Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

3r A d'ESO
Capítol 8: Moviments al pla i a l'espai

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

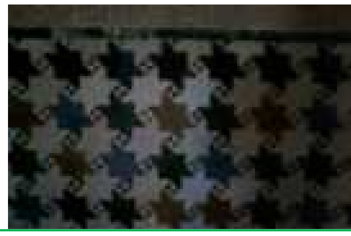
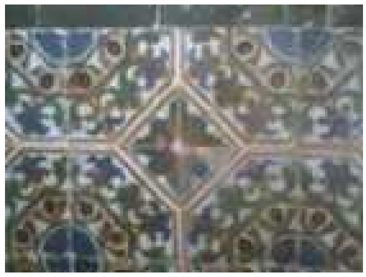
Autores: Adela Salvador i María Molero

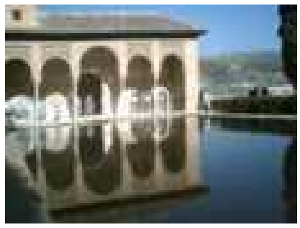
Revisors: Javier Rodrigo i Sergio Hernández

Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex



Resum

Tot es mou a l'Univers, la Terra gira al voltant del seu eix i es desplaça al voltant del Sol. El Sol es mou dins de la nostra galàxia, i la galàxia també es mou. Mareig em dóna el pensar a quina velocitat m'estic movent! Observa que ni la grandària ni la forma dels objectes varien amb aquests moviments. Aquestes transformacions que mantenen la forma i la grandària són els moviments o isometries que estudiarem en aquest capítol.

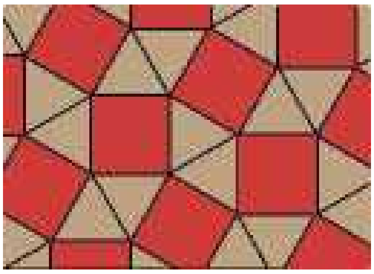
Analitzar el que ens rodeja amb ulls matemàtics ens ajuda a comprendre més i més coses. Aprendre a mirar les torres, aqueix reflectisc sobre l'aigua d'un palau de l'Alhambra, els mosaics... o els tapaboques dels cotxes, els animals i els objectes quotidians. Tots ells amaguen moltes matemàtiques: moltes transformacions geomètriques. Estudiarem les simetries, els girs i les translacions i les analitzarem al nostre entorn.

1. TRANSFORMACIONS GEOMÈTRIQUES

Moltes decoracions es fan repetint un motiu. Als mosaics de l'Alhambra, a les reixes, a les randes i les greques, als rosetons de les esglésies… en totes parts pots veure dissenys fets mitjançant un altre més senzill. En observar un edifici pots veure que de vegades està compost per algun tros que s'ha anat desplaçant, o girant, o trobant el simètric.

Imagina que estàs manipulant un mapa en un mòbil amb els dos dits: Pots desplaçar-te, girar el mapa, ampliar-lo, reduir-lo... però el mapa sempre és bàsicament el mateix. Aquestes manipulacions són "transformacions geomètriques", perquè mantenen les propietats geomètriques més bàsiques dels objectes: longituds, angles, àrees, volums, o la proporció entre les longituds, la forma…

1.1. Isometries



Isometries

Al mosaic del marge tots els quadrats són iguals i també són iguals tots els triangles.

A les transformacions geomètriques que ens porten d'un quadrat a un altre (o d'un triangle a un altre) que mantenen la forma i la grandària les anomenem isometries o moviments.

La paraula *isometria* prové del grec: Iso = Igual. Metria = Mesura. Significa per tant: *La mateixa mesura*.

A l'exemple del mapa, sempre que no faces zoom, estaràs usant una isometria.

Les **isometries,** (**moviments** o **congruències**) són transformacions geomètriques que conserven angles i distàncies (encara que no tenen per què conservar l'orientació dels angles).

Isometries al pla són les **translacions**, els **girs** i les **simetries**.

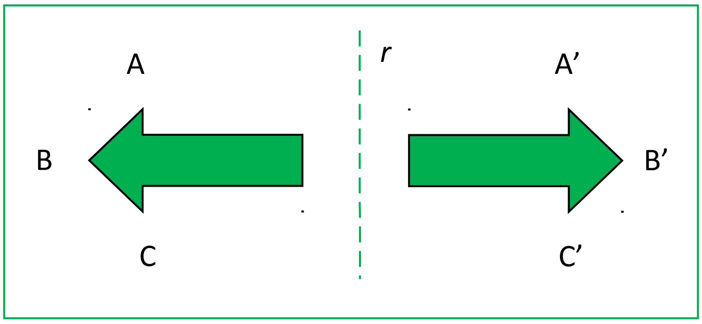
Activitats proposades

1. Al teu quadern dibuixa un triangle. Calca'l i copia la figura calcada novament al teu quadern. Mesura tots els costats de les figures homòlogues. Mesuren el mateix? Mesura tots els seus angles. Mesuren el mateix?
2. Dibuixa al teu quadern una lletra B i fes un disseny amb ella, traslladant-la, girant-la o dibuixant lletres B simètriques.

1.2. Isometries directes i inverses

Activitats resoltes

- A la figura del marge observa que una fletxa es transforma en l'altra mitjançant la simetria d'eix *r*. L'angle *ABC*, és igual a l'angle *A'B'C'*? Tenen la mateixa amplitud, que en ambdós és de 90º, però la seua orientació és distinta. Mentres que *ABC* gira en el sentit de les agulles del rellotge, és a dir, té sentit negatiu, mesura –90º, *A'B'C'* gira en el sentit contrari a les agulles del rellotge, per la qual cosa el seu sentit és positiu i mesura +90º.



