Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO
Capítol 6:
Funcions i gràfiques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos y David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

La Ciència utilitza models, i molts models s'aconsegueixen ajustant una funció a una taula de valors. Per exemple, en aquest moment estem ajustant unes paràboles a la relació entre la duració del desenrotllament en dies i la temperatura dels diferents estadis de la cotxinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que és una plaga que ataca als cítrics produint des de la mort de l'arbre a la seua desvaloració comercial, i dels seus enemics naturals, com els del gènere *Aphytis*, que davall certes condicions poden arribar a regular les poblacions de tal forma que no facen falta utilitzar altres mesures addicionals de control com a insecticides.

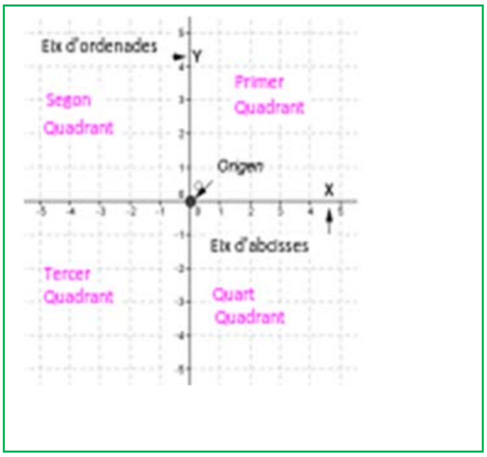
Una vegada aconseguida una funció que s'ajuste a una taula de valors es pot pronosticar el que ocorrerà o donar valors que no es coneixien prèviament.

Ajustar models mitjançant funcions que servisquen en les situacions més variades és una de les seues aplicacions més importants.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. FUNCIONS

1.1. Eixos de coordenades o cartesians. Coordenades cartesianes

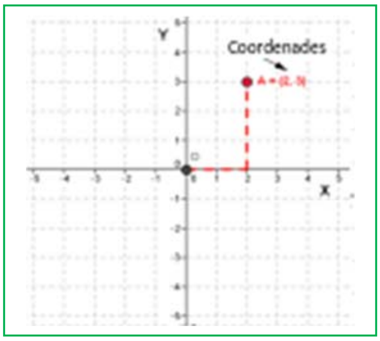


Recorda que:

Un conjunt format per **l'origen** *O*, els dos **eixos de coordenades** i la **unitat de mesura** és un **sistema de referència cartesià**.

Les **coordenades** d'un punt *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, *y*)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** i "y**"** la segona coordenada o **ordenada**. A tota parella ordenada de nombres (*x*, *y*) li correspon un punt del pla.

També qualsevol punt del pla queda totalment determinat mitjançant les seues coordenades.

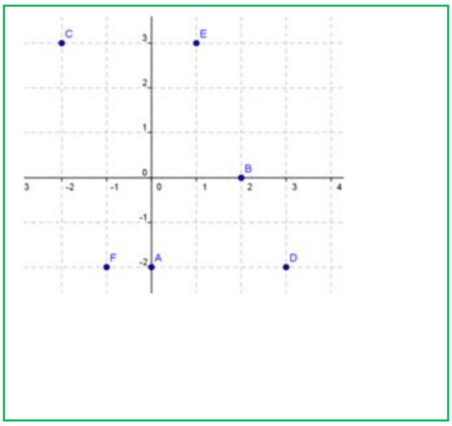


Exemple:

- Al gràfic anterior, el punt *A* té coordenades (2, 3).

Activitats proposades

1. Copia al teu quadern i indica les coordenades de tots els punts que estan assenyalats al pla:



2. Representa gràficament al teu quadern els següents punts del pla: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepte intuïtiu de funció

Ja saps que:

Hi ha multitud de fenòmens a la nostra vida quotidiana en què apareixen relacionades dues magnituds. Per exemple, el preu d'un quilo de pomes i el nombre de quilos que comprem, la duració d'un trajecte i la velocitat a què anem…

Una **funció** és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una, anomenada **variable independent** ("*x*"), li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra, anomenada **variable dependent** ("*y*").

Observa que si a un mateix valor de *x* li corresponen dues o més valors de *y*, aleshores la relació **no** és una funció. En canvi, al revés, en una funció un mateix valor de *y* sí que pot provindre de distints valors de *x*.

Les relacions funcionals es poden establir mitjançant una taula de valors, una gràfica o una expressió matemàtica o fórmula.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Exemple:

- Un quilo de tomaques costa 0,8 €/kg. La funció que estableix quant hem de pagar en funció de la quantitat de tomaques que ens emportem és $y = f(x) = 0,8\ x$.

A l'expressió $y = f(x)$, ***f*** és el nom que li posem a la **funció**, (podríem anomenar-la usant altres lletres, les que s'usen més sovint són "*f*", "*g*" i "*h*").
Entre parèntesis va la variable "***x***" que representa el nombre de quilos que comprem, és la **variable independent** ja que nosaltres triem lliurement la quantitat de tomaques que volem o necessitem. La variable "***y***" representa el preu que hem de pagar, és la **variable dependent** ja que "depèn" de quants quilos ens emportem, és a dir, de "*x*".

L'expressió, ***f*(*x*)**, que es llig "*f* de *x*", se sol usar amb molta freqüència per a designar a la variable dependent perquè resulta molt còmode escriure quant ens costaria comprar una quantitat concreta, per exemple, 5 kg, s'expressaria "*f* de 5" i el seu valor és $f(5) = 0,8·5 = 4$ €.

Activitats proposades

3. De les següents relacions entre dos variables, raona quins són funcionals i quins no:

a. Edat i pes d'una persona concreta al llarg de la seua vida
b. Pes i edat d'aqueixa mateixa persona
c. Un nombre i la seua meitat
d. Un nombre i el seu quadrat
e. Preu de la gasolina i el dia del mes
f. Dia del mes i preu de la gasolina

4. Si hui el canvi d'euros a dòlars està 1 € = 1,3 $, completa en el teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdós, en la que, coneixent els euros, s'obtinguen els dòlars. Es pot expressar de forma única la dita relació? És una funció?

Si quan realitzes el canvi en una oficina et cobren una comissió fixa de 1,5 €, com quedaria la fórmula en aquest cas?

1.3. Grafo i gràfica d'una funció

Ja que en tota funció tenim dos valors que es relacionen de forma única, podem dibuixar ambdós als eixos cartesians de manera que, si unim tots aqueixos punts, obtenim una corba que ens permet visualitzar la dita funció.

La dita representació té una sèrie de limitacions, moltes d'elles comunes a qualsevol dibuix que es puga fer: és aproximada ja que els instruments que s'utilitzen per a fer-la (regla, compàs, llapis...), per molt precisos que siguen (ordinadors), sempre tenen un marge d'error; també existeixen errades de tipus visual o dels instruments de mesura; o moltes vegades hem de representar els infinits punts del grafo

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

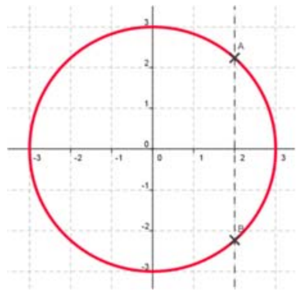
en un espai finit, la qual cosa és impossible i fa que només podem dibuixar una part del que es pretén, però no tot.

A pesar de tots aquests inconvenients, representar gràficament aquesta sèrie de punts relacionats que conformen la funció, encara que siga de forma aproximada, és important, ja que ens permet entendre moltes propietats a simple vista: "val *més una imatge que mil paraules*".

A més, una representació també ens permet descobrir si la mateixa representa a una funció o no, ja que en el dibuix és fàcil interpretar si a un valor de la variable independent li correspon únicament un de la dependent o més de u, propietat fonamental que defineix a les funcions.

Exemple:

- El següent dibuix, que correspon a una circumferència, al valor **0** de la variable independent li corresponen els valors **3** ***i*** –**3** de la dependent. A més, hi ha molts altres valors a què els passa el mateix, com per a *x*= 2, que talla a la gràfica als punts *A* i *B*. La circumferència no pot ser la representació d'una funció.



$x^2 + y^2 = 9$

La fórmula que correspon a dita gràfica és $x^2 + y^2 = 9$ o, també $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

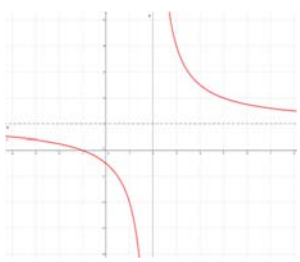
El **grafo d'una funció** és el conjunt de tots els parells ordenats als que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon a què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció:

$$Grafo(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

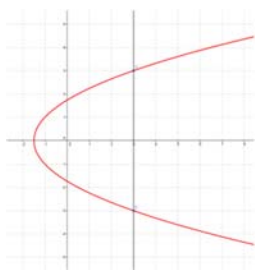
La **gràfica d'una funció** és la representació al pla cartesià de tots els punts que formen el grafo de la mateixa.

Activitat resolta

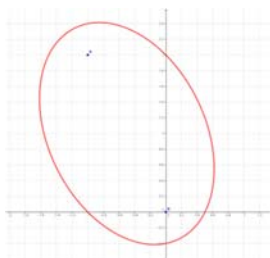
- *Indica quines de les següents gràfiques corresponen a una funció i quines no:*



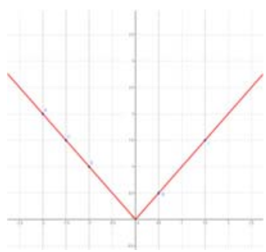
SÍ



NO



NO



SÍ

Quina és la clau o regla per a reconèixer, a partir del dibuix, si aquest correspon a una funció o no?

Si tracem rectes verticals imaginàries i aquestes xoquen amb el dibuix, com a màxim, en un punt, la gràfica correspon a una funció. Si xoca en dues o més punts, no és una funció.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats proposades

5. Realitza al teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que corresponga a una funció i una altra que no. Identifica cada una i explica el perquè de la dita correspondència.

6. Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	–	–	1	–	2
f(	–	0	5	4	0

7. Una persona camina a una velocitat de 4 km/h i partix del quilòmetre 10. Escriu l'expressió algebraica de la funció que indica els quilòmetres recorreguts en funció del temps. Assenyala quins són els valors que no té sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això a la gràfica.

8. En un full de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadradet. La seua àrea és 1 u^2. Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5… i calcula les seues àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seua gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Busca una fórmula per a aquesta funció.

9. Per a aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. La tarifa mínima és de 0,50 euros, el temps màxim d'aparcament és de 2 hores, cada mitja hora més costa 0,90 euros, i cada fracció, 0,05 euros. Representa una gràfica de la funció la variable independent de la qual siga el temps que s'espera estarà aparcat el vehicle i la variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.

10. Un fabricant vol construir gots cilíndrics mesuradors de volums, que tinguen de radi de la base 5 cm i d'altura total del got 18 cm. Escriu una fórmula que indique com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeta obtindre l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per a tindre un decilitre?

11. La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Guadarrama:

Quant temps va durar l'excursió?

Quant temps es va descansar? A quines hores?

Quants quilòmetres es van recórrer?

En quins intervals de temps se'n va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?

Fes una breu descripció del desenrotllament de l'excursió.

Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats a la gràfica.

Si a l'eix d'ordenades representàrem la variable "distància al punt de partida", seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?

12. La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components d'un equip de bàsquet, és una relació funcional? Per què? I la relació entre l'edat i l'altura? Escriu tres correspondències que siguen funcionals i tres que no.

2. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

2.1. Domini i continuïtat.

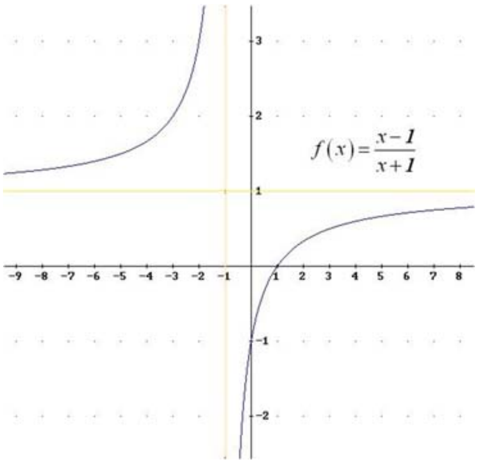
El **domini** d'una funció és el conjunt de punts en què està definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re \mid \exists\, f(x)\}$$

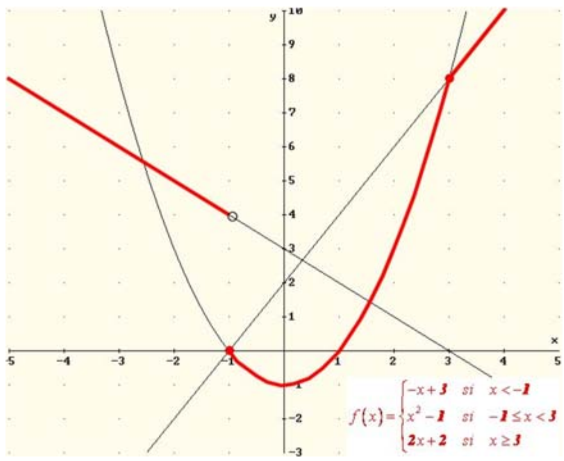
El concepte de **continuïtat** d'una funció és molt intuïtiu ja que es correspon amb que la gràfica es puga dibuixar sense alçar el llapis del paper. Quan açò no ocorre, es produeixen "*bots*" o *"salts"* en determinats punts que reben el nom de discontinuïtats.

Activitat resolta

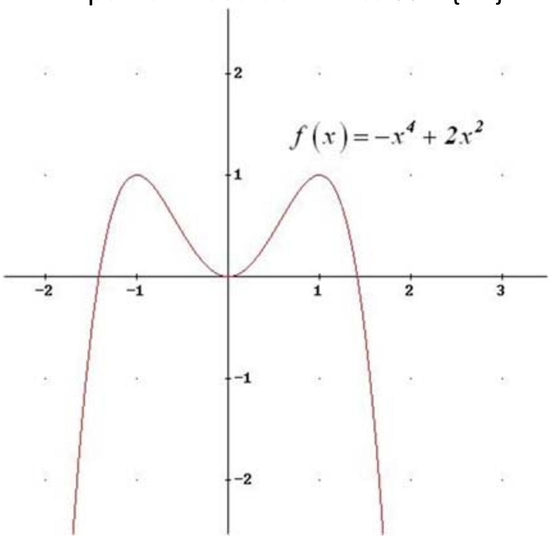
- *Quines funcions són contínues segons la seua gràfica i quines no? Indica en aquestes últimes el/els valor/és de la variable independent on es produeix la discontinuïtat:*



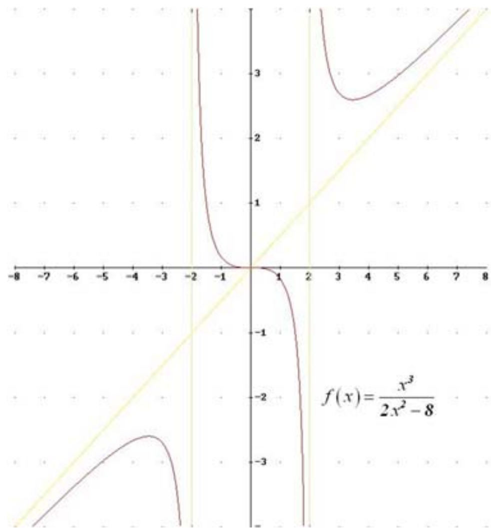
NO és contínua en $x = -1$ on té un salt infinit. És contínua en la resta dels punts. El seu domini és $\Re - \{-1\}$.



NO és contínua en $x = -1$ on té un salt finit de 4 unitats. A la resta, és contínua.
El seu domini és $\Re$.



SÍ, és contínua per a qualsevol valor de *x*.
El seu domini és $\Re$.



NO és contínua ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ on té salts infinits.
És contínua en $\Re - \{-2, 2\}$, que és el seu domini.

2.2. Monotonia: creixement i decreixement.

Una funció és **creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la variable dependent.

