Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4t B ESO
Capítol 1:
Nombres reals

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Revisors: Javier Rodrigo i Sergio Hernández

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

Nombres reals. 4t B d'ESO

Índex

Resum

Ja coneixes els nombres naturals, els nombres enters i els nombres racionals. En aquest capítol estudiarem els nombres reals que estan formats pels nombres racionals i els irracionals. Per tant, amb alguns nombres reals irracionals ja t'havies trobat, amb $\sqrt{2}$, amb π…

Però hi ha molts, molts més. Hi ha molts més nombres irracionals que racionals. I et preguntaràs, com pot dir això si són infinits? Resulta que hi ha infinits més grans que altres. A l'infinit dels nombres naturals se li denomina "infinit numerable". Resulta que el dels nombres enters i dels nombres racionals també és "infinit numerable", però el dels nombres reals ja no és numerable, és molt major, se li denomina "la potència del continu". Una de les seues propietats més importants és la seua relació amb els punts d'una recta, per la qual cosa aprendrem a representar-los en la recta "real" en la que no deixen "forats".

Com els nombres irracionals tenen infinites xifres decimals no periòdiques és complicat utilitzar-los tal qual, així que aprendrem a aproximar-los i calcular l'error que per això, cometem.

1. NOMBRES RACIONALS I IRRACIONALS

Et recordem els distints tipus de nombres que ja coneixes:

Naturals ➔ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres que s'usen per a comptar i ordenar. El 0 pot incloure's o no, dependrà del teu professor.

Enters ➔ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres naturals i els seus oposats. No tenen part decimal, d'ací el seu nom. Inclouen als Naturals.

Als nombres que es poden expressar en forma de quocient de dos nombres enters se'ls denomina **nombres racionals** i se'ls representa per la lletra $\mathbb{Q}$.

Per tant

Racionals➔ $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Els nombres racionals inclouen als enters.

També contenen als nombres que tenen expressió decimal exacta (0,12345) i als que tenen expressió decimal periòdica (7,01252525…) com veurem.

Notació:

$\in$ vol dir "pertany"

$\cup$ vol dir "unió"

$\subset$ vol dir "incluit"

$\cap$ vol dir "intersecció"

1.1. Expressions decimals finites o periòdiques

Recorda que:

- Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 l'expressió decimal és exacta.

Exemple:

Així per exemple $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}025$; ja que $\frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, i açò és general ja que sempre hi haurà una potència de 10 que siga múltiple del denominador si aquest només conté dosos o cincs. Fixa't que el nombre de decimals és el major dels exponents de 2 i 5.

- Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no siga 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.
- Si suposem un nombre *n* amb factors primers diferents de 2 i 5, aleshores

$$\frac{1}{n} = m \cdot 10^{-a} \Rightarrow \frac{10^a}{n} = m ,$$

però el denominador no pot donar un quocient exacte en dividir al numerador, ja que 10 només té els factors 2 i 5. Això ens demostra que l'expressió decimal no pot ser exacta.

Vegem que és periòdica:

Exemple:

Amb un exemple ens bastarà, si dividim 1 entre 23 obtenim un primer residu que és 10, després un altre que és 8 i seguim, però, es repetirà alguna vegada la resta i per tant les xifres del quocient?, la reposta és que sí, segur que sí, els residus són sempre menors que el divisor, en aquest cas de l'1 al 22, si jo obtinc 22 residus diferents (com és el cas) en traure un més ha de repetir-se!, és l'anomenat *Principi de les caselles*. I a partir d'ací els valors del quocient es repeteixen.

Per tant l'expressió decimal és periòdica i el nombre de xifres del període és com a màxim una unitat inferior al denominador (no sempre ocorre açò però 1/23 té un període de 22 xifres, 1/97 el té de 96 xifres, no obstant això 1/37 té un període de només 3 xifres, una pista: 37 és divisor de 999).

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica.

Activitats proposades

1. Mentalment decideix quins de les següents fraccions té una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica

a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

2. Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teua deducció era correcta

3. Calcula l'expressió decimal de les fraccions següents:

a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

1.2. Forma de fracció d'una expressió decimal

Recorda el procediment:

Activitats resoltes

Càlcul de la forma de fracció de a) 0,175; b) 1,7252525…

a) Expressió decimal exacta: $0{,}175=\frac{175}{1000}=\frac{7}{40}$, es divideix entre 10 elevat al nombre de xifres decimals.

b) Expressió decimal periòdica:

Hem d'aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal perquè en restar desapareguen els decimals.

$$N=1{,}7252525...$$
$$1000N=1725{,}2525...$$
$$10N=17{,}2525...$$
$$\text{Si restem}: 990N=1708 \Rightarrow N=\frac{1708}{990}=\frac{854}{495}$$

Primer ens emportem la coma al final del primer període (fixa't que l'avantperíode i el període junts tenen 3 xifres), després al principi del primer període l'avantperíode té 1 xifra). Tenim dues expressions amb la mateixa part decimal pel que en restar, aqueixos decimals se'n van, només queda aïllar N.

Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.

Activitats proposades

4. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueix-les, comprova amb la calculadora que està bé:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23

5. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:

a) 2,353535….. b) 87,2365656565…. c) 0,9999….. d) 26,5735735735…..

1.3. $\sqrt{2}$ no és un nombre racional:

Utilitzarem un mètode de demostració molt habitual en Matemàtiques que s'anomena "**Reducció a l'Absurd**" que consisteix en:

> Si només hi ha 2 possibilitats per a quelcom que anomenem A i noA i volem demostrar A, comencem suposant que es compleix noA, fem algun raonament on s'arriba a una contradicció (Absurd) i rebutgem noA, havent de complir-se per tant A.

Més fàcil d'entendre: suposa que només hi ha 2 possibles camins per a arribar a un lloc. Tires per un d'ells i descobreixes que no arriba enlloc, per la qual cosa ha de ser l'altre.

Anem a això:

Volem demostrar A:

$\sqrt{2}$ **no** pot posar-se com a fracció.

Suposem cert el seu contrari noA:

$\sqrt{2}$ **si** pot posar-se com a fracció.

Aleshores $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, **fracció irreductible**. Elevem al quadrat als 2 membres

$$\Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=2b^2$$

per tant a^2 és parell i per tant a també ho és (el quadrat d'un nombre imparell és sempre imparell), posem a = 2*k* i substituïm:

$$(2k)^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow b^2=2k^2$$

doncs b^2 és parell i per tant b també ho serà.

En definitiva: *a* i *b* són els 2 nombres parells. CONTRADICCIÓ, absurd, hem dit que la fracció era irreductible, per la qual cosa *a* i *b* no poden ser ambdós múltiples de 2.

Per tant rebutgem noA i ens quedem amb que A és certa.

Aquest procediment serveix igual per a totes **les arrels no exactes**, de qualsevol índex.

Però no val per a tots els irracionals, per a demostrar que π és un nombre irracional cal estudiar molt. Va ser demostrat a finals del segle XVIII per Lambert. Fins a aqueix moment encara es continuaven calculant decimals per a trobar un període que no en té.

1.4. Diferents tipus de nombres

Tots aquests nombres com $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi$ junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels nombres reals. I als nombres reals que no són nombres racionals se'ls anomena nombres irracionals. Per tant

Irracionals ➔ $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Són nombres irracionals els nombres que no són racionals i per tant aquells nombres que no poden posar-se com a fracció de nombres enters. Hi ha més del que podria paréixer (de fet hi ha més que racionals ¡!), són tots aquells que tenen una expressió decimal que no és exacta ni periòdica, és a dir, infinites **xifres decimals i sense període.** Exemples: 17,6766766676… que m'ho acabe d'inventar o 0,1234567891011… que se'l va inventar Carmichael. Inventa't u, busca en Internet i si no el trobes, aleshores és teu (per ara ☺)