Entre les isometries hi ha dos tipus de transformacions, les que conserven els angles (la seua amplitud i el seu sentit) que s'anomenen isometries **directes**, i les que conserven l'amplitud dels angles però canvien el seu sentit, que s'anomenen isometries **inverses**.

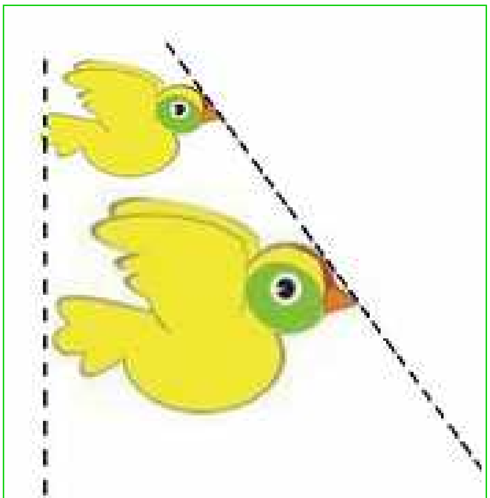
- Les translacions i els girs al pla són isometries directes. Les simetries són isometries inverses.
- Les teues mans són simètriques. Són iguals. Però, les pots superposar? I els teus peus? La simetria és una isometria inversa.
- Imagina el mapa fet sobre plàstic transparent: Si volteges el mapa sobre la taula, les longituds i angles es mantenen (és una isometria) però ara no podries col·locar la ciutat de València d'aquest nou mapa, sobre la ciutat de València del mapa original, per més que el mogueres mai et podrien coincidir. És una isometria inversa.

Observació:

Uns autors denominen moviments a les isometries, i altres estimen que si movent les mans mai podrem superposar-les, les isometries inverses no han d'anomenar-se moviments.

1.3. Semblances

Si fas zoom al mòbil amb els dos dits en el mapa, les longituds canvien, així que no és una isometria, però el mapa continua sent el mateix: els angles i els seus sentits sí que es conserven, i les proporcions entre les mesures també (el carrer que era el doble de llarga que una altra ho segueix sent-ho). Aquests canvis d'escala es denominen "semblances".


Semblança. Homotècia

Les figures del marge són **semblants**. És la mateixa imatge encara que ampliada. Es manté la mateixa proporció en totes les direccions. Es manté la forma, però no la mateixa grandària. A aquestes transformacions les anomenem **semblances**, o si tenen una determinada posició: **homotècies**.

En una semblança les figures homòlogues tenen els angles iguals i els costats proporcionals.

Exemple

- Quan fas zoom en una foto amb el mòbil estàs fent una homotècia. En posar els dos dits sobre la pantalla defineixes dos punts: l'origen *O* seria el punt just entre els teus dos dits i no es mourà en fer zoom, i el punt *P estaria* en el teu primer dit. En moure aqueix dit aquestes definint el tercer i últim punt *P'* i el mòbil àmplia la foto perquè el punt *O* quede fix i *P* s'estire fins a *P'*. És una homotècia directa.

Les homotècies tenen un centre d'homotècia, *O*, i un punt *P* es transforma per una homotècia en el punt *P'* que està a la recta *OP*, si es verifica que: ***OP'*** = *r*·***OP*** on *r* és un nombre anomenat **raó d'homotècia**.

Activitats proposades

3. Al teu quadern dibuixa una lletra b minúscula, i a continuació una altra lletra b minúscula el doble de gran. Com són les seues longituds i els seus angles? És una semblança?

4. Dibuixa ara una lletra d minúscula. És semblant a la lletra b anterior?

1.4. Composició de transformacions geomètriques

Exemple:

Observa com s'ha construït aquest bell mosaic de l'Alhambra:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195378_am_1Alhambra1.swf

S'ha analitzat buscant la cel·la unitat, (un quadrat format per quatre quadrats) i el motiu mínim (la mitat d'un d'aqueixos quadrats). En el motiu mínim, un triangle rectangle isòsceles, s'ha dibuixat una senzilla poligonal. Se li han aplicat distintes isometries: Una simetria d'eix la hipotenusa. Al motiu format per l'inicial i el seu simètric se li han aplicat quatre girs de 90º. S'ha tornat a girar el conjunt. S'ha donat color. S'ha traslladat horitzontalment i verticalment.

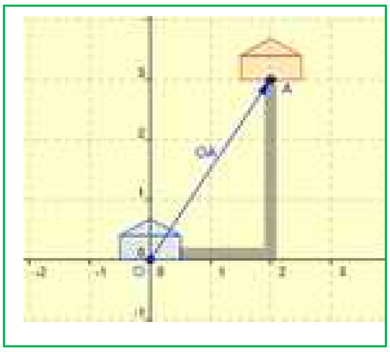
Quan apliquem diverses transformacions, estem component transformacions geomètriques.

Activitats proposades

5. Al teu quadern marca una trama formada per quadrats de dos quadradets de costat. En un quadradet fes un gargot, una poligonal, una línia corba… Dibuixa la simètrica prenent com a eix de simetria un costat del quadrat. Dibuixa la figura simètrica del conjunt obtingut prenent com a eixos sempre els costats de la trama inicial. Pinta la figura obtinguda. Trasllada-la horitzontalment i verticalment.

