Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

3r A d'ESO
Capítol 9:
Geometria a l'espai.
Globus terraqüi

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez

Revisors: Javier Rodrigo i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Milagros Latasa i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Resum

Moltes plantes distribueixen les seues flors en forma esfèrica buscant un aprofitament òptim de l'espai. L'àtom de ferro disposa els seus electrons en forma de cub, els sistemes de cristal·lització dels minerals adopten formes polièdriques, les bresques de les abelles són prismes hexagonals. Aquests són alguns exemples de la presència de cossos geomètrics a la naturalesa.

Ens movem a l'espai, caminem sobre un pla, observem la línia de l'horitzó, habitem i ens movem habitualment en poliedres. La informació que percebem per mitjà dels nostres sentits la interpretem en termes geomètrics. Precisem de les fórmules d'àrees i volums dels cossos geomètrics per a calcular les mesures dels mobles que caben al nostre saló, o per a fer un pressupost de la reforma de la nostra vivenda.

La Geometria és una de les branques més antigues de les Matemàtiques i el seu estudi ens ajuda a interpretar millor la realitat que percebem. En aquest tema recordaràs les fórmules que vas estudiar ja l'any passat i aprofundiràs sobre les seues aplicacions en la vida real.

1. PERPENDICULARITAT I PARAL·LELISME A L'ESPAI

1.1. Posicions relatives a l'espai

A l'espai de tres dimensions en què ens movem, els elements geomètrics més senzills són punts, rectes i plans. El nostre primer objectiu és descriure les posicions que poden presentar qualsevol parella d'aquests elements. Tracta d'imaginar-les abans de llegir.

Distingirem diversos casos:

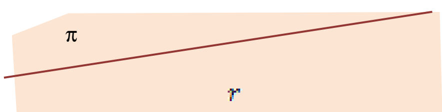
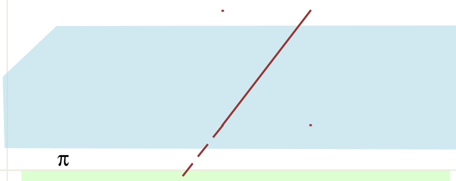
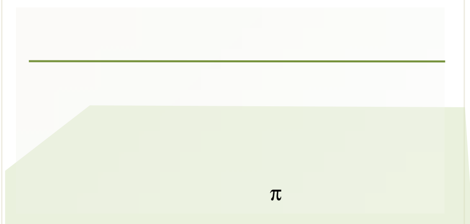
a) Punt – recta:

Pot ser que el punt pertanga a la recta o que siga exterior a ella.

b) Punt – pla:

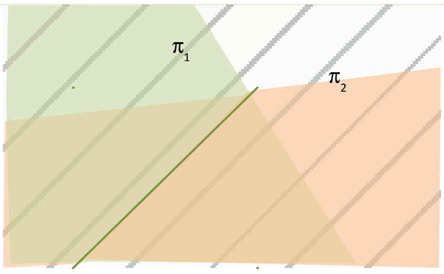
El mateix ocorre amb un punt i un pla: només hi ha dues posicions possibles, el punt està en el pla o fora del mateix.

c) Pla – recta:

		
r està continguda al pla	La recta r i el pla π es tallen en un punt	La recta r i el pla π són paral·lels

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

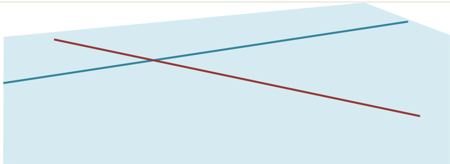
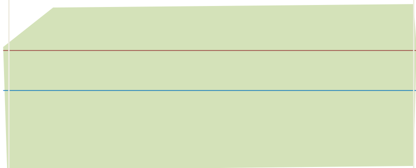
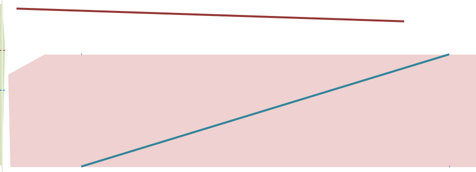
d) Pla- pla:

		
π_1 i π_2 són iguals i tots els seus punts coincideixen.	π_1 i π_2 són secants. Tenen en comú tots els punts d'una recta	π_1 i π_2 són paral·lels. No tenen cap punt comú

e) Recta- recta:

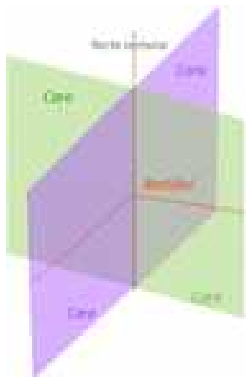
Dues rectes a l'espai poden ser *coplanaries* si és possible dibuixar-les en un mateix pla, o *no coplanaries* en qualsevol altre cas.

Si dues rectes són coplanaries poden ser *paral·leles*, si tenen la mateixa direcció, *secants,* si tenen un punt comú, o *coincidents* si tenen comuns tots els seus punts. Si dues rectes són no coplanaries no tenen cap punt comú i es diu que les dues rectes s'encreuen.

		
r i *s* són secants.	*r* i *s* són paral·leles.	*r* i *s* s'encreuen.

1.2. Angles diedres, triedres i poliedres.

Tot pla divideix a l'espai en dos semiespais. Dos plans que es tallen queden dividits en quatre semiplans que passen per una mateixa recta i que al seu torn divideixen a l'espai en quatre regions.



Cada una de les regions de l'espai compresa entre dos semiplans que tenen una recta comuna, s'anomena *angle diedre*. Els semiplans que el defineixen s'anomenen *cares* de l'angle diedre i la recta comuna aresta.

Si en un diedre tracem dos perpendiculars a l'aresta al mateix punt, situades cada una d'elles en una cara, l'angle que formen les dites perpendiculars s'anomena *angle rectilini del diedre.*

Un angle poliedre és la regió a l'espai limitada per tres o més semiplans que són secants dos a dos i que tenen un punt comú que s'anomena *vèrtex*. Cada semiplà és una cara del poliedre i les rectes intersecció de les cares són les *arestes* de l'angle poliedre.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

La suma dels angles dels diedres que formen un angle poliedre ha de ser menor que 360º
En el cas en què un angle poliedre tinga exactament tres cares, s'anomena *tríedre*.

Exemple:

- Observa qualsevol dels cantons del sostre de l'habitació en què estàs. Cada una d'elles és el vèrtex d'un tríedre en què les cares són dues parets consecutives i el sostre.

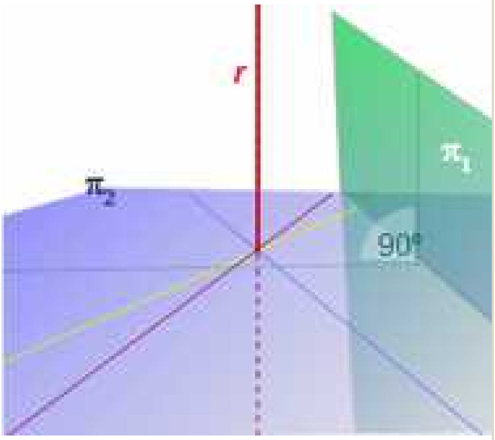
1.3. Perpendicularitat a l'espai

A l'espai hem de tractar diversos casos de perpendicularitat.

Dos plans són perpendiculars si els quatre angles rectilinis que determinen, són angles rectes.

Una recta és perpendicular a un pla si el talla i és perpendicular a qualsevol recta que estiga continguda al pla.

Dues rectes són *perpendiculars* si formen un angle recte. És el cas més sorprenent per dues raons en primer lloc a l'espai dues rectes poden ser perpendiculars sense tallar-se i en segon hi ha infinites rectes perpendiculars a una recta *r* donada i que passen per un punt P donat. Totes elles estan contingudes en un pla perpendicular a la recta *r* que passa pel punt P.



r és perpendicular a π_2 i a totes les rectes contingudes en π_2.

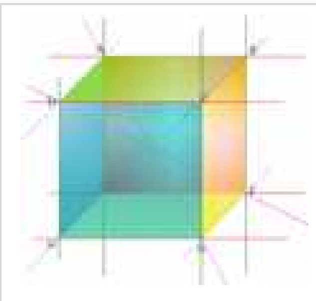
Els plans π_1 i π_2 són perpendiculars

Activitats resoltes

- *Busca un exemple a la figura de:*

a) Plans paral·lels. b) Plans perpendiculars. c) Rectes paral·leles. d) Rectes perpendiculars i coplanàries.

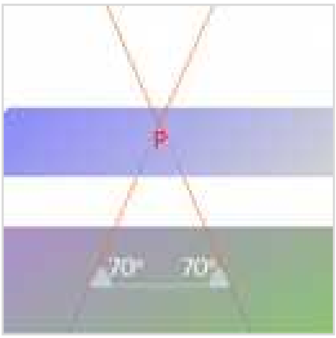
e) Rectes perpendiculars i no coplanàries. f) Recta i pla paral·lels.



a) El pla que conté a la cara *ABCD* és paral·lel al pla que conté a la cara *EFGH*.

b) El pla que conté a la cara *ABCD* és perpendicular als plans que contenen a les cares *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* i *ADHE*.

c) La recta que passa per *A* i *B* és paral·lela a la recta que passa per *D* i *C*, a la recta que passa per *E* i *F*, i a la recta que passa per *H* i *G*.



d) La recta que passa per *H* i *G* és perpendicular a la recta que passa per *G* i *F*, i ambdues estan al pla que conté a la cara *EFGH*, per la qual cosa són també coplanàries.

e) La recta que passa per *H* i *G* és perpendicular a la recta que passa per *A* i *D*. Aquestes dues rectes pertanyen a plans diferents.

f) La recta que passa per *A* i *B* és paral·lela al pla que conté a la cara *EFGH*.

- *Si dos plans paral·lels determinen segments iguals en tallar a dues rectes, pots afirmar que les rectes són paral·leles?*

No necessàriament. Observa la figura de la dreta i et donaràs compte. Les rectes del dibuix determinen un triangle isòsceles en tallar a dos plans paral·lels i tallar-se entre si, tal com apareix en la figura. Els segments interceptats pels plans en tallar a les dues rectes són iguals, no obstant això, les rectes no són paral·leles.

Activitats proposades

1. Busca en l'habitació en què et trobes, exemples de:

Plans paral·lels i perpendiculars.

Rectes paral·leles, rectes perpendiculars i coplanàries, rectes perpendiculars i no coplanàries.

Recta paral·lela a pla, recta i pla secants, recta continguda en pla.

2. Les fulles d'una porta giratòria formen entre si 5 angles diedres consecutius i iguals. Quant mesura cada un d'ells?

3. Des d'un punt interior a una sala de planta hexagonal regular es traça una recta perpendicular a cada paret. Quant mesurarà l'angle que formen dos perpendiculars consecutives?

4. Dos tríedres tenen les tres cares iguals, es pot assegurar que són iguals? Raona la resposta.

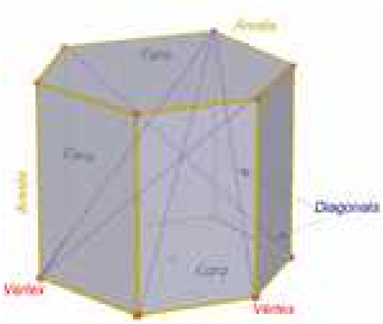
2. POLIEDRES

2.1. Poliedres. Elements d'un poliedre

Un *poliedre* és una regió tancada de l'espai limitada per polígons.

En tot poliedre podem considerar els elements següents: cares*, arestes, vèrtexs, angles diedres* i *poliedres*, així com les *diagonals*.

Les *cares* són els polígons que el limiten, les *arestes i vèrtexs els* costats i vèrtexs dels polígons que formen les cares.



Els *angles diedres* estan formats per dues cares que tenen una aresta comuna. Els *angles poliedres* estan formats per diverses cares que tenen un vèrtex comú.
Una *diagonal* d'un poliedre és un segment que uneix dos vèrtexs pertanyents a cares diferents.

Un *pla diagonal* és un pla que conté tres vèrtexs que no pertanyen a la mateixa cara.

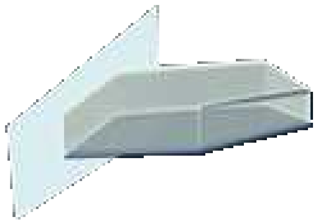
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

2.3. Poliedres convexos. Teorema *d'Euler*.

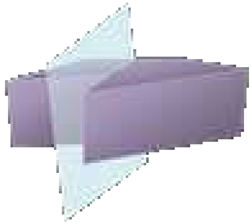
És possible classificar poliedres atenent a diferents criteris. Si ens fixem en l'amplitud dels seus angles diedres, es classifiquen en **còncaus *i convexos***.