Una funció és **decreixent** en un interval si en augmentar el valor de la variable independent disminueix el de la variable dependent.

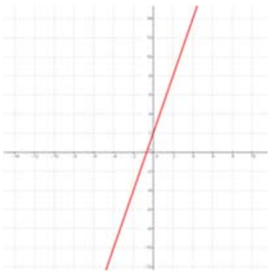
Una funció és monòtona en un interval quan és únicament creixent (o únicament decreixent) al dit interval.

Una funció és constant en un interval quan la variable dependent pren sempre el mateix valor.

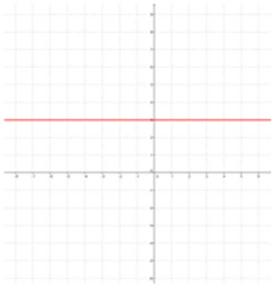
Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

Activitat resolta

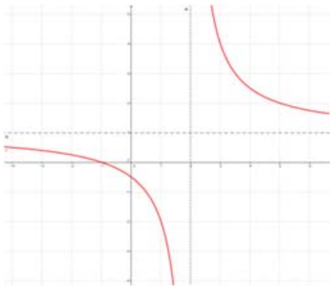
- *Estudia el creixement i el decreixement dels funcions següents:*



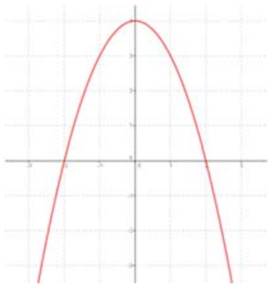
CREIXENT sempre (monòtona)



CONSTANT sempre



DECREIXENT fins a x = 2 DECREIXENT des de x =2



CREIXENT fins a x = 0 DECREIXENT des de x=0

2.3. Taxa de variació

La **taxa de variació** és el que augmenta o disminueix una funció entre dos valors. Es defineix com:

TV = $f(x_2) - f(x_1)$, para $x_2 > x_1$.

Si la funció és creixent en un interval, llavors la taxa de variació és positiva, i si és decreixent, negativa.

La taxa de variació mitjana es defineix com: TVM = $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

La TVM és molt important, perquè no és el mateix que una funció varie el seu valor una mateixa quantitat en un interval xicotet que en un interval gran. Per exemple, no és el mateix passar de 0 a 100 km/h en 5 segons que en 20 segons.

Exemple:

- Al desplaçament d'un vehicle en funció del temps, la taxa de variació, és el que s'ha desplaçat en un interval de temps, i la taxa de variació mitjana indica la velocitat mitjana en aqueix interval de temps.

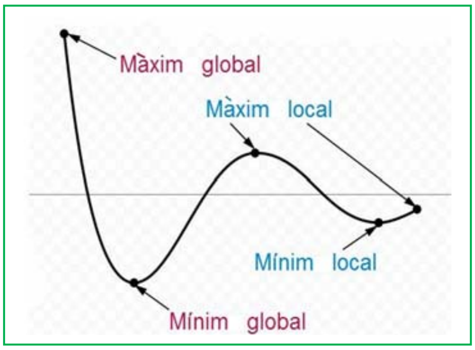
Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.4. Extrems: màxims i mínims

Una funció presenta un **màxim relatiu** (o **màxim local**) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és major que qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*).

$(a, f(a))$ és **màxim relatiu** si $f(a) \geq f(x)$, per a tot $x \in$ Interval

Si, a més, el valor és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció arriba a un **màxim absolut** (o màxim global) en ell.



$(a, f(a))$ és **màxim absolut** si $f(a) \geq f(x)$, per a tot $x \in Dom(f)$

Una funció presenta un **mínim relatiu** (o **mínim local**) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*).

$(a, f(a))$ és **mínim relatiu** si $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in$ Interval

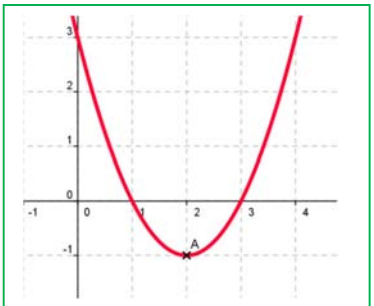
Si, a més, el valor és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció arriba a un **mínim absolut** (o **mínim global**) en ell.

$(a, f(a))$ és **mínim absolut** si $f(a) \leq f(x)$, per a tot $x \in Dom(f)$

Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** al dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.

Activitats resoltes

- *Estudia els màxims i mínims de les funcions següents:*

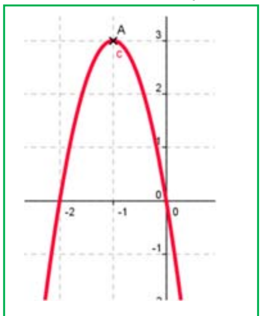


$y = x^2 - 4x + 3$

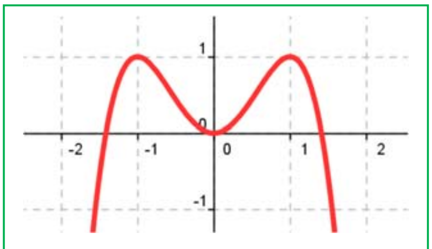
- La paràbola $y = x^2 - 4x + 3$ té un mínim absolut al seu vèrtex $(2, -1)$. No té màxims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex és decreixent i després és creixent.

- La paràbola $y = -3x^2 - 6x$ té un màxim absolut al seu vèrtex $(-1, 3)$. No té mínims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex, per a $x < -1$, la funció és creixent, i després, per a $x > -1$, la funció és decreixent.

Totes les paràboles tenen un màxim o un mínim absolut al seu vèrtex.



$y = -3x^2 - 6x$



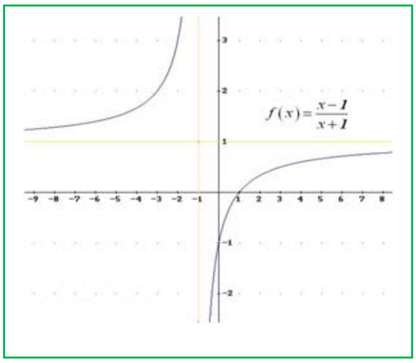
$y = -x^4 + 2x^2$

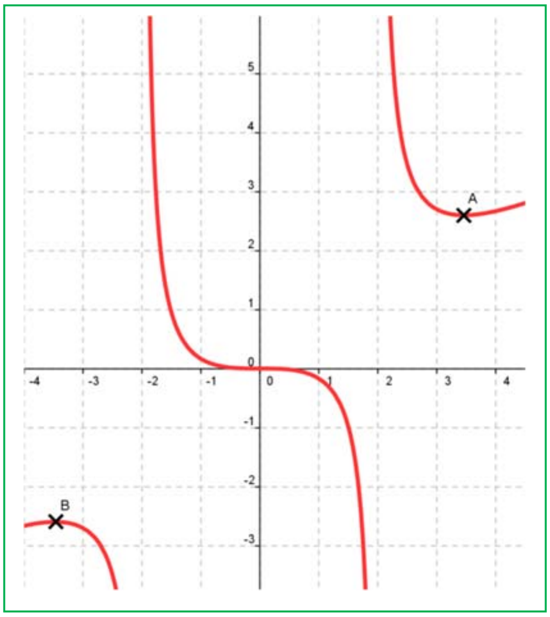
- La funció $y = -x^4 + 2x^2$ té un mínim absolut a l'origen $(0, 0)$ i dos màxims en $(1, 1)$ i en $(-1, 1)$. Per a $x < -1$ és una funció creixent, per a $-1 < x < 0$, és una funció decreixent, per a $0 < x < 1$ és creixent, i per a $x > 1$ és decreixent.

Observa, als **màxims** sempre la funció passa de ser **creixent** a ser **decreixent**, i als **mínims** de ser **decreixent** a ser **creixent**.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- La funció $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ no té ni màxims ni mínims (ni relatius ni absolutls). És una funció sempre creixent.





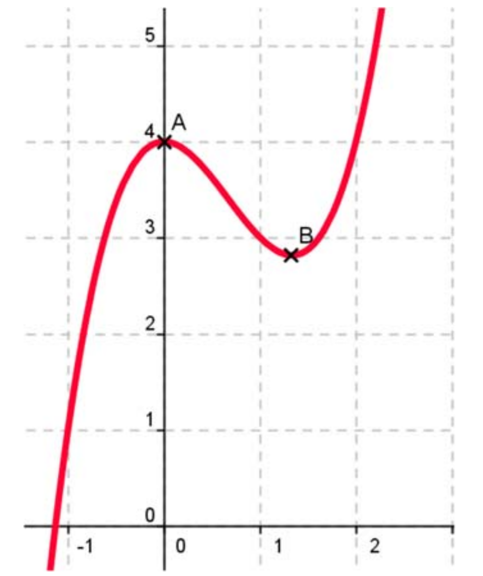
- La gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$ no té màxim ni mínim absolut, però té un mínim relatiu cap a x = 3, A(3'46, 2'6), i un màxim relatiu cap a x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínim relatiu, 2'6, és major que la del màxim relatiu, –2'6. Però en valors pròxims al mínim si és el menor valor, per aquest motiu es denominen "*relatiu*", "*local*". No són els valors menors (o majors) als que arriba la funció, però si únicament mirem en un entorn del punt si són valors màxims o mínims.

- La funció $f(x)=x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$ no té cap màxim absolut, però si té dos màxims relatius, un en l'interval (–2, –1) i l'altre en l'interval (0, 1). Té, no obstant això, tres mínims absoluts en els punts (–2, 0), (0, 0) i (1, 0). La funció és sempre positiva i el seu valor mínim absolut és **0**.

$f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$

La funció

$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ no té ni màxims ni mínims absoluts, però té un màxim relatiu en el punt A(0, 4) i un mínim relatiu en el punt B(4/3, 2,8). És creixent per a x < 0, decreixent per a 0 < x < 4/3, i creixent per a x > 4/3.



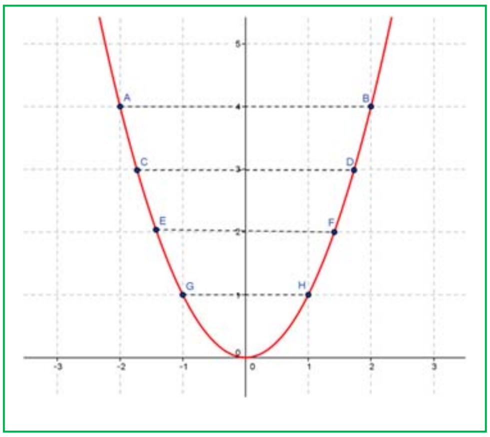
$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.5. Simetria

Una funció **parell és** aquella en què s'obté el mateix en substituir un nombre que el seu oposat:

$$f(-x) = f(x)$$



Si una funció és parell llavors és **simètrica** respecte a **l'eix d'ordenades**, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

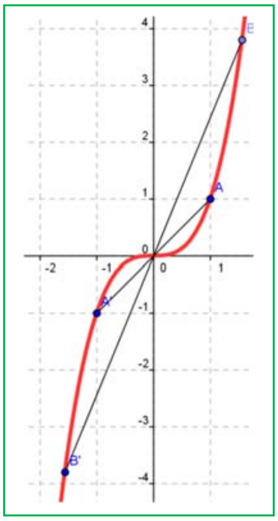
Exemple:

- La funció quadràtica $f(x) = x^2$ és parell:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el contrari en substituir un nombre pel seu oposat:

$$f(-x) = -f(x)$$



Si una funció és imparella llavors és **simètrica** respecte **a l'origen de coordenades**, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-lo cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:

La funció y = x^3 és una funció imparella perquè és simètrica respecte a l'origen.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

El segment *AO* és igual al segment *OA'*, i el segment *BO* és igual al segment *OB'*.

2.6. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què els valors de la funció es repeteixen sempre que se li afig a la variable independent una quantitat fixa, ***T***, anomenada ***període***. Les funcions periòdiques verifiquen que:

$$f(x + T) = f(x).$$

Exemple:

- Un exemple de funció periòdica és el següent, que correspon a un electrocardiograma:

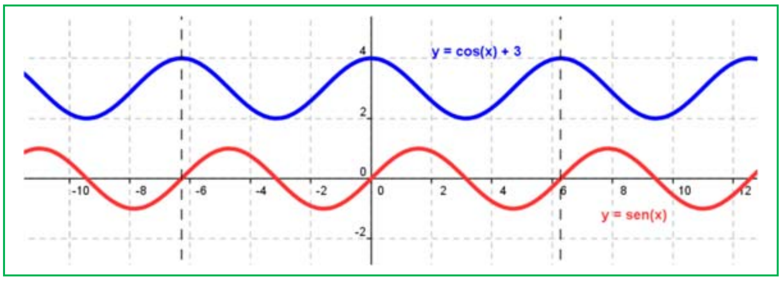
S'observa clarament que la gràfica es repeteix a intervals iguals, ja que els batecs del cor són rítmics.

Activitat resolta

- Les funcions:

$y = sin(x)$,

$y = cos(x) + 3$,



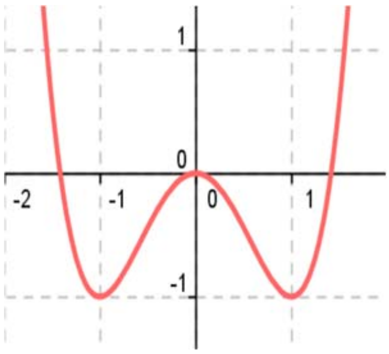
són funcions periòdiques. Observa que el seu període és un poc major que 6, és 2·π. En cada interval de longitud 2·π es repeteix una oscil·lació. Verifiquen que.