2. TRANSLACIONS

2.1. Vectors



Si Susana està en sa casa i vol anar a casa de Nadia, que viu 2 carrers A l'Est i 3 carrers al Nord, el trajecte que ha de fer és el que en la figura està dibuixat en gris.

Anomenem *"O"* a la posició de la casa de Susana, i *"A"* a la posició de la casa de Nadia. Si Susana tinguera un helicòpter podria anar directament en línia recta i seguiria la direcció *OA*. Ho representem amb una fletxa i es denomina vector fix.

Un vector fix ***OA*** és un segment orientat amb origen en el punt *O* i extrem al punt *A*. Té una direcció, la de la recta, un sentit, des de *O* fins *A*, i una longitud, a la que anomenem mòdul.

Un **vector fix *OA***, **d'origen** en *O* i **extrem** al punt *A*, es caracteritza per:

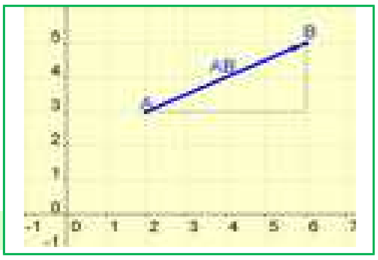
El seu **mòdul**, que és la longitud del segment *OA* i que s'escriu $|OA|$.

La seua **direcció**, que és la recta que conté al segment.

El seu **sentit** que va des de l'origen *O* fins a l'extrem *A*.

Les coordenades o components d'un vector vénen determinades pel seu origen i el seu extrem.

Exemple:



- Si coneixem les coordenades del punt origen i del punt final podem calcular les coordenades del vector. Observa el dibuix del marge i comprova que si *A* (2, 3) i *B* (6, 5) les coordenades del vector fix ***AB*** són ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a*, *b*) i *B* (*c*, *d*) aleshores ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

El mòdul d'un vector es calcula utilitzant el Teorema de Pitàgores. Així, el vector de coordenades ***u*** =(*x*,*y*) té de mòdul: $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$

Activitats proposades

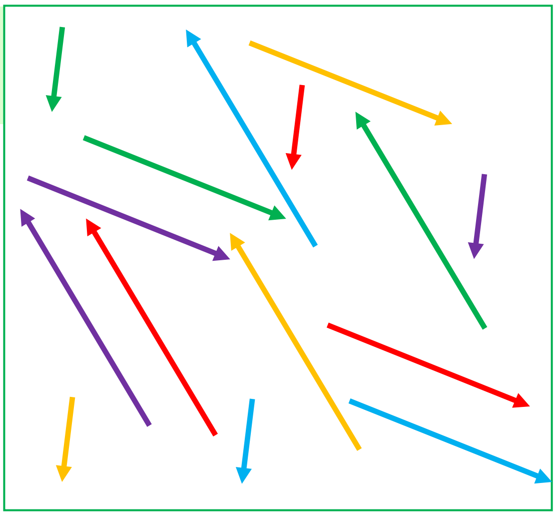
6. Dibuixa al teu quadern els punts de coordenades *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) i *C* (2, –3). Troba les coordenades dels vectors fixos ***AB***, ***AC***, ***BC***, ***CA*** i ***CB***. Comprova al teu dibuix que aqueixes són les seues coordenades.

7. El vector fix ***AB*** té de coordenades (4, 2), calcula les coordenades del seu origen *A* sabent que les coordenades del seu extrem *B* són (–1, 1). Representa'l gràficament.

8. Les coordenades de *A* són (2, 3) i les del vector fix ***AB*** són (4, –2). Calcula les coordenades del punt *B*. Representa'l gràficament.

Tots els segments orientats o vectors fixos que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, tenen les mateixes coordenades, aleshores es diu que són el mateix vector lliure, i podem usar-lo en diferents punts origen.

Dos vectors fixos són **equipol·lents** quan tenen el mateix mòdul, direcció i sentit, i per tant tenen les mateixes coordenades.



Tots els vectors que són equipol·lents es diuen que són un **vector lliure**, i cada un dels seus vectors fixos, un **representant** del vector. Al vector lliure l'identifiquem per les seues coordenades.

Activitats proposades

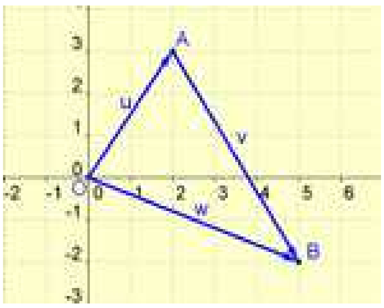
9. Anomena als vectors fixos de la figura i indica quins són representants d'un mateix vector lliure.

10. Dibuixa en el teu quadern quatre vectors equipol·lents al vector fix amb origen en *A* (–3, 4) i extrem *B* (5, 0), amb orígens als punts *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4,0) i *F* (–2, –5).

11. Dibuixa al teu quadern els punts *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) i *G* (2, –4). Amb els vectors fixos d'origen i extrem en els dits punts, indica quins d'ells són equipol·lents.

12. Amb els punts de l'exercici anterior, calcula les coordenades dels vectors fixos ***DE*** i ***FG***. Com són? Són dos representants d'un mateix vector lliure?