Un poliedre és *convex* si el segment que uneix dos punts qualssevol del poliedre, està dins del mateix. En poliedres convexos, únicament un dels dos semiespais que determina cada un dels plans que contenen a les cares, conté també a la resta del poliedre.

Un poliedre és *còncau* en cas contrari. Als poliedres còncaus algun dels plans que contenen a les cares divideix al poliedre en dos cossos que pertanyen a semiespais distints.



Poliedre convex



Poliedre còncau

Als poliedres convexos es compleix l'anomenat *Teorema d'Euler* que relaciona les cares, vèrtexs i arestes i afirma que en tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs coincideix amb el nombre d'arestes més 2. Si cares, vèrtexs i arestes es representen pels seus inicials, s'escriu:

$$C + V = A + 2$$

Hi ha poliedres còncaus que compleixen aquesta relació i poliedres còncaus que no la compleixen.

Activitats resoltes

- *Comprova que els següents cossos geomètrics verifiquen el teorema d'Euler.*

 Hi ha dues cares ocultes que són quadrilàters	Aquest cos geomètric és un poliedre convex. Té 7 cares de les quals 5 són quadrilàters, 1 és un pentàgon i 1 és un triangle. Té 9 vèrtexs i per a calcular el nombre d'arestes sumem el total de costats de les cares i dividim entre 2, ja que cada aresta és costat de dues cares: Nr. d'arestes = $\dfrac{5.4+5+3}{2} = 14$ $C + V = 7 + 9 = 16$ $A + 2 = 14 + 2 = 16$ Compleix el teorema *d'Euler*
 Tots els vèrtexs estan a la vista	Si es veuen tots els vèrtexs, hi ha dues cares ocultes: una d'elles és un triangle i l'altra és un pentàgon còncau. És un poliedre còncau. Té un total de 6 cares, 6 vèrtexs i Nr. d'arestes = $\dfrac{5+5.3}{2} = 10$ $C + V = 6 + 6 = 12$ $A + 2 = 10 + 2 = 12$ Verifica el teorema *d'Euler*

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Activitats proposades

5. Investiga si els següents cossos són poliedres i, en cas afirmatiu, si compleixen el *teorema d'Euler*. Indica també si són còncaus o convexos

2.4. Poliedres regulars.

Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seues cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals.

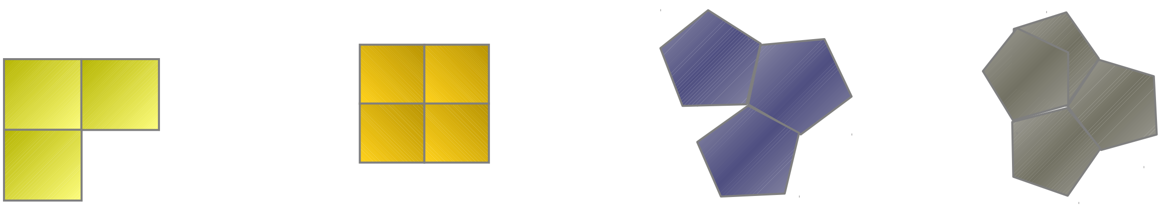
En tot poliedre regular coincideixen el mateix nombre de cares en cada vèrtex. És senzill provar que només hi ha cinc poliedres regulars.

El polígon regular amb menys costats és el triangle equilàter. Busquem els poliedres regulars que poden construir-se amb cares triangulars:

Com a mínim són necessaris tres triangles per vèrtex i com a màxim poden concórrer cinc perquè siga possible formar un angle poliedre

Si unim tres triangles equilàters iguals per vèrtex, es forma un tetràedre. L'octàedre apareix en unir quatre triangles equilàters iguals en cada vèrtex. Amb cinc triangles equilàters, també iguals, per vèrtex, es forma un icosàedre. Si unim sis triangles equilàters en un vèrtex, la suma dels angles de les cares concurrents és 360º i no es pot formar cap angle poliedre, així que no hi ha més poliedres regulars amb cares triangulars.

Estudiem ara els poliedres regulars que és possible construir amb cares quadrades i pentagonals



Amb tres quadrats iguals en cada vèrtex construïm un cub. En unir quatre quadrats en un vèrtex, la suma dels angles en el vèrtex comú als quatre és 360º amb el que no podem formar cap poliedre mes que el cub de cares quadrades.

Només és possible construir un poliedre regular amb cares pentagonals unint tres pentàgons en cada vèrtex. És el dodecàedre. Un nombre més gran de pentàgons per vèrtex donaria una suma d'angles superior a 360º.

Llavors queda provat que només hi ha cinc poliedres regulars:

Els poliedres regulars són *desenrotllables* perquè poden ser construïts a partir d'un desenrotllament pla format per totes les seues cares.

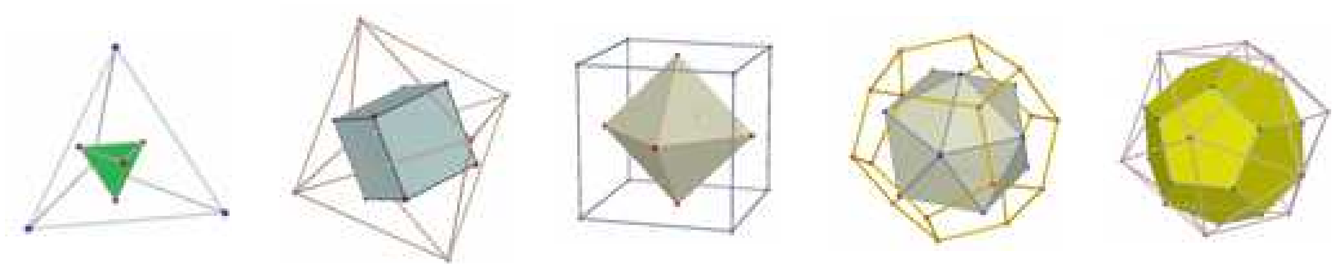
Tots compleixen la relació d'Euler per a poliedres convexos. Pots comprovar-ho:

	TETRÀEDRE	CUB	OCTÀEDRE	DODECÀEDRE	ICOSÀEDRE
Nr DE CARES	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
Nr DE VÈRTEXS	**4**	**8**	**6**	**20**	**12**
Nr D'ARESTES	**6**	**12**	**12**	**30**	**30**
FORMA DE LES CARES	TRIANGULARS	QUADRADES	TRIANGULARS	PENTAGONALS	TRIANGULARS

2.5. Dual d'un poliedre regular.

Es defineix el poliedre dual d'un poliedre regular com el poliedre resultant d'unir els centres de les cares del poliedre inicial i prendre'ls com a vèrtexs del nou poliedre. Fixa't que aleshores el nombre de cares d'un poliedre coincideix amb el nombre de vèrtexs del seu poliedre dual.

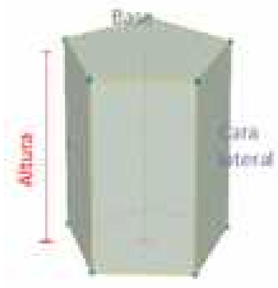
El poliedre dual del tetràedre és el tetràedre. El cub i l'octàedre són duals entre si. També el dodecàedre és dual de l'icosàedre i recíprocament.



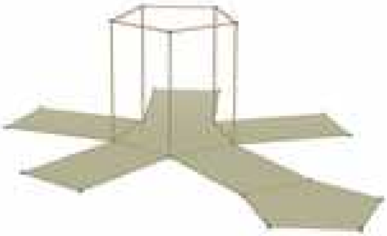
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

2.6. Prismes.

Un *prisma* és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases.



Els prismes són cossos desenrotllables. El desenrotllament d'un prisma recte està compost per les seues dues bases i per tants paral·lelograms com a cares laterals tinga. L'altura del prisma és la distància entre les bases.



És possible classificar un prisma atenent a diferents conceptes:

Per la forma de les cares laterals poden ser *rectes o oblics*. Són *rectes* si les citades cares són rectangles i són *oblics* si són rombes o romboides.

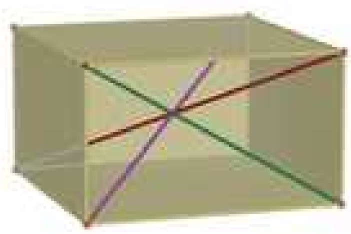
Per la forma de les bases poden ser triangulars, quadrangulars, pentagonals, hexagonals depenent de que el polígon de la base siga triangle, quadrat, pentàgon, hexàgon, etc...

Si a més un prisma és recte i té polígons regulars com a bases, el prisma s'anomena *regular*. En qualsevol altre cas el prisma s'anomena *irregular*.

Per la forma dels seus angles diedres poden ser còncaus i convexos.

2.6. Paral·lelepípedes.

Els paral·lelepípedes són prismes en què les bases són paral·lelograms.

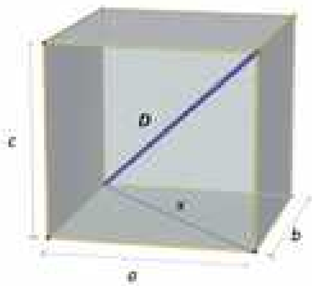


A més, totes les cares laterals són també paral·lelograms i les cares oposades són iguals entre si pel que qualsevol cara pot prendre's com a base.

Els paral·lelepípedes poden ser*: cubs* si tenen totes les seues cares quadrades, ortoedre si totes les seues cares són rectangles, *romboedres* si totes les seues cares són rombes o *romboiedres* si totes les seues cares són romboides.

Una propietat important de tots els paral·lelepípedes és que les quatre diagonals es tallen al punt mitjà.

2.7. Teorema de Pitàgores a l'espai



La diagonal d'un ortoedre al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats de les seues arestes.

Anem a demostrar-ho: Siguen *a, b* i *c* les arestes de l'ortoedre que suposem recolzat en el rectangle de dimensions *a* , *b*.

Si *x* és la diagonal d'aquest rectangle, compleix: $x^2 = a^2 + b^2$

El triangle de costats *D, x, a* és rectangle per tant: $D^2 = x^2 + c^2$

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

I tenint en compte la relació que compleix *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Activitats resoltes

- *Les arestes de la base d'una caixa amb forma d'ortoedre mesuren 10 cm i 11 cm i la seua altura 8 cm. Estudia si pots guardar en ella tres barres de longituds 14 cm, 16 cm i 18 cm.*

El rectangle de la base té una diagonal d que mesura: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14{,}9$ cm

Per tant la barra més curta cap recolzada a la base

Calculem ara quant mesura la diagonal de l'ortoedre:

$$D^2=a^2+b^2+c^2=8^2+10^2+11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16{,}9 \text{ cm}$$

Per tant, la barra de 16 cm cap també a la caixa però la de 18 cm no.

Activitats proposades

6. És possible demostrar amb un trencaclosques el teorema de Pitàgores a l'espai. Et proposem que ho intentes. Podràs trobar a la revista i entre els recursos per a imprimir i les peces que t'ajudaran. A la fotografia es mostra el puzle resolt.

7. És possible construir un prisma còncau triangular? I un prisma còncau regular? Raona les respostes.

8. Entre els poliedres regulars, hi ha algun que siga prisma? En cas afirmatiu classifica'l.

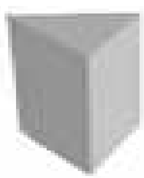
9. Basta que un paral·lelepípede tinga dues cares rectangulars perquè siga un prisma recte?

10. Dibuixa un prisma pentagonal regular i comprova que compleix la relació d'Euler.

11. Una caixa té forma cúbica de 2 dm d'aresta. Quant mesura la seua diagonal?

12. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 10 metres de llarg, 4 metres d'ample i 3 metres d'altura.

13. Classifica els següents poliedres





Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

2.8. Piràmides.

Una piràmide és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú com a costats té la base.

El punt on convergeixen tots els triangles laterals es denomina *vèrtex* o cúspide.

Les piràmides es poden classificar per conceptes anàlegs als dels prismes. Així destaquem que les piràmides, segons la forma de la base, es classifiquen en *triangulars, quadrangulars, pentagonals,…*

Una piràmide és *regular* quan ho és el polígon de la base i a més les cares laterals són triangles isòsceles iguals. L'altura d'aquests triangles laterals s'anomena *apotema de la piràmide*. No has de confondre l'apotema d'una piràmide regular amb l'apotema del polígon de la base.

L'altura d'una piràmide és la distància del vèrtex a la base. Si una piràmide és regular, coincideix amb la distància entre el vèrtex de la piràmide i el centre del polígon de la base.

Les piràmides són desenrotllables. El desenrotllament d'una piràmide el formen el polígon de la base i tantes cares triangulars com a costats tinga la base. Si la piràmide és regular, els triangles són isòsceles i iguals.