Reals ➔ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

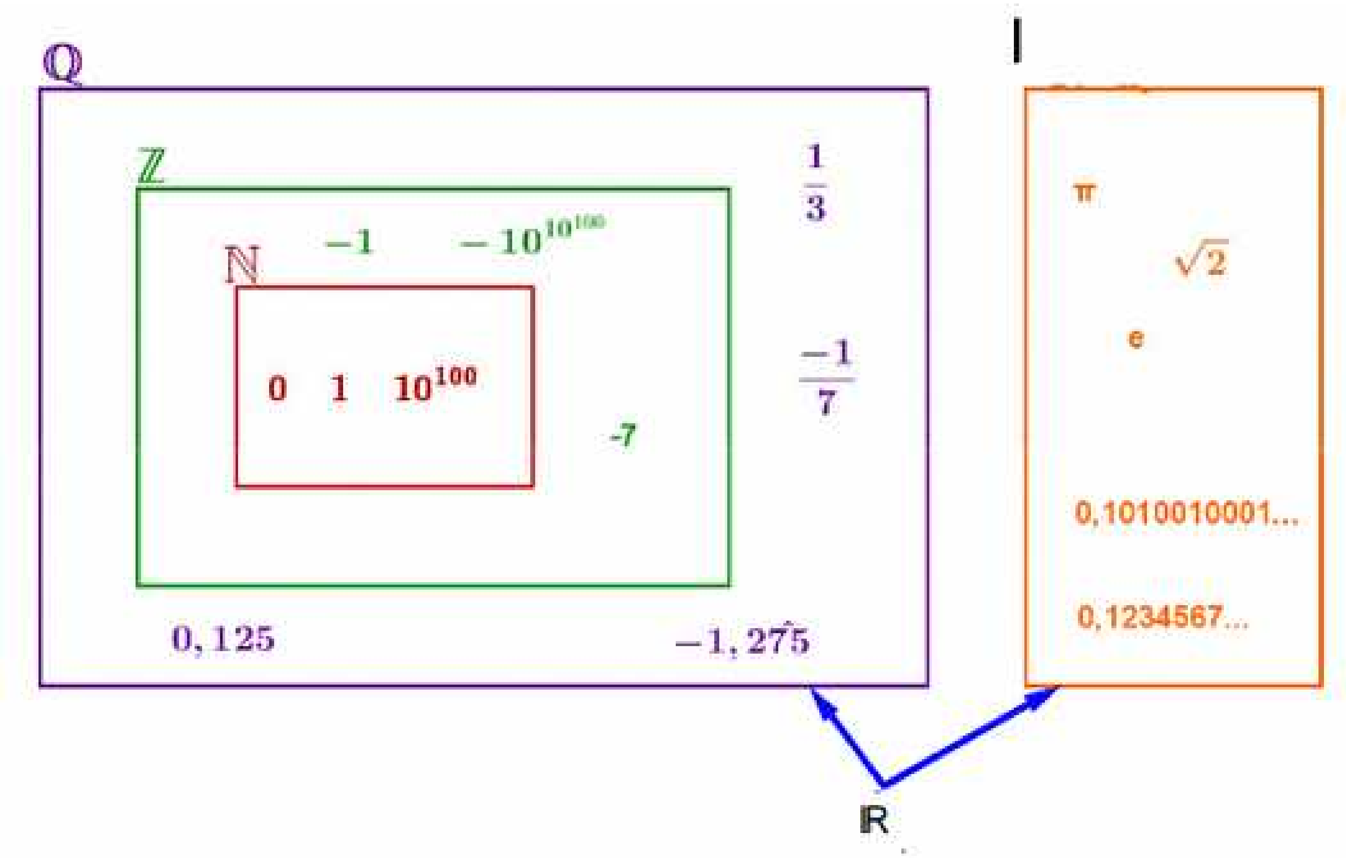
És la unió dels nombres racionals i dels irracionals.

Tenim per tant que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Son aquests tots els nombres?

No, els reals formen part d'un conjunt més ampli que és el dels Nombres Complexos $\mathbb{C}$ (en 1º de batxillerat es veuen, en l'opció de Ciències).

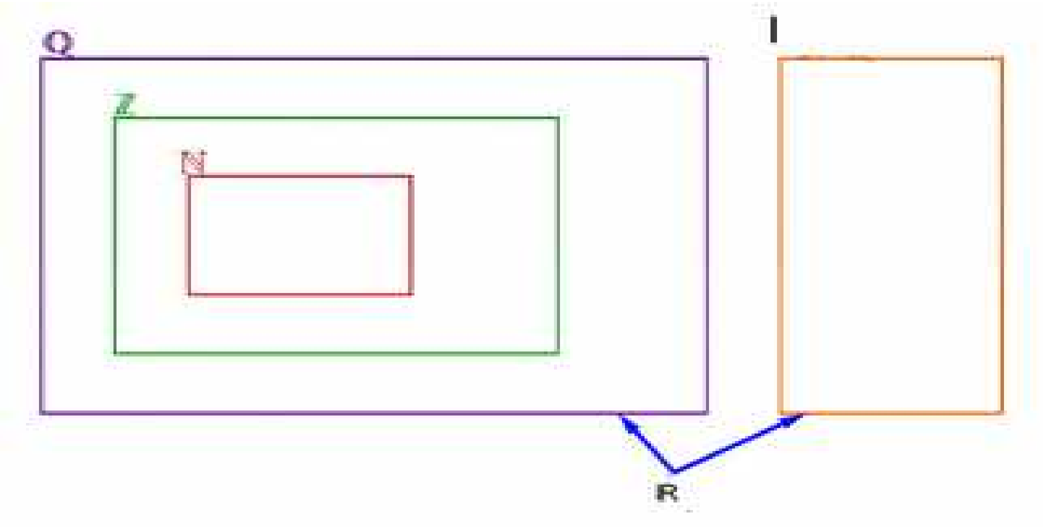


Activitats proposades

6. Copia al teu quadern la taula adjunta i assenyala amb una X a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbf{I}$	$\mathbb{R}$
-2,01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0,121212…					
$\sqrt[3]{-1000}$					
1,223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia al teu quadern l'esquema següent i fica els nombres de l'exercici anterior al seu lloc:



8. Pots demostrar que 4,99999… = 5?, quant val 2,5999…?

9. Demostra que $\sqrt[3]{7}$ és irracional.

10. Quantes xifres pot tindre com a màxim el període de $\frac{1}{47}$?

11. Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, t'atreveixes a donar la raó?

12. Fes la divisió 999 999:7 i després fes 1:7. Serà casualitat?

13. Ara divideix 999 entre 37 i després 1:37, és casualitat?

2. APROXIMACIONS I ERRORS.

Encara que en aquest curs treballarem en la mesura que siga possible amb valors exactes ($\sqrt{3}$ no se substitueix per 1,73 ni π per 3,1416) hi ha vegades en què és necessari fer aproximacions per motius pràctics (no li anem a dir al botiguer que ens done 2π metres de corda pel compte que ens porta) i a treballar amb nombres aproximats per entre altres motius no conéixer els valors exactes. Així per exemple, si ens pesem és una bàscula i marca 65,4 Kg, quant pesem exactament? No es pot saber, és impossible, el màxim que podem dir és que el nostre pes està entre 65,3 i 65,5 Kg si l'error màxim és de 100 g.

2.1. Error Absolut.

Es defineix l'Error Absolut (EA) com EA = |*valor real-valor aproximat*| .

Les barres signifiquen "valor absolut" que ja saps que vol dir que en cas de ser negatiu el convertim a positiu.

Exemple:

Si aproximem $\pi \approx 3{,}1416$ tindrem que l'EA $= |\pi - 3{,}1426| = |-0{,}0000073...| \approx 0{,}0000073$ unes 7 milionèsimes.

Cota de l'Error Absolut:

Encara sense conéixer amb exactitud el valor exacte, sempre podem posar una cota (un valor màxim) a l'error absolut només tenint en compte l'orde d'aproximació, així, si hem arredonit en les deumil·lèsimes (com en l'exemple) sempre podem afirmar que l'EA $\leq$ 0,00005, és a dir, menor o igual que mitja unitat del valor de la xifra d'arredoniment o 5 unitats de la següent (5 centmil·lèsimes), que és el mateix.

Activitats resoltes

- Calcula la cota de l'error absolut de:

N≈ 2,1 → $EA < 0{,}05$

N≈600 → $EA \leq 50$ si suposem que hem arredonit en les centenes.

Quan no es coneix el valor real, no pot conéixer-se l'error absolut, però si una cota. Si un cronòmetre té una precisió de desenes de segon direm que l'EA$\leq$ 0,05 s (mitja desena o 5 centèsimes)

Si tenim un nombre A i la cota de l'error absolut és ΔA (es llig increment d'A) sol posar-se $A \pm \Delta A$ sobretot a les Ciències Experimentals.

2.2. Error Relatiu.

Per a comparar errors de distintes magnituds o nombres es defineix l'Error Relatiu (ER) com:

$$ER = \frac{EA}{|\text{Valor real}|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per a parlar de % d'error relatiu.

Si no es coneix el valor real es substitueix pel valor aproximat (la diferència normalment és xicoteta).

Activitats resoltes

- Si aproximem arrel de 3 per 1,73, l'error relatiu comés és:

$$\sqrt{3}\approx 1{,}73 \Rightarrow EA\approx 0{,}0021 \Rightarrow ER=\frac{0{,}0021}{\sqrt{3}}\approx 0{,}00121 \Rightarrow 0{,}121\%$$

Si a l'última divisió posem el valor aproximat 1,73 l'ER ix aproximadament 0,121%.

- A les aproximacions A = 5,2 amb EA≤0,05 i B = 750 amb EA≤5, en quina estem cometent proporcionalment menor error?

Calculem els errors relatius:

A➔ $ER\leq\frac{0{,}05}{5{,}2}\Rightarrow ER\leq 0{,}0096 \Rightarrow ER\leq 0{,}96\%$

B➔ $ER\leq\frac{5}{750}\Rightarrow ER\leq 0{,}0067 \Rightarrow ER\leq 0{,}67\%$

És millor aproximació la de B.