Activitats resoltes



- El vector fix ***OA*** = ***u*** que indica el trajecte de Susana té de coordenades (2, 3). Si després Susana vol desplaçar-se a casa d'una altra amiga que està a 3 carrers a l'Est i 5 carrers al Sud farà un desplaçament de vector: ***v*** = (3, –5). En conjunt Susana ha fet un desplaçament que és la suma dels dos desplaçaments anteriors. Finalment està al punt:

$$(2, 3) + (3, -5) = (5, -2).$$

Es troba 5 carrers a l'Est i dos carrers al Sud de sa casa.

Se **sumen** dos vectors, sumant els seues components: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *b*, *c* + *d*)**

Es multiplica un vector per un nombre, multiplicant les seues components: ***r*·(*a*, *b*) = (*r*·*a*, *r*·*b*)**

Activitats proposades

13. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència cartesià i assenyala en ell els punts de coordenades: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) i *C* (2, –5). a) Anomena **u** al vector fix ***AB*** i indica les seues components. b) Anomena **v** al vector fix ***BC*** i indica les seues components. c) Calcula les components del vector **w** = **u** + **v**. d) Representa al teu quadern als vectors lliures **u** i **v** amb origen en l'origen de coordenades i representa també al vector suma **w**. Observa que està sobre la diagonal del paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.

14. Dibuixa al teu quadern el punt *A* (1, 2), dibuixa ara el vector **u** = (2, 3) amb origen en *A*, i el vector **v** = (4, –1) també amb origen en A. Calcula les coordenades del vector suma **u** + **v**, i dibuixa'l amb origen en *A*. El resultat coincideix amb el que has obtingut gràficament? Observa que el vector suma és la diagonal d'un paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.

15. Efectua les següents operacions amb vectors:

a) $3\cdot\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot(4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)] d) 9'3·(2, 6) + (3'7, 5'2)

16. Efectua les següents operacions amb els vectors ***u*** = (–5, 6), ***v*** = (4, –7) i ***w*** = (3, 4):

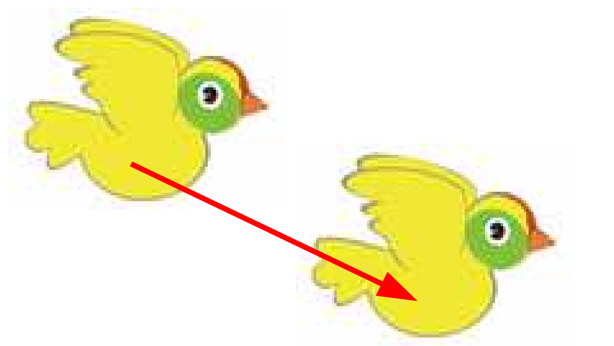
a) 2***u*** – (***v*** + ***w***) b) 3***w*** – 2***u*** + ***v*** c) 2(***u*** + ***v***) – 3***w***

2.2. Translacions al pla

Un cotxe es mou per la ciutat des del domicili de l'amo fins al seu treball, i s'ha traslladat 4 carrers cap al nord i 3 carrers cap a l'est.

És possible conèixer una **translació** si sabem el punt d'origen *A* i el de destí *B*. Aquests dos punts, *A* i *B*, determinen el **vector de translació *AB***. ***AB*** és un vector fix, representant del vector lliure ***u*** de les mateixes coordenades.

Una figura i la seua traslladada.

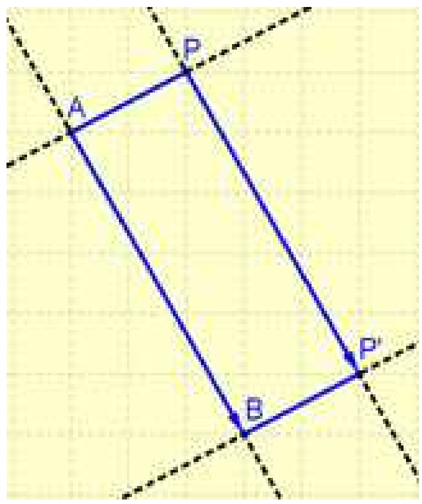


Per a definir una **translació** basta conèixer el seu **vector de translació**.

Si la translació de vector lliure ***u = AB*** transforma un punt del pla *P* en un altre *P'*, aleshores ***AB*** i ***PP'*** tenen el mateix mòdul, direcció i sentit. Són el mateix vector lliure. Tenen les mateixes coordenades.

Si amb la translació de vector ***AB*** traslladem el punt *P* fins al punt *P'* aleshores *ABP'P* és un **paral·lelogram**, i ***AB***= ***PP'***

Per a traslladar una figura es traslladen els punts que la determinen. Com en una translació tots els punts es mouen sobre rectes paral·leles i una mateixa distància, es pot usar l'esquadra i el cartabó per a traçar les rectes paral·leles i traslladar sobre ella alguns punts de la figura, per al que s'ha de mesurar sempre la mateixa distància sobre la recta.



Propietats de les translacions

Els paral·lelograms tenen, com saps, els seus costats iguals dos a dos i paral·lels dos a dos.

La recta *AB* és paral·lela a la recta *PP'*, i la recta *AP* és paral·lela a la recta *BP'*. Els segments *AB i PP'* són iguals, el mateix que *AP i BP'*.

Per aquest motiu, entre una figura i la seua traslladada es **conserven totes les distàncies i tots els angles**.

La translació és una **isometria**, un moviment **directe**.

Identitat:

La translació de vector de translació nul, **0** = (0, 0) deixa tots els punts invariants, és a dir, no trasllada res, i es denomina també translació identitat o simplement: **identitat**.