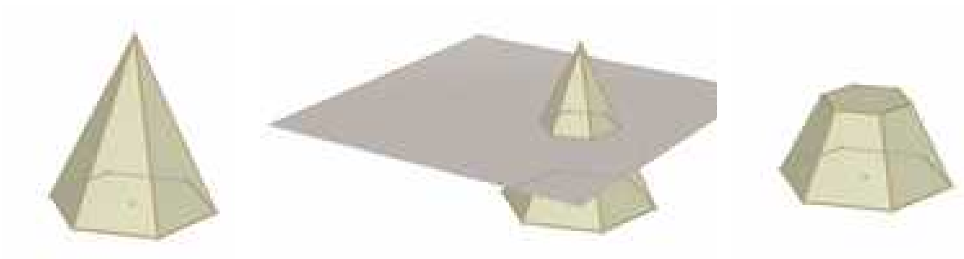
Activitats proposades

14. Hi ha alguna piràmide regular que siga poliedre regular? I piràmides amb cares paral·leles? En cas afirmatiu posa un exemple i en cas negatiu, justifica les teues respostes.

15. Dibuixa una piràmide hexagonal regular i distingeix l'apotema de la piràmide de l'apotema de la base. Dibuixa també el seu desenrotllament.

2.9. Tronc de piràmide.

Un tronc de piràmide és el poliedre resultant en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.



Un tronc de piràmide és regular quan és una porció de piràmide regular. En aquest cas les cares laterals són trapezis isòsceles i les bases són polígons regulars semblants.

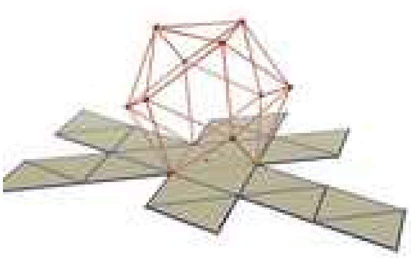
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

3. ÀREA LATERAL I TOTAL D'UN POLIEDRE

3.2. Àrea total d'un poliedre regular.

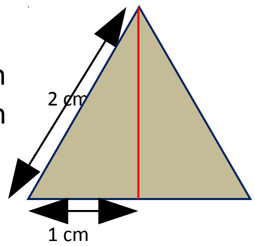
Com les cares dels poliedres regulars són iguals, el càlcul de l'àrea total d'un poliedre regular es redueix a calcular l'àrea d'una cara i després multiplicar-la pel nombre de cares.

Activitats resoltes



Calcula l'àrea total d'un icosàedre de 2 cm d'aresta.

Totes les seues cares són triangles equilàters de 2 cm de base. Calculem l'altura h que divideix a la base en dos segments iguals



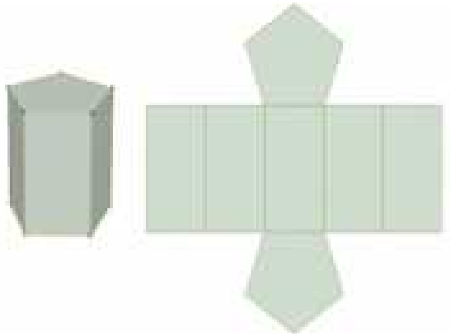
$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

Per tant l'àrea d'una cara serà:

$A_{triangle} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm² i per tant Àrea icosàedre = 20 $\sqrt{3}$ cm²

3.3. Àrees lateral i total d'un prisma.

L'àrea lateral d'un prisma és la suma de les àrees de les cares laterals.



Com les cares laterals són paral·lelograms de la mateixa altura, que és l'altura del prisma, podem escriure:

Àrea lateral = Suma de les àrees de les cares laterals =

Perímetre de la base · altura del prisma.

Si denotem per *h* l'altura i per P_B el perímetre de la base:

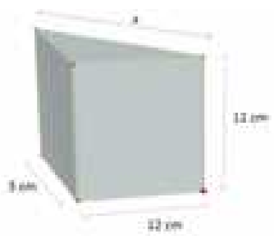
Àrea lateral = $A_L = P_B\,.\,H$

L'àrea total d'un prisma és l'àrea lateral més el doble de la suma de l'àrea de la base :

Àrea total = $A_T = A_L + 2.\,A_B$

Activitats resoltes

- *Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular recte d'11 cm d'altura si la seua base és un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm.*



Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Calculem en primer lloc la hipotenusa del triangle de la base: $x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow$

$$x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

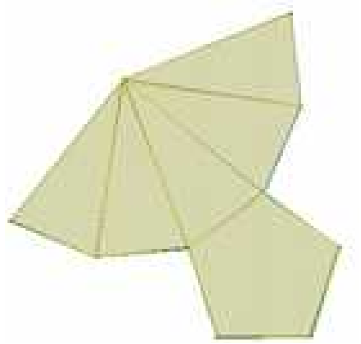
$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

3.4. Àrees lateral i total d'una piràmide i d'un tronc de piràmide regulars.

L'àrea lateral d'una piràmide regular és la suma de les àrees de les cares laterals.

Desenrotllament de piràmide pentagonal regular



Són triangles isòsceles iguals per la qual cosa, si l'aresta de la base mesura b, l'apotema de la piràmide és Ap i la base té n costats, aquest àrea lateral és:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

i com $n \cdot b$ = Perímetre de la base

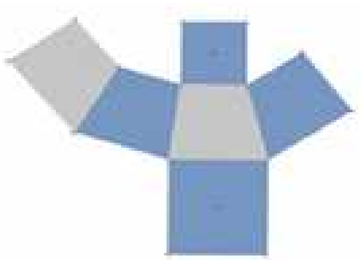
$$A_L = \frac{P_B \cdot A_p}{2} = \frac{\text{Perímetre de la base} \cdot \text{Apotema de la piràmide}}{2}$$

L'àrea total de una piràmide és l'àrea lateral més l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronc de piràmide regular és un cos geomètric desenrotllable. Al seu desenrotllament apareixen tantes cares laterals com a costats tenen les bases. Totes elles són trapezis isòsceles.

Desenrotllament de tronc de piràmide quadrangular



Si B és el costat del polígon de la base major, b el costat de la base menor, n el nombre de costats de les bases i Ap és l'altura d'una cara lateral

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B + b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} =$$

$$\frac{\text{Suma del perímetre de les bases} \cdot \text{Apotema del tronc}}{2}$$

L'àrea total de un tronc de piràmide regular és l'àrea lateral més la suma d'àrees de les bases:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Activitats resoltes

- *Calculem l'àrea total d'un tronc de piràmide regular de 4 m d'altura si sabem que les bases paral·leles són quadrats de 4 m i de 2 m de costat.*

En primer lloc calculem el valor de l'apotema. Tenint en compte que el tronc és regular i que les bases són quadrades es forma un triangle rectangle en què es compleix:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4,12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \,.\, Ap}{2} = \frac{(16 + 8) \,.\, 4,12}{2} = 49,44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49,44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69,44 \text{ m}^2$$

Activitats proposades

16. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular regular sabent que les arestes de les bases mesuren 2 cm i cada aresta lateral 8 m.

17. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 63 m^2 i té 7 m d'altura. Calcula el perímetre de la base.

18. El costat de la base d'una piràmide hexagonal regular és de 6 cm i l'altura de la piràmide 10 cm. Calcula l'apotema de la piràmide i la seua àrea total.

19. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seues bases són dos octògons regulars de costats 4 i 7 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 8 dm.

20. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2, calcula l'apotema de la piràmide i la seua altura.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

4. COSSOS DE REVOLUCIÓ

4.1. Cossos de revolució: Cilindres, cons i esferes.

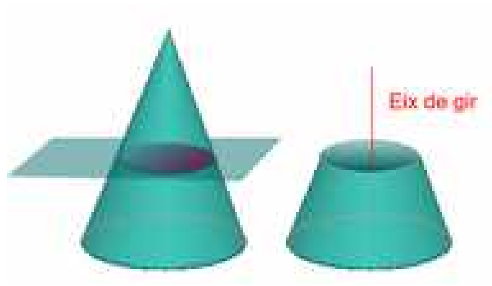
Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s'obtenen en fer girar una línia al voltant d'una recta fixa denominada *eix*. La línia que gira s'anomena *generatriu*.

També pot obtindre's un cos de revolució mitjançant el gir d'una figura plana al voltant d'un eix de gir.

Els principals cossos de revolució són: *cilindres, cons i esferes*.

CILINDRE

CON



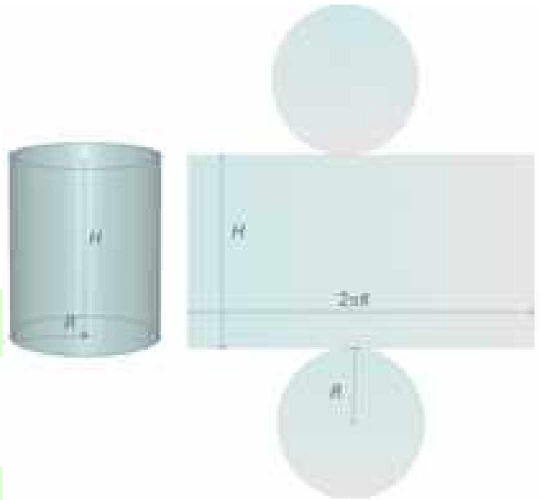
TRONC DE CON

ESFERA

La generatriu d'un cilindre és una recta paral·lela a l'eix de gir. La d'un con és una recta secant amb l'eix i la d'una esfera és una semicircumferència el centre de la qual està en l'eix de gir

4.2. Àrees lateral i total d'un cilindre.

El cilindre és un cos geomètric desenrotllable. Si retallem un cilindre recte al llarg d'una generatriu, i l'estenem en un pla, obtenim dos cercles i una regió rectangular. D'aquesta manera s'obté el seu desenrotllament.



A partir d'aquest, podem veure que l'àrea lateral de cilindre està determinada per l'àrea del rectangle que té com a dimensions la longitud de la circumferència de la base i l'altura del cilindre.

Suposarem que l'altura del cilindre és *H* i que *R* és el radi de la base amb el que l'àrea lateral A_L és:

A_L = *Longitud de la base . Altura* = $(2\pi R).H = 2\pi RH$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea dels dos cercles que constitueixen les bases, obtenim l'àrea total del cilindre.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

4.3. Àrees lateral i total d'un con.

També el con és un cos geomètric desenrotllable. En retallar seguint una línia generatriu i la circumferència de la base, obtenim un cercle i un sector circular amb radi igual a la generatriu i longitud d'arc igual a la longitud de la circumferència de la base.

Anomenem ara *R* al radi de la base i G a la generatriu. L'àrea lateral del con és l'àrea de sector circular obtingut. Per a calcular-la pensem que aquesta àrea ha de ser directament proporcional a la longitud d'arc que al seu torn ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base. Podem escriure aleshores:

$$\frac{A\ \ Lateral\ \ del\ \ con}{Longitud\ \ de\ \ l'arc\ \ corresponen\ \ al\ \ sector} = \frac{A\ \ total\ \ del\ \ cercle\ \ de\ \ radi\ \ G}{Longitud\ \ de\ \ la\ \ circumferència\ \ de\ \ radi\ \ G}$$

És a dir: $\dfrac{A_L}{2\pi R} = \dfrac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ i aïllant A_L tenim:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi\, R\, G$$

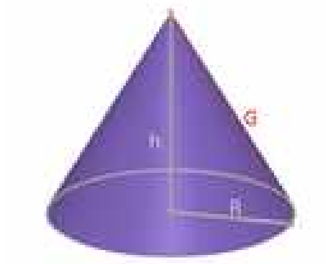
Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea del cercle de la base, obtenim l'àrea total del con.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Activitats resoltes

- *Calcula l'àrea total d'un con de 12 dm d'altura, sabent que la circumferència de la base mesura 18,84 dm .(Pren 3,14 com a valor de π)*

Calculem en primer lloc el radi *R* de la base:



$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \dfrac{18{,}84}{2\pi} \approx \dfrac{18{,}84}{6{,}28} = 3$ dm.

Calculem ara la generatriu *G*:

$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37$ dm.

Per tant $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79$ dm^2.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

4.4. Àrees lateral i total d'un tronc de con.

En tallar un con per un pla paral·lel a la base, s'obté un tronc de con. Igual que el tronc de piràmide, és un cos desenrotllable i el seu desenrotllament el constitueixen els dos cercles de les bases junt amb un trapezi circular, les bases del qual corbes mesuren el mateix que les circumferències de les bases.

