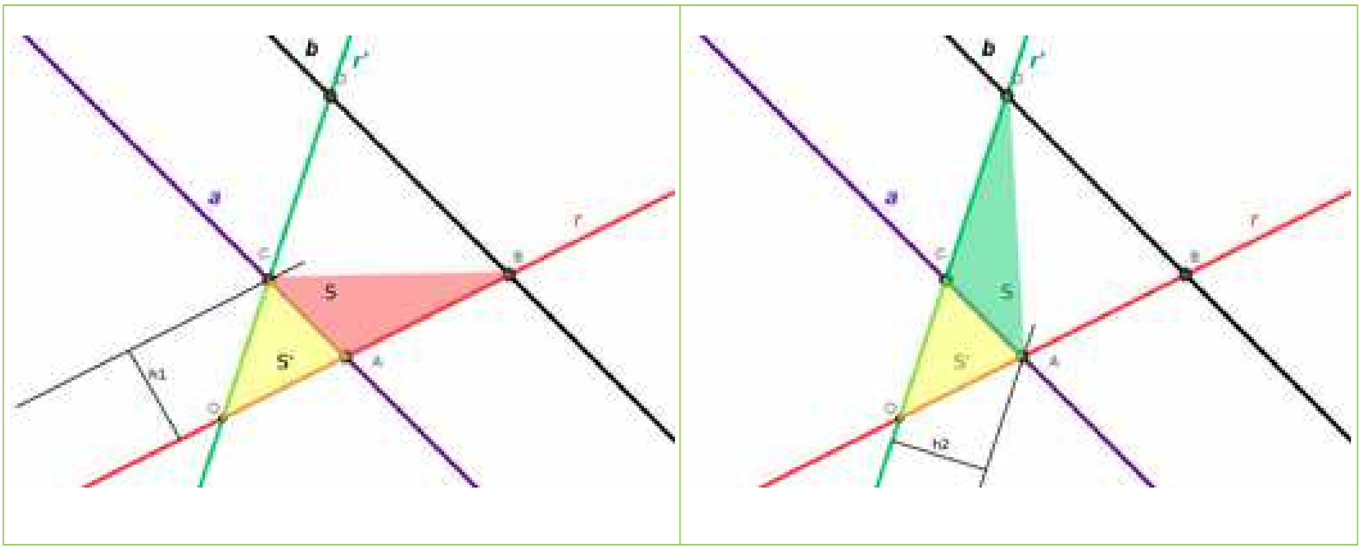
Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

Àrea (*OCB*) = *Àrea* (*OAD*) = S + S'



- Calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *OBC*. Per a calcular les àrees, prenem les bases que estan sobre la recta ***r***, llavors l'altura d'ambdós triangles és la mateixa perquè tenen el vèrtex *C* comú, per la qual cosa el quocient entre les seues àrees és igual al quocient entre les seues bases.
- De la mateixa manera calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *OAD* prenent ara les bases sobre la recta ***r'*** i l'altura, que és la mateixa, la del vèrtex comú *A*:

$$\frac{Àrea(OAC)}{Àrea(OBC)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OA\cdot h_1/2}{OB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{OB} \qquad \frac{Àrea(OAC)}{Àrea(OAD)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OC\cdot h_2/2}{OD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{OD}$$

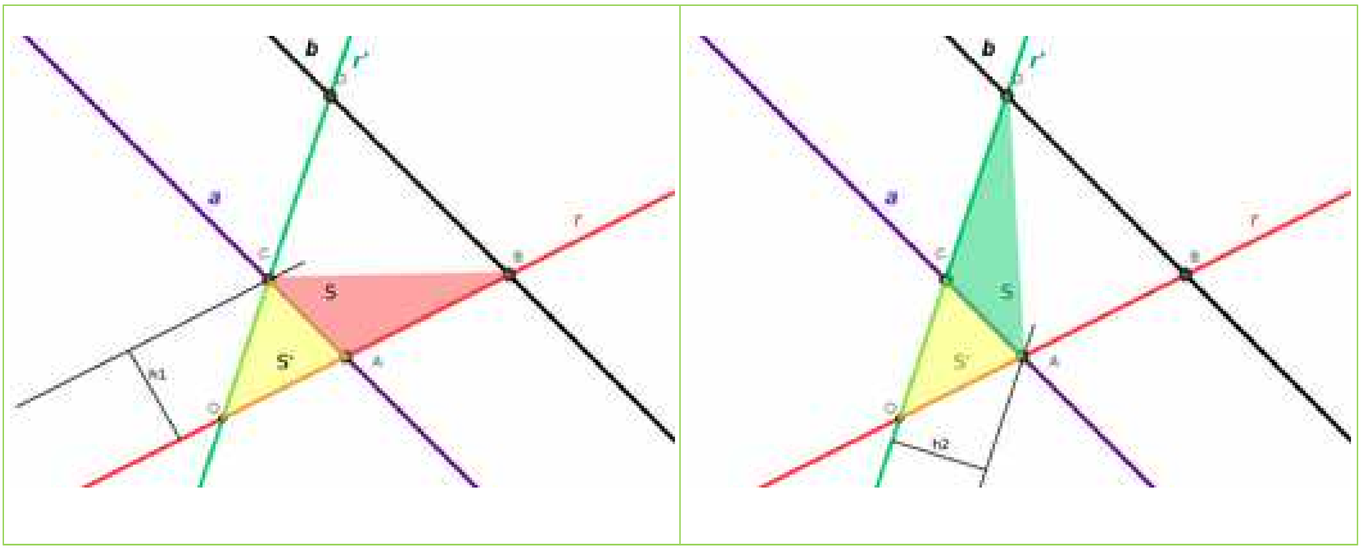


- Ja hem demostrat que *Àrea* (*OBC*) = *Àrea* (*OAD*) = S, substituint:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(OBC)}=\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \quad \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

- Per a obtindre l'altra relació de proporcionalitat utilitzem un raonament semblant. Calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *ABC* prenent les bases sobre la recta ***r*** i l'altura del vèrtex comú *C*.
- Després calculem el quocient entre les àrees dels triangles *OAC* i *ADC* prenent les bases sobre la recta ***r'*** i l'altura, que és la mateixa, des del vèrtex comú *A*, per la qual cosa aqueix quocient és proporcional a les bases *OC* i *CD*:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Però com les àrees *d'ABC* i *d'ADC* (S) són iguals s'obté:

$$\frac{\grave{A}rea(OAC)}{\grave{A}rea(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD} \quad \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2) s'aconsegueix la primera afirmació del teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Activitats resoltes

- *Demostra que si* $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ *aleshores* $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecte, si diem que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtenim que:

$OA=k\cdot OC;\ OB=k\cdot OD;\ AB=k\cdot CD \quad => \quad OA+OB+AB=k\cdot OC+k\cdot OD+k\cdot CD=k\cdot(OC+OD+CD)$