$sin(x + 2\cdot\pi) = sin(x)$, i que: $cos(x + 2\cdot\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

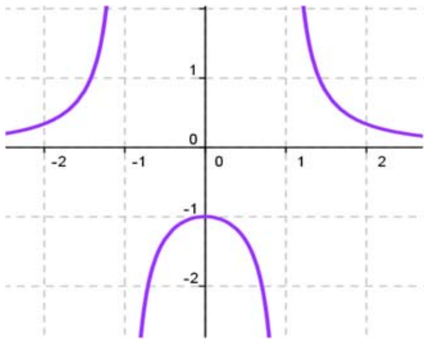
Activitats proposades

13. Copia les següents gràfiques al teu quadern i assenyala totes les característiques que pugues de les funcions representades. Indica el seu domini, si és contínua (o punts de discontinuïtat si els haguera), si és simètrica i tipus de simetria, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, període (si l'haguera)…

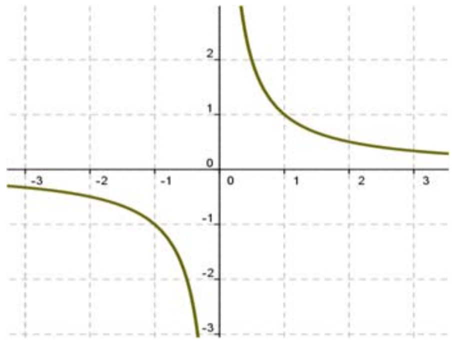
a)



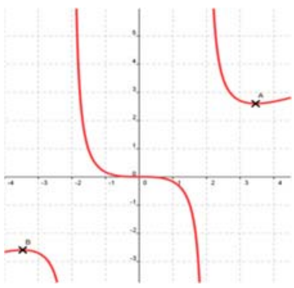
b)



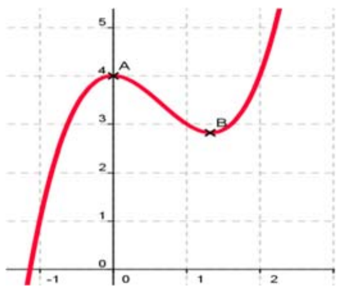
c)



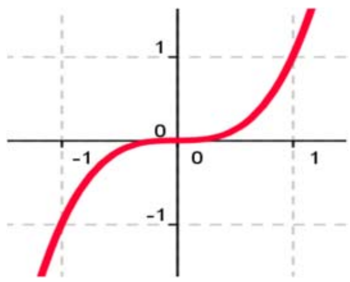
d)



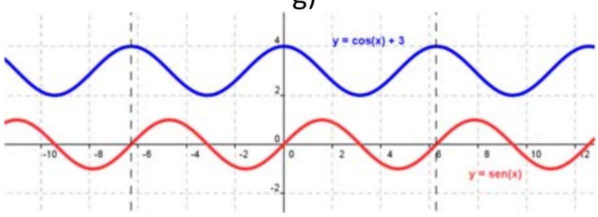
e)



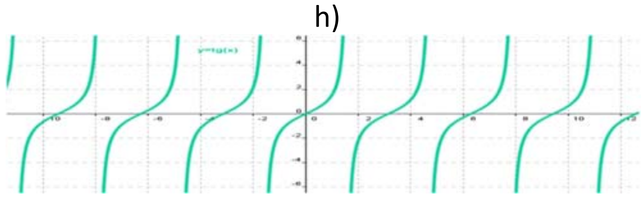
f)



g)



h)



Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. TIPUS DE FUNCIONS

3.1. Funcions polinòmiques de primer grau. La recta

Proporcionalitat directa

Recorda que:

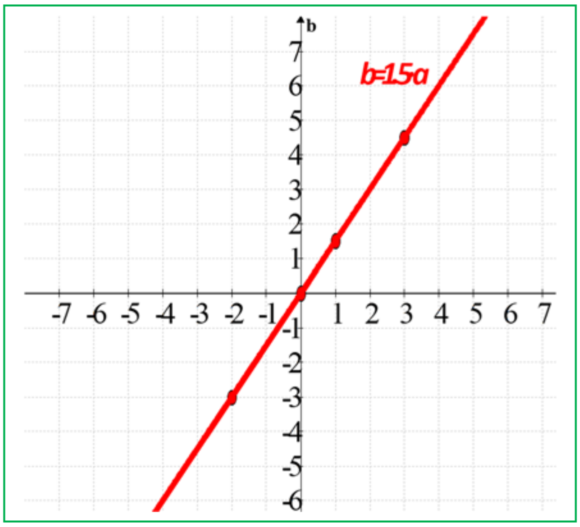
Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:

- Representar gràficament la relació de proporcionalitat donada a la taula següent:

Magnitud A (x)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (y)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-7,5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1,5}{1} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

La relació es defineix així: $y = 1,5 \cdot x$.

Recorda que:

La representació gràfica en el pla cartesià de dues **magnituds directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Es pot escriure la relació entre la magnitud A (x) i la magnitud B (y) com y = kx on k és la **raó de proporcionalitat**.

Exemple:

- La relació entre el pes en quilograms i el cost de qualsevol producte, és una proporcionalitat i es representa amb rectes de la forma y = kx, on k és el preu d'un quilo.
- Moltes de les relacions en Física són proporcionals i es representen mitjançant rectes com a espai – temps, pes – densitat , força – massa…

Activitats proposades

14. El consum mitjà d'aigua al dia per habitant és de 150 litres. Representa gràficament el consum d'aigua d'una persona al llarg d'una setmana.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Funció lineal. Rectes de la forma *y* = *m*·*x*.

Recorda que:

Una **funció lineal** és la que té la fórmula ***y* = *m*·*x***.

És una funció polinòmica de primer grau a què li falta el terme independent.

Una funció lineal correspon a una relació de proporcionalitat directa.

Per tant, la relació de proporcionalitat directa és una **funció lineal** de la forma ***y* = *m*·*x***.

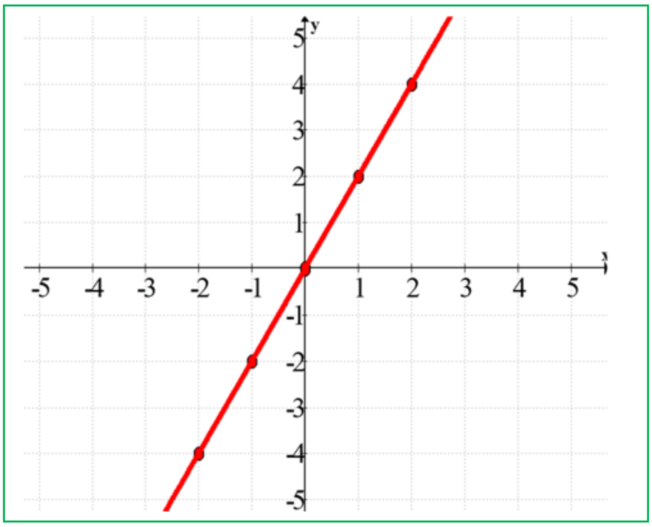
La representació gràfica de dues magnituds directament proporcionals és una **recta** que passa per l'origen.

Per tant la gràfica d'una **funció lineal** és una recta.

Exemple

- Representa la recta *y* = 2·*x*

  Nota: per a definir una recta és prou de conèixer dos dels seus punts (1, 2), (0, 0).



Recorda que:

Les rectes *y* = *m*·*x* tenen els següents components:

- *x* és la variable **independent**.
- *y* és la variable **dependent**.
- *m* és el **pendent** de la recta.

Les característiques més importants de les funcions lineals són:

- Passen per l'origen de coordenades, és a dir, el punt (0, 0) pertany a la recta.
- El seu domini i el seu recorregut són tot el conjunt dels nombres reals: tant *x* com *y* accepten qualsevol valor.
- Són simètriques respecte a l'origen, o el que és el mateix, són funcions imparelles.

Interpretació geomètrica del pendent

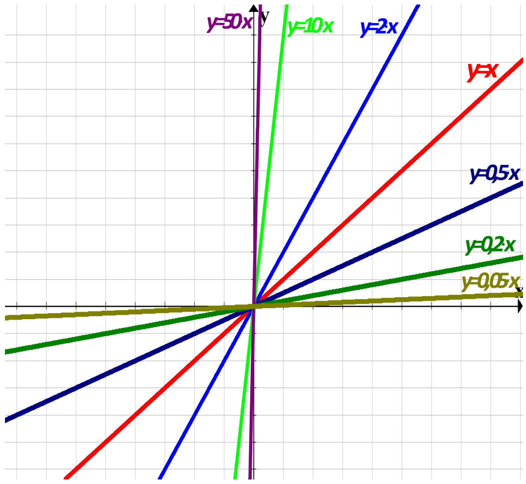
El coeficient *m* (que és la raó de proporcionalitat) s'anomena **pendent de la recta.** El pendent *m* és el que diferència unes funcions lineals d'altres. Mesura la inclinació de la recta respecte a l'eix d'abscisses i determina el seu creixement.

- Si $m > 0$. la funció és **creixent**.
- Si $m < 0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m = 0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix.

A les relacions de proporcionalitat directa, el pendent ve donat per la raó de proporcionalitat *k*.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes



- *Representa gràficament les funcions:*

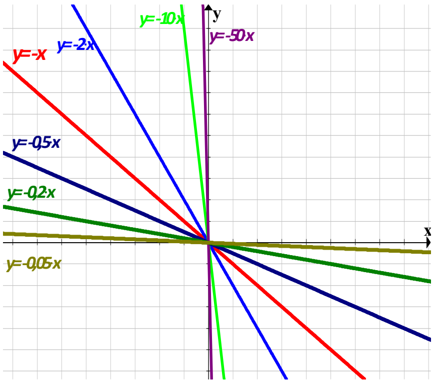
  $y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}2x$; $y = 0{,}05x$.

  Analitza el resultat.

  - La recta $y = x$, té de pendent m=1.

  -Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix *OY*.

- Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins a convertir-se en l'eix *OX* quan $m = 0$.



- *Representa gràficament les funcions:*

$y = –x$; $y = –2x$; $y = –10x$; $y = –50x$; $y = –0{,}5x$; $y = –0{,}2x$; $y = –0{,}05x$.

Analitza el resultat.

-Si augmenta m (és a dir, disminueix en valor absolut perquè és negatiu), llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix OX y=0.

- Si disminueix m (és a dir, augmenta en valor absolut perquè és negatiu), llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix *OY*.

El **pendent** de la recta y = *mx* és el valor que mesura la inclinació de la recta, és a dir, mesura el creixement o decreixement de la funció lineal:

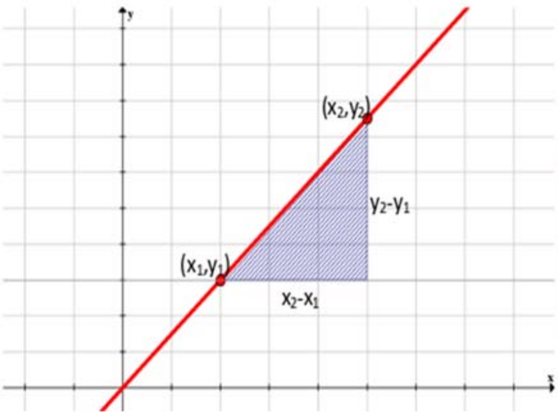
- Si $m > 0$,la recta és creixent.

-Si $m < 0$, la recta és decreixent.

El pendent de la recta no sols indica el creixement i decreixement de la funció, sinó que també mesura quant creix o quant decreix. Es pot dir que el pendent mesura el creixement de la recta en funció del que avança. Hem observat que:

- Si $m > 0$:
  - o Per a valors alts de m la recta creix amb major rapidesa, açò és, la recta "puja" molt i avança poc.
  - o Per a valors xicotets de m la recta creix amb menys rapidesa, és a dir, "puja" poc i avança molt.
- Si $m < 0$:
  - o Per a valors alts de m la recta decreix amb menys rapidesa, és a dir, baixa poc i avança molt.
  - o Per a valors xicotets de m la recta decreix amb major rapidesa, açò és, la recta "baixa" molt i "avança" poc.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



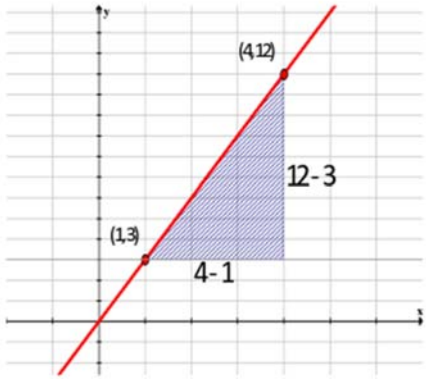
Una manera de calcular el pendent, és dividint el valor del que puja la recta entre el que avança, com es mostra al dibuix següent:

Donats dos punts qualssevol de la recta, el **pendent** es calcula de la manera següent:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

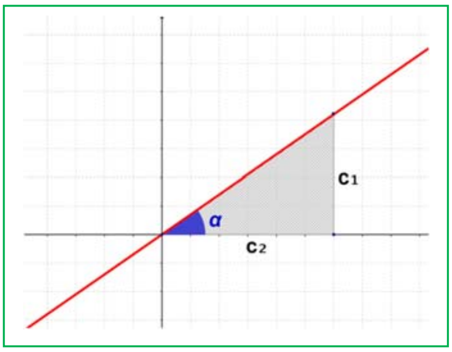
és a dir, $m = \frac{elquepuja}{elqueavança}$

La **taxa de creixement mitjana** d'una funció lineal coincideix amb el seu pendent: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Exemple:

La recta que passa pels punts (1, 3) i (4, 12) puja 12 – 3 = 9 i avança 4–1= 3, llavors



$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Per a trobar el pendent es pren com a referència la base i l'altura del triangle rectangle que formen els vèrtexs dels punts de la recta.

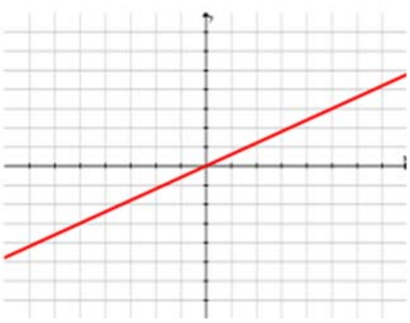
El quocient entre l'altura i la base és el pendent. Com el triangle construït és un triangle rectangle, el pendent és el quocient entre els seus dos catets.

Activitats proposades

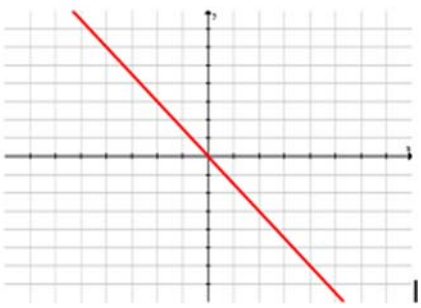
15. Representa al teu quadern, estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals següents:

a) y = 1,25·x; b) y = (3/5)·x; c) y = 3·x; d) y = 0,5·x;

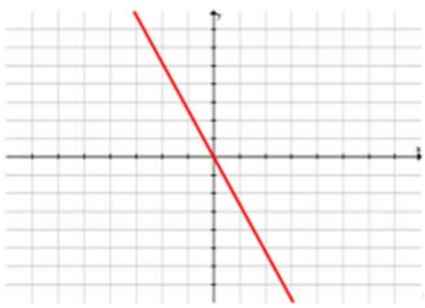
16. Troba el pendent i l'expressió algebraica (fórmula) de les següents rectes:



a.



b.



c.

Funció lineal. Rectes de la forma *y* = *m*·*x* + *n*.

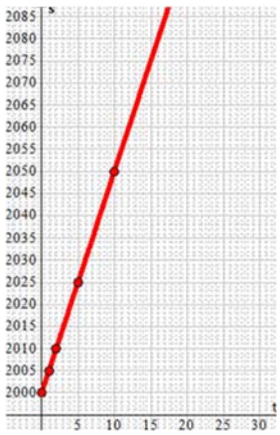
Ja saps que:

Les funcions polinòmiques de primer grau, o **funcions afins**, es descriuen algebraicament de la forma $y = m \cdot x + n$ i es representen mitjançant **rectes**.

Exemple:

- Un ciclista que s'ha traslladat 2 Km abans de començar el recorregut i es desplaça amb una velocitat de 5 m/s. La seua taula de valors i la seua representació gràfica són:

Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027



La fórmula és $s = s_0 + v \cdot t$

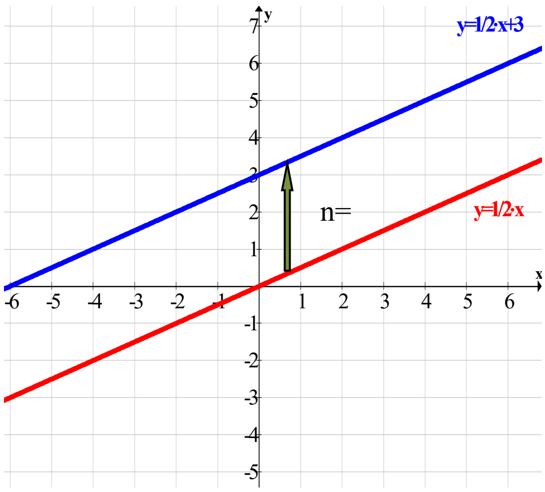
La gràfica d'aquesta recta té com a expressió algebraica:

$$y = 5 \cdot x + 2.000,$$

on *x* correspon al temps t i *y* a l'espai *s*, sent 2.000 l'espai inicial s_0.

El **pendent** és 5 però la recta no passa pel punt (0, 0), sinó que talla a l'eix d'ordenades al punt (2000, 0). Es diu que **l'ordenada** a **l'origen** és 2000.

Les rectes de la forma ***y = mx + n*** tenen el mateix pendent que les rectes *y* = *mx* però estan desplaçades en l'eix d'ordenades (eix *y*) *n* posicions (cap amunt si *n* és positiva, i cap avall si és negativa). Per aquesta raó, a *n* se l'anomena **ordenada a l'origen**, ja que és el valor de la recta en el punt de partida, és a dir, quan *x* = 0.



Activitats resoltes

- *Compara la recta y= (1/2)·x amb la recta y =* (1/2)·*x* + 3.

Les dues rectes tenen el mateix pendent. En ambdós casos m=1/2. Són dues rectes paral·leles.