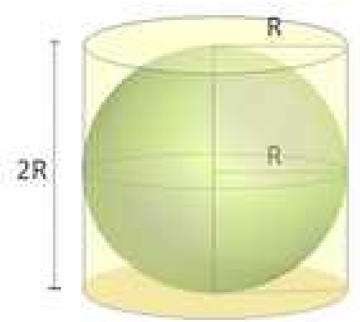
Anomenant *R* *i* *r* als radis de les bases i *G* a la generatriu resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$

Si a l'expressió anterior li sumem les àrees dels cercles de les bases, obtenim l'àrea total del tronc de con:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

4.5. Àrea total d'una esfera.



L'esfera no és un cos geomètric desenrotllable, per la qual cosa és més complicat que als casos anteriors trobar una fórmula per a calcular la seua àrea.

Arquimedes va demostrar que l'àrea d'una esfera és igual que l'àrea lateral d'un cilindre circumscrit a l'esfera, és a dir un cilindre amb el mateix radi de la base que el radi de l'esfera i l'altura del qual és el diàmetre de l'esfera.

Si anomenem *R* al radi de l'esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$$

L'àrea d'una esfera equival a l'àrea de quatre cercles màxims.

Activitats proposades

21. Una columna cilíndrica té 76 cm de diàmetre i 4 m d'altura. Quina és la seua àrea lateral?

22. El radi de la base d'un cilindre és de 38 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seua àrea total.

23. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seua generatriu mesura 50 dm i el seu radi de la base 30 dm.

24. La circumferència de la base d'un con mesura 6, 25 m i la seua generatriu 8 m. Calcula l'àrea total.

25. Una esfera té 4 m de radi. Calcula: a) la longitud de la circumferència màxima; b) l'àrea de l'esfera.

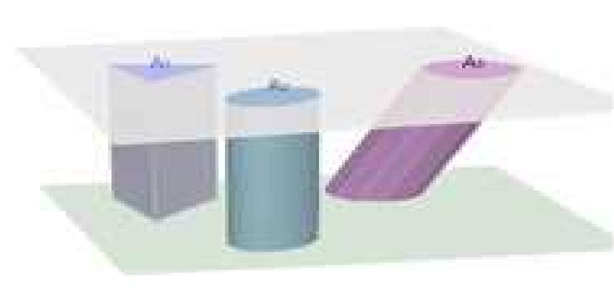
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

5. VOLUM D'UN COS GEOMÈTRIC

5.1. Principi de *Cavalieri*.

Bonaventura Cavalieri, matemàtic del segle XVII va enunciar el principi que porta el seu nom i que afirma:

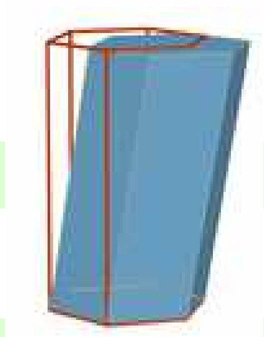
"Si dos cossos tenen la mateixa altura i en tallar-los per plans paral·lels a les seues bases, s'obtenen seccions amb la mateixa àrea, aleshores els volums dels dos cossos són iguals"



Exemple:

A la figura adjunta les àrees de les seccions A_1, A_2, A_3, produïdes per un pla paral·lel a les bases, són iguals, llavors, segons aquest principi els volums dels tres cossos són també iguals.

5.2. Volum d'un prisma i d'un cilindre



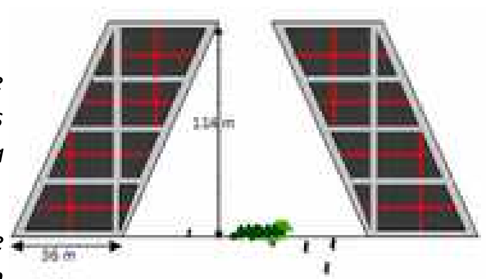
El volum d'un prisma recte és el producte de l'àrea de la base per l'altura. A més, segons el principi de *Cavalieri*, el volum d'un prisma oblic coincideix amb el volum d'un prisma recte amb la mateixa base i altura. Si denotem per V aquest volum, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura:

$$\text{Volum prisma} = V = A_B \cdot h$$

També el volum d'un cilindre, recte o oblic és àrea de la base per altura. Si anomenem *R* al radi de la base, A_B *l'àrea* de la base i *h* l'altura, el volum s'escriu:

$$\text{Volum cilindre} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Activitats resoltes



Les conegudes torres Kio de Madrid són dues torres bessones que estan al Passeig de la Castellana, junt amb la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.

Cada una d'elles és un prisma oblic la base del qual és un quadrat de 36 metres de costat i tenen una altura de 114 metres. El volum interior de cada torre pot calcular-se amb la fórmula anterior:

$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744 \text{ m}^3$$

Activitats proposades

26. Calcula el volum d'un prisma recte de 12 dm d'altura la base del qual és un hexàgon de 4 dm de costat.

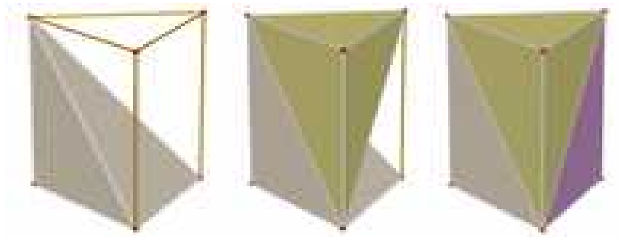
27. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seua base té 12 cm de diàmetre i que l'aigua arriba a 1 dm d'altura.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

5.3. Volum d'una piràmide i d'un con.

També als casos d'una piràmide o con, les fórmules del volum coincideixen en cossos rectes i oblics.

El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma que té la mateixa base i altura.



Volum piràmide = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3}$

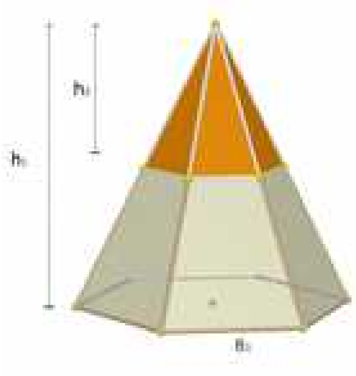
Si comparem con i cilindre amb la mateixa base i altura, concloem un resultat anàleg

Volum con = $V = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

5.4. Volum d'un tronc de piràmide i d'un tronc de con.

Hi ha una fórmula per a calcular el volum d'un tronc de piràmide regular però l'evitarem. Resulta més senzill obtindre el volum d'un tronc de piràmide regular restant els volums de les dues piràmides a partir de les que s'obté.

Si representem per A_{B1} i A_{B2} *les* àrees de les bases i per h_1 i h_2 *les* altures de les piràmides esmentades, el volum del tronc de piràmide és:



Volum tronc de piràmide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$

El volum del tronc de con s'obté de manera semblant. Si R_1 i R_2 són els radis de les bases dels cons que originen el tronc i h_1 i h_2 les seues altures, el volum del tronc de con resulta:

Volum tronc de con = $\dfrac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \dfrac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$

Activitats resoltes

- *Calcula el volum d'un tronc de piràmide regular de 10 cm d'altura si les seues bases són dos hexàgons regulars de costats 8 cm i 3 cm.*

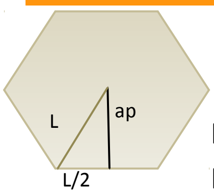


Figura 1

Primer pas: calculem les apotemes dels hexàgons de les bases:

Per a cada un d'aquests hexàgons:

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

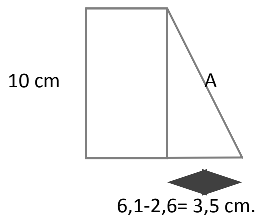


Figura 2

Doncs les apotemes buscades mesuren:

$$ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm$$

$$ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$$

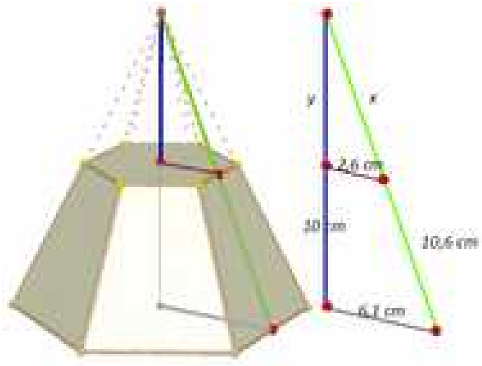


Figura 3

Com a segon pas, calcularem l'apotema del tronc de piràmide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\,cm$$

En tercer lloc, calcularem el valor dels segments *x, y* de la figura 3 que ens serviran per a obtindre les altures i apotemes de les piràmides que generen el tronc amb el què treballem:

Pel teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$

Llavors l'apotema de la piràmide gran és 10,6 + 7,9=18,5 cm i la de la xicoteta 7,9 cm

I aplicant el teorema de *Pitàgores*:

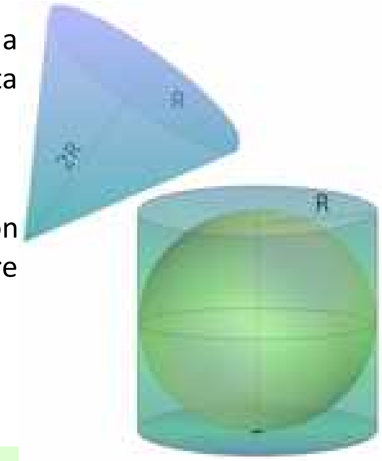
$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

Per tant les altures de les piràmides generadores del tronc mesuren 10 +7,5 = 17,5 cm i 7,5 cm

Finalment calculem el volum del tronc de piràmide:

$$V = \frac{A_{B1}\,.\,h_1}{3} - \frac{A_{B2}\,.\,h_2}{3} = \frac{1}{3}.\frac{48\,.\,18{,}5\,.\,17{,}5}{2} - \frac{1}{3}.\frac{18\,.\,7{,}9\,.\,7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25\,cm^3$$

5.5. Volum de l'esfera

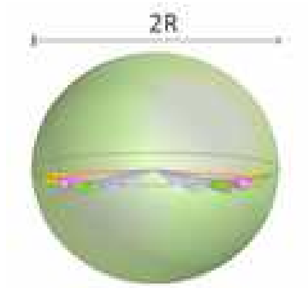


Tornem a pensar en una esfera de radi R i al cilindre que la circumscriu. Per a omplir amb aigua l'espai que queda entre el cilindre i l'esfera, es necessita una quantitat d'aigua igual a un terç del volum total del cilindre circumscrit.

Es dedueix llavors que la suma dels volums de l'esfera de radi R i del con d'altura $2R$ i radi de la base R, coincideix amb el volum del cilindre circumscrit a l'esfera de radi R. Per tant:

Volum $_{\text{esfera}}$ = Volum $_{\text{cilindre}}$ - Volum $_{\text{con}}$ $\Rightarrow$

$$\text{Volum}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Hi ha demostracions més rigoroses que avalen aquest resultat experimental que hem descrit. Així per exemple, el volum de l'esfera es pot obtindre com a suma dels volums de piràmides que la recobreixen, totes elles de base triangular sobre la superfície de l'esfera i amb vèrtex en el centre de la mateixa.

Activitats proposades

28. (CDI Madrid 2008) El depòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 m d'altura i 2 m de diàmetre. Irene ha telefonat al subministrador de gasoil perquè en el depòsit només queden 140 litres.

a. Quin és, en dm^3, el volum del depòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).

b. Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el depòsit?

29. Comprova que el volum de l'esfera de radi 5 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 10 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 10 dm d'altura i 5 dm de radi de la base.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

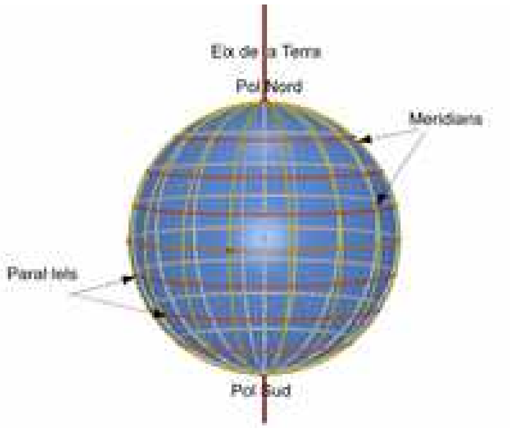
6. GLOBUS TERRAQÜI

6.1. El globus terraqüi

La Terra té una forma d’esfera un poc aplatada pels pols. Al seu moviment de rotació gira al voltant d’una línia imaginària que es denomina eix. Els *pols geogràfics* Nord *i Sud* són els punts de tall de l’eix amb la superfície de la Terra.

Un globus *terraqüi* és una representació tridimensional a escala de la Terra. És la representació més precisa que existeix perquè no presenta distorsions a l’hora de prendre dades per a calcular angles i distàncies.