Punts invariants:

Un **punt invariant** és el que es transforma en si mateix. Una **recta invariant** és la que es transforma en ella mateixa, encara que els seus punts no siguen invariants. Una **recta invariant de punts invariants** és un cas particular de recta invariant en què cada un dels seus punts és un punt invariant.

Quins punts deixa invariants una translació? Observa que excepte la translació identitat, (que deixa tot el pla invariant), una translació no deixa a cap punt invariant.

Activitats proposades

17. Dibuixa al teu quadern una figura i utilitza esquadra i cartabó per a traslladar-la 5 centímetres cap a la dreta.

18. Dibuixa al teu quadern una figura. (Si no se t'acut cap altra, dibuixa la lletra G). Col·loca damunt un paper vegetal i calca-la. Desplaça en línia recta el paper vegetal i torna a calcar la figura. Les dues figures que has obtingut, tenen totes les seues mesures, tant longituds com angles, iguals? Traça les rectes que uneixen parells de punts corresponents, com són aqueixes rectes? Quina trajectòria han seguit els punts en el desplaçament?

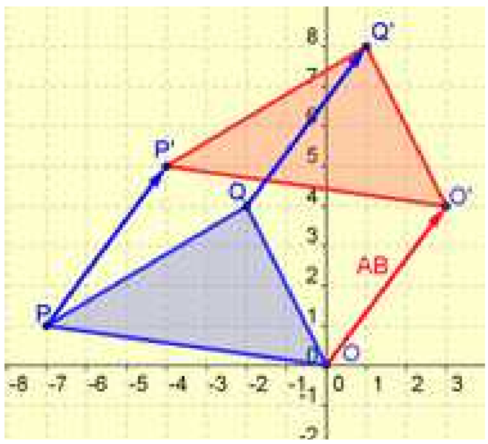
Un fris a Cambotja

19. Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una translació una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

20. Observa aquest fris d'un temple de Cambotja. És una figura que es repeteix per translació. Quina direcció té el vector de translació? D'on a on aniria?

2.3. Coordenades

Per a treballar amb translacions pots utilitzar les coordenades:



Activitats resoltes

- Als punts *P* (–7, 1), *Q* (–2, 4) i *O* (0, 0) se'ls aplica una translació de 3 unitats cap a la dreta i 4 unitats cap amunt de manera que el seu vector de translació és:

$$\boldsymbol{AB} = (3, 4)$$

Aleshores les coordenades **dels punts traslladats** s'obtenen sumant a l'abscissa del punt que volem traslladar l'abscissa del vector de translació, i a l'ordenada del punt, l'ordenada del vector de translació:

Per a traslladar P (–7, 1) segons el vector $\boldsymbol{AB}$ = (3, 4) es calcula –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, per la qual cosa el seu punt traslladat és: P' (–4, 5).

En traslladar Q (–2, 4) s'obté Q' (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

En traslladar O (0, 0) segons el vector $\boldsymbol{AB}$ = (3, 4) s'obté O' (3, 4).

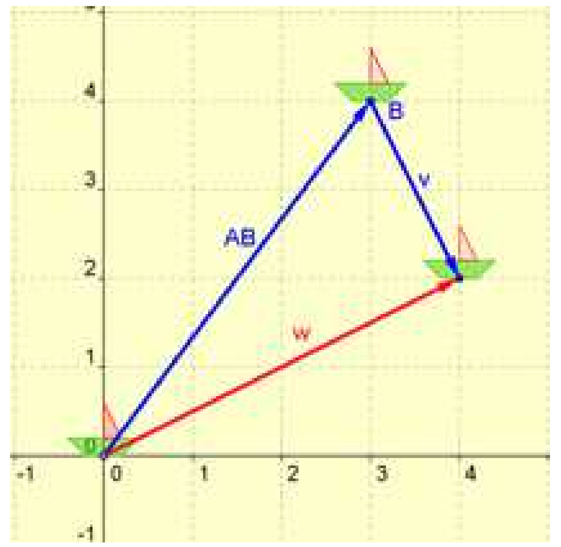
Activitats proposades

21. Utilitza paper quadriculat i dibuixa al teu quadern una lletra F de 2 quadradets d'alta i 1 quadradet d'ampla i aplica-li la translació de vector (2, 5).

22. Dibuixa al teu quadern uns eixos cartesians i el triangle de vèrtexs A (3, 1), B (3, 3) i C (1, 3). Aplica-li la translació de vector (4, 2): 4 unitats a la dreta i 2 unitats cap amunt. Quines són les coordenades dels punts traslladats A', B' i C'?

2.4. Composició de translacions

Si trasllades una figura mitjançant una translació de vector **u**, i després tornes a traslladar-la mitjançant una altra de vector **v**, pots comprovar que pots anar de la primera figura a l'última mitjançant una única translació. El vector de translació d'aquesta última translació pots obtindre'l sumant els vectors de translació de les dues primeres: **u** + **v**.



Activitats resoltes

- Traslladem mitjançant el vector de translació $\boldsymbol{AB}$ = (3, 4), i després mitjançant el vector de translació **v** = (1, –2). La composició d'ambdues translacions és una altra translació de vector de translació **w**:

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{AB} + \mathbf{v} = (3 + 1, 4 - 2) = (4, 2)$$

Activitats proposades

23. Les randes de la imatge s'han dissenyat a partir d'un motiu que s'ha anat traslladant al llarg. Dibuixa al teu quadern un motiu semblant a algun de la figura, una flor, una V, un zig-zag… i trasllada'l component diverses translacions d'un mateix vector de translació. Has dibuixat un fris.