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

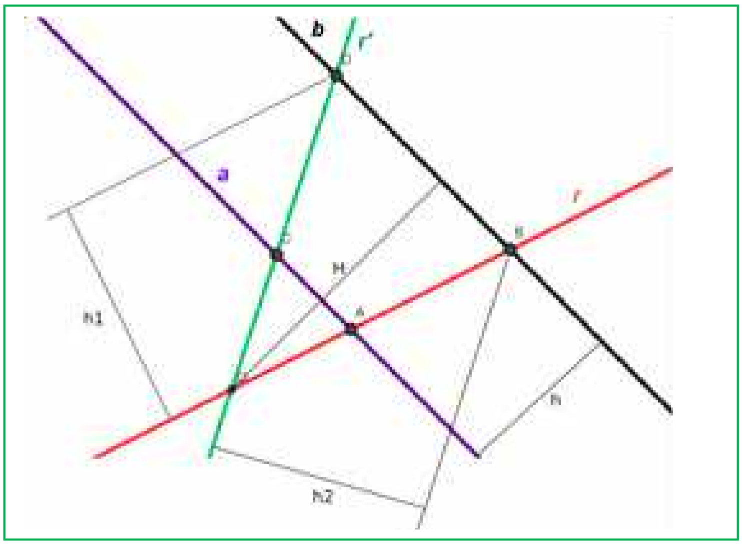
I aïllant *k* hem aconseguit provar que:

$$k = \frac{OA + OB + AB}{OC + OD + CD} \text{ i per tant}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}, \text{ el teorema de Tales.}$$

Siguen OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre d'OAC és 50 cm, i OB mesura 12 cm, BD mesura 9 cm i OD mesura 9 cm. Calcula les longituds dels costats d'OAC.

Utilitzem l'expressió del Teorema de Tales:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$$

substituint les dades:

$$\frac{OA}{12} = \frac{OC}{9} = \frac{AC}{9} = \frac{50}{12 + 9 + 9} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3},$$

pel que aïllant, sabem que:

$OA = 12\frac{5}{3} = 20$ cm;

$OD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm, i

$BD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm.

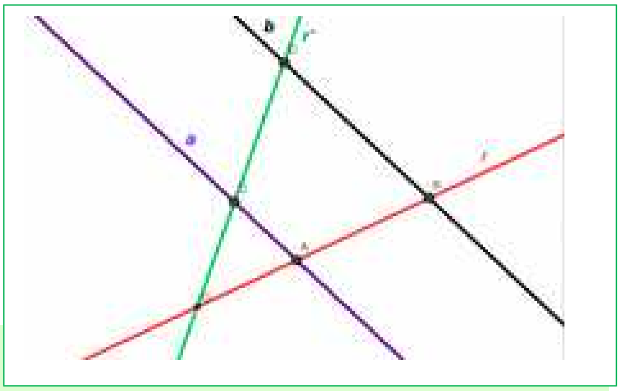
En efecte: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetre del triangle.

Activitats proposades

9. Siguen *ABC* i *AED* dos triangles en posició Tales. Se sap que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m i *AD* = 14 m. Calcula les dimensions *d'AED* i el seu perímetre.

10. *Repte*: Utilitza un full en blanc per a demostrar el teorema de Tales sense ajuda. No cal que utilitzes el mateix procediment que al llibre. Hi ha moltes maneres de demostrar el teorema.

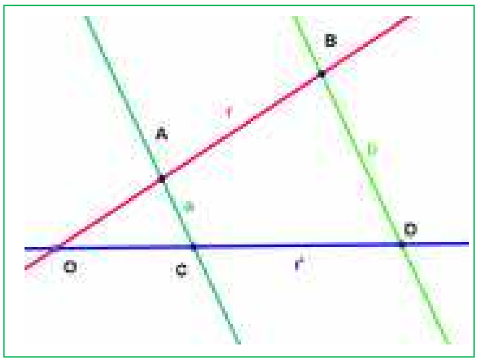
2.3. Recíproc del teorema de Tales



Donades dues rectes, ***r*** i ***r'***, que es tallen en el punt *O*, i dues rectes ***a*** i ***b*** tals que la recta ***a*** talla a les rectes ***r*** i ***r'*** als punts *A* i *C*, i la recta ***b*** talla a les rectes ***r*** i ***r'*** als punts *B* i *D*. Llavors el recíproc del Teorema de Tales afirma que si tots els segments formats pels punts *A, B, C* i *D són* proporcionals, llavors les rectes ***a*** i ***b*** són paral·leles entre sí.

Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ aleshores ***a*** i ***b*** són paral·leles.

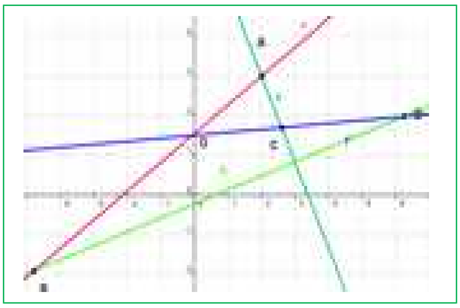
Activitats resoltes



- *A la figura adjunta se sap que OA* = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2'5 cm. Com són les rectes ***a*** i ***b***?

Substituïm a l'expressió del teorema de Tales: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$, que es verifica ja que: $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{1}{2'5}$, per tant les rectes ***a*** i ***b*** són paral·leles, i el segment *AC* és paral·lel a *BD*.

- *A la figura adjunta se sap que OA* = *OC* = 2 cm, i que *OB* = 5 cm = *OD*. Les rectes ***a*** i ***b*** no són paral·leles, per què?



Perquè no verifica el teorema de Tales.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \neq \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \neq \frac{AC}{BD}.$$

No basta amb què es verifique una de les igualtats, han de verificar-se les dues.

Comprovació: Mesura amb un regle els valors *d'AC* i *BD*.

Activitats proposades

11. Siguen *O*, *A* i *B* tres punts alineats i siguen *O*, *C*, *D* altres tres punts alineats en una recta diferent de l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. Podem assegurar que el segment *AC* és paral·lel al segment *BD*? Raona la resposta.

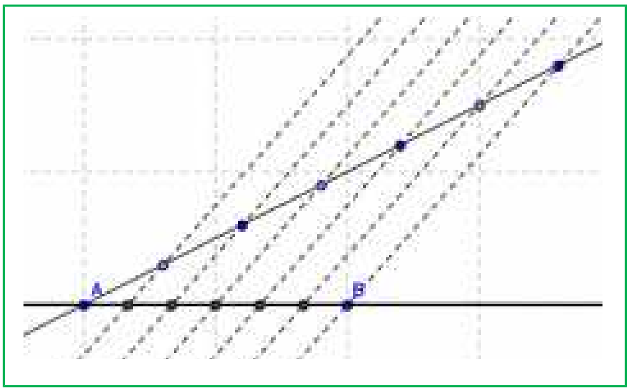
12. Siguen *O*, *A* i *B* tres punts alineats i siguen *O*, *C*, *D* altres tres punts alineats en una recta diferent de l'anterior. Es verifica que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$. Podem assegurar que el segment *AC* és paral·lel al segment *BD*? Raona la resposta.

2.4. Aplicacions del teorema de Tales

En estudiar la representació de nombres racionals a la recta numèrica vam aprendre a representar fraccions per al que era necessari dividir segments en parts iguals.

Recorda que:

Per a dividir un **segment *AB* en *n* parts iguals** es traça una semirecta *r* amb origen en *A* on s'assenyalen, amb ajuda d'un compàs, *n* segments consecutius de la mateixa longitud. L'extrem de l'últim segment s'uneix amb *B*, i es tracen paral·leles a aquest segment per cada un dels punts assenyalats a la semirecta.



Observa que la figura obtinguda és de triangles en posició Tales, i que els segments obtinguts en *AB* són tots de la mateixa longitud.