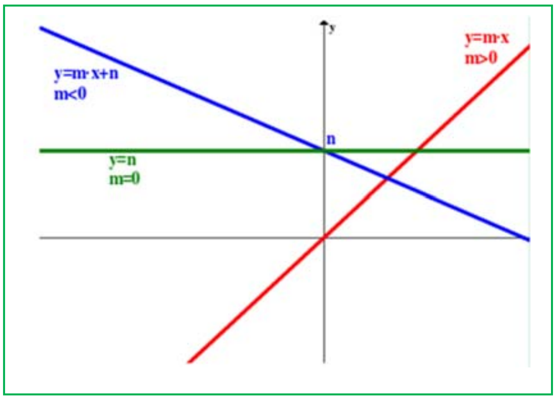
La diferència està al valor de l'ordenada a l'origen *n*: la recta *y*=(1/2)·*x* (on *n* = 0) s'ha desplaçat 3 posicions a l'eix *y* per a convertir-se en la recta *y* = (1/2)·*x* + 3 (on *n* = 3).

La recta y = *mx* + *n* és paral·lela a la recta y = *mx* (tenen el mateix pendent, *m*) desplaçada verticalment *n* posicions.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Les funcions ***y = mx + n*** s'anomenen **funcions afins**, i són també funcions lineals.

Quant al seu pendent, té el mateix significat:

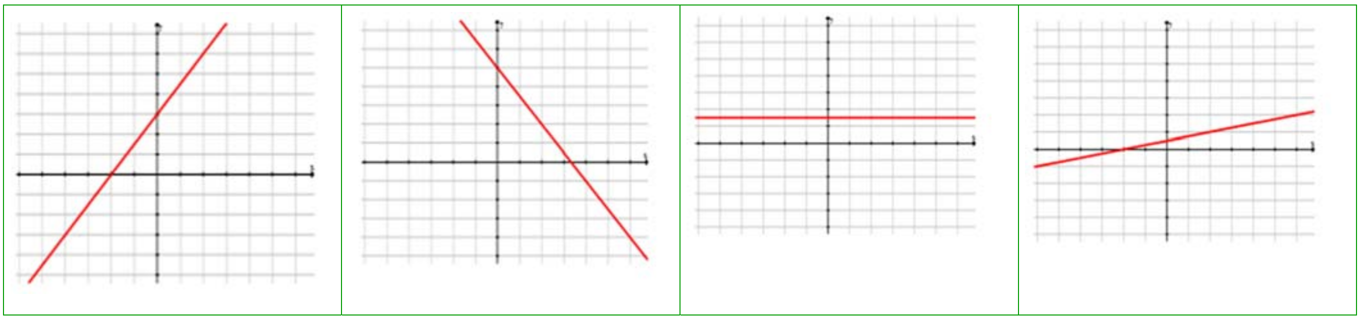


- Si $m > 0$. la funció és **creixent**.
- Si $m < 0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m = 0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix. Passa pel punt (n, 0) i és paral·lela a l'eix x.

La **taxa de creixement mitjana** d'una funció afí també coincideix amb el seu pendent: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, i és constant al llarg de tota la recta.

Activitats proposades

17. Troba l'expressió algebraica de les següents rectes:



18. Escriu tres funcions les gràfiques del qual siguen tres rectes que passen per l'origen de coordenades i els seus pendents siguen 5, –4, i 1/3 respectivament.

19. Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta y = x? I la recta y = –x?

20. Com són entre si dues rectes del mateix pendent i distint ordenada a l'origen?

21. Representa les següents funcions lineals:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\dfrac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

22. Un metre d'una certa tela costa 2,05 €, quant costen 7 metres? I 20 m? I 15,2 m? Quant costen "x" metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.

3.2. Funcions polinòmiques de segon grau. Funció quadràtica

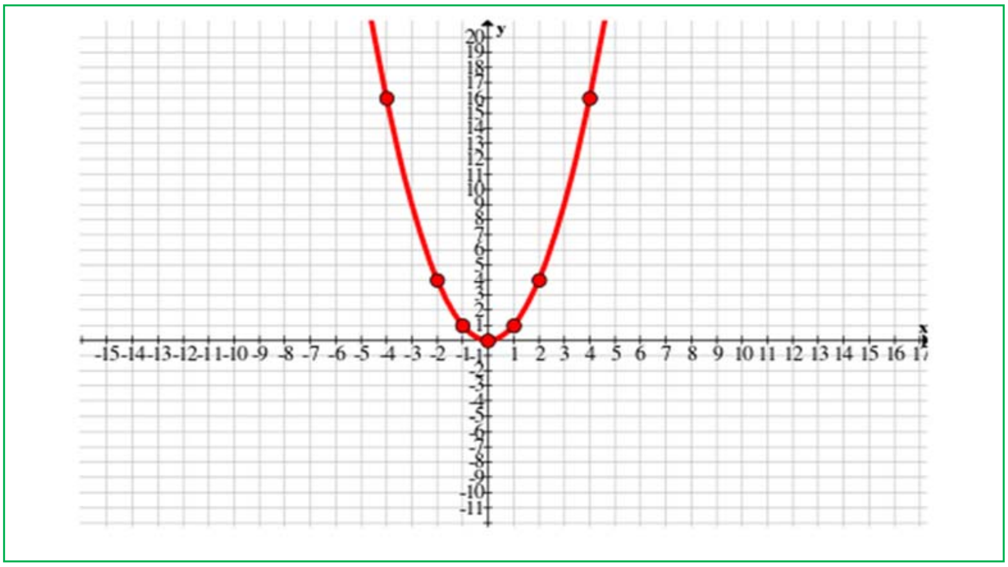
Les **funcions quadràtiques** són aquelles que tenen com a expressió algebraica un polinomi de segon grau, és a dir, són de la forma $y = a \cdot x^2 + bx + c$. La corba que apareix en representar gràficament una funció quadràtica s'anomena **paràbola**.

En Física, la trajectòria de molts moviments es representen mitjançant paràboles, i per això rep el nom de tir parabòlic: llançar un projectil amb un cert angle, l'aterratge d'un avió en un portaavions, etc.

Paràbola $y = a \cdot x^2$

Per a representar la paràbola $y = x^2$ construïm una taula de valors i representem els parells de punts al

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25



pla cartesià.

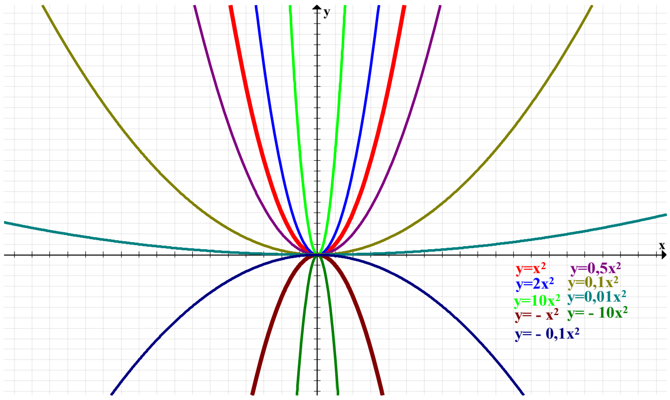
Observem que és **decreixent** fins al 0, i després **creixent**, després té un **mínim** absolut en el (0, 0). Si $a=-1$, $y = -x^2$, la paràbola té la mateixa forma però està oberta cap avall, i en compte d'un mínim, té un màxim al (0, 0).

Activitats resoltes

- *Representa gràficament en uns mateixos eixos coordenats:*

$$y = x^2,\ y = 0{,}5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0{,}1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0{,}01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0{,}01x^2.$$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



S'observa que:

La paràbola l'expressió algebraica de la qual és y= $a·x^2$, té les següents característiques:

- El domini i el recorregut són tots els reals.
- La funció és **contínua**, perquè no presenta salts.
- És **simètrica** respecte a l'eix ***y***, és a dir, és una funció **parell**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Si $a > 0$ té un **mínim absolut** al punt (0, 0):
  - en augmentar a, la paràbola es fa més estreta, i es va acostant a l'eix y.
  - en disminuir a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
- Si $a < 0$ té un **màxim absolut** al punt (0, 0):
  - en augmentar a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
  - en disminuir a, la paràbola es fa més estreta i es va acostant a l'eix y.

Al punt (0, 0) se l'anomena **vèrtex** de la paràbola $y = a·x^2$.

La **taxa de creixement mitjana** d'una paràbola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varia en moure'ns per la paràbola, i és major quant major és el coeficient a, com s'observa a les gràfiques d'aquestes paràboles.

Activitats proposades

23. Dibuixa en paper quadriculat la gràfica de la funció $y = x^2$.

a) Per a això fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.
b) Prenent valors d'abscissa negativa.
c) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?
d) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.
e) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.
f) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.

24. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa aquest resum. La gràfica de $y = ax^2$ s'obté de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ llavors ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ llavors ¿¿??
c) Si $a < -1$ llavors ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ llavors ¿¿??

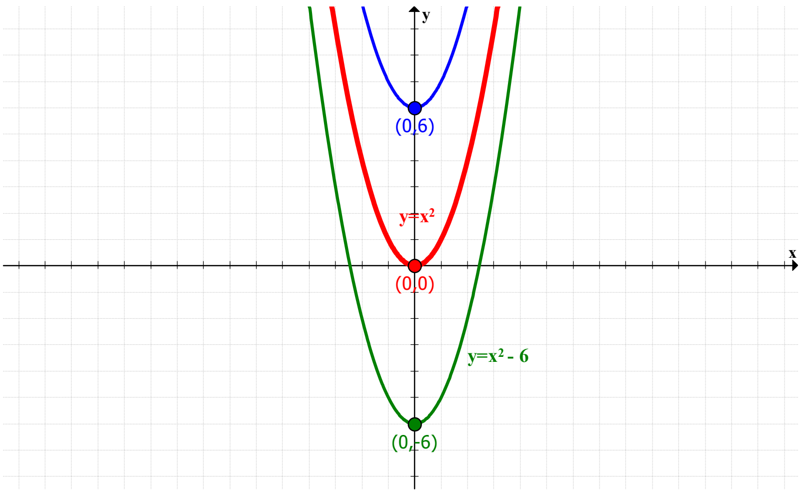
Desplaçaments verticals: Translacions en la direcció de l'eix *y*: $y = x^2 + k$.

Utilitzant com a plantilla la gràfica de $y = x^2$, es poden obtindre les gràfiques d'altres paràboles més complexes, depenent del tipus de desplaçament que utilitzem.

Exemple:

- Comparem les paràboles $y = x^2 + 6$ i $y = x^2 - 6$ amb la nostra plantilla de $y = x^2$.

Comprova que en aquest cas, es tracta de moure la paràbola en direcció vertical, és a dir, cap amunt o cap avall.



En sumar 6 a la paràbola $y = x^2$, la gràfica és idèntica però desplaçada 6 unitats en sentit positiu en l'eix *y*, és a dir, la paràbola ha pujat 6 unitats. El nou vèrtex passa a ser el punt (0, 6).

Una cosa pareguda ocorre quan es resta 6 unitats a $y = x^2$, En aquest cas la gràfica s'ha desplaçat 6 unitats en sentit negatiu fins al vèrtex (0, –6), és a dir, baixa 6 unitats.

La paràbola $y = x^2 + k$ té la mateixa forma que $y = x^2$ però traslladada *k* unitats verticalment en l'eix *i*. Si *k* és positiu, la translació és cap amunt i si *k* és negatiu, cap avall. El **vèrtex** de la paràbola es situa al punt (0, *k*).

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

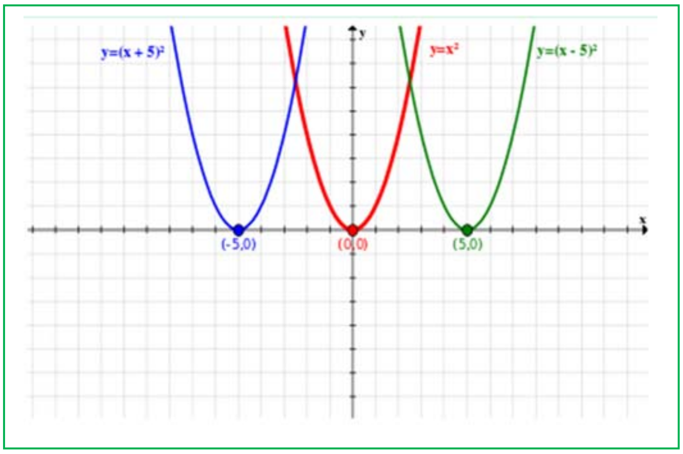
Activitats proposades

26. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y=x^2-1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$; és simètrica (cap avall) de $y = x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y = x^2 + q$.

Desplaçaments horitzontals: Translacions en la direcció de l'eix *x*: $y=(x-q)^2$.

Exemple:

- Compara les paràboles $y = (x + 5)^2$ i $y=(x-5)^2$ amb la plantilla de $y = x^2$.



Ara traslladem la paràbola en direcció horitzontal. Cap a la dreta o cap a l'esquerra.

En aquest cas, en augmentar la variable que s'eleva al quadrat, és a dir, sumar 5 unitats, la gràfica es traslladа horitzontalment cap a l'esquerra 5 unitats, sent el nou vèrtex el punt (–5, 0). En disminuir la dita variable, és a dir, restar 5 unitats, la paràbola es desplaça cap a la dreta sent el nou vèrtex el punt (5, 0).

La paràbola $y = (x - q)^2$ té la mateixa gràfica que $y=x^2$ traslladada q unitats en l'eix x cap a la dreta si $q > 0$ i cap a l'esquerra si $q < 0$. El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt (q, 0)**.**

Activitats proposades

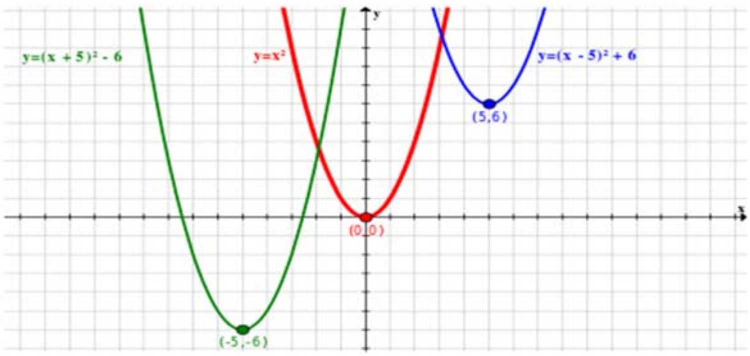
27. Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 2)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 3)^2$. Pel que, en general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - q)^2$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Desplaçaments oblics: translacions en ambdós eixos: $y = (x - q)^2 + k$.

L'últim moviment és el que combina els dos anteriors, és a dir, traslladem la plantilla de $y = x^2$, k posicions de manera vertical i q posicions de manera horitzontal, resultant una translació obliqua al pla.

Exemple:



- Comparem la paràbola $y = (x + 5)^2 - 6$ i $y = (x - 5)^2 + 6$ amb la plantilla de $y = x^2$.

La paràbola $y = (x - 5)^2 + 6$ es trasllada 5 unitats a la dreta i 6 unitats cap amunt, mentre que la paràbola $y = (x + 5)^2 - 6$ es trasllada 5 unitats cap a l'esquerra i 6 unitats cap avall. És a dir, és la composició dels dos moviments anteriors.

La paràbola $y = (x - q)^2 + k$ té la mateixa forma que $y = x^2$ traslladada de la manera següent:

$$q\,unitats\begin{cases}cap\,a\,la\,dreta\,si\,q > 0\\ cap\,a\,l\text{'esquerra}\,si\,q < 0\end{cases};\ k\,unitats\begin{cases}cap\,amunt\,si\,k > 0\\ cap\,avall\,si\,k < 0\end{cases}$$

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt (q, k). L'eix de simetria en $x = q$.

Representació de paràboles de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$.

Sabem representar les paràboles de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mitjançant translacions. Com podem representar la gràfica de les paràboles l'expressió algebraica de les quals és $y = x^2 + r\cdot x + s$?