Translació inversa:

Activitats resoltes

- Si hem traslladat una figura 4 unitats cap a la dreta i 3 cap amunt, com hem de traslladar-la perquè ocupe la posició inicial? Cal traslladar-la amb el vector: (–4, –3).

Diem que aquestes translacions són l'una inversa de l'altra.

En general, la translació **inversa** de la de vector de translació **v** = (*a*, *b*) és la translació de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Activitats proposades

24. Trasllada una figura (per exemple una lletra L) mitjançant la translació de vector (–4, 5) i repeteix el procés amb la figura traslladada emprant el vector (3, –6). Quin moviment utilitzes per a anar de la primera figura a l'última? És una translació? Quin és el seu vector?

25. El mosaic del marge està confeccionat utilitzant un motiu mínim que es desplaça per tot el mosaic. Si utilitzes com a motiu mínim l'estrela de sis puntes, sense tindre en compte els canvis de color, determina els vectors de translació de dues translacions, una horitzontal i una altra vertical, que mitjançant composicions et permeten tindre la resta del mosaic. Observa que en sumar la translació horitzontal amb la vertical obtens translacions obliqües. Dibuixa al teu quadern una figura i trasllada-la de forma semblant per a tindre un mosaic.

2.5. Translacions a l'espai

Les translacions a l'espai tenen les mateixes propietats que les translacions al pla.

Imagina un avió que es mou. L'avió es trasllada.

Una translació a l'espai, igual que una translació al pla, és el moviment que consisteix a lliscar un objecte segons una direcció. La translació està determinada per la distància que es trasllada, la direcció de la recta sobre la qual es trasllada, i pel seu sentit. Per tant:

Per a determinar una translació a l'espai basta conèixer el seu **vector de translació**. L'única diferència és que ara el vector de translació té tres components : **AB** = (a , *b*, *c*).

Exemple:

- Per a traslladar el punt *P* (2, 4, –1) mitjançant la translació de vector ***AB*** = (–3, 5, 2), simplement sumem les coordenades:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La translació a l'espai no deixa cap punt invariant.

Activitats proposades

26. En edificació s'utilitzen molt les translacions. Pensa en les finestres d'un edifici i tria una. Pots obtindre una altra distinta mitjançant translació? Fes un dibuix que represente aquesta situació.

27. En la fatxada d'aquesta torre mudèjar de Terol podem veure distintes translacions. En la part superior hi ha dos conjunts de quatre finestretes. U és traslladat de l'altre. I cada finestreta forma a les altres quatre mitjançant una translació. En continuar baixant, els dos arcs es traslladen formant altres dos arcs. Observa, en aquest cas totes les translacions tenen un vector de translació horitzontal. Continua descrivint les translacions que veus al disseny d'aquesta torre.

3. GIRS O ROTACIONS

3.1. Girs al pla

Són les 4 en punt. Si retardem el rellotge 15 minuts, la maneta dels minuts ha girat un angle de 90º en sentit positiu.

Per a determinar un **gir** o **rotació** és necessari conèixer un punt, *O*, el **centre de gir**; un **angle** α i el sentit de gir d'aqueix angle.

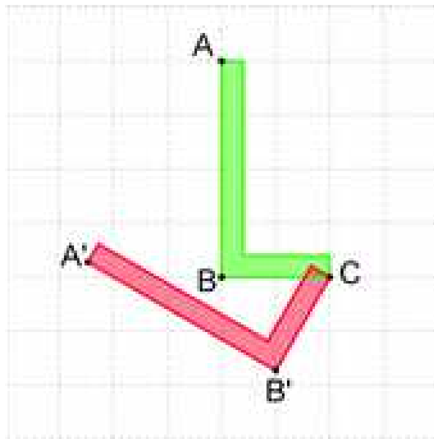
Hi ha l'acord de considerar *positiu* (+) al sentit contrari de les agulles d'un rellotge i sentit *negatiu* (–) el de les agulles del rellotge.

Si *A'* és el punt girat de *A*, amb centre *O* i angle α, aleshores: $|OA| = |OA'|$ i el segment *OA* forma un angle α amb *OA'*.

Per a girar una figura es giren els punts que la formen.

Exemple:

- Si han passat 15 minuts la maneta dels minuts ha girat –90º (90º en sentit negatiu), quan passe mitja hora haurà girat –180º, i si només passen 10 minuts haurà girat –60º.



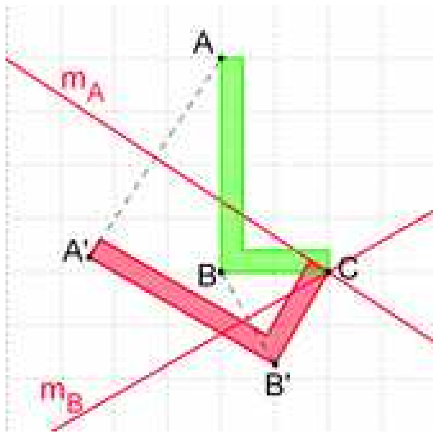
Activitats resoltes

Per a dibuixar rotacions al quadern pots utilitzar un transportador d'angles i un compàs.

- Per a girar la lletra L segons un gir de centre *C* i angle 60º, prenem diversos punts de la figura, en aquest cas els punts *A*, *B* i *C*. Amb el compàs fent centre en *C* tracem arcs, i sobre ells, utilitzant el transportador, mesurem 60º. Obtenim els punts *B'* i *A'*.