Control de l'error comés:

No hi ha res més ignorant matemàticament parlant que utilitzar massa xifres decimals treballant en problemes pràctics. Dir que en una manifestació van participar **aproximadament** 51226 persones danya el sentit comú. També és una gamberrada dir que l'estimació de vot per al partit A és del 25,6 % de vots si l'error pot ser del 3 % (cosa que no sol mencionar-se). Posar com a nota d'un examen un 6,157 és almenys curiós per la seua aparent precisió.

Activitats resoltes

- Tenim dos nombres **arredonits** a les desenes: A = 2,5 i B = 5,7

Farem operacions amb ells controlant els errors.

Com l' $EA\leq 0{,}05$ (recorda: si arredonim en les desenes l'error serà inferior o igual a 5 centèsimes) tenim que A pot estar entre 2,45 i 2,55; igualment B estarà entre 5,65 i 5,75.

Suma:

El valor més xicotet serà 2,45 + 5,65 = 8,1; el valor màxim serà 2,55 + 5,75 = 8,3. Si restem dóna 0,2. Si prenem com a valor de la suma 8,2, que és la mitjana, ara l'EA ≤ 0,1 (la mitat de la diferència entre el màxim i el mínim, fixa't en que 8,2 està a distància 0,1 de 8,1 i de 8,3) quan abans era inferior a 0,05. Ja no podem estar segurs de l'últim decimal. Amb la resta passa el mateix.

Mínim 5,65 – 2,55 = 3,1 (ull!, el menor menys el major). Màxim 5,75 – 2,45 = 3,3. La mitjana és 3,2 i com(3,3 – 3,1):2 =0,1 l'EA ≤ 0,1

En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts (demostra-ho).

Si fem diverses sumes i restes, tenim que augmentarà perillosament.

Producte:

Valor més xicotet 2,45 · 5,65 = 13,8425; valor màxim 2,55 · 5,75 = 14,6625. La diferència és ara de 0,82. Si prenem com a producte 14,25 tenim que EA $\leq$ 0,41; s'ha multiplicat per 8. Ja no hem d'estar segurs ni de les unitats, podria ser 14 o 15.

Si multipliquem A (amb EA = *a*) amb B (amb EA = *b*) obtenim un **EA = a · B + b · A**.

Has de notar que depend dels valors de A i B.

Nota:

La fórmula **EA = a · B + b · A** ix de fer (A+a)·(B+b)–(A-a)·(B-b) i dividir entre 2. Comprova-la.

Si fem (aB+bA)/(AB) obtenim (a/A)+(b/B), és a dir:

Els errors relatius es sumen en multiplicar dos nombres.

Divisió:

El valor més xicotet possible s'obté de dividir el més xicotet entre el més gran:

5,65 : 2,55 = 2,22;

el més gran al revés (el més gran entre el més xicotet):

5,75 : 2,45 = 2,35.

Per tant EA $\leq$ 0,065.

Ara ix aproximadament $EA=\frac{a\cdot B+b\cdot A}{B^2}$, que si B és gran fa que isca reduït, però si B és xicotet ens dóna una ingrata sorpresa.

Activitats resoltes

- Càlcul de l'error absolut i relatiu si A = 5; *a* = 0,05; B = 0,5; *b* = 0,05 ➔ A/B = 10 amb EA $\leq$ 1,1, un 11 % d'error relatiu.

No tot són males notícies. Si dividim un nombre aproximat entre un nombre exacte l'error absolut disminueix si el divisor és major que 1. Per exemple (5$\pm$0,05):20=0,25$\pm$0,025. No obstant això l'error relatiu roman igual (prova-ho).

Nota:

Aquesta fórmula ix de fer $\frac{A+a}{B-b}-\frac{A-a}{B+b}$ i dividir entre 2, despreciem b^2 enfront de B^2. No cal saber-se-la.

Potència:

Pot ratllar la catàstrofe. Comprova que el mínim ix 158 i el màxim 218. EA $\leq$ 30.

Açò és $(2{,}5 \pm 0{,}05)^{5{,}7\pm 0{,}05}$=188 $\pm$ 30 el que representa un 16 % d'error relatiu.

Curiosament 188 no és $2{,}5^{5{,}7}$ que val 185,5 aproximadament, 188 és la mitjana entre el mínim i el màxim.

Activitats resoltes

Mesurem el ràdio d'una circumferència amb un regle mil·limetrat i marca 7,0 cm. Volem calcular l'àrea del cercle. L'error màxim en el radi és de 0,05 cm per tant pot estar entre 6,95 i 7,05. Si apliquem la fórmula πr^2 per a aquests valors obtenim 151,7 i 156,1, que són els valors mínim i màxim. La diferència és 4,4 i la seua meitat és 2,2 que és la cota d'error absolut. Direm que

$$A = 153{,}9 \pm 2{,}2 \text{ cm}^2.$$

La cota de l'error relatiu $\frac{2{,}2}{153{,}9} \cdot 100 = 1{,}4$ %.

El radi tenia una cota de (0,05 : 7)·100 = 0,71 %, per tant hem perdut precisió.

Si operem amb nombres aproximats, i pitjor encara, si ho fem moltes vegades, els errors es van acumulant fins al punt de poder fer-se intolerables. No sigues massa precís si les dades de partida no són fiables.

Activitats proposades

14. Arredoneix $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fins a les centèsimes i troba els errors absolutes i relatives comesos.

15. Troba una cota de l'error absolut a les aproximacions següents:

a) 2,1
b) 123
c) 123,00
d) 4000 amb arredoniment en les desenes.

16. Una balança té un error inferior o igual a 50 g en les seues mesures. Usem aqueixa balança per a elaborar 10 paquets de sucre d'1 Kg cada un que són un lot. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quina és la cota de l'error absolut per al lot?

17. Els nombres A = 5,5 i B =12 han sigut arredonits. Troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu per a:

a) A+B
b) A·B
c) B/A
d) A^B

Nota: Determina els valors màxim i mínim de A i B. Després els valors màxims i mínims de cada apartat (recorda que la resta i la divisió funcionen distint)

18. Com mesurar el grossor d'un foli amb un error inferior a 0,0001 cm amb l'ajuda d'un regle mil·limetrat i la del conserge de l'institut?, fes-ho.

3. REPRESENTACIÓ A LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS:

3.1. Densitat dels Nombres Reals:

Els nombres reals són densos, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres al mig.

Això és fàcil de deduir, si *a*, *b* són dos nombres amb *a* < *b* sabem que $a<\frac{a+b}{2}<b$, és a dir, la mitjana està entre els dos nombres. Com açò podem fer-ho les vegades que vullguem, doncs d'ací el resultat.

Curiosament els racionals són també densos, així com els irracionals.

Activitats proposades

19. Calcula 3 nombres reals que estiguen entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1.

20. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre $\sqrt{2}$ i 1,5

21. Troba 5 nombres irracionals que estiguen entre 3,14 i π

3.2. Representació a la recta real dels nombres reals:

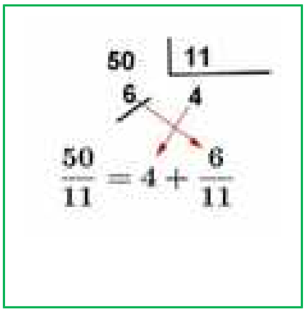
Triat l'origen de coordenades i la grandària de la unitat (o dit d'una altra manera, si col·loquem el 0 i l'1) tot nombre real ocupa una posició en la recta numèrica i al revés, tot punt de la recta es pot fer correspondre amb un nombre real.

Vegem com representar de forma exacta **alguns** nombres reals:

I.- Representació a la recta dels nombres racionals:

Activitats resoltes

- Si la fracció és **pròpia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), per exemple $\frac{5}{6}$ bastarà de dividir la primera unitat en 6 parts iguals i prendre 5. En cas de ser negativa comptarem cap a l'esquerra. (Veure figura)
- Si la fracció és **impròpia** (numerador major que denominador i per tant valor major que 1) farem la divisió entera (sense decimals) quedant-nos amb el quocient i el residu. Açò ens permet posar-la en forma mixta (suma d'un enter i una fracció pròpia). Així per exemple: $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ ja que en dividir 11 entre 3 obtenim 3 de quocient i 2 de residu. *El quocient és la part entera i el residu el numerador de la fracció pròpia*.

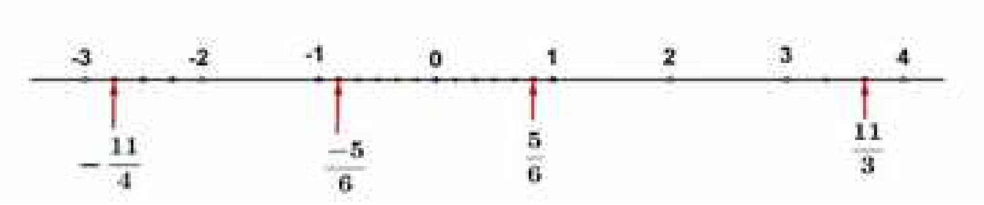


Per a representar-la només ens hem d'anar on diu la part entera (3) i la unitat següent (la que va del 3 al 4) la dividim en 3 parts iguals i prenem 2.