La resta de les representacions a escala de la Terra són bidimensionals i entre elles destaquen els *planisferis* que són projeccions del globus terraqüi sobre el pla.



L’objectiu d’aquestes representacions de la Terra és la ubicació precisa de qualsevol punt geogràfic. Per a aconseguir-ho, al globus terraqüi es defineixen un conjunt de línies imaginàries que es denominen *meridians* i *paral·lels*.

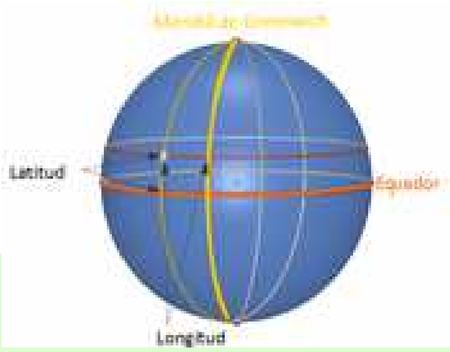
Els *meridians* són semicircumferències centrades al centre de la Terra i que passen pels pols. Entre ells destaquen l'anomenat meridià de Greenwich o meridià zero que passa per Londres i l’Antimeridià, ubicat en l’Oceà Pacífic.

Els *paral·lels* són circumferències que tenen el seu centre a l’eix de la Terra i que tallen al globus terraqüi. Només un d’ells té com a centre el de la Terra. Es denomina Equador *o paral·lel zero* i és una circumferència de radi màxim.

Altres paral·lels destacats són els *Tròpics de Càncer* i *Capricorn*, pròxims a l’Equador al nord i sud respectivament i també el *Cercle Polar Àrtic* al Pol Nord i el *Cercle Polar Antàrtic* al Pol Sud.

L'Equador divideix a la Terra en dues semiesferes, denominades *hemisferi nord* (N) i *hemisferi sud*(S). El meridià de Greenwich divideix a la Terra en els *hemisferis est* (E) i *oest* (W).

6.2. Longitud i latitud. Coordenades geogràfiques.



Prenent com a sistema de referència l’Equador i el meridià de Greenwich, a cada punt de la Terra se li associa una parella de nombres que són les seues *coordenades geogràfiques* i que reben el nom de *latitud i longitud*. Aquestes coordenades s’expressen en graus sexagesimals.

La *latitud* és la distància que existeix entre un punt qualsevol del globus terraqüi i l’Equador. Es mesura sobre el meridià que passa pel dit punt.

La *longitud* és la distància que existeix entre un punt qualsevol i el Meridià de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel punt.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Si un punt està a l'hemisferi nord, direm que té latitud nord i escriurem latitud N. Anàlogament si està a l'hemisferi sud, direm que té latitud sud i escriurem latitud S.

També parlarem de longitud est i longitud oest i escriurem longitud E o longitud W depenent de que un punt es trobe a l'esquerra o dreta del meridià de Greenwich. Sol identificar-se la longitud E amb longitud negativa i la longitud W amb longitud positiva.

6.3. Fusos horaris.

Durant molt de temps l'hora es determinava mitjançant càlculs basats en els moviments dels astres i l'hora oficial era l'hora solar. Açò ocasionava múltiples problemes als horaris dels transports entre diferents localitats pel que es va acordar establir un horari oficial coordinat. En un principi aquest horari estava basat en l'anomenada hora mitjana de *Greenwich* (**GMT**) que es calculava fent la mitjana de l'hora solar de totes les localitats pertanyents al meridià de *Greenwich*. Hui en dia l'hora solar ha sigut substituïda per l'hora que calculen rellotges atòmics molt més precisos. Amb ells l'hora **GMT** ha donat pas a l'hora universal coordinada (**UTC**).

La Terra fa una volta completa en 24 hores, recorre 360 º : 24 = 15 º en una hora. Es produeix llavors una diferència d'una hora de temps per cada diferència de 15º de longitud entre dos punts geogràfics.

S'anomena ***fus horari*** a una zona del globus terraqüi compresa entre dos meridians que es diferencien en 15º de longitud. La velocitat de la Terra en el seu moviment de rotació origina 24 *fusos horaris*. Partint del meridià de *Greenwich* es numeren segons la seua distància A l'Est o a l'Oest de Greenwich.

Dins de cada fus horari tots els rellotges han de marcar la mateixa hora, i entre un fus i el següent hi ha una diferència d'una hora. Generalment, els fusos horaris estan determinats per meridians d'una longitud que és múltiple de 15°; no obstant això, com a conseqüència de les fronteres polítiques, les delimitacions poden seguir línies que adopten formes molt irregulars.

Tenint en compte que el moviment de rotació és un gir d'oest a est, si ens desplacem d'un fus horari a un altre en direcció Est- Oest, hem de retardar el rellotge una hora i, si el desplaçament es produeix d'Oest a Est hem d'avançar-lo una hora.

Travessar l'Antimeridià suposa el canvi de data, exactament un dia.

Activitats proposades

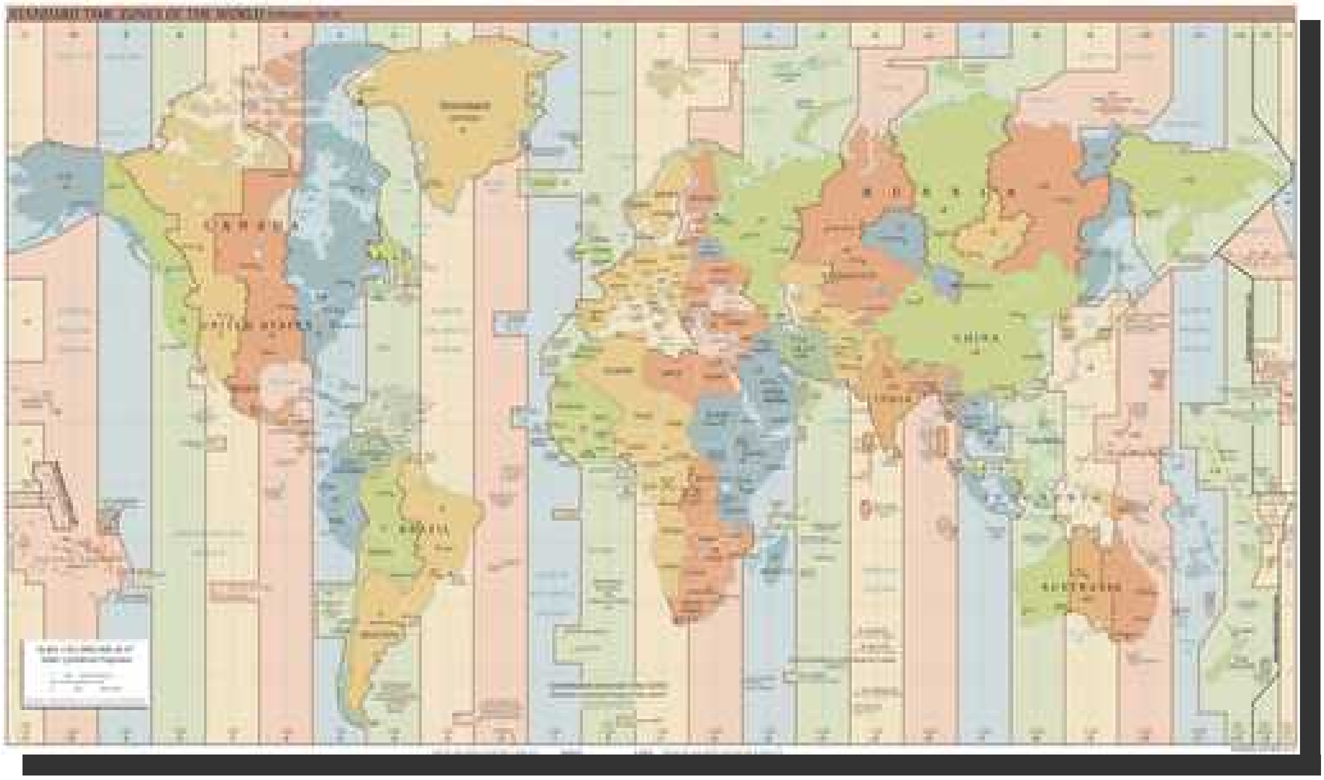
30. Un avió recorre 20º en direcció Oest al llarg de l'Equador. Si arriba a un punt la longitud del qual és de 170º Est, quines són les coordenades del lloc de partida?

31. Joan ix de sa casa i recorre 10 Km en direcció sud, 20 Km cap a l'est i 10 Km cap al nord. Si es troba novament a casa, On està situada sa casa?

32. A l'esfera terrestre, quin paral·lel medeix més?, quin meridià medeix més? Raona les teues respostes.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

33. Busca les coordenades geogràfiques del lloc en què vius.



MAPA DE FUSOS HORARIS DE 30 MARÇ 2014 (ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA)

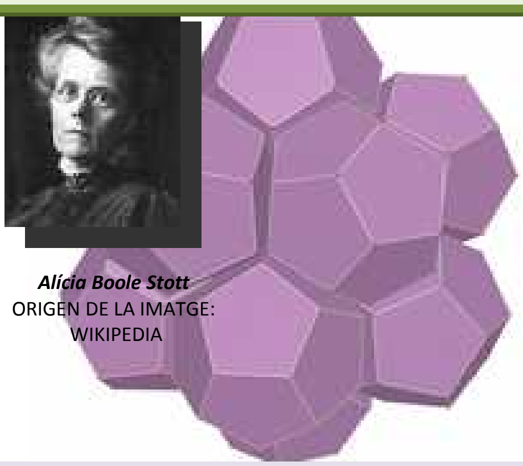
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

CURIOSITATS. REVISTA


Arquimedes pensatiu i Ciceró i els magistrats descobrint la tomba d'Arquimedes a Siracusa

ORIGEN DE LES IMATGES: WIKIPEDIA

Arquimedes (287 a. C.- 212 a. C.) Matemàtic, enginyer, físic, va realitzar múltiples aportacions a la ciència. Entre altres i com has estudiat en aquest tema, la demostració de les fórmules de l'àrea i volum d'una esfera. Es diu que van resultar els seus descobriments favorits. En la seua tomba es van gravar un cilindre amb una esfera inscrita com a homenatge.

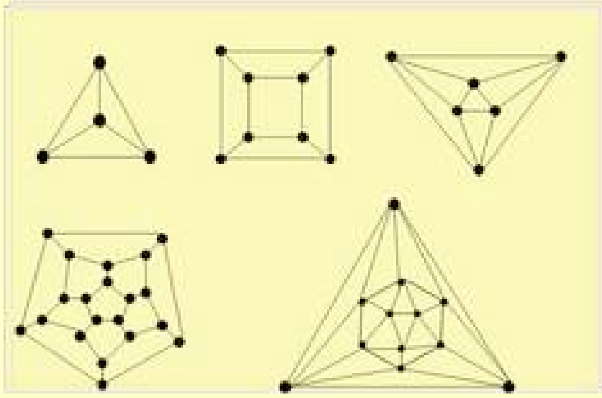


Alícia Boole Stott

ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA

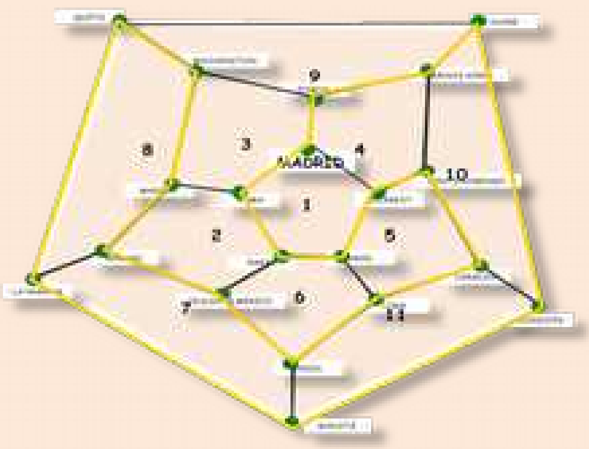
Alícia Boole Stott, (1860 - 1940) filla del matemàtic George Boole, va destacar per la seua meravellosa capacitat per a visualitzar la quarta dimensió. Va calcular i va representar les seccions dels anomenats ***polítops regulars de dimensió 4***, objectes geomètrics equivalents, en un espai de quatre dimensions, als polígons regulars al pla o als poliedres regulars a l'espai.

Els poliedres regulars poden ser "esclafats" sobre un pla, triant una cara i projectant els costats del poliedre des d'un punt per damunt del centre d'aquesta cara. La figura que s'obté s'anomena diagrama de Schlegel. Aquests diagrames són exemples de grafs. Gran part de les propietats dels poliedres es conserven en ells i ajuden a fer que molts problemes es resolguen amb facilitat.