La nova lletra L manté les distàncies: *BC* = *B'C* i *AB* = *A'B'*. També manté els angles: l'angle *ABC* és recte, i el nou angle *A'B'C* també és un angle recte i amb la mateixa orientació que l'anterior. En general:

Els girs mantenen les distàncies, per la qual cosa són **isometries** o moviments. Mantenen els angles i el sentit dels angles, per la qual cosa són **moviments directes**.



Per a saber si dues figures són dues figures girades tracem les mediatrius dels punts corresponents i totes elles han de tallar-se en un mateix punt, el centre de gir. Amb el transportador d'angles podem aleshores mesurar l'angle de gir.

Activitats resoltes

- Tracem el segment *BB'* i la seua mediatriu. Tracem el segment *AA'* i la seua mediatriu. Ambdues mediatrius es tallen al punt *C*, que és el centre de gir. L'angle que formen les mediatrius és de 60º.

Activitats proposades

28. Dibuixa al teu quadern un punt *O* i un altre punt diferent *A*. Gira al punt *A* amb centre en *O* un angle de 30º en sentit positiu i denomina A' al punt girat.

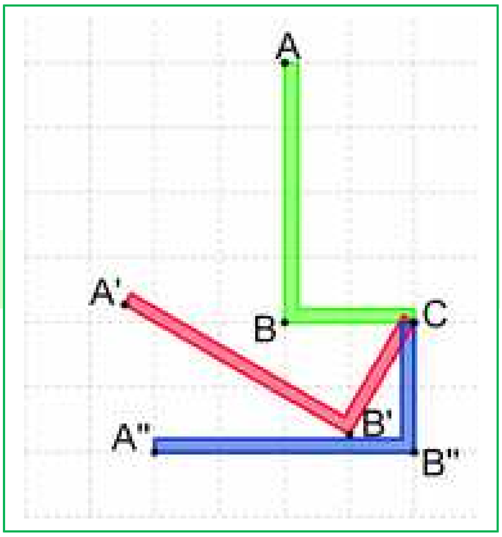
29. Dibuixa al teu quadern un punt *O* i dos segments, un *OA* que passe per *O*, i un altre *BC* que no passe per *O*. Dibuixa els segments girats *OA'* i *B'C'* del gir de centre *O* i angle 60º.

30. Dibuixa al teu quadern el triangle de vèrtexs *A* (4, 2), *B* (3, –2) i *C* (5, 0). Dibuixa el triangle que s'obté en girar-lo amb centre a l'origen de coordenades un angle de 90º en sentit positiu. Quines són les coordenades dels vèrtexs *A'*, *B'* i *C'* del triangle girat?

31. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant un gir, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

3.2. Composició de girs. Elements invariants.

Exemple:



- Si girem la lletra L amb centre *C*, 60º en sentit positiu i després, també amb centre *C*, 30º en sentit positiu, la figura obtinguda està girada respecte a la primera 90º amb el mateix centre de gir. En general:

La **composició** de dos girs del mateix centre és un altre gir del mateix centre i d'angle, la suma dels angles de gir.

- Si una vegada girada nostra lletra L 30º en sentit positiu, la girem, amb el mateix centre de gir, 30º en sentit negatiu, què ocorre? En efecte, hem tornat a la posició inicial. Es diuen que són girs inversos i que en compondre'ls tenim la identitat, ja que no ens movem.

Un gir de centre *O* i angle α és el **gir invers** al gir del mateix centre *O* i angle $-\alpha$.

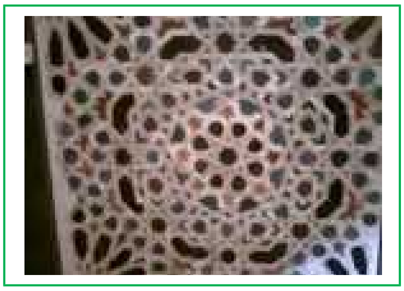
Observa que la composició de girs de distint centre no és commutativa, perquè depèn de l'orde en què fem els girs.

Activitats resoltes

- Pensem ara en quins elements deixa invariants un gir de centre *O* i angle de gir que no siga 0º ni 180º. Deixa alguna recta invariant? Hi ha alguna recta del pla que no es moga? No, totes giren. No hi ha rectes invariants. I punts? Algun punt del pla no es mou en girar? Si, el centre de gir queda invariant. El centre de gir es transforma en si mateix.

En un gir de centre *O* i angle diferent de 0º i de 180º, l'únic element **invariant** és un punt, el **centre de gir.**

Centre de gir: Centre de gir és un punt d'una figura plana tal que en girar un cert angle, la figura coincideix amb si mateixa.



Observa que el rosetó del centre d'aquest mosaic té un **centre de gir** de 60º. Si ho girem 60º, torna a coincidir. També si ho girem 120º o 180º o 240º o 300º.

3.3. Simetria central al pla. Centre de simetria

La simetria central de centre *O* al pla és un gir d'aqueix centre *O* i angle 180º. Al pla, la simetria central és, per tant, un moviment que ja coneixem. Observa que la simetria central és, per tant, un moviment directe.

Si *P' és* el simètric de *P* en la **simetria central** de centre de simetria *O*, aleshores, *O* és el punt mitjà del segment *PP'*.