De la mateixa manera el teorema de Tales ens serveix per a **dividir un segment en parts que tinguen una proporció donada**. El procediment és el mateix que l'anterior. La diferència és que ara únicament ens interessa una de les divisions de la semirecta *r*.

El teorema de Tales també ens permet conèixer molt més sobre la **semblança de triangles**. Si dos triangles són semblants podrem aplicar un moviment a un d'ells (translació, gir o simetria) i col·locar-lo en posició Tales amb el segon, i a partir d'ací utilitzar el teorema de Tales. Açò ho veurem amb més deteniment als apartats següents.

Activitats resoltes

- *A la figura anterior hem dividit el segment AB* en 6 parts iguals. Identifica els 6 triangles en posició de Tales i calcula el factor de semblança respecte al primer.

Els triangles en posició de Tales són els que comparteixen el mateix angle del vèrtex A.
Si anomenem *d* a la distància entre dos talls sobre el segment *AB*, es pot calcular *d* = *AB*/6.
El factor de semblança es calcula mitjançant la proporció entre les seues longituds. En ser triangles en posició Tales, sabem que totes les proporcions són iguals per a tots els costats, per la qual cosa el factor de semblança coincideix amb la proporció entre qualsevol parell de costats, incloent-hi els que coincideixen amb el segment *AB*.

Tenim llavors que la base del primer triangle (el més xicotet) és *d*, i la base del segon triangle és 2 · *d*, així que la raó de semblança d'aquests dos triangles és 2.
De la mateixa manera, les raons de semblança dels altres triangles seran 3, 4, 5 i 6.

Activitats proposades

13. Busca altres relacions de semblança entre els triangles de l'activitat resolta anterior. Per exemple el sisé triangle és el doble que el tercer.

14. Dibuixa al teu quadern un segment i divideix-lo en 5 parts iguals utilitzant regle i compàs. Demostra que, utilitzant el teorema de Tales els segments obtinguts són, en efecte, iguals.

15. Dibuixa al teu quadern un segment de 7 cm de longitud, i divideix-lo en dos segments que estiguen en una proporció de 3/5.

16. Dibuixa al teu quadern una recta numèrica i representa en ella els fraccions següents:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMBLANÇA DE TRIANGLES

3.1. Criteris de semblança de triangles

Com se sap si dues figures són semblants?

Ja saps que:

Dues figures són semblants quan tenen la mateixa forma però distinta grandària. Encara que aquesta definició pot parèixer molt clara en llenguatge natural, no és útil en Matemàtiques, ja que no es pot escriure en llenguatge lògic.

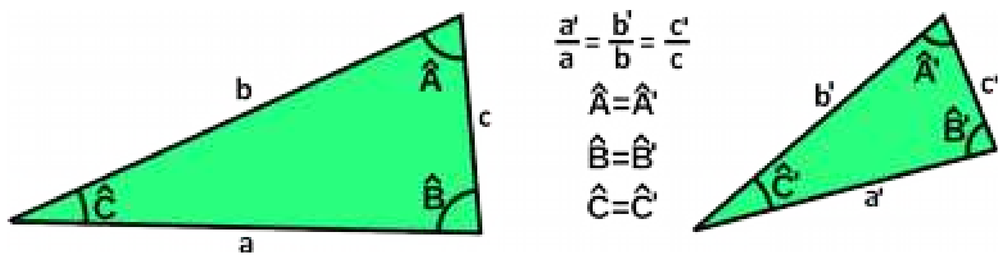
Treballarem la semblança amb la figura més simple que existeix: el **triangle**.

Les dues condicions per a la semblança són la forma i la grandària. Un triangle és una figura formada per tres costats i tres angles.

Dos triangles tenen la mateixa forma si els tres angles són iguals. Si un sol angle és distint tenen distinta forma, i es tracta de triangles no semblants.

Quan dos triangles tenen la mateixa forma, (els mateixos angles), podem parlar de triangles semblants. Si són semblants, la proporció entre els seus costats és constant, com afirma el teorema de Tales.

Dos triangles **semblants** tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.



Per a reconèixer dos triangles semblants no cal conèixer tots els costats i angles, és prou amb què es complisca algun dels següents **criteris de semblança.**

Criteris de semblança de triangles

Perquè dos triangles siguen semblants, han de tindre els seus tres angles iguals. Açò es compleix als següents tres casos.

Dos triangles són semblants sí:

Primer: Tenen dos angles iguals.

En tindre dos angles iguals i ser la suma dels angles d'un triangle igual a 180º, el tercer angle és necessàriament igual. Amb el que ambdós triangles es poden superposar i portar a la posició de triangles en posició Tales. Dos dels seus costats són llavors coincidents i el tercer és paral·lel.

Segon: Tenen els tres costats proporcionals.

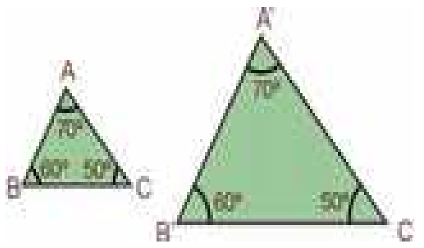
Si els seus tres costats són proporcionals, necessàriament són semblants pel teorema de Tales.

Tercer: Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.

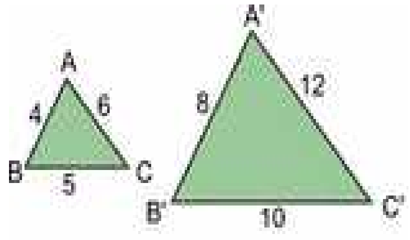
Com acabem de veure, la demostració dels criteris de semblança es basa en els criteris d'igualtat de triangles. Ja saps que dos triangles són iguals si tenen els seus tres costats iguals i els seus tres angles iguals, però no cal que es verifiquen aqueixes sis igualtats perquè ho siguen. Basta per exemple que tinguen un costat i dos angles iguals. Així, es pot construir un triangle igual a un dels donats en *posició Tales* amb el segon i deduir la semblança.

Exemple

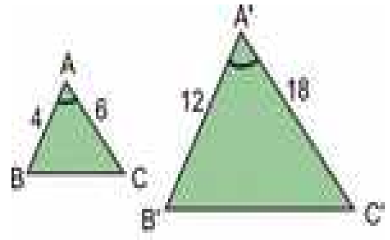
- *Els triangles de les il·lustracions són semblants. Cada una de les figures verifica un dels criteris de semblança de triangles.*



Primer criteri



Segon criteri



Tercer criteri

Activitats resoltes

- *Calcula els valors desconeguts b′* i *c′* perquè els triangles de dades *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm siguen semblants:

Sabem que ha de verificar-se que: *a/a′* = *b/b′* = *c/c′*. En substituir es té: 9/6 = 6/*b′* = 12/*c′* i en aïllar:
b′ = 6·6/9 = 4 cm, *c′* = 12·6/9 = 8 cm.

Activitats proposades

17. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 60º i un altre de 40º. Un angle de 80º i un altre de 60º.
b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80º. Triangle isòsceles amb angle igual de 50º.
c) *A* = 30º, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *A′*= 30º, *b′* = 4 cm, *c′* = 5 cm
d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a′* = 14 cm, *b′* = 16 cm, *c′* = 25 cm

18. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* = 10 cm. *a*' = 5 cm, *b*', *c*'?

b) *A* = 37º, *b* = 10 cm, c = 12 cm. *A′* = 37º, *b*' = 10 cm, *c*'?

19. Un triangle té costats de 12 cm, 14 cm i 8 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 80 cm. Quant mesuren els seus costats?