- Un altre exemple: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, ja que la divisió dóna 2 de quocient i 3 de residu.

Ens n'anem al 2, dividim la unitat següent (del 2 al 3) en 7 parts iguals i prenem 3.

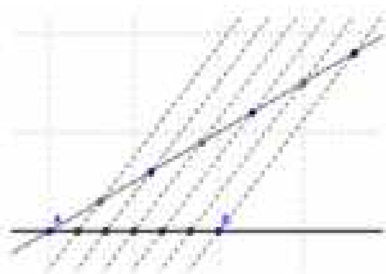
- **En cas de ser negativa**: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, es farà igual però comptant cap a l'esquerra. Ens n'anem al –2, la unitat que va del –2 al –3 es divideix en 4 parts i prenem 3 (però comptant del –2 al –3 clar!).



Recorda que:

Per a dividir un segment en part iguals:

Per a dividir el segment AB en, per exemple, 6 parts iguals, tracem per A una línia obliqua qualsevol, obrim el compàs una obertura qualsevol i marquem 6 punts en la recta anterior a distància igual. Unim l'últim punt amb B i tracem paral·leles que passen pels punts intermedis de la recta obliqua. Pel *Teorema de Tales*, el segment AB ha quedat dividit en 6 parts iguals.



Normalment no t'exigiran que ho faces tan exacte, ho faràs de forma aproximada, però vés en compte en què les parts pareguen iguals.

II.- Representació a la recta de les arrels quadrades:

Per a representar arrels quadrades usem el Teorema de Pitàgores. Si en un triangle rectangle la hipotenusa és *h* i els catets són *a*, *b* tenim que $h^2=a^2+b^2 \Rightarrow h=\sqrt{a^2+b^2}$.

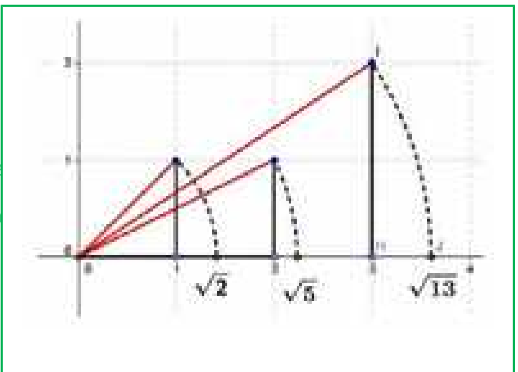
Activitats resoltes

- Representa a la recta $\sqrt{2}$

Si *a* = *b* = 1 tenim que $h=\sqrt{2}$. Només hem de construir un triangle rectangle de catets 1 i 1, la seua hipotenusa medeix $\sqrt{2}$, (la diagonal del quadrat de costat 1 medeix $\sqrt{2}$). Ara utilitzant el compàs, portem aqueixa distància a l'eix X (veure figura).

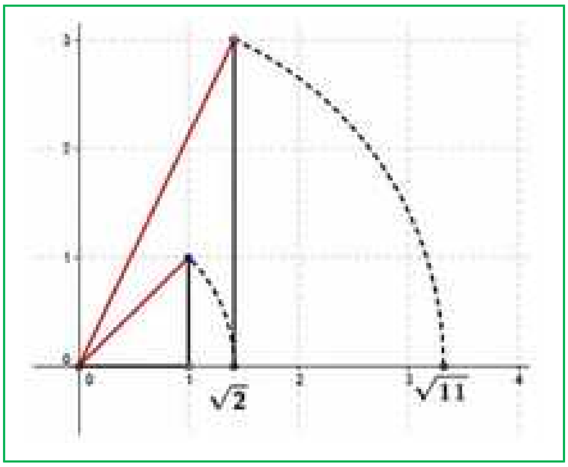
- Representa a la recta $\sqrt{5}$

Com $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$ només cal construir un triangle rectangle de catets 2 i 1, i la seua hipotenusa medeix $\sqrt{5}$.



Has agarrat el truc?, el radicand cal expressar-lo com a suma de 2 quadrats. El triangle rectangle tindrà com a catets aqueixos dos nombres.

- Així, per a representar $\sqrt{13}$, expressem 13 com a suma de 2 quadrats: $13=9+4=3^2+2^2 \Rightarrow \sqrt{13}=\sqrt{3^2+2^2}$ per tant en un triangle rectangle de costats 3 i 2 la hipotenusa serà $\sqrt{13}$.
- Però, i si el nombre no pot posar-se com a suma de dos quadrats?, per exemple l'11 (sempre complicant les coses! ☹).



Caldrà fer-ho en 2 passos. 11 = 2 + 9, hi ha algun nombre el quadrat del qual siga 2?, per descomptat que sí, $\sqrt{2}$. Per tant $\sqrt{11}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+3^2}$, hem de fer un triangle rectangle de catets $\sqrt{2}$ i 3. Per a això primer es construeix $\sqrt{2}$ com abans i es traça una perpendicular de longitud 3 (veure figura).

Poden dibuixar-se ja així totes les arrels?, no. Hi ha algunes per a les que cal fer més passos ($\sqrt{7}$ per exemple requereix 3), però millor ho deixem ací, no?

Activitats proposades

22. Representa a la recta numèrica els nombres següents:

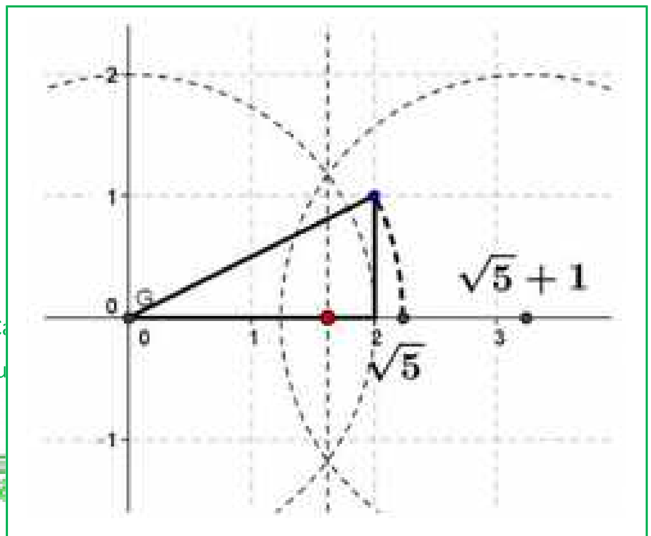
$$\frac{7}{6};-\frac{17}{4};2{,}375;-3{,}\overline{6}$$

23. Representa a la recta numèrica:

$$\sqrt{20};-\sqrt{8};\sqrt{14};\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3.3. Un exemple d'interés matemàtic, natural i artístic:

Has sentit parlar del nombre d'or?



El Nombre d’Or (o Raó Àuria o Proporció Harmònica o Divina Proporció) és igual a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

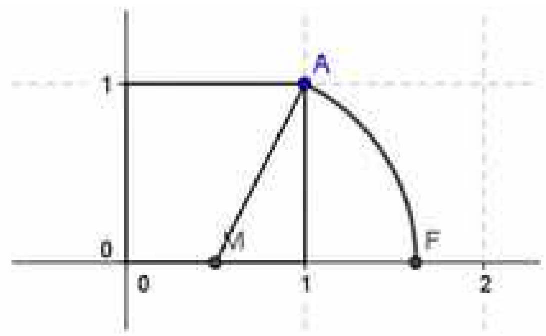
Activitats resoltes

- Com el representem a la recta?

Només cal construir $\sqrt{5}$ com dalt, sumar 1 (traslladem 1 unitat amb el compàs) i dividir entre 2 trobant el punt mitjà (amb la mediatriu), fet.

- Una altra forma diferent:

Construïm un quadrat de costat 1 (un què?, un el que vullgues!). Trobem el punt mitjà del costat inferior (M) i portem la distància MA amb el compàs a l’eix horitzontal, OF és el nombre d’or.

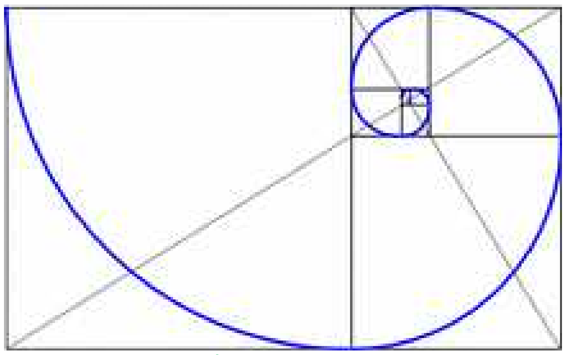


Vegem:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Un exemple de l’aplicació de la raó Àuria per a construir una espiral (imatge de wikipedia).


Espiral Àuria. Wikipedia

Activitats proposades

24. Busca rectangle auri i espiral Àuria.

25. Ja de pas busca la relació entre el Nombre d’Or i la Successió de Fibonacci.

26. Busca en youtube “algo pasa con phi” i em contes.

3.4. Ferramenta informàtica per a estudiar la proporció àuria

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la proporció àuria.