Activitats resoltes

- *Representa la gràfica de la funció polinòmica $y = x^2 + 6\cdot x - 4$*

  La funció ve donada de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$, i volem convertir-la en $y = (x - q)^2 + k$.

  $$y = x^2 + r\cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

  Sabem que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on ja ens apareix $x^2 + 6x$. Ara hem d'ajustar la resta:

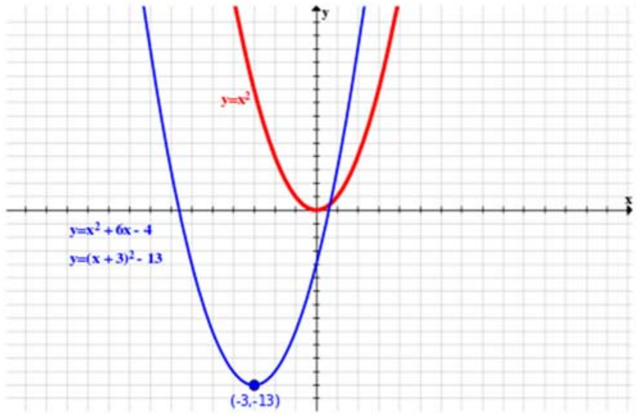
  $$y = x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x + 3)^2 - 13}$$

  Amb la paràbola expressada d'aquesta manera, n'hi ha prou amb traslladar la gràfica de $y = x^2$, 3 unitats a l'esquerra i 13 unitats cap avall, sent el vèrtex el punt $(-3, -13)$.

  Com a $r = 6$ observa que la primera coordenada del vèrtex és $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituint el valor de $x = -3$ a l'expressió $y = x^2 + 6\cdot x - 4$ s'obté:

  $$y = (-3)^2 + 6\cdot(-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



El vèrtex de la paràbola $y = x^2 + r·x + s$ es troba al punt $x = \frac{-r}{2}$. L'altra coordenada s'obté substituint *x* a l'expressió de la funció.

Activitats proposades

28. Escriu l'equació d'una paràbola de la mateixa manera que $y = x^2$, però traslladada 7 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 4 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

29. Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a) $y=(x+4)^2 - 5y$ b) $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c) $y = x^2 - 5$

d) $y = x^2 - 6x + 16$ e) $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f) $y = -x^2 + 12x - 26$

g) $y = x^2 - 10x + 17$ h) $y = -x^2 + 2x - 4$ i) $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Funció quadràtica. Paràboles de la forma *y* = *a*·*x*² + *b*·*x* + *c*.

Fins ara només hem estudiat les funcions de tipus $y = x^2 + r·x + s$, que és una paràbola amb la mateixa forma que $y = x^2$ oberta cap amunt, o $y = –x^2$, oberta cap avall.

També sabem com afecta el valor del coeficient "*a*" a la gràfica de la paràbola $y = a·x^2$, fent-la més estreta o més ampla.

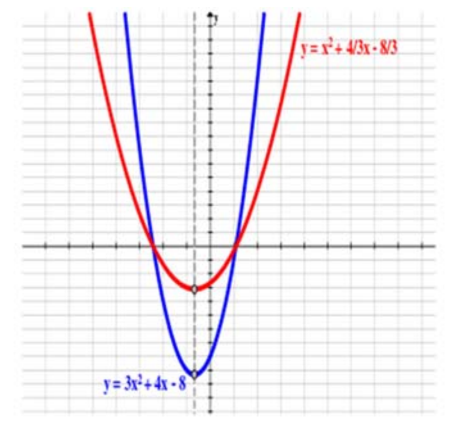
Per a representar les funcions quadràtiques $y = a·x^2 + b·x + c$ es converteix la dita expressió en una més familiar que sabem representar completant quadrats:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- *Representa la paràbola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:



Convertim la funció en una expressió més fàcil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

i la comparem amb $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$

Les dues paràboles tenen el vèrtex al mateix punt d'abscissa, i la coordenada y queda multiplicada per 3.

Quant a la forma, la paràbola és més estreta, com es va estudiar anteriorment.

La paràbola al cas general és:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$, és a dir, $r = \frac{b}{a}$, llavors la primera coordenada del vèrtex és $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

La segona coordenada ix en substituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la funció quadràtica.

En resum:

La funció quadràtica $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ té el seu vèrtex al punt d'abscissa $x = \frac{-b}{2a}$, la seua ordenada al que resulta de substituir aqueix valor a l'equació: $y = a\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. La forma dependrà del valor absolut del coeficient *"a"*, sent més ampla per a valors grans més estreta per a valors més xicotets. L'orientació de la paràbola serà :

-cap amunt si $a > 0$

-cap avall si $a < 0$

Activitats proposades

30. Tornem a usar la plantilla.

a) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (3, 1). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

b) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (–4, –2). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Elements de la paràbola

Els elements més característics de la paràbola ajuden a representar la seua gràfica.

Coeficient *a*:

Si $a>0$ la paràbola està oberta cap amunt.

Si $a<0$ la paràbola està oberta cap avall.

Vèrtex:

El **vèrtex** de la paràbola està al punt $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Punts de tall amb l'eix OX:

Són els punts on la paràbola talla a l'eix x, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta y=0. Indica quan la paràbola és positiva o negativa. Per a calcular-los, es resol l'equació de segon grau $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punt de tall amb l'eix OY:

És el punt on la paràbola talla a l'eix y, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $x=0$. Quan $x=0$ la paràbola presa el valor de c, per tant el punt de tall és el punt (0, c).

Eix de simetria:

La paràbola és simètrica a la recta paral·lela a l'eix y que passa pel vèrtex de la paràbola, és a dir, **l'eix de simetria** de la paràbola és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

L'eix de simetria també passa pel punt mitjà del segment format pels dos punts de tall amb l'eix x.

A partir d'aquests elements, es pot representar la gràfica d'una funció quadràtica.

Activitats resoltes

- *Determina els elements de la paràbola* $y=-2x^2-12x-10$

o $a=-2$, llavors la paràbola està oberta cap avall.

o Vèrtex: $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{array}\right. \Rightarrow Vèrtex: V(-3,8)$

o Punts de tall:

▪ Eix OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0)\end{cases}$

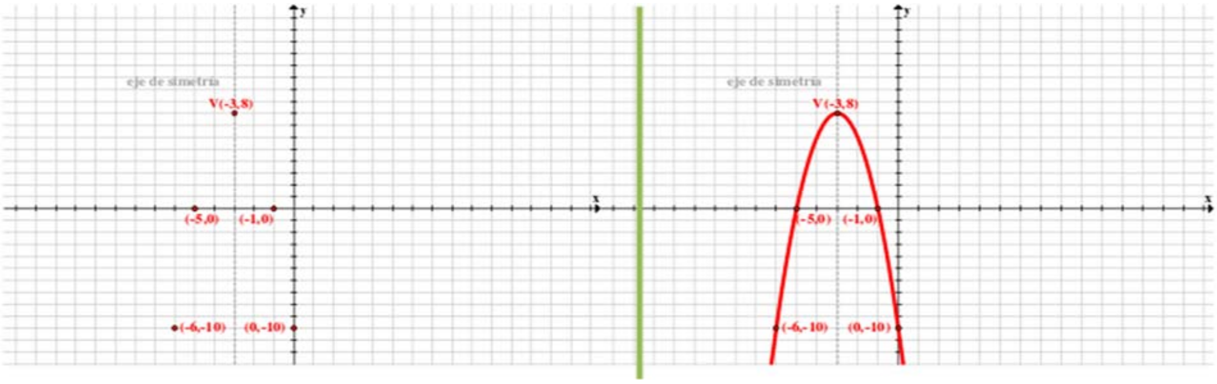
$y=-2x^2-12x-10 = -2\cdot(x+5)\cdot(x+1)$

▪ Eix OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

La paràbola també passa pel seu simètric: (–6, –10).

o Eix de simetria: recta $x=-3$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



Activitats proposades

31. Troba els elements característics i representa les paràboles següents:

a) $y=2x^2+4x-6$ b) $y=6x^2-24x$ c) $y=-2x^2+4x-2$

d) $y=2x^2+5x-12$ e) $y=3x^2+6x-9$ f) $y=-2x^2+7x+3$

g) $y=7x^2+21x-28$ h) $y=5x^2-9x+4$ i) $y=-4x^2-4x-1$

3.3. Ajustos a altres funcions polinòmiques

Hem vist que les rectes, $y = mx + b$, i que les paràboles, $y = ax^2 + bx + c$, serveixen de model per a situacions molt diverses. Però aquestes situacions no són més que una xicoteta part de la gran varietat de situacions que existeixen. Devem per tant d'ampliar l'arsenal de les nostres funcions. Si tenim unes dades en una taula de valors, volem analitzar si som capaços de trobar una fórmula matemàtica que s'ajuste a aqueixes dades, és a dir, que ens permeta fer prediccions respecte a valors de la variable no considerats.

Activitat resolta

- *Per al tractament d'una malaltia s'està provant un nou medicament amb distintes dosis, anotant, per a cada dosi el percentatge de curacions. Els resultats s'arrepleguen a la taula:*

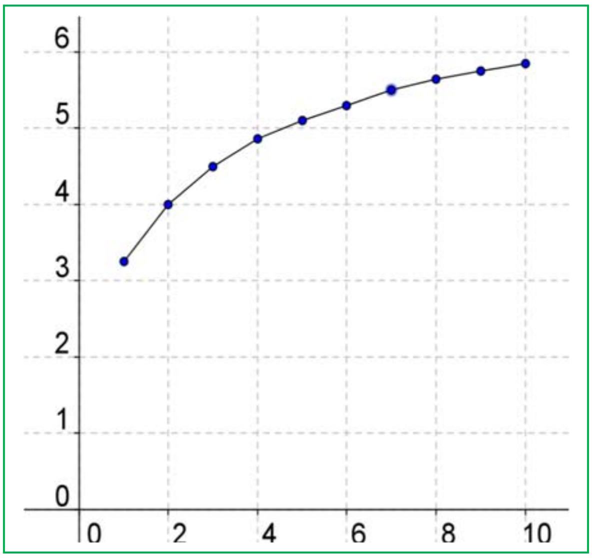
Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Representem gràficament els punts indicats a la taula:

La gràfica dels punts units mitjançant segments ens dóna una idea del model, però no podem encara descobrir la llei. No hi ha una única forma d'unir les dades. Conèixer el millor model està relacionat amb el problema en estudi encara que aquesta primera aproximació gràfica ja ens dóna prou informació. Pareix que, segons s'augmenta la dosi, creix el percentatge de curacions. No pareix plausible que per a una dosi intermèdia, per exemple, 4,5 mg, el percentatge de curacions cresca a 10 o disminuïsca a 3 %, potser podem assegurar que estarà entre 4,86 i 5,1. Podríem estimar-lo mitjançant una interpolació lineal i dir que el percentatge de curacions per a una dosi de 4,5 mg es podria estimar en que serà 4,98.

Les funcions polinòmiques, de les que acabes d'estudiar les rectes i les paràboles, però que són totes aquelles d'equació $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, tenen una interessant propietat.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



Si els valors de la x estan en progressió aritmètica, i calculem les diferències entre els valors de la "y", als que anomenarem **diferències primeres**, i indiquem $\Delta_1 y$, quan aquestes diferències són constants, llavors els punts estan en una recta.

Si de nou calculem les diferències, ara de les diferències primeres, i les anomenem **diferències segones**, i les indiquem $\Delta_2 y$, quan aquestes diferències són constants, llavors els punts estan en una paràbola.

En general, els valors de l'abscissa estan en progressió aritmètica i si les diferències n-èsimes, Δn són **constants** els punts s'ajusten a una funció **polinòmica de grau *n***.

Exemple:

- Calcularem les diferències successives de l'activitat resolta anterior:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85
$\Delta_1 y$		0,75	0,5	0,36	0,24	0,2	0,2	0,14	0,11	0,1
$\Delta_2 y$			–0,25	–0,14	–0,12	–0,04	0	–0,06	–0,03	–0,01
$\Delta_3 y$				0,11	0,02	0,08	0,04	–0,06	0,03	0,02

El primer en que ens fixem és que els valors de x estan en progressió aritmètica: 1, 2, 3…

Repassa les operacions per a comprovar que aquestes diferències estan ben calculades. Per exemple, la primera diferència és: 4,0 – 3,25 = 0,75. El primer valor de les segones diferències és: 0,5 – 0,75=–0,25. El primer valor de les terceres diferències és: –0,14 –(– 0,25) = +0,11.

Les diferències primeres no són constants, per tant les dades no s'ajusten a una recta, la qual cosa ja s'observava a la gràfica. Les diferències segones no són tampoc constants, per tant no hi ha una paràbola que s'ajuste a aqueixes dades. Tampoc són constants les diferències terceres, per tant tampoc hi ha una funció polinòmica de tercer grau que s'ajuste a aqueixes dades.

Activitat resolta

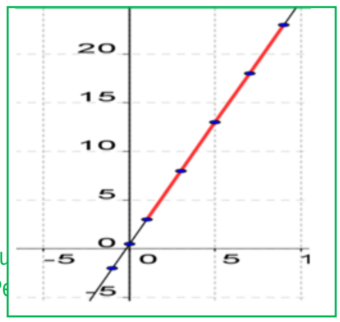
- *Comprova que les dades de la taula següent s'ajusten a una recta i escriu la seua fórmula.*

x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$		5	5	5	5

El primer en que ens fixem és que els valors de x estan en progressió aritmètica: 1, 3, 5, 7, 9…

Les diferències primeres són constants, per la qual cosa les diferències segones són totes zero. Les dades s'ajusten a una recta.

Representem les dades.



Busquem l'equació de la recta y = $mx + b$ imposant que passe per dos dels punts, $3 = m \cdot 1 + b$; $8 = 3m + b$. Restem: $5 = 2m$, per la qual cosa el pendent és: $m = 2{,}5$; i en substituir a la primera equació s'obté que l'ordenada a l'origen és $b = 0{,}5$. L'equació de la recta és: $y = 2{,}5\,x + 0{,}5$.

- *Les dades de la taula indiquen els metres recorreguts per un mòbil en el temps t segons. S'ajusten a una paràbola. Representa'ls gràficament i escriu la seua fórmula. Quina distància haurà recorregut als* 6 segons? *I als* 12 segons?

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$			2				2			

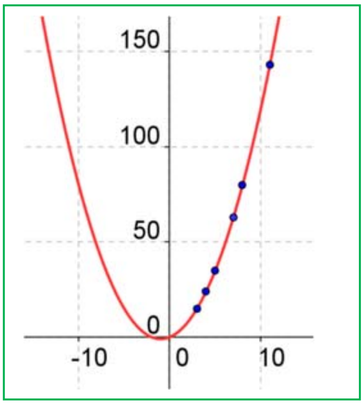
Falten dades, però les dues úniques diferències segones són iguals, per tant com l'enunciat diu que s'ajusten a una paràbola, imposarem que totes les diferències segones siguen iguals a 2, i amb aqueixa informació completem la taula.

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$			2	2	2	2	2	2	2	2

Primer hem completat totes les diferències segones iguals a 2. Després les diferències primeres que faltaven. I finalment els metres. Als 6 segons ha recorregut una distància de 48 metres, i als 12 segons de 168 metres.

Busquem la funció polinòmica de segon grau y = $ax^2 + bx + c$, que passa pels punts:

(3, 15), (4, 24) i (5, 35):



$15 = a9 + b3 + c$

$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restem: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Tornem a restar: $2 = 2a$. Per tant $a = 1$; $b = 11 - 9\cdot 1 = 2$; $c = 15 - 9\cdot 1 - 3\cdot 2 = 0$. La paràbola és $y = x^2 + 2x$.