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

3.2. Semblança de triangles rectangles: Teorema de l'altura i del catet

Els triangles rectangles tenen un angle de 90º, així que perquè dos triangles rectangles siguen semblants n'hi ha prou amb que tinguen un altre angle igual.

Si dos triangles rectangles tenen un angle, diferent del recte, igual, són semblants i els seus costats són proporcionals.

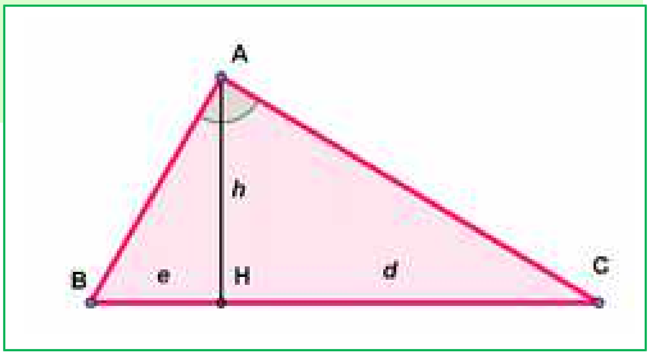
A causa d'açò, l'altura sobre la hipotenusa, divideix al triangle rectangle en dos nous triangles rectangles que són semblants, (perquè comparteixen un angle amb el triangle de partida).

Utilitzant ara que els costats són proporcionals podem escriure dos teoremes, el teorema de l'altura i el del catet.

Teorema de l'altura

A un triangle rectangle l'altura és mitja proporcional entre els segments en què divideix a la hipotenusa:

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h}.$$



En efecte, siguen les longituds de l'altura *AH* = *h*, del segment *BH* = *e*, i del segment *HC* = *d*, en ser el triangle *ABC* semblant al triangle *ABH* i al seu torn semblant al triangle *AHC*, aquests dos triangles són semblants, per la qual cosa els seus costats són proporcionals, per la qual cosa:

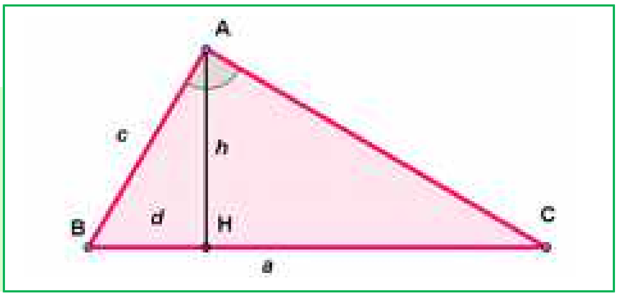
Catet menor de *AHC* / catet menor de *ABH* = Catet major de *AHC* / catet major de *ABH* $\Rightarrow$

$$\frac{h}{e} = \frac{d}{h},$$

o el que és el mateix:

$$h^2 = e \cdot d.$$

Teorema del catet



A un triangle rectangle un catet és mitja proporcional entre la hipotenusa i la seua projecció sobre ella:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{d}.$$

Per la semblança dels triangles *ABC* i *HBA* sabem que els costats corresponents són proporcionals, per la qual cosa:

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

hipotenusa del triangle gran *ABC* / hipotenusa del triangle xicotet *AHB* = catet menor del triangle gran *ABC* / catet menor del triangle xicotet *AHB*

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d},$$

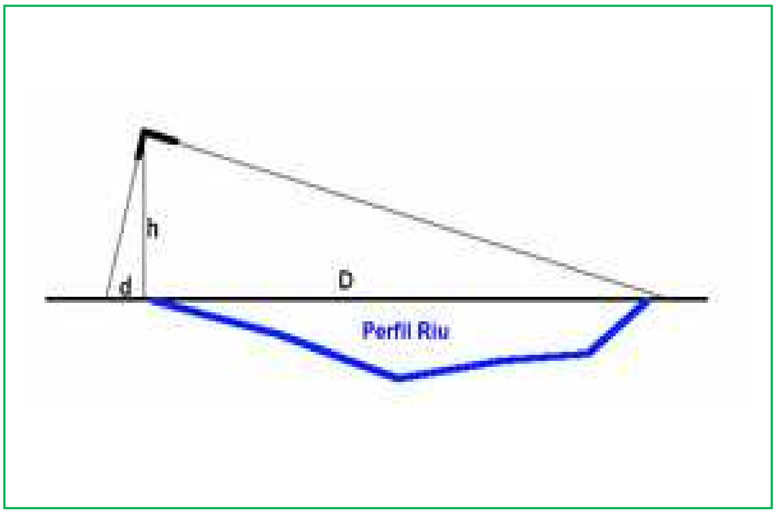
o el que és el mateix:

$$c^2 = a\cdot d.$$

Activitats resoltes

- *Ens han encarregat mesurar l'ample d'un riu en diversos punts del curs. En la majoria dels punts hem pogut mesurar-lo amb una corda, però hi ha un eixamplament en què no podem mesurar-lo així. Inventarem un mètode que aplica el teorema de l'altura que ens permeta mesurar-lo.*

Anem a una botiga i comprem dos punters làser. A continuació els unim formant un angle de 90º. Després anem a la part del riu que volem mesurar i enfoquem un d'ells cap a l'altra vora fins que vegem el punter. Ara busquem el punter de l'altre làser que havíem col·locat a 90º i marquem sobre el sòl.



Després de mesurar l'altura a què sostenim els punters i la distància de la base fins al segon punter, tenim les dades següents:

d = 5 cm i h = 150 cm.

Aplicant el teorema de l'altura, sabem que:

$h^2 = d \cdot D$, així que $D = h^2/d$.

Per tant $D = 150^2/5 = 4500$ cm = 45 metres.

Activitats proposades

20. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura l'altura sobre la hipotenusa?

21. Els catets d'un triangle rectangle mesuren 3 i 4 cm, quant mesura la projecció sobre la hipotenusa de cada un d'aqueixos catets?

22. Dibuixa els tres triangles semblants per al triangle rectangle de catets 3 i 4 en posició de Tales.

3.3. Aplicació informàtica per a la comprensió de la semblança

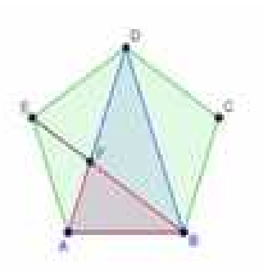
La semblança en un pentàgon regular

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la semblança de diferents triangles que podem dibuixar en un pentàgon regular calculant de forma aproximada la seua raó de semblança. També es comprova la relació que existeix entre la raó entre les àrees de dues figures semblants i la seua raó de semblança.

Activitats resoltes

Càlcul de la raó de semblança

Obri una finestra de *Geogebra,* al menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadrícula** i al menú **Opcions** tria en **Retolat** l'opció **Només els nous punts**.

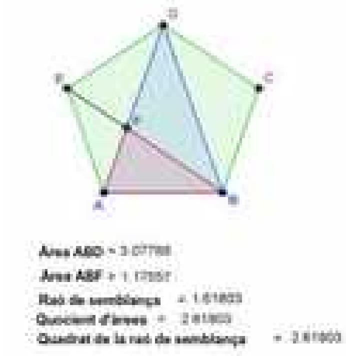


- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa amb polígon **regular** el pentàgon que té com a vèrtexs els punts *A* i *B*.
- Dibuixa amb **Polígon** el triangle *ABD, utilitza* **Segment** per a dibuixar la diagonal *BE* i defineix el punt *F* com a punt **d'intersecció de dos objectes** (les diagonals *AD* i *BE*), determina amb **polígon** el triangle *ABF*. És convenient canviar el color de cada un dels polígons dibuixats per a reconèixer-los en la finestra algebraica, per a açò utilitza l'opció **Propietats** del menú contextual en situar el curs sobre el polígon o sobre el seu nom en la finestra algebraica
- Els triangles *ABD* i *ABF* són semblants. Saps demostrar per què?