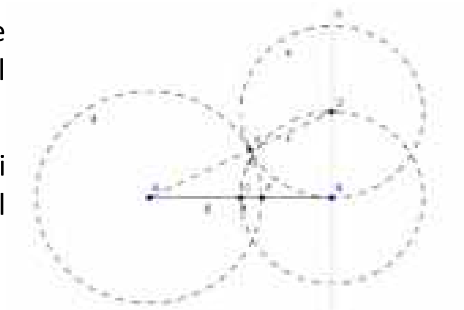
Un segment està dividit en dues parts que estan en proporció àuria si la raó entre la longitud del segment i la longitud de la part major coincideix amb la raó entre la longitud de la part major i la de la part menor.

Activitats resoltes

Utilitza Geogebra per a dividir un segment en dues parts que estiguen en proporció àuria.

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa el segment, *a*, que els uneix.
- Traça un segment *BD* perpendicular al segment *AB* en el punt *B*, la longitud del qual siga la meitat d'AB*, pots* seguir les instruccions següents:
  - Calcula el Punt **mitjà o centre** del segment *AB* i crida'l *C*.
  - Dibuixa amb **Circumferència amb centre i punt que creua** la que té centre en *B* i passa per *C*.
  - Traça la **Recta Perpendicular** al segment *AB* que passe per *B*.
  - Defineix *D com* el **Punt d'Intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.



- Dibuixa el segment *AD* i una circumferència amb centre *D* que passe per *B*. Siga *E* el **Punt d'Intersecció** d'aquesta circumferència amb el segment *AD*.
- Amb centre en *A* traça la circumferència que passa per *E* i determina el **punt d'Intersecció,** *F*, d'aquesta circumferència amb el segment *AB*.
- Traça el segment, *g*, que uneix els punts *A* i *F*.
- Comprova que el punt *F* divideix al segment *AB* en dues parts que estan en proporció àuria:
  - Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals**.
  - Calcula en la línia **d'Entrada** els quocients *a/g i g/(ag).*

Observa en la **Finestra algebraica** que aquests valors coincideixen, has calculat un valor aproximat del nombre d'or, Φ.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i comprova que el quocient entre les longituds dels segments *AF* i *FB* roman constant.
- Per a visualitzar millor la construcció pots dibuixar els elements auxiliars amb traç discontinu, triant en el menú contextual, **Propietats i Estil de traç**.

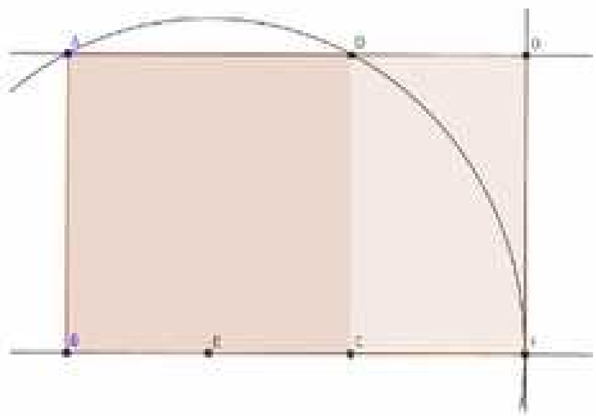
Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria.

Si a un rectangle auri li llevem (o li afegim) un quadrat obtenim un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

Utilitza Geogebra per a dibuixar un rectangle auri.

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Defineix dos punts *A* i *B* que seran els extrems del costat menor del rectangle i amb la ferramenta ***polígon* regular** *dibuixa*, a partir dels punts *A* i *B*, el quadrat *ABCD* i oculta els noms dels costats amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol**.



- Calcula el **Punt mitjà**, *E*, del costat *BC*. Amb centre en *E* dibuixa la **Circumferència** amb centre en *E* que passa per *A*.
- Traça la recta, *a*, que passa per *BC* i defineix com a *F* el **Punt d'intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.
- Dibuixa la **Recta perpendicular** a la recta *a què* passa per *F*, i la **recta** que passa pels punts *A i D*, anomena *G* al **Punt d'intersecció** d'aquestes rectes i defineix amb **Polígon** el rectangle *ABFG*.
- En la finestra algebraica apareixen les longituds dels costats del rectangle com a *f* i *g*, introdueix en la línia **d'Entrada** *g / f* i observa en aquesta finestra que apareix el valor *e* que és una aproximació al nombre auri. Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals.**
- Dibuixa el **segment** *CF*, en la finestra algebraica apareix la seua longitud, *h*, introdueix en la línia **d'Entrada** *f / h*, observa que aquest quocient coincideix amb *g / f* i és una aproximació del nombre auri.
- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i observa que el quocient entre les longituds dels costats dels rectangles és constant.

El rectangle *ABFG és* auri ja que el quocient entre la longitud del seu costat major i la del menor és el nombre d'or, a més el rectangle *DCFG*, que s'obté en llevar un quadrat de costat el menor del rectangle, és també auri i per tant semblant al primer.

Crea les teues pròpies ferramentes amb Geogebra. Crea una que dibuixe rectangles auris.

Es va a crear una ferramenta que a partir de dos punts *A* i *B* dibuixe el rectangle auri en què el segment *AB* siga el costat menor.

- En la figura anterior oculta el nom dels punts *C, D, E, F* i *G* amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol** fent clic amb el ratolí sobre ells, en l'àrea de treball o en la finestra algebraica.
- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta i** defineix:

Objectes d'eixida: el polígon quadrat, el polígon rectangle **i** els punts *C, D, F*, i *G*.

Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.

I tria com a **nom de la ferramenta** *rectangleauri*. Observa que apareix en la barra de ferramentes.

En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *rectangleauri* , que es guarda com *rectangleauri.ggt*

Utilitza la ferramenta **Desplaçament de la zona gràfica** per a anar a una part buida de la pantalla i comprovar que la ferramenta *rectangleauri* funciona perfectament.

Dibuixa una espiral àuria, i crea una ferramenta que dibuixe espirals àuries.

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula** i obri l'arxiu *rectangleauri.ggt* que acabes de crear.

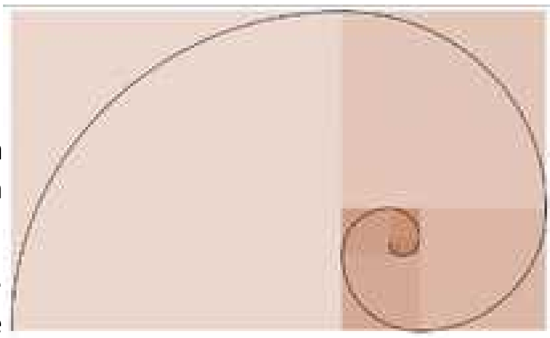
- Defineix dos punts *A* i *B* i aplica la ferramenta *rectangleauri,* s'obté el rectangle auri *ABEF* i el quadrat *ABCD* amb el nom dels vèrtexs *C, D, E i F ocults.*
- Utilitza la ferramenta ***Arc* de circumferència donats centre i dos punts extrems** *per a* dibuixar l'arc amb centre el punt *C* i que passa pels punts *D* i *B*.

Es va a crear una nova ferramenta que dibuixe el rectangle auri i l'arc.

- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta i** defineix:

  Objectes d'eixida: el quadrat, el polígon rectangle, els punts *C, D, E*, *F* i l'arc *c*.

  Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.



Tria com a **nom de la ferramenta** *espiralauria*.

En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *espiralauria,* que es grava com *espiralauria.ggt.*

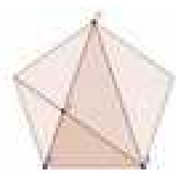
- Activa successivament la ferramenta anterior, a fi de dibuixar l'espiral que resulta d'unir amb un arc de circumferència dos vèrtexs oposats dels quadrats de forma consecutiva i de major a menor.
- Per a millorar l'aspecte de l'espiral es poden ocultar els punts, millor en la finestra algebraica, amb la ferramenta **Exposa / Oculta objecte**.

Observa que en variar els angles en una progressió aritmètica de diferència α=90º, els costats dels quadrats es modifiquen segons una progressió geomètrica de raó: Φ.

Activitats proposades

27. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la del seu diagonal estan en proporció àuria.

28. Calcula amb Geogebra una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma en el seu interior en dibuixar els seus diagonals. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.



29. Comprova que els triangles *ABD* i *ABF* de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seua raó de semblança.

30. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons

4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS:

Com ja sabem entre dos nombres reals hi ha infinits nombres. Hi ha una notació especial per a referir-se a aqueixos infinits nombres que hauràs de dominar per a aquest i futurs cursos.

4.1. Intervals

(Del lat. *Intervallum*): **2.** m. Conjunt dels valors que pren una magnitud entre dos límits donats.