Comprovem que, en efecte passa pels altres punts de la taula:

$$143 = 11^2 + 2\cdot 11 = 121 + 22.$$

Activitats proposades

32. Troba la funció quadràtica determinada pels punts: (1, 5); (2, 8); (3, 20). Representa-la gràficament.

33. Troba la funció polinòmica que passa pels punts: (0, 5); (1, 9); (2, 4) i (3, 10).

34. Troba la funció polinòmica determinada pels punts: (0, 3); (1, 6); (2, 9); (3, 12); (4, 15). Calcula les diferències successives i dibuixa la gràfica.

35. Es fan proves mesurant la distància que recorre un avió des que toca terra en una pista d'aterratge. Les dades estan en la taula adjunta. Hi ha alguna funció polinòmica que s'ajusta a aqueixes dades. Si n'hi ha, escriu la seua fórmula.

Temps (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distància (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fàbrica els preus dels cables d'acer depenen dels diàmetres i ve donat el preu de cada metre en euros en la taula següent. Hi ha alguna funció polinòmica que s'ajuste perfectament a aqueixes dades?

Diàmetre (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Preu (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Donada la taula següent, es pot ajustar exactament una recta? Considera si alguna dada és errònia i si és així, corregeix-ho.

Temps (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distància (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

En realitzar un experiment és molt estrany trobar situacions en què una recta, una funció quadràtica, una cúbica… s'ajusten a les dades a la perfecció.

A l'activitat resolta de les dosis de medicament i percentatge de curacions, si haguérem continuat calculant les diferències successives mai ens hagueren arribat a ser cap d'elles iguals i haguérem arribat a les diferència d'orde 9 m, que ja només seria una, i ens donaria: $\Delta_9 y = -0{,}67$. Hauríem d'escriure una funció polinòmica de grau 9!

Una funció polinòmica de grau n es coneix si sabem que passa per $n + 1$ punts.

Així, una recta queda determinada per 2 punts. Una paràbola queda determinada per 3 punts. I la funció polinòmica de grau 9 per 10 punts. Hi ha altres funcions. Les dades del medicament s'ajusten a una hipèrbola: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$, un tipus de funció que estudiarem a continuació.

3.4. Funcions de proporcionalitat inversa. La hipèrbola *y = k/x*

Recorda que:

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La **raó de proporcionalitat inversa** k és el producte de cada parell de magnituds: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

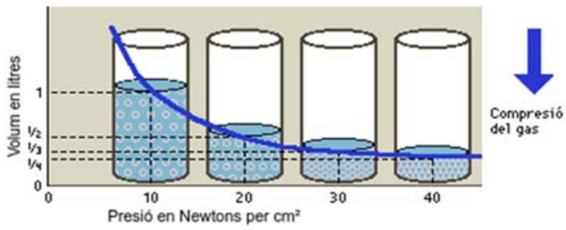
Exemple

- En Física trobem molts exemples de magnituds inversament proporcionals: La velocitat d'un vehicle i el temps que tarda a recórrer un trajecte són magnituds inversament proporcionals. En aquest cas, l'espai recorregut es manté constant, sent ell, la raó de proporcionalitat inversa $s = v \cdot t$. Altres exemples són: la densitat i el volum, la potència i el temps, la pressió i la superfície,…

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

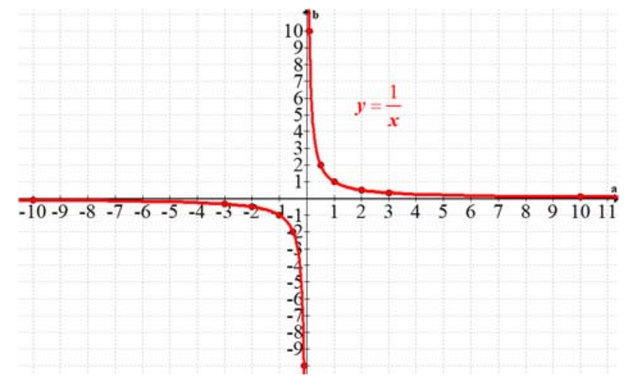
- *Representa al pla la llei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constant, el volum d'una massa fixa de gas és inversament proporcional a la pressió que aquest exerceix".*



La fórmula que descriu aquesta llei és $P \cdot V = k$.

Si aïllem el volum final V, obtenim l'expressió següent: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gràfica descriu una corba que a mesura que augmenta la pressió inicial, disminueix el volum i es va aproximant a l'eix x, i al contrari, si disminueix la pressió, el volum augmenta.



La **funció de proporcionalitat inversa** es defineix mitjançant l'expressió $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$, on k és la **raó de proporcionalitat inversa** i les variables x e y són els distints valors que tenen les dues magnituds.

La seua representació gràfica al pla cartesià és una corba anomenada **hipèrbola**.

Exemple

- Representa la hipèrbola $y = \dfrac{1}{x}$

x	−10	−3	−2	−1	−1/2	1/2	1	2	3	10
y	−1/10	−1/3	−1/2	−1	−2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completem una taula de valors i representem els punts en un sistema de coordenades.

Es pot observar que la gràfica mai talla als eixos de coordenades, ja que ni la x ni la y poden valdre 0. El 0 no està al domini i tampoc al recorregut de la funció (no es pot dividir per 0). El seu domini és $\Re - \{0\}$.

Com es veu a la gràfica, i és fàcil comprovar, la funció és contínua en tot el domini i simètrica respecte a l'origen (funció imparella).

Activitats proposades

38. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa al mateix sistema de coordenades:

a) $y = \dfrac{-1}{x}$ b) $y = \dfrac{5}{x}$ c) $y = \dfrac{1}{2x}$ d) $y = \dfrac{3}{8x}$ e) $y = \dfrac{-5}{3x}$ f) $y = \dfrac{-12}{5x}$

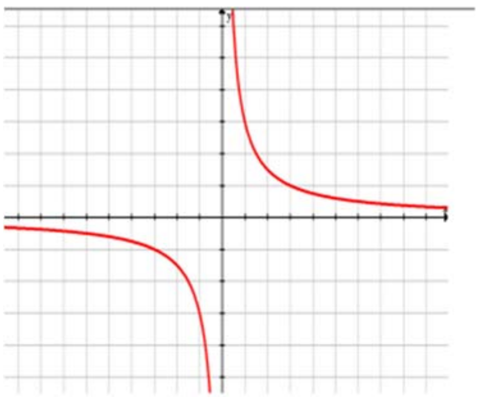
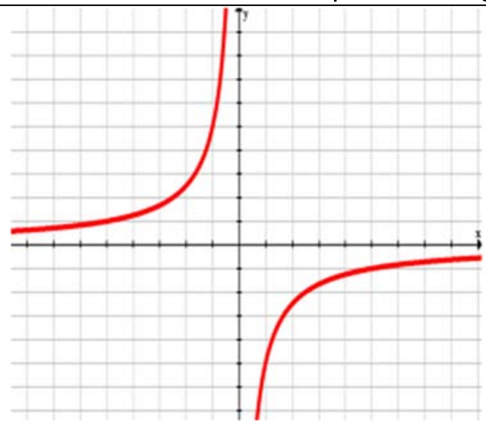
39. Descriu el que succeeix quan varia el valor de k. Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

40. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passen per cada un d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a. (5, 3)	b. (2, –1)	c. (1/2, 6)
d. (10, 4)	e. (*a*, 1)	f. (1, *b*)

41. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a. 	b. 	
c. $y=\dfrac{9}{2x}$	d. $y=\dfrac{-5}{3x}$	e. $y=\dfrac{-0,3}{x}$
f. (-5,2)	g. (4,-9)	h. (1,1/2)

En general, les hipèrboles l'expressió de les quals és $y=\frac{k}{x}$ tenen les propietats següents:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - o Si el valor absolut augmenta, la corba s'allunya de l'origen de coordenades.
  - o Si el valor absolut de k disminueix, la corba s'aproxima a l'origen de coordenades.
- **Domini:** Són tots els reals menys el 0: *Dom* = $\Re$ – {0}.
- **Recorregut:** El seu recorregut són tots els reals menys el 0: $\Re$ – {0}.
- **Continuïtat:** La funció de proporcionalitat inversa és contínua en tot el seu domini, però discontínua a la recta real, ja que el 0 no està al domini, i per tant, en 0 hi ha un salt infinit.
- **Simetria:** Són funcions imparelles, açò és, són simètriques respecte a l'origen de coordenades.
- **Asímptotes:** Són les rectes la distància de les quals a la gràfica és molt xicoteta, quan la corba s'allunya de l'origen.

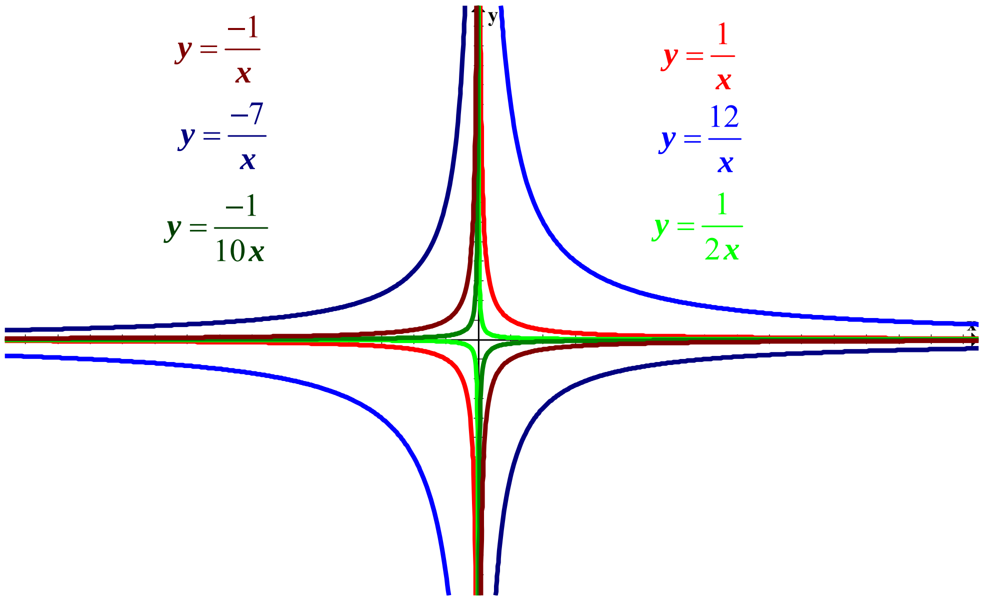
Hem vist que no està definida en 0, però quan el valor de *x* s'acosta a zero, el valor de *y* es fa molt gran en valor absolut. Per això es diu que la recta *x* = 0 és una asímptota vertical de *y* = *k*/*x*.

De la mateixa manera, si ens fixem a les gràfiques, s'observa que quan els valors de *y* creixen en valor absolut, els valors de *x* s'acosten a 0 (sense tocar-lo). Es diu que la recta *y* = 0 és una asímptota horitzontal.

- **Creixement:** depèn del signe de k:
  - o Si $k>0$: la funció és **decreixent** a l'interval $(-\infty,0)$ i **creixent** a l'interval $(0,+\infty)$.
  - o Si $k<0$: la funció és **creixent** a l'interval $(-\infty,0)$ i **decreixent** a l'interval $(0,+\infty)$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Les asímptotes divideixen a la hipèrbola en dos trossos que reben el nom de **branques de la hipèrbola**.



La hipèrbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$

A partir de la representació de la funció $y = \frac{k}{x}$, és possible representar un altre tipus d'hipèrboles? Igual que ocorre amb les paràboles, podem traslladar les hipèrboles al pla en direcció horitzontal o vertical, segons els valors que prenguen els paràmetres a i b.

Activitats proposades

42. Representa als mateixos aqueixos de coordenades, les hipèrboles següents:

a) $y = \frac{5}{x}$ $\quad y = \frac{5}{x} + 3 \quad y = \frac{5}{x} - 3$

b) $y = \frac{-12}{x} \quad y = \frac{-12}{x-3} \quad y = \frac{-12}{x+3}$

c) $y = \frac{3}{x} \quad y = \frac{3}{x-1} + 5 \quad y = \frac{5x-2}{x-1}$

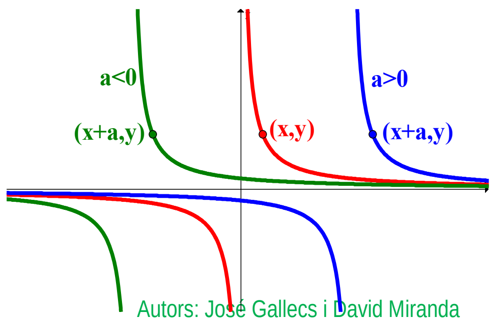
43. Descriu el que succeeix quan varien els paràmetres *a* i *b* a les hipèrboles de l'exercici anterior.

En general, la representació gràfica de les hipèrboles l'expressió algebraica de les quals és$y = \frac{k}{x-b} + a$ és una translació el pla depenent dels valors de a i b.

Desplaçaments horitzontals

En variar el valor de ***a***, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça horitzontalment a unitats:

- Si $a > 0$: la hipèrbola es desplaça cap a la dreta.
- Si $a < 0$: la hipèrbola es desplaça cap a l'esquerra.



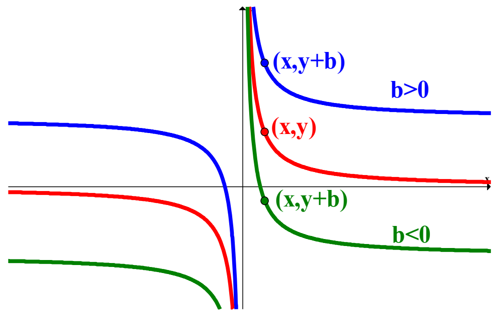
Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x + a, y)$:

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y)$$

- El vector de translació és el vector $(a, 0)$

Desplaçaments verticals



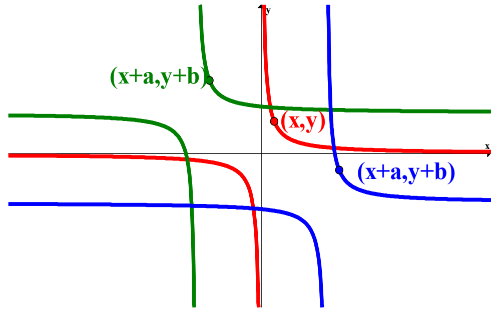
En variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça verticalment b unitats:

- Si $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$: la hipèrbola es desplaça cap amunt.
- Si $\boldsymbol{b} < \mathbf{0}$: la hipèrbola es desplaça cap avall.
- El punt (x, y) es converteix en el punt $(x, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$

- El vector de translació és el vector $(0, b)$

Desplaçaments oblics



En variar tant el valor $\boldsymbol{a}$ com el valor de $\boldsymbol{b}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça diagonalment tantes unitats com siga el valor dels paràmetres:

- Les direccions cap a on es trasllada dependrà dels signes de a i b.
- El punt (x, y) es converteix en el punt $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

- El vector de translació és el vector (a, b).
- L'origen de coordenades (0, 0)es trasllada al punt (a, b).

Activitats proposades

44. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbola $y = \dfrac{5}{x}$:

a. $y = \dfrac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \dfrac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \dfrac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \dfrac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \dfrac{4}{x}$ f. $y = \dfrac{20}{5-x} - 2$

45. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asímptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.

46. Escriu una regla per a expressar com es traslladen les asímptotes segons els paràmetres a i b.

Hipèrbola $\boldsymbol{y = \dfrac{mx+n}{px+q}}$

Les funcions que es defineixen mitjançant aquesta expressió també es representen mitjançant hipèrboles. Per a això, necessitem fer una modificació en una expressió com l'estudiada a l'apartat anterior que ens resulte més fàcil de manejar i representar:

Dividint $(mx+n):(px+q) \rightarrow y = \dfrac{k}{x-a} + b$

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Activitats resoltes

- *Convertir la funció* $y = \dfrac{3x+2}{x-7}$ *en una funció l'expressió de la qual siga més senzilla de representar.*

Dividim $3x+2$ entre $x-7$:

$$(3x+2) = 3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

Aquesta última expressió és fàcil de representar.