Recorda que és prou demostrar que tenen dos angles iguals i com els angles interiors d'un pentàgon regular mesuren 108º, és evident que en el triangle isòsceles *ABD* l'angle desigual mesura 36º i els angles iguals 72º. En el triangle *ABF*, l'angle *ABF* mesura 36º i el *BAF,* 72º per tant els triangles són semblants i a més l'angle *BFA* també mesura 72º.

- Utilitza la ferramenta de *Geogebra* que permet mesurar angles per a comprovar aquests resultats.
- Per a trobar la raó de semblança calculem el quocient entre dos costats corresponents d'aquests triangles, per exemple, *BD* i *AD*, és a dir entre una diagonal i un costat del pentàgon. Per a fer-ho amb Geogebra definim en la línia d'entrada la variable **raódesemblança = f/a** (*f* és una diagonal i *a* un costat), observem en la finestra algebraica que aquest valor és 1,62, si augmentem el nombre de decimals en **Arrodoniment** del menú **Opcions** comprovem que aquest valor és una aproximació del nombre d'or.

La raó de semblança i el quocient entre les àrees.



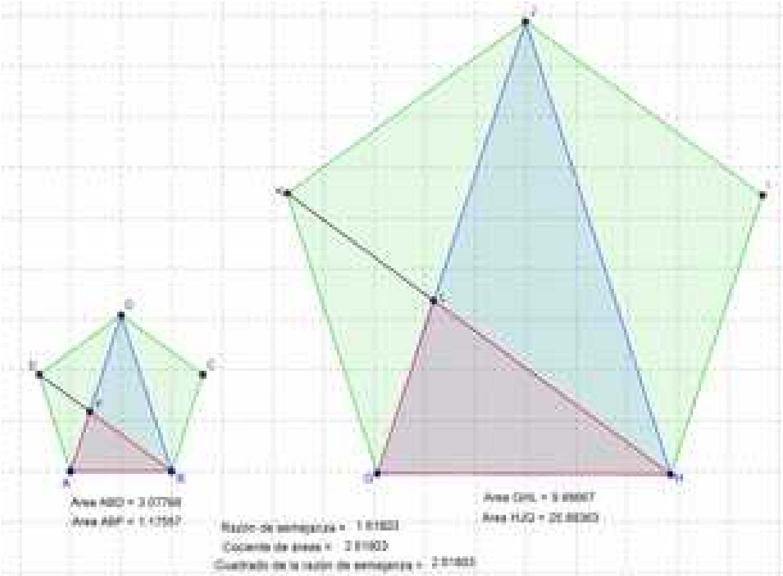
- Defineix en la línia d'entrada la variable **quocientdeàrees =polígon2/polígon3**, sent el polígon2 el triangle *ABD* i el polígon3 l'*ABF*
- Defineix, també, en la línia d'entrada la variable **quadratraódesemblança = raódesemblança^2.** Observa com el quadrat de la raó de semblança coincideix amb el quocient entre les àrees. Augmenta el nombre de decimals per a comprovar que aquests valors coincideixen.
- Utilitza la ferramenta **Àrea** perquè aparega en la pantalla gràfica l'àrea dels triangles *ABD* i *ABF*, i **Inserir text** perquè apareguen els valors de la raó de semblança, el quocient entre les àrees i el quadrat de la raó de semblança.

Activitats proposades

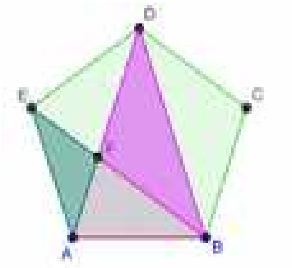
Comprova aquests resultats en un altre pentàgon

23. Dibuixa un pentàgon *GHIJK* de la mateixa manera que has construït l'ABCDE *amb* la condició que la longitud dels seus costats siga el triple de què ja està construït. Per a facilitar la tasca pots activar la **quadrícula** i moure els punts inicials.

a) Calcula les àrees dels triangles *HJG* i *GHL*, la seua raó de semblança, el quocient entre les seues àrees i el quadrat de la raó de semblança.

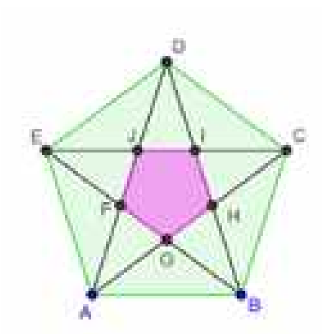


b) Comprova que la raó de semblança, el quocient entre les àrees i el quadrat de la raó de semblança dels triangles *GHJ* i *GHL* del pentàgon *GHIJK* coincideixen amb les dels triangles *ABD* i *ABF* del pentàgon *ABCDE.*



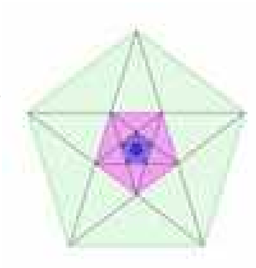
24. Calcula les àrees dels dos pentàgons i relaciona el seu quocient amb el quadrat de la raó de semblança.

25. *Altres triangles del pentàgon.* Investiga si els triangles *AFE* i *BDF són* semblants i si ho són calcula la seua raó de semblança, el quocient entre les seues àrees i compara aquest resultat amb el quadrat de la raó de semblança.



26. *Pentàgon dins d'un pentàgon.* Dibuixa el pentàgon *FGHIJ* que es forma en el pentàgon *ABCDE* en traçar les seues diagonals ambdós són semblants perquè són polígons regulars. Calcula la raó de semblança i el quocient entre les seues àrees. Observa els triangles AGF i ABD són semblants?

27. Observa els pentàgons regulars de la figura: a) Són tots semblants? b) Et pareix que el procés de dibuixar pentàgons dins de pentàgons és infinit Per què? c) Quina és la successió de les raons de semblança entre el pentàgon major i cada un dels següents?



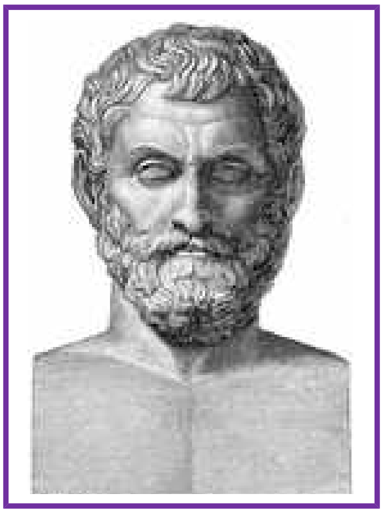
Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

CURIOSITATS. REVISTA

Tales de Milet (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre la vida de Tales se sap molt poc. Els antics opinaven que era excepcionalment intel·ligent sent considerat un dels Set Savis de Grècia, i que havia viatjat i conegut els sabers d'Egipte i Babilònia.