I.- Intervals Oberts:

Si ens volem referir al conjunt dels nombres que hi ha entre dos valors però sense comptar els extrems, usarem un **interval obert**

Exemple:

Els nombres superiors a 2 però menors que 7 es representen per (2 , 7) i es llig "interval obert d'extrems 2 i 7". A ell pertanyen infinits nombres com 2,001; 3,5; 5; 6,999; … però no són d'aquest conjunt ni el 2 ni el 7. Això representen els parèntesis, que entren tots els nombres del mig però no els extrems.

Exemple:

Els nombres positius menors que 10, es representen per (0 , 10), l'interval obert d'extrems 0 i 10. Fixa't que 0 no és positiu, per la qual cosa no entra i el 10 no és menor que 10, per la qual cosa tampoc entra.

Nota: No s'admet posar (7 , 2), el menor sempre a l'esquerra!

També cal dominar l'expressió d'aquests conjunts usant desigualtats, prepara't:

$$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 7\}.$$

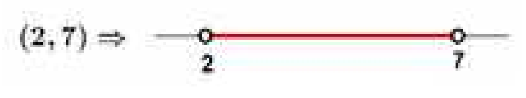
Traduïm: Les claus s'utilitzen per a donar els elements d'un conjunt, dins d'elles s'enumeren els elements o es dóna la propietat que compleixen tots ells. S'utilitza la *x* per a denotar a un nombre real, la / significa "tal que" i finalment es diu la propietat que compleixen mitjançant una doble desigualtat. Així que no t'espantes, això de dalt es llig: *els nombres reals tal que són majors que 2 i menors que 7*.

És necessari dominar aquest llenguatge matemàtic ja que la frase en valencià pot no entendre's en altres països però t'assegure que això de les claus i la / ho entenen tots els estudiants de matemàtiques del món (bo, quasi tots).

L'altre exemple: (0, 10) = $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 10\}$.

Finalment la **representació gràfica**:

Es posen **punts sense omplir** en els extrems i es ressalta la zona intermèdia.



Pregunta: Quin és nombre que està més prop de 7, sense ser 7?

Pensa que 6,999…=7 i que entre 6,999 i 7 hi ha "molts, moltíssims …" nombres.

*Nota: En alguns textos els intervals oberts es representen així]2 , 7[la qual cosa tenen alguns avantatges com que els estudiants amb confonguen l'interval (3, 4) amb el punt del pla (3, 4), que assegurem que ha ocorregut (però tu no seràs un d'ells no?), o l'enutjosa necessitat de posar (2,3; 3,4) perquè (2,3,3,4) no ho entendria ni Gauss.

II.- Intervals Tancats:

Igual que els oberts però ara **sí** que pertanyen els extrems.

Exemple:

L'interval dels nombres majors o iguals que –2 però menors o iguals que 5. Ara el –2 i el 5 sí que entren. Es fa igual però posant claudàtors [–2 , 5].

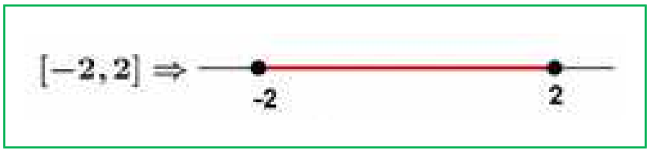
En forma de conjunt s'escriu: $[-2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \; ; -2 \le x \le 5\}$. Fixa't que ara posem $\le$ que significa "menor o igual".

Exemple:

L'interval dels nombres el quadrat dels quals no és superior a 4. Si ho penses un poc veuràs que són els nombres entre el –2 i el 2, ambdós inclosos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Per tant:

$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R} \; ; -2 \le x \le 2\}$.

La representació gràfica és igual però posant **punts plens**.



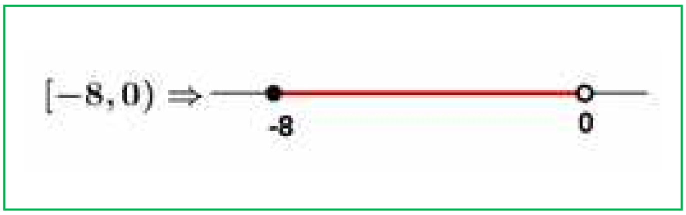
III.- Intervals Semioberts (o semitancats, a triar)

Per descomptat que un interval pot tindre un extrem obert i un altre tancat. La notació serà la mateixa.

Exemple:

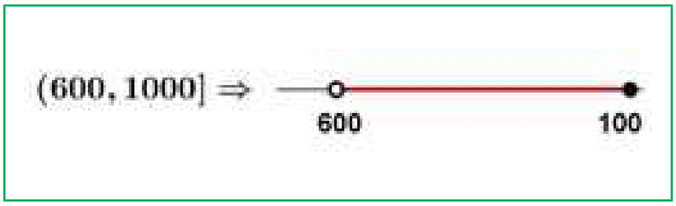
- Temperatura negativa però no per davall de -8 ºC:

  $[-8,0)=\{x \in \mathbb{R} \; ; -8 \le x < 0\}$.



- Nombres superiors a 600 però que no excedisquen de 1000.

  $(600,1000]=\{x\in \mathbb{R} \; / \; 600 < x \le 1000\}$



4.2. Semirectes

Moltes vegades el conjunt d’interés no està limitat per un dels seus extrems.

Exemple:

- Els nombres positius: No hi ha cap nombre positiu que siga el major. Es recorre llavors al símbol ∞ i s’escriu $(0,+\infty) = \{x / x > 0\}$.

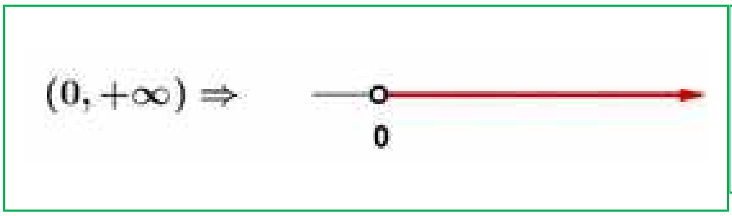
Has de notar que és equivalent posar $x > 0$ que posar $0 < x$, es pot posar d’ambdues formes.

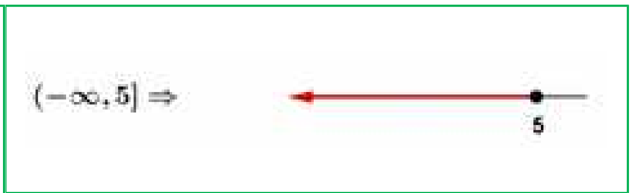
Exemple:

- Nombres no majors que 5: $(-\infty,5] = \{x / x \leq 5\}$. Ací el 5 sí que entra i per això el posem tancat (“no major” equival a “menor o igual”)

Exemple:

- Solució de $x > 7$: $(7,+\infty) = \{x / x > 7\}$.
  Nota: **L’extrem no tancat sempre es posa obert**. **No** volem veure açò: $(7 , +\infty]$





4.3. Entorns

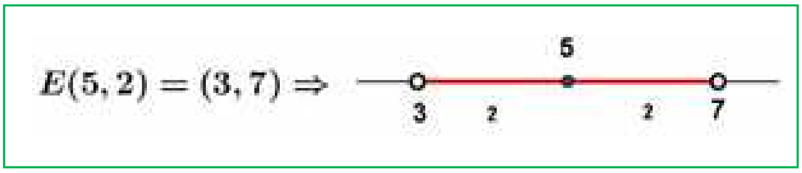
És una forma especial de posar els intervals oberts.

Es defineix l’entorn de centre a i ràdio r i es denota $E(a , r)$ (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que estan a una **distància de *a* menor que *r***.

Amb un exemple ho entens millor:

Exemple:

L'entorn de centre 5 i ràdio 2 són els nombres que estan de 5 una distància menor que 2. Si ho pensem un poc, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l’interval (3 , 7). És com agafar el compàs i amb centre en 5 marcar amb obertura 2.



Fixa’t que el 5 està en el centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

$$\mathbf{E(a , r) = (a - r , a + r)}$$

Exemple:

E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2 , 6)

És molt fàcil passar d'un entorn d'un interval. Anem a fer-ho al contrari.

Exemple:

Si tinc l'interval obert (3 , 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}=6{,}5$ que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10-3):2 = 3,5 és el radi (la meitat de l'ample). Per tant (3 , 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

L'interval (*b* , c) és l'entorn $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemple:

L'interval (–8, 1) = $E\left(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}\right)=E(-3'5,4'5)$

També hi ha els entorns tancats però són d'ús menys freqüent.

Activitats proposades

31. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:

a) Percentatge superior al 26 %.
b) Edat inferior o igual a 18 anys.
c) Nombres el cub dels quals siga superior a 8.
d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres.
e) Temperatura inferior a 25ºC.
f) Nombres per als que hi ha la seua arrel quadrada (és un nombre real).
g) Nombres que estiguen de 5 a una distància inferior a 4.