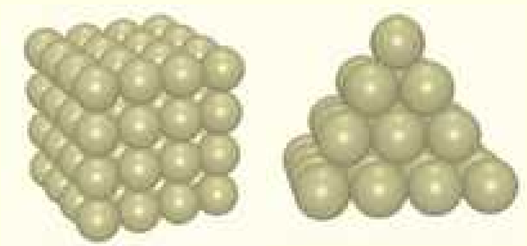
A 1859 Hamilton va idear el joc següent: Donat un dodecaedre, si en cada un dels seus vèrtexs es posa el nom d'una ciutat, és possible trobar un circuit tancat a través de les arestes del dodecaedre que passe una sola vegada per cada ciutat?

Gràcies al graf del dodecàedre, és molt senzill resoldre el problema

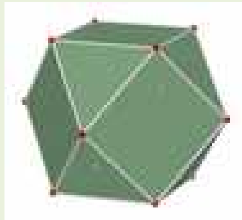


Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

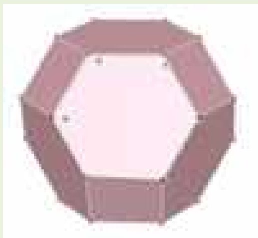
El matemàtic anglès **Thomas Harriot** (1560-1621), va plantejar el problema de **l'empaquetatge *d'esferes*** que consisteix a trobar la forma d'apilar esferes del mateix radi de manera que l'espai comprés entre elles siga mínim. L'astrònom alemany Johannes Kepler (1571-1630) el va resoldre, arribant a la conclusió que la millor col·locació era la que llavors es feia espontàniament als vaixells per a apilar les bales de canó o la que utilitzen els botiguers per a apilar les taronges als llocs del mercat.

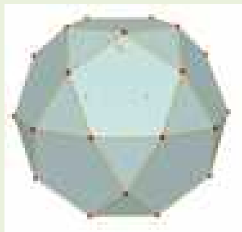


Els ***sòlids arquimedians*** o ***sòlids* d'Arquimedes** són un grup de poliedres convexos les cares del qual són polígons regulars de dues o més tipus. En tots els sòlids d'Arquimedes concorren el mateix nombre de cares en cada vèrtex i amb les mateixes formes. Alguns d'ells s'obtenen truncant els sòlids platònics (poliedres regulars).



Cubs truncats





Octàedre truncat *Dodecàedre truncat*

Un anell de tetràedres o caleidocicle és un anell tridimensional compost per tetràedres units per les seues arestes. Poden girar sobre si mateixos entorn del seu centre infinites vegades sense trencar-se ni deformar-se.

Entre els materials trobaràs una plantilla *per a construir un amb les imatges d'algunes dones matemàtiques celebres.*

Els vèrtexs de l'icosàedre determinen 3 rectangles auris perpendiculars dos a dos. A l'icosàedre podem trobar un total de 15 rectangles auris. Cada un d'ells té dos costats paral·lels que són arestes oposades del poliedre.

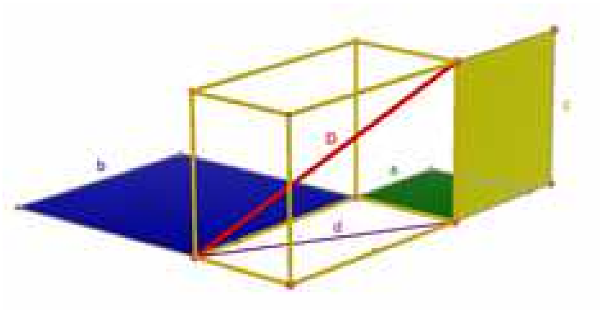
Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

TEOREMA DE PITÀGORES A L'ESPAI

Si un ortoedre té arestes de longituds *a*, *b*, *c*, segons el teorema de Pitàgores, a l'espai, la suma dels quadrats de les arestes, coincideix amb el quadrat de la diagonal, *D*, de l'ortoedre:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

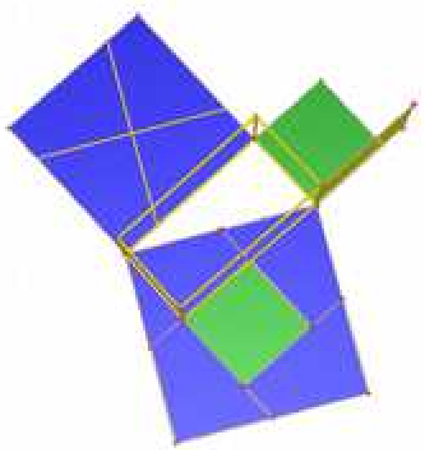
Com a conseqüència, la suma de les àrees dels quadrats de costats iguals a les arestes, coincideix amb l'àrea del quadrat que té com a costat la diagonal de l'ortoedre.



Construirem un trencaclosques, basat en la demostració que *Perigal* va idear per a demostrar el teorema de Pitàgores al pla. Cal aplicar dues vegades el seu mètode i trobarem les peces clau que demostren el teorema a l'espai.

En traçar la diagonal *d* de la base, queda dividida en dos triangles rectangles de catets *a* i *b*.

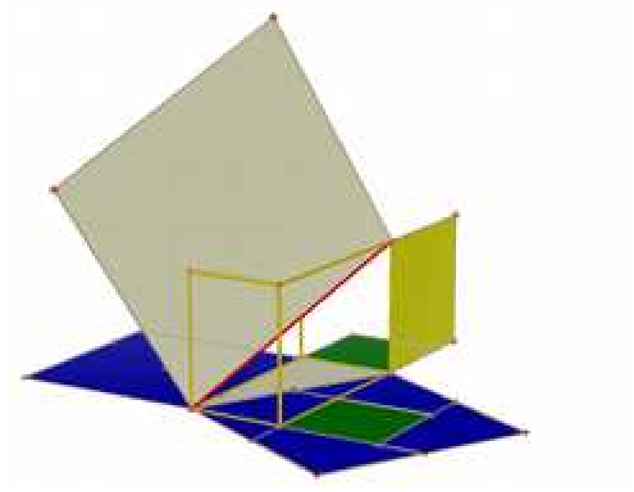
Construïm el quadrat sobre la seua hipotenusa i les peces de *Perigal* que demostren el teorema de Pitàgores en un d'aquests triangles.

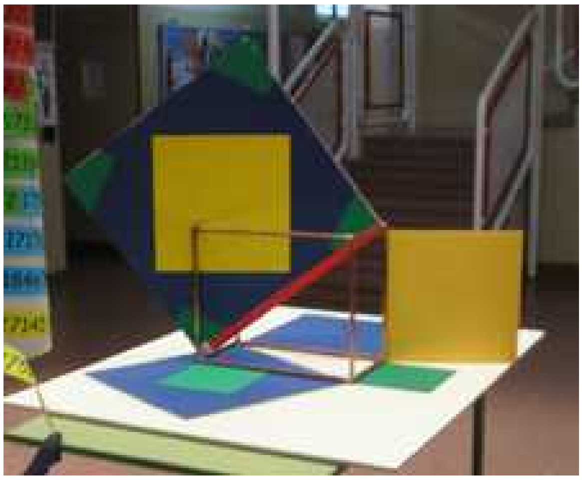


Per a això en el quadrat construït sobre el catet major (a la nostra figura, *b* de color blau) i, pel seu centre, tracem dos segments un paral·lel i un altre perpendicular a la hipotenusa, de manera que ambdós tallen als dos costats del quadrat. El quadrat queda dividit en quatre peces exactament iguals que junt amb el quadrat de costat *a*, recobreixen el quadrat de costat *d*.

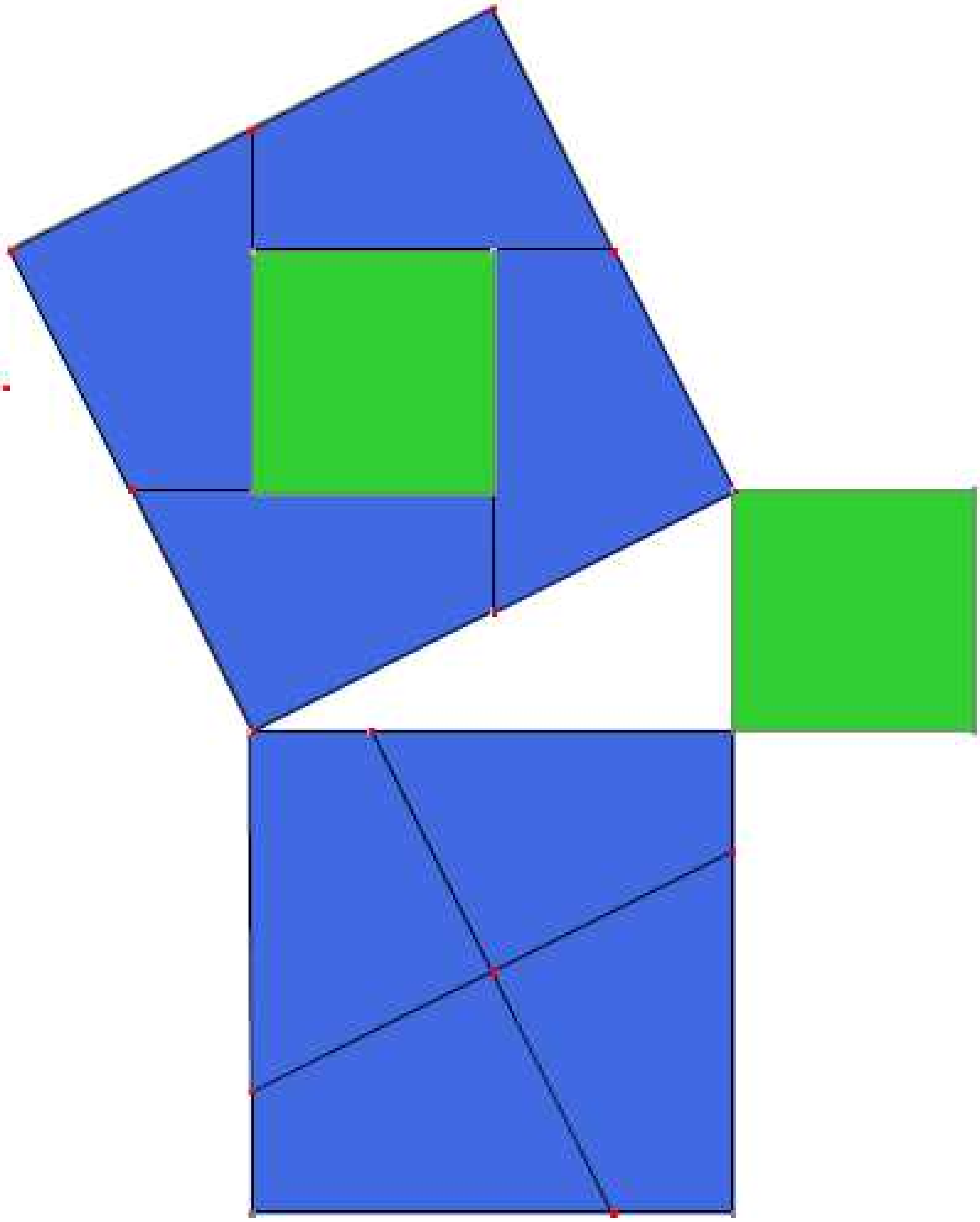
Ara cal fixar-se al triangle rectangle de catets *c, d* i la hipotenusa del qual és *D* i repetir el procés anterior, això sí que utilitzant el quadrat de costat *d* recobert amb les peces blaves i el quadrat verd.