Però no hi ha cap document que certifique cap cosa sobre la seua vida, i és probable que no deixara cap obra escrita a la seua mort. Eudemo de Rodes va escriure una història de les Matemàtiques, que es va perdre, però algú va fer un resum d'una part, que també es va perdre, i al segle V d.C. Proclo va incloure part del dit resum en un comentari sobre els elements d'Euclides. Això és el que sabem sobre Tales i la Matemàtica!



Hi ha moltes llegendes sobre la seua vida com que:

* Es va fer ric llogant unes almàsseres durant un any en què la collita d'oliva va ser abundant
* Va ser mercader de sal
*Va ser observador de les estreles. Un dia, per mirar les estreles va caure a un pou, i quan es reien d'això va dir que volia conéixer les coses del cel, però que el que estava als seus peus se li escapava.
* Va ser un home d'estat
* Va dirigir una escola de nàutica

Sobre matemàtiques se li atribueixen diversos teoremes, encara que alguns ja eren coneguts pels babilonis, però potser ell va utilitzar un raonament deductiu. Per exemple, es diu que va demostrar:

* Un angle inscrit en una semicircumferència és un angle recte
* Un diàmetre divideix a un cercle en dues parts iguals
* Un triangle isòsceles té dos angles iguals
* Dos triangles amb dos angles iguals i un costat igual, són iguals
* Els angles oposat pel vèrtex són iguals

A què tots aquests teoremes ja te'ls sabies tu?

A més de dir-se d'ell que:

* va predir un eclipsi,
* va construir un canal per a desviar les aigües d'un riu perquè el creuara un exèrcit

i també es diu que va utilitzar la semblança de triangles per a

* calcular l'altura de la piràmide de Keops,
* la distància d'un vaixell a la platja

¿Sabrías el teu resoldre aqueixos dos últims problemes?

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

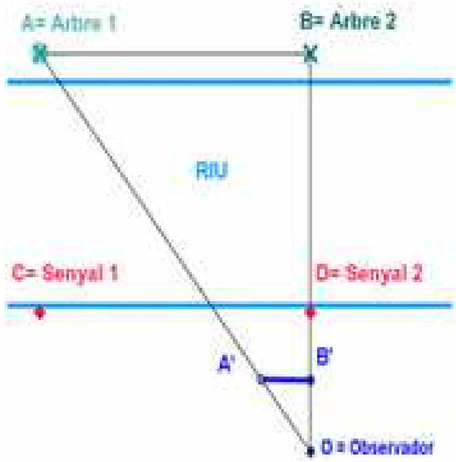
Alguns problemes

Calcula l'altura de la Piràmide de Keops sabent que la seua ombra medeix 175,93 metres i que, al mateix temps l'ombra d'un bastó d'altura un metre, medeix 1,2 metres.

Calcula l'altura d'un arbre sabent que la seua ombra medeix 15 metres i que, al mateix temps l'ombra d'un pal d'altura un metre, medeix 1,5 metres.

* Uns exploradors troben un riu i volen construir una passarel·la per a creuar-lo, però, com conéixer l'amplària del riu, si no podem anar a l'altra vora? Pensa! Pensa! Segur que se t'acuden moltes bones idees, millors que la que t'anem a comentar a continuació.

*Busques a la vora oposada dos arbres, (o dues roques, o ...), *A* i *B*. Col·locant-te a la teua vora perpendicular a ells, marques dos senyals, (Senyal 1 i Senyal 2), i mesures així la distància entre eixos dos arbres. Ara mesurant angles dibuixes dos triangles semblants. Un, a la teua vora, el pots mesurar, i per semblança de triangles calcules els costats de l'altre.



Imagina que la distància *CD* és de 10 metres, que *A'B'* medeix 2 metres i que *OB'* = 2,5 m. Quant mesura *OB*? Si *OD* medeix 5 metres, quant mesura l'amplària del riu?

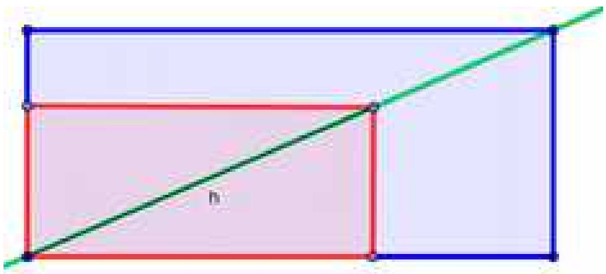
Pensa! Pensa!

Com podries conéixer a quina distància de la costa està un vaixell?

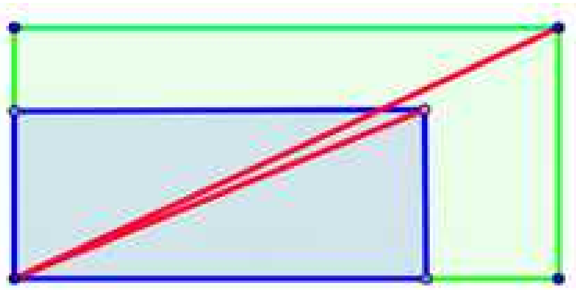
Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

Rectangles semblants

Per a saber si dos rectangles són semblants es col·loquen un sobre l'altre, amb dos costats comuns, i si tenen la mateixa diagonal, són semblants



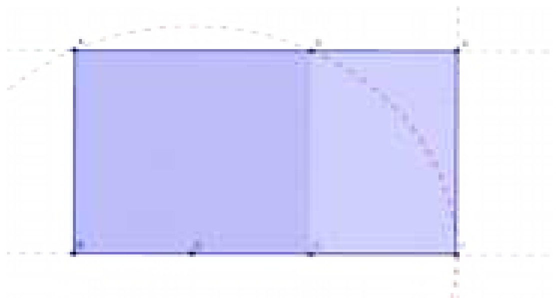
Rectangles semblants



No són semblants

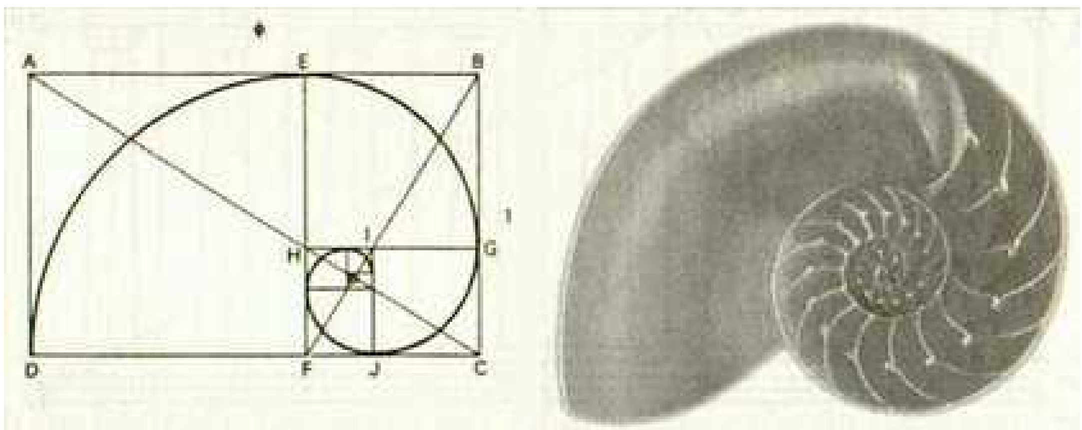
Rectangle auri

Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria. Tots els rectangles auris són semblants.