Activitats proposades

47. Representa les hipèrboles següents:

a. $y = \dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y = \dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa la gràfica de la funció: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$. A) Quan x creix, "*y*" tendeix a 7? Té una asímptota horitzontal *y* = 7? B) Si *x* s'acosta a –3, la *y* creix? Té una asímptota vertical, *x* = –3? C) Analitza si aquesta hipèrbola s'ajusta als valors de l'activitat resolta de la taula:

Dosi (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacions (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3.5. Funcions exponencials

Hem estudiat funcions polinòmiques, de proporcionalitat inversa... Ara estudiarem un altre tipus de funcions.

Hi ha dos tipus de funcions **l'expressió analítica** o **fórmula** de les quals és una **potència**:

- Si la variable independent està a la base: $y = x^3$, s'anomena **funció potencial**, i quan a més l'exponent és un nombre natural és una funció polinòmica.
- Si la variable independent està a l'exponent: $y = 3^x$, s'anomena **funció exponencial**.

Exemple:

Són funcions exponencials: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Una funció exponencial és aquella en què la variable independent està a l'exponent.

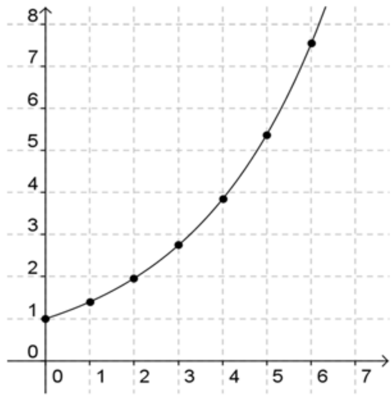
Activitat resolta

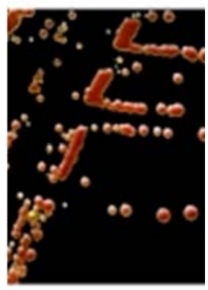
- Si la quantitat de bacteris d'una determinada espècie es multiplica per 1,4 cada hora, podem escriure la següent fórmula per a calcular el nombre *"y"* de bacteris que hi haurà al cap de *"x"* hores (començant per un sol bacteri): $y = 1{,}4^x$.

Nombre de bacteris en cada hora (**Taula de valors de la funció**):

Hores transcorregudes (*x*)	**Núm. bacteris (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
...	...

Gràfica de la funció





Activitats proposades

49. Prova ara a realitzar al teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas semblant, suposant que el nombre de bacteris es multiplica cada hora per 2 en compte de per 1,4.

Observa que els valors de *"y"* augmenten molt més de pressa: mentre que els valors de *"x"* augmenten d'1 en 1 els valors de *y* es van multiplicant per 2. Açò s'anomena **creixement exponencial**. Si en compte de multiplicar es tracta de dividir tenim el cas de **decreixement exponencial**.

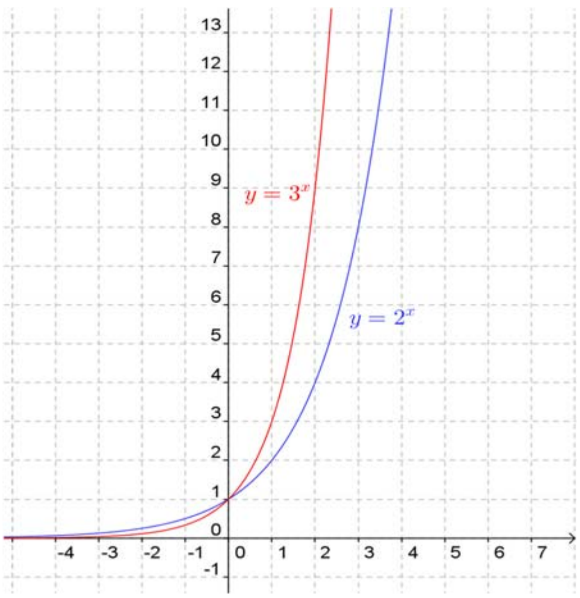
50. Al teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de $y = x^2$ (funció potencial) i $y = 2^x$ (funció exponencial), amb valors de *"x"* entre 0 i 6. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.

Les gràfiques de les funcions exponencials $y = b^x$ es diferencien segons el valor de la base "b". Especialment es diferencien si 0 < b < 1 o b > 1.
Al cas en què b = 1 tenim la funció constant y = 1, la gràfica de la qual és una recta horitzontal.

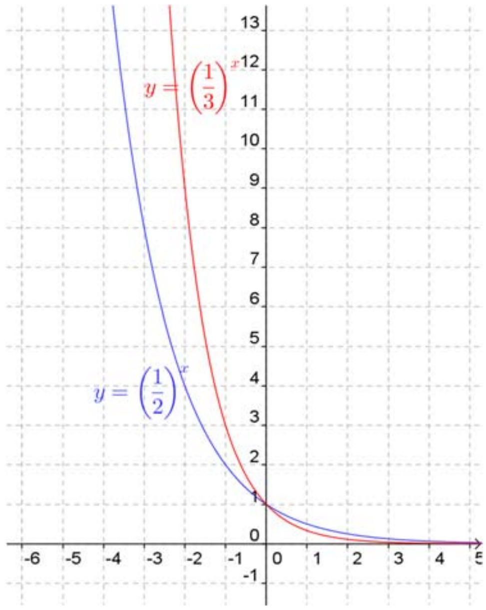
Activitats resoltes

- *Representa les gràfiques de* $y = 2^x$ *i de* $y = 3^x$*. També les gràfiques de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *i de* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$*. Analitza les similituds i les diferències.*

Funcions $y = 2^x$ **i** $y = 3^x$



Funcions $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **i** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observem els següents aspectes comuns a les quatre gràfiques:

- El seu **domini** és tota la recta real. A més són contínues.
- El seu **recorregut** és (0, +∞). És a dir, "y" mai és zero ni negatiu.
- Passen totes pels punts (0, 1), (1, b) i (–1, 1/b).
- La gràfica de $y = a^x$ i la de $y = (1/a)^x$ són simètriques respecte de l'eix OY.

I observem també aspectes diferenciats en ambdues il·lustracions:

Quan la base és b > 1
Són funcions **creixents**. Quant major és la base el creixement és més ràpid.
Quan $x \to -\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** a la part esquerra de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparençar-lo, no presenten asímptota vertical, perquè

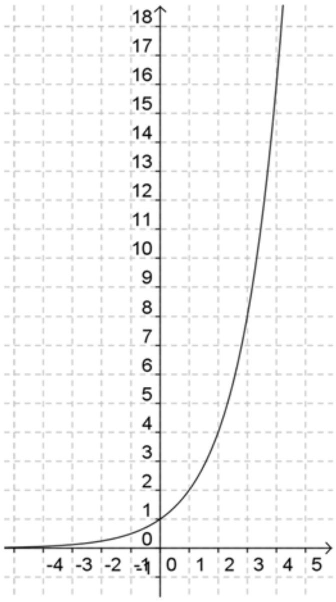
Quan la base és 0 < b < 1
Són funcions **decreixents**. Quant menor és la base el decreixement és més ràpid.
Quan $x \to +\infty$ la funció tendeix a 0. Per tant presenta una **asímptota horitzontal** a la part dreta de l'eix OX.
Encara que en alguns casos puga aparençar-lo, no presenten asímptota vertical, perquè

no s'aproximen a cap recta. no s'aproximen a cap recta.

- *Representa gràficament les següents funcions exponencials* $y = 2^x$ *i* $y = 2^{-x}$.

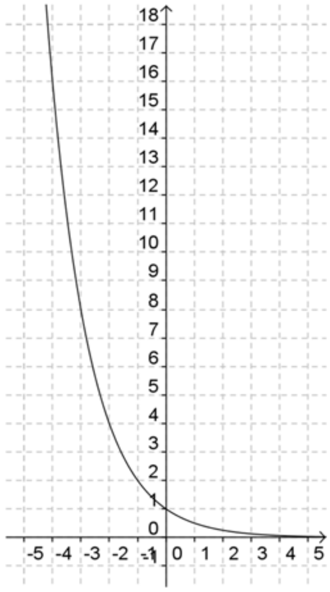
Funció $y = 2^x$

x	*y*
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



Funció $y = 2^{-x}$

x	*y*
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



El nombre *e*. La funció *y* = *e*^{x}

El nombre e té una gran importància en Matemàtiques, comparable inclús al nombre π encara que la seua comprensió no és tan elemental i tan popular. Per a comprendre la seua importància cal accedir a continguts de cursos superiors. El seu valor aproximat és e = 2,71828182846... Es tracta d'un nombre irracional (encara que en veure'l pot parèixer periòdic). Aquest nombre apareix a les equacions de creixement de poblacions, desintegració de substàncies radioactives, interessos bancaris, etc.

També es pot obtindre directament el valor d' e amb la calculadora (sempre com a aproximació decimal, ja que és un nombre irracional). Normalment hi ha una tecla amb l'etiqueta e però pots usar també la tecla etiquetada e^x. Per a això hauràs de calcular el valor de e^1.

La funció $y = e^x$ comparteix les característiques descrites més amunt per a funcions exponencials de base major que 1.

Activitats proposades

51. Utilitzant la calculadora, fes una taula de valors i representa al teu quadern les funcions $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 3 % en un banc, de manera que cada any el seu capital es multiplica per 1,03.

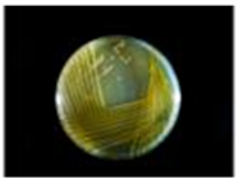
a. Escriu al teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.

b. Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

c. Representa al teu quadern gràficament la dita funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar als eixos.

53. Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multiplique per 2/3 cada hora. Si la quantitat a les 7 del matí és de 50 milions de bacteris, (a) fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 2 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap arrere"), i (b) representa gràficament aquestes dades.



Cultiu del bacteri *Salmonella*

54. Representa al teu quadern les següents funcions i explica la relació entre les seues gràfiques:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Coneixent la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, que s'ha vist més amunt, i sense calcular taula de valors, dibuixa al teu quadern les gràfiques de les funcions $g(x) = 2^x - 3$ i $h(x) = 2^{x-3}$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Diu el premi Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"L'enorme utilitat de les Matemàtiques a les ciències naturals és quelcom que frega el misteri, i no hi ha explicació per a allò. No és en absolut natural que existisquen "lleis de la naturalesa", i molt menys que l'ésser humà siga capaç de descobrir-les. El miracle de com resulta d'apropiat el llenguatge de les Matemàtiques per a la formulació de lleis de la Física és un regal meravellós que no comprenem ni ens mereixem".

Les funcions s'han utilitzat per a fer models matemàtics de les situacions reals més diverses. Abans de l'època dels ordinadors les funcions que solien utilitzar-se eren les funcions lineals (que ja coneixes però que estudiaràs detingudament al pròxim capítol). Es *linealizaban* els fenòmens. En usar altres funcions, com per exemple paràboles poden complicar-se molt les coses. Inclús pot aparéixer el caos.

Saps què és el caos?

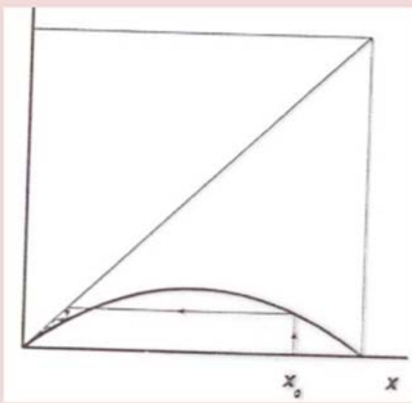
Estudiarem un exemple en què apareix el caos: **L'equació logística**. És un model matemàtic proposat per P. F. Verhulst en 1845 per a l'estudi de la dinàmica d'una població. Explica el creixement d'una espècie que es reprodueix en un entorn tancat sense cap tipus d'influència externa. Es consideren valors x entre 0 i 1 de la població. .

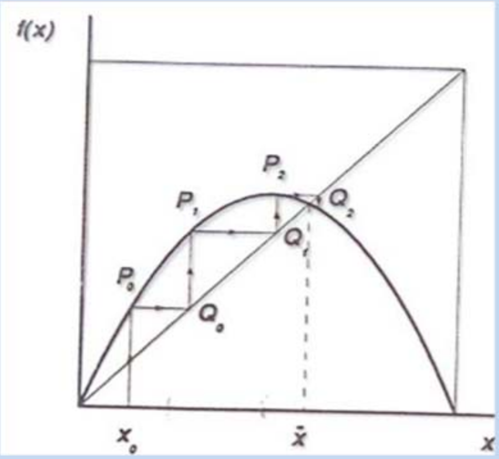
$$y = r(x(1 - x))$$

Si ens quedem amb el primer terme, $y = rx$ seria un model lineal, i ens indica el creixement de la població, però té un terme de segon grau que fa que siga un polinomi de segon grau. Si en algun moment $y = x$ la població es mantindrà sempre estable per a aqueix valor. Per exemple, si $x = 0$ llavors $y = 0$, i sempre hi haurà una població de grandària 0. Aquests valors que fan que $y = x$ es denominen **punts fixos**.

El comportament és distint segons els valors que prenga r. Per exemple, per a $r < 1$, s'extingeix l'espècie.

Dibuixem la paràbola per a $r = 0{,}9$. Imaginem que a l'instant inicial hi ha una població x_0. Busquem, tallant verticalment a la paràbola, el valor de y. Per a transformar-lo en el nou x, tallem a la diagonal del primer quadrant. Observa que la població cada vegada és menor i que va cap a l'extinció. Observa detingudament eixe procés de anar tallant a la paràbola i a la diagonal, per a tornar a tallar a la paràbola i així successivament.





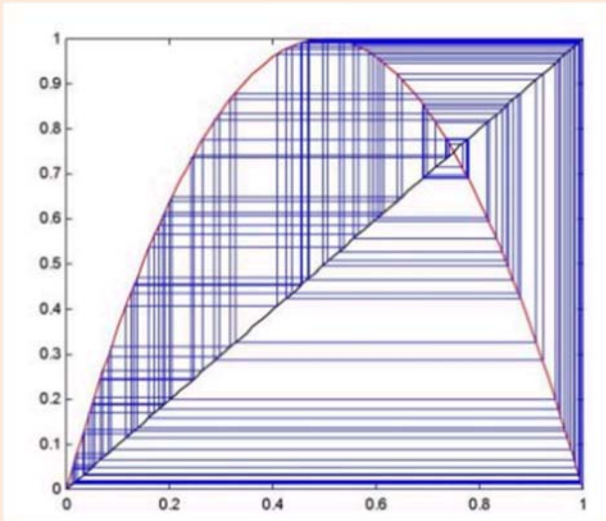
Per a valors de r compresos entre 1 i 3: $1 < r < 3$, aleshores la població s'estabilitza, tendeix a un punt fix.

Hem dibuixat la paràbola per a $r = 2{,}5$, i igual que abans partim d'un valor inicial qualsevol, en aquest cas x_0, que es converteix en $y = P_0$. Eixe valor el prenem com abscissa: $x = Q_0$, i calculem el nou valor de $y = P_1$... Observa com la població s'estabilitza cap a el valor d'intersecció de la paràbola amb la diagonal.

Per a valors entre 3 i 3,56994546 les coses comencen a complicar-se, fins que ...

Per a r major o igual a 3,56994546 tenim sensibilitat extrema a les condicions inicials, tenim **caos**.

No sabem què pot ocòrrer. La població canvia constantment. I eixe comportament tan erràtic és per a una funció polinòmica de segon grau!