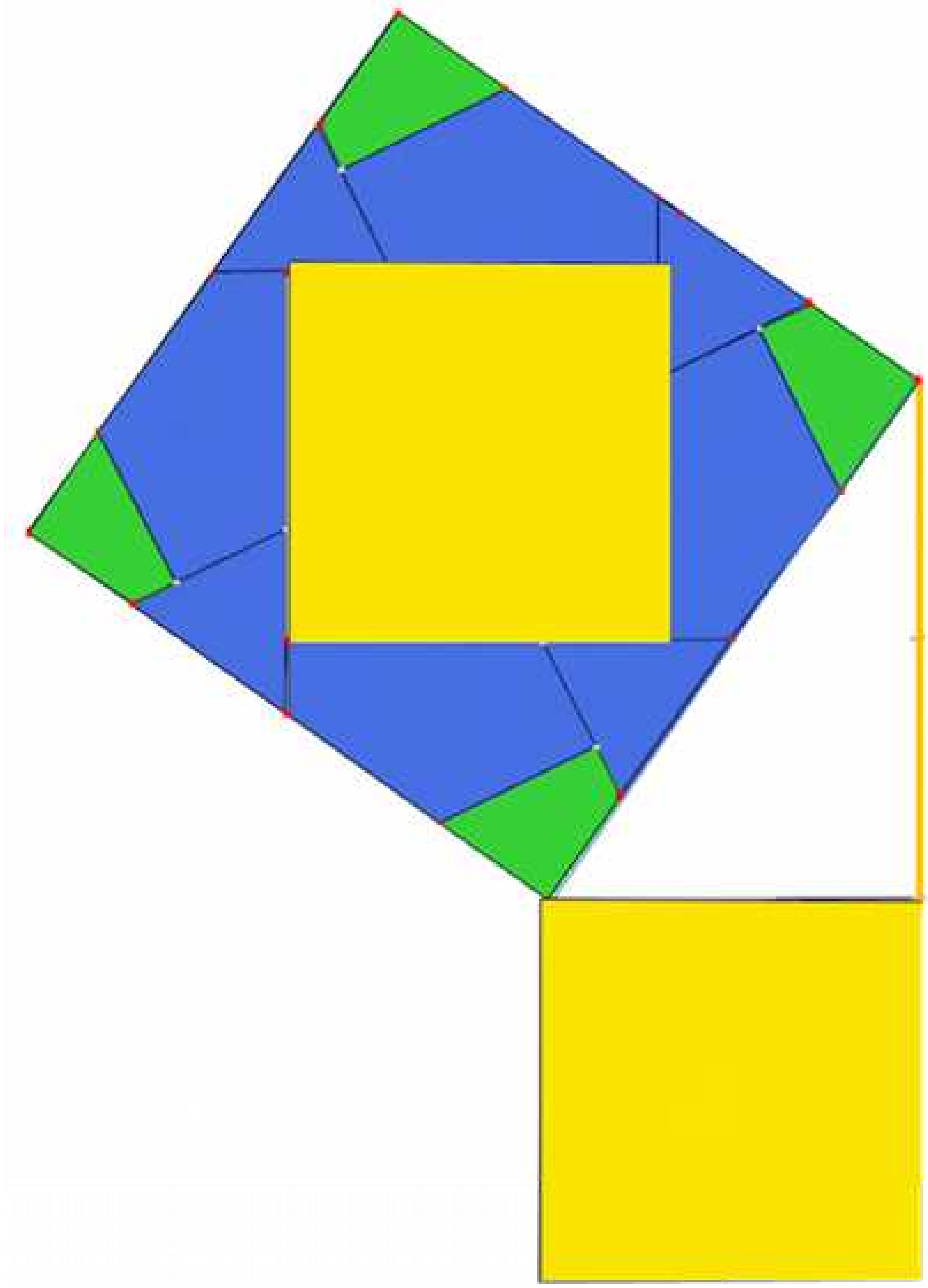
A les pàgines següents trobaràs les làmines que et permeten construir la teua pròpia demostració. Únicament has de retallar les dues últimes, apegar-les una contra una altra i construir un ortoedre amb fil d'aram que tinga com a dimensions les longituds dels costats del quadrats verd, blau i groc.

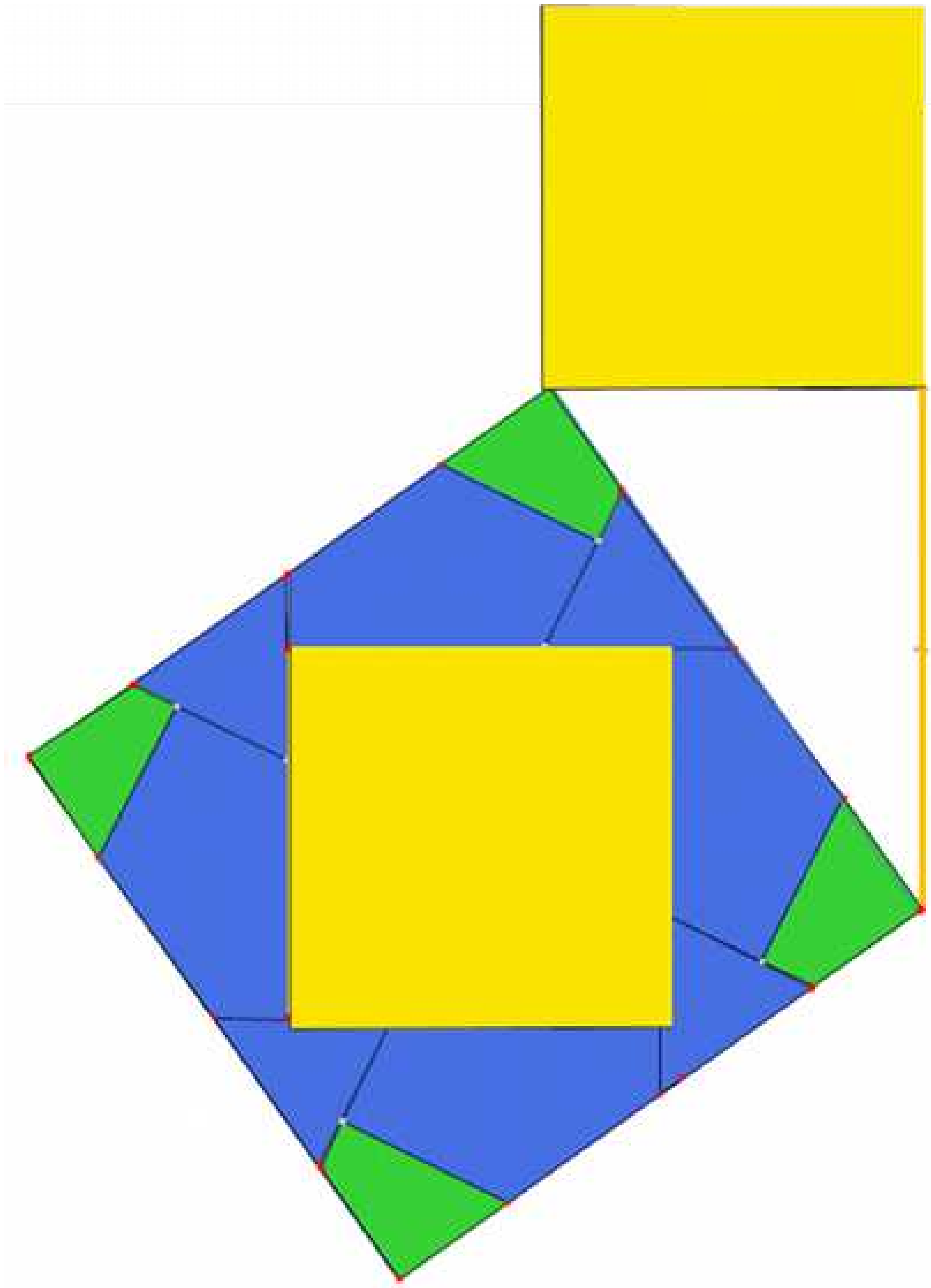




Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

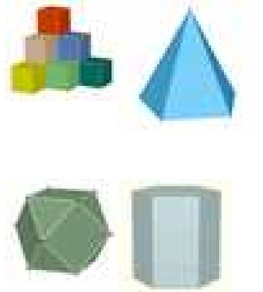
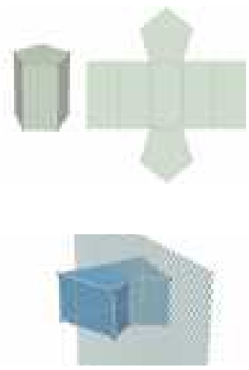




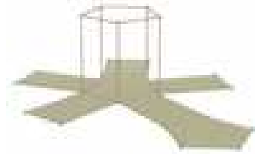
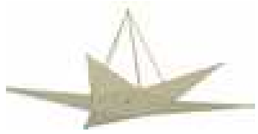
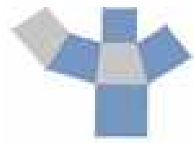
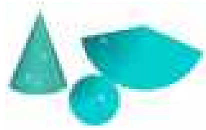


Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

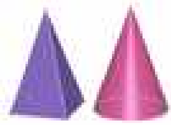
RESUM

		Exemples
Poliedre. Elements d'un poliedre. Tipus de poliedres	Un poliedre és una regió tancada de l'espai limitada per polígons. Els seus principals elements són: cares, arestes, vèrtexs, angles diedres i poliedres, així com les diagonals. Els poliedres poden ser còncaus i convexos depenent de que alguna de les seues cares siga un polígon còncau o cap ho siga. Entre els poliedres destaquen poliedres regulars, prismes i piràmides.	
Teorema d'Euler:	En tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs coincideix amb el nombre d'arestes més 2.	C + V=A+2
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seues cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre	
Prismes	Un prisma és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases. Poden ser còncaus o convexos; rectes o oblics, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonals… Destaquen els paral·lelepípedes que són prismes amb totes els seus cares paral·lelograms i dins d'aquests els ortoedres que són paral·lelepípedes amb totes les seues cares rectangulars	
Teorema de Pitàgores a l'espai	La diagonal d'un ortoedre és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les seues arestes	
Piràmides	Una piràmide és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú, com a costats té la base. Poden ser còncaves o convexes; rectes o obliqües, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonals…	
Tronc de piràmide	Un tronc de piràmide és el poliedre resultant en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.	

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Cossos de revolució	Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s’obtenen en fer girar una línia al voltant d’una recta fixa denominada *eix*. La línia que gira s’anomena *generatriu*. Entre els cossos de revolució destaquen cilindres, cons i esferes.	
Àrees lateral i total d’un prisma	$A_{Lateral} = Perímetre_{Base} \cdot Altura$ $A_{Total} = Àrea_{Lateral} + 2\,Àrea_{Base}$	
Àrees lateral i total d’una piràmide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{piràmide}}{2}$ $A_{total} = Àrea_{Lateral} + Àrea_{Base}$	
Àrees lateral i total d’un tronc de piràmide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{tronc}}{2}$ $A_{total} = Àrea_{Lateral} + Àrea_{Base\,1} + Àrea_{Base\,2}$	
Àrees lateral i total d’un cilindre	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	
Àrees lateral i total d’un con	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Àrees lateral i total d’un tronc de con	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r) G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Àrea total d’una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$	

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

Volum d'un prisma i d'un cilindre	$Volum = Àrea_{Base} \cdot Altura$	
Volum d'una piràmide i d'un con	$Volum = \frac{Àrea_{Base} \cdot Altura}{3}$	
Volum d'una esfera	$Volum = \frac{4}{3} \pi R^3$	
Coordenades geogràfiques	**Latitud**: Distància del punt geogràfic a l'Equador mesurada sobre el meridià que passa pel punt. **Longitud:** Distància del punt geogràfic al meridià zero o de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel punt.	
Fusos horaris	Cada **fus horari** és una zona del globus terraqüi compresa entre dos meridians que es diferencien en 15^o de longitud.	

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES.

Angles poliedres. Paral·lelisme i perpendicularitat. Poliedres: elements i tipus.

1. Si estem en una habitació sense columnes, atenent al sòl i a les seues quatre parets, quants angles diedres es formen?

2. Doblega per la mitat un full de paper, construeix un angle diedre i traça el seu rectilini. Podries mesurar l'amplitud de diferents angles diedres mitjançant aquest rectilini?

3. Determina l'amplitud dels angles diedres que formen les cares laterals d'un poliedre que és un prisma recte de base un octògon regular.

4. Dues cares d'un triedre medeixen 60º i 118º, Entre quins valors pot oscil·lar l'altra?

5. Es pot formar un angle poliedre amb un angle d'un triangle equilàter, dos angles d'un rectangle i un d'un pentàgon regular?

6. Podrà existir un poliedre regular les cares del qual siguen hexagonals? Raona la resposta.

7. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?

8. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetràedre? I en cada un dels restants poliedres regulars?

9. Prolonga una parella d'arestes en una piràmide pentagonal, de manera que s'obtinguen rectes no coplanàries.

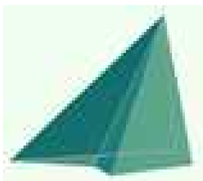
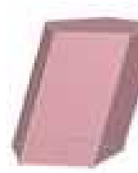
10. Dibuixa un prisma regular de base quadrada i assenyala: a) dues arestes que siguen paral·leles, b) dues arestes que siguen perpendiculars i coplanàries, c) dues arestes perpendiculars i no coplanàries, d) dues cares paral·leles, e) dues cares perpendiculars.