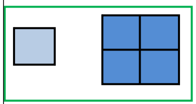
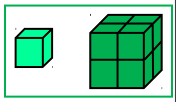
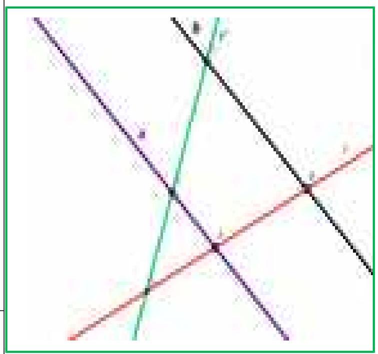
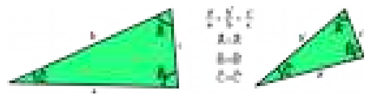
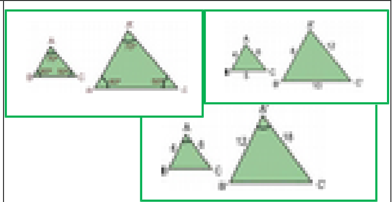
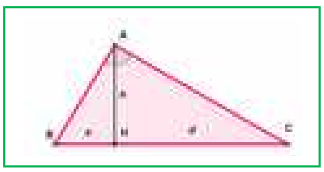
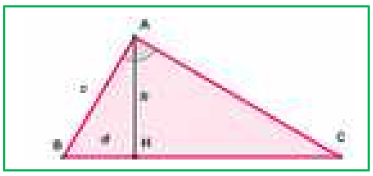
Si a un rectangle auri se li lleva (o afig) un quadrat, s'obté un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

Pots construir una espiral amb rectangles auris com indica la figura



Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

RESUM

		Exemples
Figures semblants	Si les longituds d’elements corresponents són proporcionals.	
Raó de semblança	Coeficient de proporcionalitat	
Semblança en longituds, àrees i volums	Si la raó de semblança entre les longituds d’una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és k^2 i entre els seus volums és k^3.	 
Teorema de Tales	Donades dues rectes, *r* i *r’*, que es tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r’* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r’* als punts *B* i *D*. Llavors: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproc del teorema de Tales	Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ llavors ***a*** i ***b*** són paral·leles.	
Semblança de triangles	Dos triangles són **semblants** si tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants sí: **Primer:** Tenen dos angles iguals. **Segon:** Tenen els tres costats proporcionals. **Tercer:** Tenen dos costats proporcionals i l’angle que formen és igual.	
Teorema de l’altura	En un triangle rectangle l’altura és mitja proporcional dels segments en què divideix a la hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$	
Teorema del catet	En un triangle rectangle un catet és mitja proporcional entre la hipotenusa i la seua projecció sobre ella: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$.	

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

EXERCICIS I PROBLEMES

Figures semblants

1. Busca fotografies, plans, fotocòpies, figures a escala, etc. pren mesures i determina les raons de semblança. Calcula les mesures reals i comprova que la raó de semblança obtinguda és correcta.

2. En un mapa de carretera d'escala 1:3000 la distància entre dues ciutats és de 2,7 cm. Calcula la distància real entre les dites ciutats.

3. Un microscopi té un augment de 500X, quina grandària té la imatge que es veu per l'objectiu si observem un parameci de 0,034 mm de diàmetre?

4. Pèricles va morir de pesta l'any 429 a. C. Consultat l'oracle d'Apol·lo havien de construir un altar en forma de cub el volum del qual duplicara exactament el que ja existia. Quin havia de ser la raó de proporcionalitat dels costats? És possible construir exactament un cub amb la dita raó?

5. En una fotografia una persona que sap que medeix 1,75 m té una alçària de 2,3 cm. Apareix un arbre que en la fotografia mesura 5,7 cm, quant medeix a la realitat?

6. Quant mesura el costat d'un icosaedre la superfície del qual és el triple del d'un altre icosaedre de costat 4 cm?

7. Suposem que una bresquilla és una esfera, i que el seu os té un diàmetre que és un terç del de la bresquilla. Quant és major la polpa de la bresquilla que el seu os?

8. Són semblants tots els quadrats? I tots els rombes? I tots els rectangles? Quan són semblants dos rombes? I dos rectangles?

9. L'àrea d'un rectangle és 10 cm^2, i un dels seus costats medeix 2 cm, quina àrea té un rectangle semblant a l'anterior en el que el costat corresponent medeix 1 cm? Quin perímetre té?

10. Són semblants totes les esferes? I els icosaedres? I els cubs? I els dodecaedres? Quan són semblants dos cilindres?

11. L'aresta d'un octaedre medeix 7,3 cm, i la d'un altre 2,8 cm. Quina relació de proporcionalitat hi ha entre les seues superfícies? I entre els seus volums?

12. La mesura normalitzada A$ té la propietat que partim el rectangle per la mitat de la seua part més llarga, el rectangle que s'obté és semblant al primer. Duplicant, o dividint s'obtenen les dimensions dels rectangle A1, A2, A3, A4, A5…. El rectangle A4 medeix 29,7 cm x 21 cm. Determina les mesures d'A3 i de A5.

13. Dibuixa un pentàgon regular i traça les seues diagonals. Tens un nou pentàgon regular. Quina és la raó de semblança?

14. Dibuixa al teu quadern un pentàgon regular i traça les seues diagonals. Quant mesuren els angles del triangle format per un costat del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat? Aquest triangle es denomina *triangle auri*, perquè en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or. En la figura que has traçat hi ha altres triangles semblants a l'auri, quina relació de proporcionalitat hi ha entre ells?

15. El mapa a escala 1:1500000 d'una regió té una àrea de 1600 cm^2, quant mesura la superfície verdadera de la dita regió?

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

16. Eratòstenes d'Alexandria (276 – 196 a. C.) va observar que a Siena la direcció dels rajos solars era perpendicular a la superfície de la Terra al solstici d'estiu. Va viatjar seguint el curs del Nil una distància de 790 km (5 mil estadis) i va mesurar la inclinació dels rajos del sol al solstici d'estiu a Alexandria que era de α = 7º 12'. Va utilitzar la proporcionalitat: $2\pi R/790 = 360º/\alpha$ per a determinar el radi de la Terra. Què va obtindre?

17. Tenim un conjunt de rectangles de costats: A: 4 i 7, B: 2 i 5, C: 8 i 14, D: 4 i 10, E: 3 i 7, F: 9 i 21. Indica quins són semblants. Dibuixa i retalla el rectangle A, i dibuixa la resta de rectangles. Superposa el rectangle A amb els altres rectangles i explica que observes amb el que és semblant. Quina longitud té l'altre costat d'un rectangle semblant a A el costat menor del qual mesure 10 cm?

El teorema de Tales

18. Divideix un segment qualsevol en 5 parts iguals utilitzant el teorema de Tales. Sabries fer-ho per un altre procediment exacte?

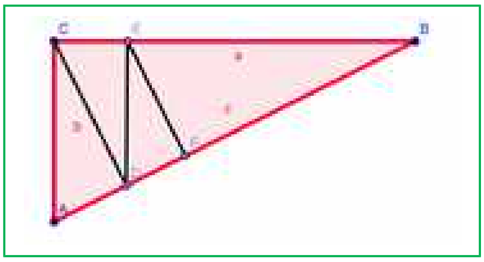
19. Divideix un segment qualsevol en 3 parts proporcionals a 2, 3, 5 utilitzant el teorema de Tales.