32. Expressa en forma d'interval els entorns següents:

a) E(1 , 5)

b) $E\left(-2,\frac{8}{3}\right)$

c) E(-10 ; 0,001)

33. Expressa en forma d'entorn els intervals següents:

a) (4 , 7)
b) (-7 , -4)
c) (-3 , 2)

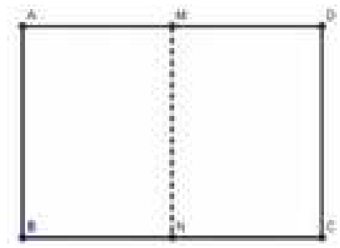
34. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals?
*Pista: 600,222333€ pot ser un sou?

CURIOSITATS. REVISTA

Folis i $\sqrt{2}$

Ja sabem que un quadrat de costat L té una diagonal que val $\sqrt{2}$ L , vegem alguna cosa més:

La imatge representa un foli amb la norma DIN 476 que és la més utilitzada a nivell mundial.



Aquesta norma especifica que un foli DIN A0 té una superfície de 1 m^2 i que en partir-lo por la meitad obtindrem un DIN A1 que ha de ser un rectangle semblant a l'anterior. Partint l'A1 en 2 iguals obtenim el DIN A2 , després el DIN A3 i el DIN A4 que és el més usat. Tots són semblants als anteriors.

Qué significa ser semblant?

Doncs que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, però AM = AD/2 per tant

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Una taula

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm²)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2

Per tant als folis DIN 476:

la razó entre el llarg y l'ample és $\sqrt{2}$

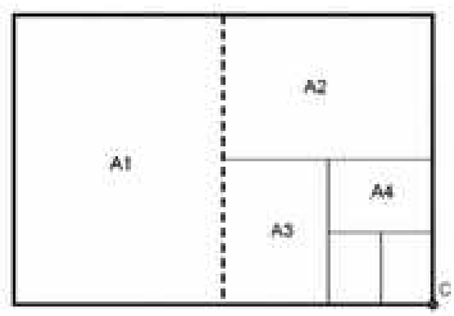
No queda ací la cosa, fixa't que al partir el foli en 2 parts iguals el nou foli té el costat major que coincideix amb el costat menor de l'original: AB es ara el costat major i abans era el menor, com AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que la raó de semblança és$\sqrt{2}$. És a dir, per a passar d'un foli A0 a un altre A1 dividim els seus costats entre$\sqrt{2}$. El mateix per als següents.

Calculem les dimensions:

Per a l'A0 tenim que l'àrea és AD · AB = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \simeq 1{,}189$$

AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}841\,\text{m}$. Per a obtindre les mesures de l'A4



dividirem 4 vegades entre $\sqrt{2}$:

Llarg = $\frac{\sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2})^4} \simeq 0{,}297\text{m} = 29{,}7\,\text{cm}$

Ample= Llarg/ $\sqrt{2} \simeq 0{,}210$ m = 21,0 cm

Questions:

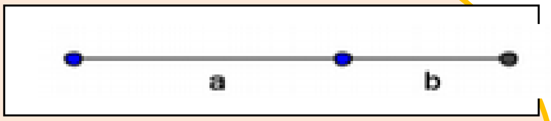
Comprova els valors de la taula anterior (hi ha almenys dos valors equivocats ☺)

Quants folis A4 caben en un foli A0?

Quines són les dimensions de l'A6?, i de l'A7?

El nombre d'or

Dividim un segment en dos parts de forma que si dividim la longitud del segment total entre la part major ha de donar el mateix que al dividir la part major entre la part menor.
Tenim que $(a+b)/a = a/b$.



El nombre d'Or (o Raó Àuria) anomenat Φ (fi) és precisament el valor d'aquesta proporció, així:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Ja tenim dos curiositats:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

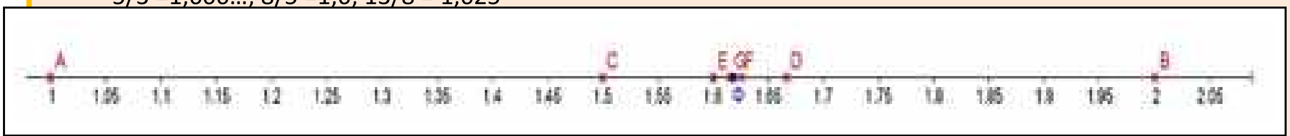
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

On F_n és l' *n*-èsim Nombre de Fibonacci. Aquests nombres són 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ... on cada terme a partir del tercer s'obté sumant els dos anteriors.
Més relacions entre el Nombre d'Or i la Successió de Fibonacci:
a) Si anem dividient un nombre de la successió entre el seu anterior obtenim: 1/1 =1; 2/1 =2; 3/2 =1,5; 5/3 =1,666...; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625



Com es pot vore, ens acostem ràpidament al valor del nombre d'Or, primer per baix, després per dalt, per baix, ... alternativament.
b) Fórmula de Binet:
Per a calcular un nombre de Fibonacci, per exemple el que ocupa el lloc 20 hi ha que calcular els 19 anteriors.
Aço no té que ser necessariament així, ja que Binet va deduir aquesta fórmula, que per a l'autor és una de les més boniques de les matemàtiques.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

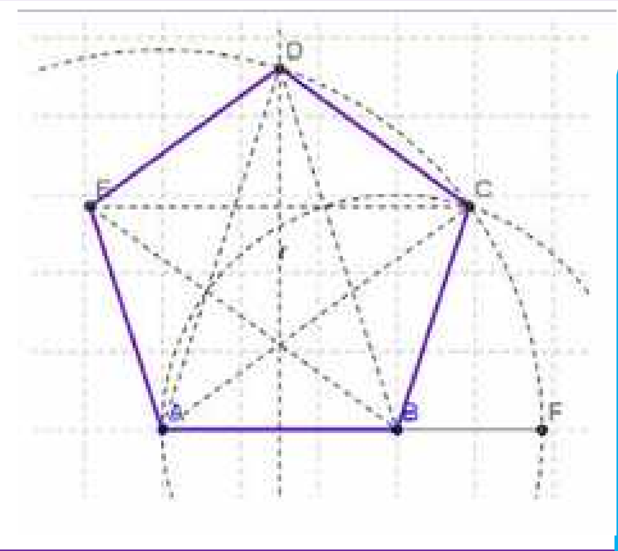
Si per exemple sustituim *n* per 20 obtenim $F_{20} = 6765$.
Realment podem prescindir del 2n terme del numerador, per a $n > 3$ es fa molt més xicotet que el primer. Per exemple, per a $n = 6$, si fem $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenim 8,0249 que arredonit és 8, el valor correcte.

Activitats:

a) Calcula F_{31} i F_{30} amb la fórmula de Binet.

b) Fes el quocient i mira si és una bona aproximació del Nombre d'Or.

El pentàgon regular i el Nombre d'Or.



En un pentàgon regular la raó entre una diagonal i el costat es Φ . Com sabem construir Φ , la construcció d'un pentàgon regular es molt senzilla:

Si AB ha de ser un costat del nostre pentàgon, construïm el punt F alineat amb A i B que complisca AF/AB igual a Fi (s'indica com fer-ho al text).

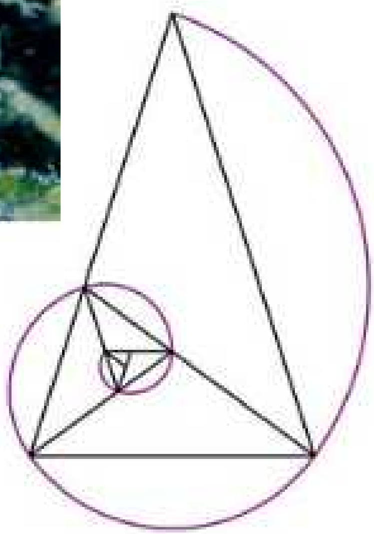
Aleshores, AB serà el costat i AF la mida de la diagonal.

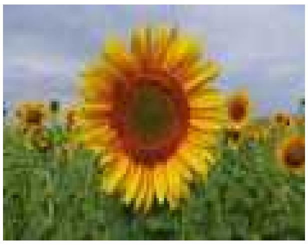
Tracem la mediatriu de AB i una circumferència de centre A i radi AF. Es tallen en D que és un vèrtex del pentàgon.

Tracem ara una circumferència amb centre B i radi AB, es talla amb l'anterior en C que és un altre vèrtex del pentàgon. Només queda trobar E que és molt fàcil.

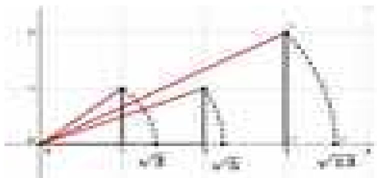
El pentàgon regular amb les seues diagonals es coneix com “Pentagrama Místic” i pareix ser que tornava bogets als pitagòrics, en ell el nombre d'Or apareix sense mesura.