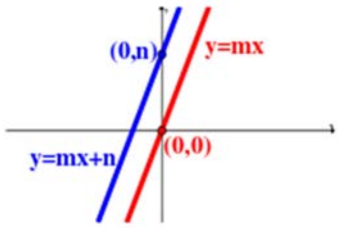
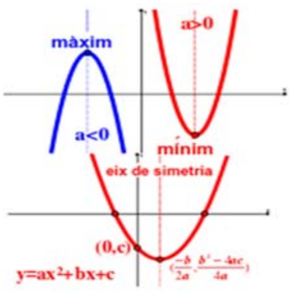
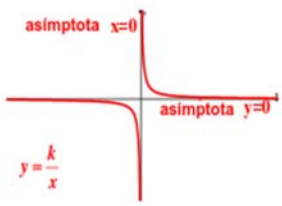
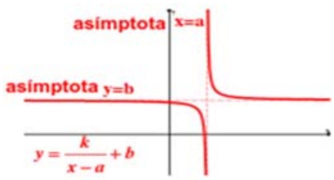
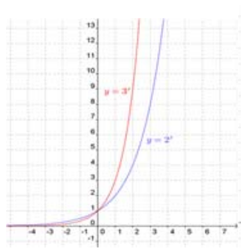
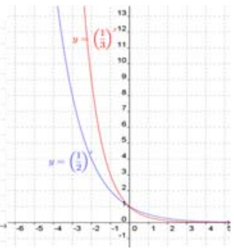


El terme **caòtic** va a indicar que punts pròxims a l'instant inicial poden tindre comportaments diferents al futur.

El meteoròleg americà *Edward N. Lorenz* va utilitzar el terme d'efecte **palometa** per a explicar per què el temps atmosfèric no és predicible a llarg termini, és a dir per a explicar que hi ha una dependència sensible a les condicions inicials: *"L'aleteig d'una **palometa** a Brasil pot provocar un tornado a Texas?"* *Ho havies* sentit?

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

		Exemples
Funció	Relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra.	$y = 2x + 3$
Característiques de les funcions	Continuïtat. Creixement i decreixement. Màxims i mínims. Simetria. Periodicitat.	La recta $y = 2x + 3$ és contínua, creixent, no té màxims ni mínims, ni és simètrica, ni periòdica.
Funció polinòmica de primer grau: Rectes: ***y = mx*** ***y = mx + n***	Es representen mitjançant **rectes**: Hi ha dos tipus: **Funcions lineals o de proporcionalitat directa**: $y=m\cdot x$, passen per l'origen de coordenades. **Funcions afins**: $y=m\cdot x+n$, són translacions a l'eix y , n unitats. Passen pel punt $(0,n)$.	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles $y = ax^2 + bx + c$	Es representen mitjançant **paràboles**: **Vèrtex:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ **Punts de tall amb l'eix OX:** $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ **Punt de tall amb l'eix OY:** $x=0$, és el punt $(0,c)$ **Eix de simetria**: és la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles ***y =k/x***	$\|k\|$: allunya o acosta la corba a l'origen de coordenades. **Domini i recorregut:** $\Re - \{0\}$ **Continuïtat: Discontínua** en $x = 0$. **Simetria: Funció imparella.** **Asímptotes:** Les rectes $x=0$; $y=0$.	
Hipèrboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Translació de la hipèrbola $y = \frac{k}{x}$ pel vector (a, b). Domini: $\Re - \{a\}$ Recorregut: $\Re - \{b\}$ - Asímptotes: $x = a$; $y = b$.	
Funció exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ és creixent Si $0 < b < 1$ és decreixent	

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Funcions

1. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència cartesià i en ell, els punts següents, triant una escala als eixos que permeta dibuixar-los tots de forma còmoda. Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si és el cas, en quin eix està: A(2, 4); B(0, 1); C(–3, 0); D(2, –1'5); E(1'5, 0); F(0, 0); G(–1, –2/3).

2. Escriu les coordenades de tres punts situats en el tercer quadrant.

3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents:

A(0, 3); *B*(0, 1'7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). Què tenen en comú tots ells?

4. Escriu les coordenades i representa tres punts de l'eix d'abscisses. Què tenen en comú?

5. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l'angle recte a l'origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.

6. Indica quins de les següents correspondències són funcions:

A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.

A cada circumferència del pla se li associa el seu centre.

A cada circumferència del pla se li associa un diàmetre.

7. La distància, *d*, recorreguda per un tren depèn del nombre de voltes, *n*, que dóna cada roda de la locomotora.

Escriu la fórmula que permet obtindre *d* conegut *n*, sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.

Dibuixa la gràfica.

Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda haja donat mil voltes? (pren com a valor de π el nombre 3,14).

Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?

8. Un baló sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per a mesurar la temperatura a distintes altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Un cert dia la temperatura a la superfície és de 9º C. Determina:

Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?

A quina altura hi haurà una temperatura de –30º C?

Escriu una fórmula que permeta calcular la temperatura T coneixent l'altura A. Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?

Si la temperatura a la superfície és de 12º C, quina és aleshores la fórmula? Quin tipus de funció és?

9. Dibuixa la gràfica de la funció *part sencera*: $y = E(x)$, que indica el nombre enter menor, més pròxim a *x*, així, per exemple, E(2'3) = 2.

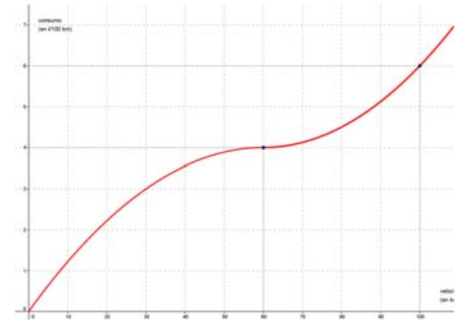
10. Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena *x* a la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dóna l'àrea en funció de *x*. Dibuixa la seua gràfica. Quin tipus de funció és?

11. Una caixa quadrada té una altura de 20 cm. Com depèn el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.

12. Amb un full de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cada uns dels cantons, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.

13. Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l'altura "a" dels cons. Si volem una boia per a assenyalar l'entrada de patinets ens basta amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors es necessita una altura de 1,5 m: quin volum tindrà? Escriu l'expressió de la funció que calcula el volum en funció de l'altura. Dibuixa la seua gràfica.

14. El consum de gasolina d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica. Utilitza la gràfica per a explicar com canvia el consum de gasolina depenent de la velocitat del cotxe. Quin és la variable dependent?



a) I la independent?

b) Quin és el consum per a una velocitat de 50 km/h?

c) A quina velocitat el consum és de 5 l/100 km?

15. En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, als 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajuste a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

a) Durant els primers 30 dies: altura = 4 · temps

b) Als 15 dies següents: altura = 90 + temps

c) A partir del dia 45: altura = 135.

Característiques d'una funció.

16. Ximo ha arribat a un acord amb son pare per a rebre la seua paga. Cobrarà 20 euros al mes el primer any, i 5 euros més per cada any que passe. Quant li correspondrà d'ací a 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seua gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeta calcular la paga quan hagen passat *n* anys.

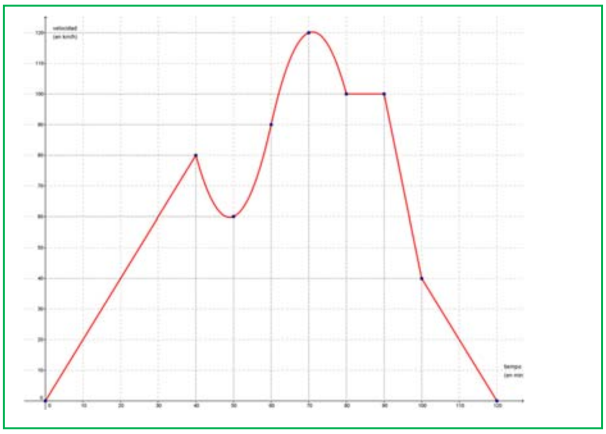
17. En entrar en l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20 € i les dues primeres hores són gratis per als clients amb targeta de compra del centre. Fes una taula que relacione el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) als casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:

a) Quins valors pren la variable dependent? I la independent?

b) Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?

c) Hi ha punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyala'ls i explica el seu significat.

18. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic... La següent gràfica reflectix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.



a) És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?

b) Quina és la variable independent? I la dependent?

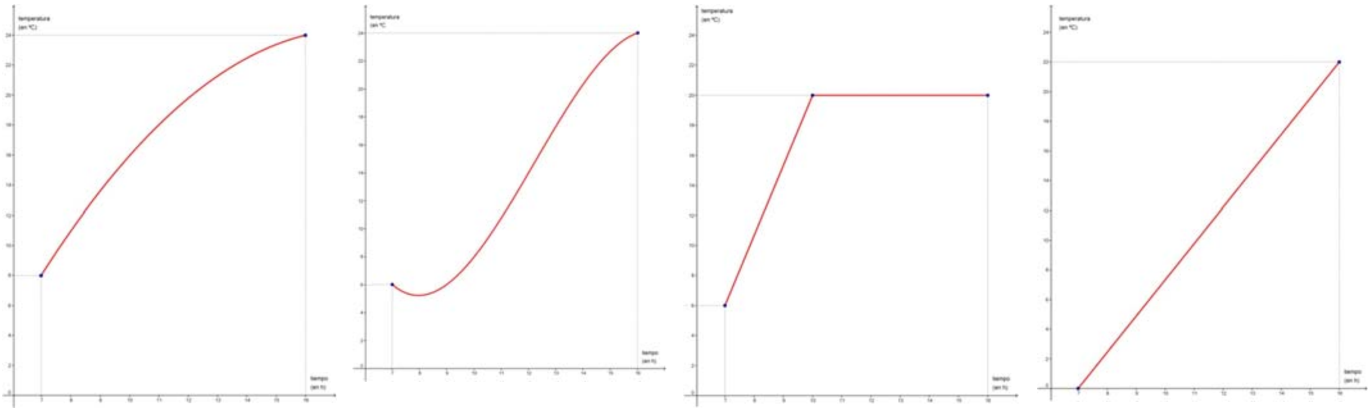
c) A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?

d) Indica els intervals en què la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha sigut constant en algun moment? Quan? Durant quant temps?

e) Quina ha sigut la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I durant la primera hora del mateix?

f) Quina ha sigut la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la primera mitja hora i l'hora i mitja?

19. Les gràfiques següents mostren l'evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la vesprada en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):



a) Explica la monotonia de totes les gràfiques.

b) En alguna ciutat la temperatura s'ha mantingut constant durant tot l'interval? I en part d'ell?

c) Quina ciutat creus que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?

d) Tenint en compte que a Madrid l'increment de la temperatura ha sigut sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s'ha aconseguit després de les 7 h i a Valladolid a partir del mig dia la temperatura va baixar, indica quina gràfica correspon a cada una de les ciutats i explica quines han sigut les temperatures màximes i mínimes en cada una d'elles.

20. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval del mateix, ve donat de la manera següent: Durant les dues primeres hores, la distància "*d*" (en quilòmetres) al punt de partida és: 2·t+1, on "*t*" és el temps (en hores) de duració del trajecte. Entre la 2ª i 3ª hora, la dita distància ve donada per –*t*+ 7. Entre la 3ª i 4ª hora, ambdues inclusivament, *d* = 4. Des de la 4ª i fins a la 6ª (inclusivament), la distància s'ajusta a 3·*t* – 8.

a) Realitza una taula i una gràfica que arreplegue el dit viatge de la manera més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps en els instants 0, 2, 3, 4 i 6).

b) Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps tardat a recórrer-la és funcional.

c) La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?

d) En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?

e) Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?

f) Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.

g) Troba els punts on la funció aconsegueix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el significat que puguen tindre.

21. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat al capítol: continuïtat, monotonia, extrems, simetria i periodicitat.

a) Valor absolut d'un nombre: $f(x)=|x|$, que es defineix: $|x|=\begin{cases} x, si\ x>0 \\ -x, si\ x<0 \end{cases}$.

b) Oposat i invers del nombre *x*: $f(x)=\frac{-1}{x}$.

Tipus de funcions

22. Escriu l'equació de la recta paral·lela a y = 5x + 1 d'ordenada a l'origen 6.
23. Sense representar-los gràficament, estableix si estan alineats els punts A(2, 4), B(6, 9) i C(12, 15).
24. Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema coordenat, les rectes: y = 2x; y = −2x; y = 3x; y = −3x.
25. Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema coordenat, les rectes: y = 2x + 1; y = 2x + 3; y = 2x − 1; y= 2x − 2; y = 2x − 3. Com són?
26. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: El lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: El lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cada una de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per a saber la fórmula més beneficiosa. Escriu les fórmules d'ambdues situacions i dibuixa les seues gràfiques. Raona, a partir de les gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.

27. Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:

a) El seu pendent és 3 i la seua ordenada a l'origen és 5.

b) Passa pels punts *A*(1, 4) i *B*(0, 9).

c) La seua ordenada a l'origen és 0 i el seu pendent és 0.

d) Passa pels punts *C*(–2, 7) i *D*(–3, 10).

e) Passa pel punt (*a*, *b*) i té de pendent *m*.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

28. Dibuixa al teu quadern, sense trobar la seua equació, les rectes següents:

a) De pendent 2 i ordenada a l'origen 0.

b) Passa pels punts $A(1, 3)$ i $B(2, 1)$.

c) El seu pendent és 2 i passa pel punt (4, 5).

29. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seues gràfiques.

a) $y = x^2 + 8x – 13$ b) $y = –x^2 + 8x – 13$ c) $y = x^2 – 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = –x^2 + 4x – 7$

30. Dibuixa la gràfica de $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per a dibuixar la seua gràfica:

a) $y = 2x^2 + 8x – 12$ b) $y = –2x^2 + 8x – 10$ c) $y = 2x^2 – 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ajuda: $2x^2 + 8x – 12 = 2(x^2 + 4x – 6) = 2((x + 2)^2 – 4 – 6) = 2((x + 2)^2 – 10)$. Vèrtex (–2, –10)

31. Ajusta una funció polinòmica a les dades de la taula:

***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

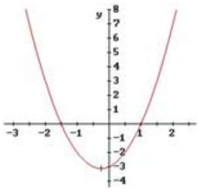
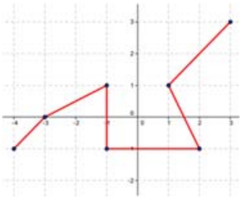
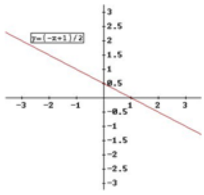
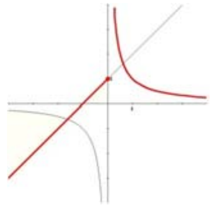
32. Dibuixa les gràfiques de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada cas els punts de discontinuïtat i les asímptotes.

33. Dibuixa les gràfiques de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{–x}$; $y = (1/3)^{–x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Autors: José Gallecs i David Miranda
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

AUTOAVALUACIÓ

1. L'única gràfica que no correspon a una funció és:

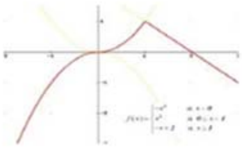
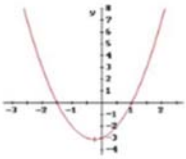
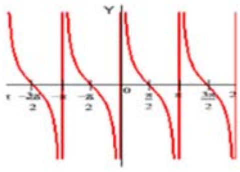
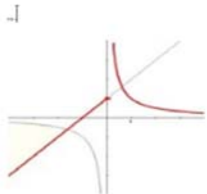
a)  b)  c)  d) 

2. L'única taula que no pot ser d'una relació funcional és:

3. El màxim absolut de la funció s'aconsegueix al punt:

a) b) c) d)

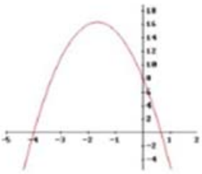
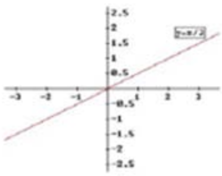
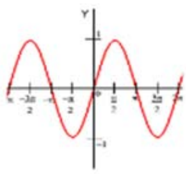
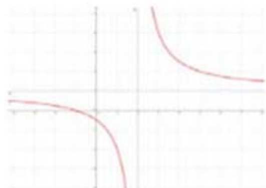
4. L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és:

a)  b)  c)  d) 

5. L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent és:

6. L'única funció afí que, a més, és lineal és:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

a)  b)  c)  d) 

7. L'única funció quadràtica és:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d)$y = -2x^3 - 3x$

8. La funció quadràtica que té el seu vèrtex al punt (2, 0) és:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipèrbola d'asímptotes $x = 3$ i $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. L'única funció exponencial és:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$