20. Si algú mesura 1'75 m i la seua ombra mesura 1 m, calcula l'altura de l'edifici l'ombra del qual mesura 25 m a la mateixa hora.

21. Un rectangle té una diagonal de 75 m. Calcula les seues dimensions sabent que és semblant a un altre rectangle de costats 36 m i 48 m.

22. Siguen *OAC* i *OBD* dos triangles en posició Tales. El perímetre *d'OBD* és 200 cm, i *OA* medeix 2 cm, *AC* medeix 8 cm i *OC* medeix 10 cm. Determina les longituds dels costats d'OBD.

23. Al museu de Bagdad es conserva una taula en què apareix dibuixat un triangle rectangle *ABC*, de costats *a* = 60, *b* = 45 i *c*= 75, subdividit en 4 triangles rectangles menors *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*, i l'escriba ha calculat la longitud del costat *AD*. Utilitza el teorema de Tales per a determinar les longituds dels segments *AD*, *CD*, *DE*, *DF*, *EB*, *BF* i *EF*. Calcula l'àrea del triangle *ABC* i dels triangles *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*.



Semblança de triangles

24. El triangle rectangle *ABC* té un angle de 54º i un altre triangle rectangle té un angle de 36º. Podem assegurar que són semblants? Raona la resposta.

25. La hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 25 cm i l'altura sobre la hipotenusa medeix 10 cm, quant medeixen els catets?

26. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 50º i un altre de 40º. Un angle de 90º i un altre de 40º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 40º. Triangle isòsceles amb un angle igual de 70º.

c) *A* = 72º, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72º, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

27. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, b', c'?

b) A = 45º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 24 cm, a'?

28. Les longituds dels costats d'un triangle són 7 cm, 9 cm i 10 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 65 cm. Quant mesuren els seus costats?

29. L'ombra d'un edifici medeix 23 m, i la del primer pis 3 m. Sabem que l'altura d'aqueix primer pis és de 2,7 m, quant medeix l'edifici?

30. Demostra que en dos triangles semblants les bisectrius són proporcionals.

31. Un triangle rectangle isòsceles té la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un catet d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees d'ambdós triangles?

32. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Són semblants? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seues àrees?

33. L'altura i la base d'un triangle isòsceles mesuren respectivament 7 i 5 cm; i és semblant a un altre de base 12 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees d'ambdós.

34. Els triangles següents són semblants. Esbrina la mesura dels angles que falten sabent que:

a) Són rectangles i un angle del primer triangle medeix 52º.

b) Dos angles del primer triangle medeixen 30º i 84º.

35. Els triangles següents són semblants. Esbrina les mesures que falten sabent que:

a) Els costats del primer triangle mesuren 10 m, 15 m i z m. Els del segon: x m, 9 m i 8 m.
b) Els costats del primer triangle mesuren 4 m, 6 m i 8 m. Els del segon: 6 m, x m i z m.
c) Un costat del primer triangle mesura 12 cm i l'altura sobre el dit costat 6 cm. El costat corresponent del segon mesura 9 cm, i l'altura x cm
d) Un triangle isòsceles té l'angle desigual de 35º i el costat igual de 20 cm i el desigual de 7 cm; l'altre té el costat igual de 5 cm. Quant mesuren els seus altres costats i angles?

36. Enuncia el primer criteri de semblança de triangles per a triangles rectangles.

37. Els egipcis usaven una corda amb nucs, tots a la mateixa distància, per a obtindre angles rectes. Formaven triangles de longitud 3, 4 i 5. Per què? Els indis i els xinesos usaven un procediment semblant encara que utilitzant cordes amb els nucs separats en 5, 12 i 13, i també 8, 15 i 17. Per què? Escriu les longituds dels costats de triangles semblants als indicats.

38. Es vol calcular l'altura d'un arbre per al que es mesura la seua ombra: 13 m, i l'ombra d'un pal de 1'2 m de longitud, 0,9 m. Quina altura té l'arbre?

39. Ara no podem usar el procediment de l'ombra perquè l'arbre és inaccessible (hi ha un riu al mig) però sabem que està a 30 m de nosaltres. Com ho faries? Josep ha agafat un llapis que mesura 10 cm i ho ha col·locat a 50 cm de distància. D'aquesta manera ha aconseguit veure alineat la base de l'arbre amb un extrem del llapis, i la punta de l'arbre amb l'altre. Quant mesura aquest arbre?

40. Arquimedes calculava la distància a què estava un vaixell de la costa. Amb una esquadra ABC alineava els vèrtexs BC amb el vaixell, C', i coneixia l'alçària del penya-segat fins al vèrtex B. Dibuixa la situació, determina quins triangles són semblants. Calcula la distància del vaixell si BB' = 50 m, BA=10 cm, AC = 7 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i Jorge Muñoz

AUTOAVALUACIÓ

1. En un mapa de carretera d'escala 1:1200 la distància entre dos pobles és de 5 cm. La distància real entre els dits pobles és de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Si un microscopi té un augment de 1000X, quina grandària (aparent) penses que tindrà la imatge que es veja per l'objectiu si observem una cèl·lula de 0,01 mm de diàmetre

a) 1 cm b) 1 mm c) 0,1 cm d) 100 mm

3. Volem construir un quadrat d'àrea doble d'un d'un metre de costat. El costat del nou quadrat ha de mesurar:

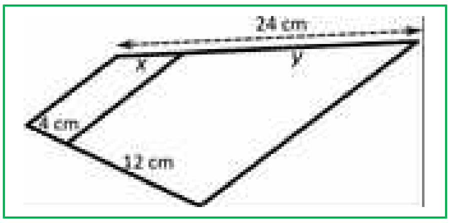
a) 2 metres b) $\sqrt{2}$ metres c) $\sqrt[3]{2}$ metres d) 1,7 metres

4. Siguen *OAC* i *OBD* dos triangles en posició *Tales*. El perímetre *d'OBD* és 50 cm, i *OA* medeix 1 cm, *AC* medeix 1,5 cm i OC medeix 2,5 cm. Les longituds dels costats *d'OBD* són:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. En la figura adjunta els valors de *x* i *y* són:



a) 6 i 12 cm b) 5 i 19 cm c) 6 i 18 cm d) 5 i 20 cm

6. Els triangles *ABC* i *DEF* són semblants. Els costats *d'ABC* medeixen 3, 5 i 7 cm, i el perímetre de *DEF* medeix 60 m. Els costats de *DEF* medeixen:

a) 6, 10 i 14 cm b) 12, 20 i 28 cm c) 9, 15 i 21 m d) 12, 20 i 28 m

7. Dos triangles rectangles són proporcionals si:

a) Tenen els catets proporcionals

b) Tenen un angle igual

c) Tenen un angle diferent del recte igual

d) Les seues àrees són proporcionals

8. Els triangles *ABC* i *DEF* són semblants. L'angle A medeix 30º, i B, 72º. Quant medeixen els angles *D*, *E* i *F*?

a) *D* = 72º, *E* = 78º i *F* = 30º b) *D* = 30º, *E* = 88º i *F* = 72º c) *D* = 30º, *E* = 72º i *F* = 68º

9. L'altura d'un triangle rectangle divideix a la hipotenusa en dos segments de longitud 5 i 4 cm, quant medeix l'altura?

a) 5,67 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. La projecció d'un catet sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 4 cm, i la hipotenusa 9 cm, quant medeix el catet?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5,67 cm d) 6 cm.