Del Pentagrama hem tret aquest triangle, anomenat Triangle Àuri que permet obtindre més triangles àuris fent la bisectriu en un dels angles iguals i formar aquesta espiral. Aquesta espiral es pareguda a l'Espiral Àuria, a la de Fibonacci i a l'espiral logarítmica que és la que apareix en: galàxies, huracans, petxines, gira-sols …



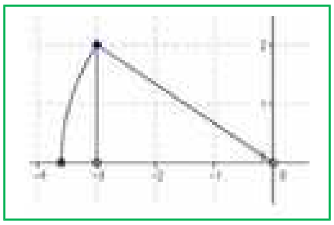


RESUM

		Exemples
Conjunts de nombres	**Naturals** → $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; **Enters** → $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **Racionals** → $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$; **Irracionals** → $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ X = 1,7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$ **irracional**	$\sqrt{2}$ **no** pot posar-se com a fracció.	
Error Absolut	Error Absolut (*EA*) = $\lvert$*valor real – valor aproximat*$\rvert$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73: \ EA \approx 0{,}0021$
Cota de l'error	Trobem la cota calculant un valor major	$EA \le 0{,}003$
Error Relatiu	$ER = \dfrac{EA}{\lvert \text{Valor real} \rvert}$	$ER = \dfrac{0{,}0021}{\sqrt{3}} \simeq 0{,}00121$
Control de l'error	En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts. Els errors relatius se sumen en multiplicar dos nombres.	
Densitat	Els nombres reals i els nombres racionals són densos. Entre cada dos nombres, sempre podem trobar a un altre.	
Representació a la recta real	Fixat un origen i una unitat, hi ha una biyección entre els nombres reals i els punts de la recta. A cada punt de la recta li correspon un nombre real i al contrari.	
N Reals	Tota expressió decimal finita o infinita és un nombre real i al contrari.	$0{,}3333, \pi, \ \sqrt{2}$
Interval obert	Interval obert en el que els extrems **no** pertanyen a l'interval	$(2, 7) = \{x \in \Re / 2 < x < 7\}$. 
Interval tancat	Els extrems **SI** pertanyen a l'interval	$[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \le x \le 2\}$ 
Intervals Semioberts (o semitancats)	Interval amb un extrem obert i un altre tancat	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} \ / -8 \le x < 0\}$ 
Entorns	Forma especial d'expressar un interval obert: **E(*a* , *r*) = (*a* – *r* , *a* + *r*)**	

EXERCICIS I PROBLEMES.

Nombres



1. La imatge és la representació d'un nombre irracional, quin?

2. Representa en la recta numèrica: –3,375; 3,666…

3. Representa en la recta numèrica: $-\sqrt{8}; 2\sqrt{5}; \frac{\sqrt{10}}{2}$

4. Troba el valor exacte de $\frac{0,\overline{4}}{0,4}$ sense calculadora.

5. Digues quines d'aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{9}{40}; \frac{30}{21}; \frac{37}{250}; \frac{21}{15}$$

6. Troba 3 fraccions *a, b, c* tals que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

7. Fes al teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

$$2{,}73535\ldots;\ \pi - 2;\ \sqrt[5]{-32};\ \frac{2}{0};\ 10^{100};\ \frac{102}{34};\ -2{,}5;\ 0{,}1223334444\ldots$$

8. Contesta verdader o fals, justificant la resposta.

   a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$

   b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

   c) L'arrel quadrada d'un nombre natural és irracional.

   d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

   e) 1/47 té expressió decimal periòdica.

9. Posa exemples que justifiquen:

   a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.

   b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.

10. Què serà la suma de nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seua expressió decimal)

11. La suma de 2 nombres amb expressió decimal periòdica, pot ser un enter?

12. Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:

a) (–7, 7]

b) $\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 5\}$

c) 

d) (–2, +∞)

13. Quants metres hi ha de diferència en calcular el perímetre de la Terra posant $\pi \approx$ 3,14 en compte del seu valor real?, és molt o poc?

Bàsicament has de trobar l'error absolut i el relatiu.

*Radi aproximadament 6370 km

14. Els antics van fer bones aproximacions de Pi, entre elles citem Arquimedes (segle III a.C) amb 211875/67441 i a Ptolemeu (segle II d.C,) amb 377/120.

Quin dels dos va cometre menor error relatiu?

15. El següent és un **Pi**-text (està en castellà): "*Soy y seré a todos definible, mi nombre tengo que daros, cociente diametral siempre inmedible soy de los redondos aros*." (Manuel Golmayo)

Conta i apunta el nombre de lletres de cada paraula i veuràs d'on ve el seu nom. Inventa una frase en valencià amb la mateixa propietat, no cal que siga tan llarga (almenys 10 paraules)

16. Troba:

a) (3, 5] U (4, 6]

b) (3, 5] ∩ (4, 6]

c) (– ∞,2] ∩ (–2, +∞)

17. Pot expressar-se com a entorn una semirecta?

18. Expressa com a entorns oberts els intervals següents:

a) (0 , 7)

b) (–8 , –2)

c) (2,+∞)

19. Expressa com a intervals oberts els entorns següents:

a) E(2 , 2/3)

b) E(–7, 1/2)

20. Un nombre irracional tan important com a Pi és el nombre "e". $e \approx 2{,}718281828...$ que pareix periòdic, però no, no ho és. Es defineix com el nombre a què s'acosta $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quan *n* es fa molt, però que molt gran. **Agafa la calculadora** i dóna-li a *n* valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, … Apunta els resultats a una **taula**.

21. Una altra forma de definir *e* és $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

Que diràs tu què són aqueixos nombres tan admirats!, s'anomenen factorials i és molt senzill: 4! = 4·3·2·1 = 24, es multiplica des del nombre fins a arribar a 1. Per exemple: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No et preocupes, que la tecla ! està a la calculadora.

Pots calcular *e* amb 6 xifres decimals correctes?

*Nota: Fixa't que ara la convergència és molt més ràpida, només has hagut d'arribar fins a *n* = ¿?

22. Ara treballem amb valors exactes, ni les fraccions ni els irracionals se substitueixen per la seua expressió decimal, exemples:

$$\frac{4\pi\cdot 5^3}{3}=\frac{500\pi}{3}$$

$$3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$ m.

23. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat la diagonal del qual medeix 2 m.

24. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat $\sqrt{3}$ m.

25. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$ m.

26. Troba l'àrea total i el volum d'un cub de costat $\sqrt[3]{7}$ m.

27. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle perquè la seua àrea es faça el triple?

28. Quant ha de valdre el radi d'un cercle perquè la seua àrea siga 1 m^2?

29. Tenim una circumferència i un hexàgon inscrit en ella. Quina és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)

30. Quins nombres al quadrat donen 7?

31. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?

32. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?

33. Mesurar la grandària de les pantalles en polzades (") ja no pareix molt bona idea. La mesura es referix a la longitud de la diagonal del rectangle, així, una televisió de 32" es referix que la diagonal mesura 32". Això no dóna molta informació si no sabem la proporció entre els costats. Les més usuals en les pantalles de televisió i ordinador són 4:3 i 16:9.

Si una polzada són 2,54 cm, quines seran les dimensions d'una pantalla de 32" amb proporció 4:3?, i si la proporció és 16/9? Quina té major superfície?

AUTOAVALUACIÓ

1) *Saps a quins conjunts pertanyen els diferents nombres.*
Indica en una taula o un diagrama (com el del text) a quins conjunts numèrics pertanyen els nombres següents: 0; -2; 3/4, 7,3; 6,252525…, π-2 ; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1,123124125…; 2,999…

2) *Saps arredonir amb un nombre adequat de xifres i calcules l'error relatiu per a comparar aproximacions. Saps trobar una cota per a l'error absolut i el relatiu.*
   a) Els següents nombres s'han arredonit, troba una cota de l'error absolut i de l'error relatiu:
      a_1) 3,14
      a_2) 45600 amb arredoniment en les centenes.
   b) Si prenem $\sqrt{10} \approx 3,16$ y $\frac{2}{3} \approx 0,67$ en qual de les aproximacions cometem proporcionalment menor error?

3) *Saps quan una fracció té expressió decimal exacta o periòdica sense fer la divisió*.
Prova-ho amb aquestes:
30/150; 30/21

4) *Saps passar de decimal a fracció per a treballar amb valors exactes:*
Troba: 0,72525…+0,27474…

5) *Saps representar nombres racionals i irracionals de forma exacta*
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9}; \frac{30}{7}; \sqrt{10}; \sqrt{7}$

6) *Domines les distintes formes i notacions d'un interval o semirecta (interval, conjunt amb desigualtats i gràfica).*
Expressa en forma d'interval (o semirecta), en forma de desigualtat i representa gràficament:
   a) Nombres reals inferiors o iguals que -1
   b) Nombres reals compresos entre -4 i 2, inclòs el 1r però no el 2n.

7) *Saps passar d'un entorn d'un interval i viceversa.*
   a) Escriu com a interval: E(-2 , 2/3)
   b) Escriu com a entorn l'interval (-5/2 , 7/3)

8) *Saps resoldre problemes treballant amb quantitats exactes.*
Troba l'àrea, el volum i la diagonal principal d'un ortoedre de costats $\sqrt{5}; 2\sqrt{5}$ i $3\sqrt{5}$ m.