11. Si un poliedre convex té 16 vèrtexs i 24 arestes, quantes cares té? Podria ser una piràmide? I un prisma?

12. Amb 12 varetes de 5 cm de llarg cadascuna, usant totes les varetes quins poliedres regulars es poden construir?

13. D'un prisma sabem que el nombre de vèrtexs és 16 i que el nombre d'arestes és 24 quantes cares té?

14. Classifica els següents cossos geomètrics i indica, quan siguen poliedres, el nombre de vèrtexs, cares i arestes que tenen. Quins compleixen el teorema d'Euler?

15. Descriu la diferència entre un prisma recte i un prisma oblic. És prou que un paral·lelepípede tinga dues cares paral·leles rectangulars perquè siga un ortoedre?

Teorema de Pitàgores a l'espai

16. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesuren 4 cm, 5 cm i 6 cm que no siga un ortoedre. Dibuixa també el seu desenrotllament.

17. Si el paral·lelepípede anterior fora un ortoedre, quant mesuraria la seua diagonal?

18. Un got de 12 cm d'altura té forma de tronc de con en què els radis de les bases són de 5 i 4 cm. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobreïsca del got almenys 2 cm?

19. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 cm, 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?

20. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura del prisma 8 cm.

21. Si un ascensor mesura 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 2,2 m d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 m d'altura?

22. Quina és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 metres d'altura ?

23. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seua diagonal mesura 3,46 cm.

24. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases de la qual tenen radis 5 cm i 2 cm, i altura 10 cm.

Àrea lateral, total i volum de cossos geomètrics

25. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els desenrotllaments següents:

26. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm. Calcula les àrees lateral i total del prisma.

27. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tinga 4 cm d'aresta basal i 1 dm d'altura i calcula les àrees de la base i total.

28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.

29. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 3,5 dm, 8,2 dm i 75 cm.

30. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 8 m d'altura i 5cm de radi de la base.

31. Calcula l'àrea total d'una esfera de 5 cm de radi.

32. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seua àrea lateral és de 120 m^2 i la seua base és un hexàgon de 5 m de costat.

33. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 32 dm i l'altura de la piràmide és de 4 dm. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.

34. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm gira al voltant d'un dels seus catets generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.

35. Tres boles de metall de radis 12 dm, 0,3 m i 4 m es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?

36. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric de 1,20 m de diàmetre i 20 metres de profunditat?

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

37. Quant cartó necessitarem per a construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesure 10 cm i que la seua altura siga de 25 cm?

38. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm^3 de volum.

39. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre de 1,20 m d'alt i 248 dm^3 de volum?

40. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns depòsits cilíndrics que mesuren 12 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplin amb cada depòsit?

41. Calcula la quantitat de cartolina necessària per a construir un anell de 10 tetraedres cada un dels quals té 2 cm d'aresta.

42. En fer el desenrotllament d'un prisma triangular regular de 8 dm d'altura, va resultar un rectangle d'1 metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

43. Determina la superfície mínima de paper necessària per a embolicar un prisma hexagonal regular d'1 m de costat de la base i 2 m d'altura.

44. L'ajuntamentde Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es deposita la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.

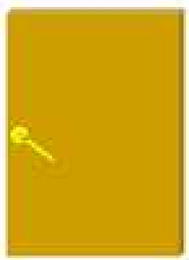
45. Una habitació té forma d'ortoedre i les seues dimensions són directament proporcionals als nombres 3, 5 i 7. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 14,5 m.

46. Un ortoedre té 1 dm d'altura i 6 dm^2 d'àrea total. La seua longitud és el doble de la seua amplària, quin és el seu volum?

47. Si el volum d'un cilindre de 10 cm d'altura és de 314 cm^3, calcula el radi de la base del cilindre. (Utilitza 3,14 com a valor de π).

48. (**CDI Madrid 2011**) Han instal·lat a casa de Joan un depòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del depòsit en m^3. (Pren π=3,14). b) Quants litres d'aigua caben al depòsit?

49. (**CDI Madrid 2012**) Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm^3, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.



50. Una circumferència de longitud 2,24 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum. (Pren π=3,14).

51. Una porta mesura 2 m d'alt, 80 cm d'ample i 4 cm de grossària. El preu d'instal·lació és de 200 € i es cobra 6 € per m^2 en concepte d'envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 300 € cada m^3. A) Calcula el volum de fusta d'una porta. B) El cost de la fusta d'una porta més la seua instal·lació. C) El cost de l'envernissat de cada porta, si només es cobra l'envernissat de les dues cares principals.

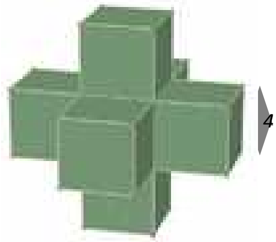
52. L'aiguacontinguda en un recipient cònic de 18 cm d'altura i 24 cm de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 10 cm de diàmetre. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

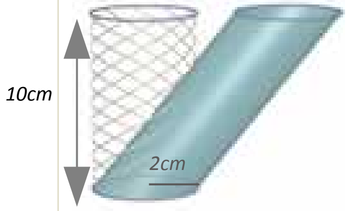
53. Segons Arquimedes quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 5 cm de radi que té la seua mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

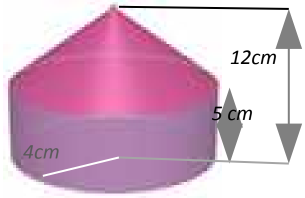
54. Quin és el volum d'una esfera en què una circumferència màxima mesura 31,40 m?

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

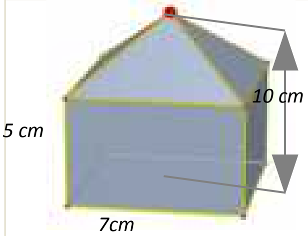
55. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



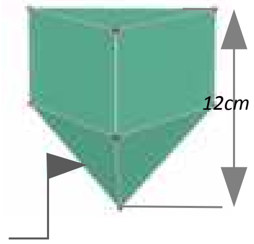




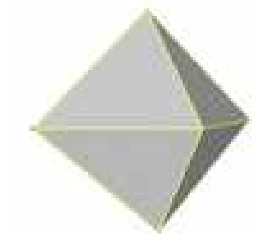
56. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



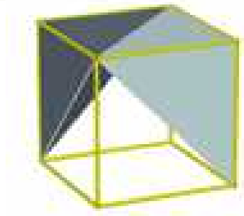
La base és quadrada



Tetràedre de 5cm d'aresta



Octàedre de 6cm d'aresta

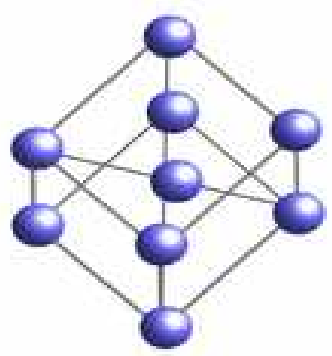


Piràmides construïdes a l'interior d'una estructura cúbica de 5 dm d'aresta.

57. En la construcció d'un globus aerostàtic de radi de 2,5 m s'empra lona que té un cost de 300 €/m^2. Calcula l'import de la lona necessària per a la seua construcció.

58. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm^3 de volum.

59. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reprodueix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



60. S'ha pintat per dins i per fora un depòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm^2, quants diners ha costat en total?

61. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.

a. Quants litres d'aigua són necessaris per a omplir-la?

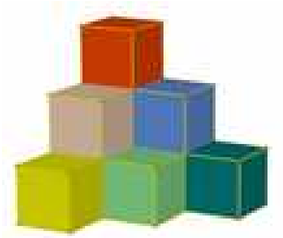
b. Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/ m^2?

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

62. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

63. En un atuell cilíndric de 8 dm de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,3 metres el nivell de l'aigua?

64. El preu de les teules és de 14,30 €/m^2 Quant costarà reparar una vivenda la teulada de la qual té forma de prisma quadrangular regular de 4 metres d'altura i 8 metres de costat de la base?



65. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?

66. Cada un dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cal afegir per a formar un cub de 216 cm^3 de volum?

67. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és de 1,5 cm i l'altura total és de 15 cm, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

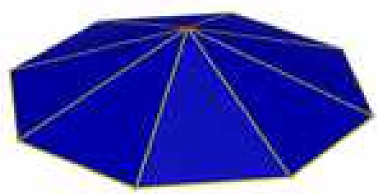
68. El vidre d'un fanal té forma de tronc de con de 50 cm d'altura i bases de radis 20 i 30 cm. Calcula la seua superfície.

69. Un bot cilíndric de 10 cm de radi i 40 cm d'altura té al seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha al seu interior.

70. Construïm un con amb cartolina retallant un sector circular de 120° i radi 20 cm. Calcula el volum del con resultant.

71. Un embut cònic de 20 cm de diàmetre ha de tindre 2 litres de capacitat, quina serà la seua altura?

72. En un depòsit amb forma de cilindre de 25 cm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després d'un quart d'hora?



73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular d'1 m d'altura i 45 cm de costat de la base. Es fixa un pal al sòl en què s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl de 1,80 m. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quin espai d'ombra determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'ompli amb 56 litres d'aigua. Si té 48 cm de llarg i 36 cm d'ample, quina és la seua profunditat?

75. Si s'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, quin dels dos cilindres resultants té major volum?

76. Un rectangle d'1 m de base i 10 m d'altura gira 360º al voltant d'una recta paral·lela a l'altura, que està situada a 2 m de distància. Calcula la superfície i el volum del cos que resulta.

77. En un gelat de cucurutxo la galleta té 15 cm d'altura i 5 cm diàmetre. Quina és la seua superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreïx una semiesfera perfecta, quants grams de gelat conté?

Fusos horaris

78. Quina diferència de longitud existeix entre dues ciutats si la diferència horària entre ambdues és de 5 hores? Podem saber si hi ha diferència entre les seues latituds?

79. Un avió emprén viatge cap a una ciutat situada a l'oest de Madrid. El viatge dura 10 hores i el seu rumb manté en tot moment la latitud de partida. Si la diferència de longitud entre Madrid i la ciutat d'arribada és de 45º i l'avió s'envola de l'aeroport Adolfo Suárez a les 9 del matí. A quina hora local aterrarà a la ciutat de destí?

80. La distància entre Londres i Pequín és de 8149 Km i la distància entre Londres i Sao Paulo és de 9508 Km, no obstant això a Pequín el rellotge marca 7 hores més que a Londres i a Sao Paulo 3 hores menys que a Londres. Com expliques aquesta diferència?

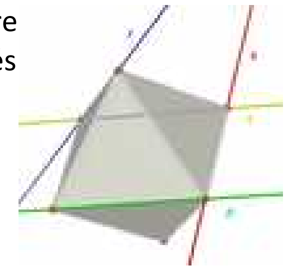
CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0º	51º 30´latitud N
PEQUIN	116º longitud E	40º latitud N
SAO PAULO	46º 30´de longitud W	23º 30´de latitud S

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

AUTOAVALUACIÓ



1. Cada una de les rectes *r, s, t* i *p* passa per dos vèrtexs consecutius d'un octàedre tal com s'observa a la figura. Assenyala quina afirmació de les següents és verdadera:

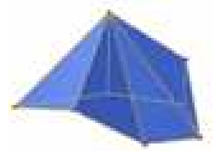
a) Les rectes *r i s* són coplanàries i secants.

b) Les rectes t i *p* no són coplanàries.

c) Les rectes *r* i *p* s'encreuen.

d) *r* i *s* contenen arestes d'una mateixa cara de l'octaedre

2. Observa els següents cossos geomètrics i selecciona l'opció verdadera:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Els cossos I), II), IV) i V) compleixen la relació d'Euler. **b)**. Hi ha dos cossos de revolució III) i VI).

c) Són poliedres regulars II) i IV). **d)** Són còncaus I) i V).

3. Si l'altura d'un prisma de base quadrada és 10 cm i el costat de la base és 4 cm, la seua àrea total és:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. Si només conté les tres quartes parts de la seua capacitat, el nombre aproximat de litres d'aigua que hi ha en ell és:

a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 1,5 m d'altura i 80 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per a recobrir la teulada, en total s'utilitzaran:

a) 38 teules **b)** 76 teules **c)** 72 teules **d)** 36 teules

6. Una caixa de dimensiones $30 \times 20 \times 15 \;\; cm$, està plena de cubs d'1 *cm* d'aresta. Si s'utilitzen tots per a construir un prisma recte de base quadrada de 10 *cm* de costat, l'altura mesurarà:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF

8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llandes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. L'àrea lateral d'un tronc de con que té 20 cm d'altura i bases de radis 30 i 15 cm, és:

a) 2250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

10. A partir de les coordenades geogràfiques de les ciutats A, B , C dedueix quina afirmació és correcta

CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores menys.

b) Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores més.

c) Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores més.

d) Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores menys.

Autores: Milagros Latasa i Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Milagros Latasa/Banc d'Imatges d'INTEF