Activitats resoltes

- Dos punts *P* i *P' són* **simètrics respecte de l'origen de coordenades** si tant les seues abscisses com les seues ordenades són oposades. Així, el simètric respecte de l'origen del punt (–2, 4) és el punt (2, –4).
- Observa amb aquesta animació com es construeix el simètric, respecte a una simetria central de centre (2, 3), d'un polígon:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183284_am_1.swf

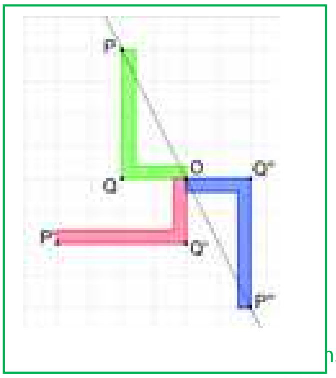
El simètric del punt *A* (8, 1) és el punt *A'* (–4, 5). Has vist que s'ha traçat la recta *OA*. Amb centre en *O* i radi *OA* es traça una arc de circumferència que talla a la recta *OA* en A'. El mateix per a obtindre el simètric dels altres vèrtexs del polígon. Si els altres vèrtexs són *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) i *E* (7, 6), quins són els seus simètrics respecte a la simetria central de centre (2, 3)?

- Què elements deixa invariants una simetria central? Deixa invariant el centre de simetria i totes les rectes que passen pel centre de gir.

Centre de simetria: Un punt *O* és un centre de simetria d'una figura si tot punt d'ella té com transformat per la simetria central de centre *O*, un altre punt de la figura. La simetria central transforma la figura en ella mateixa.

Exemple:

- El mosaic de l'Alhambra del marge té simetria central.
- El cercle, el quadrat, el rectangle tenen centre de simetria, no obstant això, un triangle mai té centre de simetria.
- Els polígons regulars amb un nombre parell de costats tenen centre de simetria.
- El pentàgon regular, no el té.



Activitats resoltes

- Apliquem a la lletra L un gir de 90º i després un altre gir també de 90º. La composició d'un gir de 90º, amb un altre del mateix centre i 90º, és un gir de 180º. El punt *P* primer es transforma en *P'* i després en P''. Si unim cada punt de la figura amb el seu transformat per la composició dels dos girs, la recta *OP* es transforma en la OP”, que és la mateixa recta. Els punts *Q*, O i *Q’’* també estan alineats. Les rectes que passen pel centre de simetria són invariants.

Activitats proposades

32. Dibuixa al teu quadern dos punts qualssevol *P* i *P’*. Troba el seu centre de simetria.

33. Què ocorre en aplicar un gir de 60º a una figura? Hi ha rectes invariants? I en un gir de 180º? Les rectes que passen pel centre de gir, en quines rectes es transformen? I amb un gir de 0º? I amb un gir de 360º?

34. Dibuixa un triangle *ABC* i el seu simètric *A’B’C’* respecte un punt *O*. Com són els seus costats? Són iguals? I els seus angles? Es manté el sentit dels angles? Comprova com és l’angle *ABC* i l’angle *A’B’C’*. És un moviment directe?

35. Analitzarem les lletres majúscules. Indica quins de les següents lletres no tenen simetria central i quins si la tenen, indicant aleshores el seu centre de simetria: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, busques un punt tal que la simetria central de centre aqueix punt deixe invariant a la lletra.

3.4. Girs a l’espai

En obrir o tancar una porta, aquesta gira, les patilles de les ulleres giren, les rodes d’un cotxe giren... Observa que per a determinar un gir a l’espai necessites, a més de l’angle (i el seu sentit), conèixer **l’eix de gir**. Recorda, al pla teníem un centre de gir, un punt, ara un eix de gir, una recta.

Pensa en altres exemples quotidians de girs en l’espai.

Quan gires una porta, canvia el sentit dels seus angles? Naturalment que no. Els girs en l’espai són moviments directes.

- Quins punts es transformen en si mateixos? El gir a l’espai deixa invariants als punts de l’eix de gir.

Eix de gir: Eix de gir d’una figura, a l’espai, és una recta imaginària tal, que en girar la figura un cert angle, coincideix amb si mateixa.

3.5. Simetria central a l’espai. Centre de simetria

Una figura té simetria central si en unir cada un dels seus punts amb el centre s’obté un altre punt de la figura.

Si *P' és* el simètric de *P* en la simetria **central** de centre *O*, llavors, *O* és el punt mitjà del segment *PP'*.

La simetria central a l’espai no és un gir. A més només deixa un punt invariant, el centre (no una recta)

Centre de simetria: Un punt *O* és un centre de simetria d’una figura si tot punt d’ella té com transformat per la simetria central de centre *O*, un altre punt de la figura.

Exemples:

- L'esfera, el cub tenen centre de simetria, el tetraedre, no.
- El cilindre té centre de simetria. El con no té centre de simetria.
- Un prisma regular té centre de simetria. Una piràmide, no.

Activitats proposades

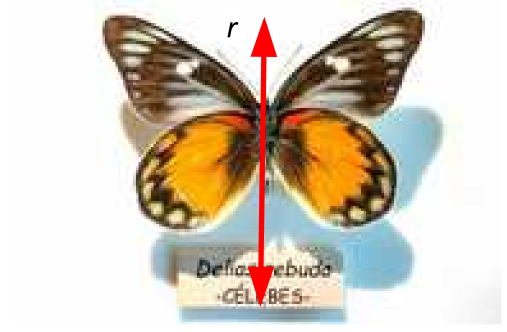
36. Escriu cinc exemples d'objectes a l'espai que giren.

37. Mitjançant un gir a l'espai, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

4. SIMETRIES

4.1. Simetries axials. Eix de simetria



La palometa de la figura és simètrica respecte de l'eix de simetria *r*.

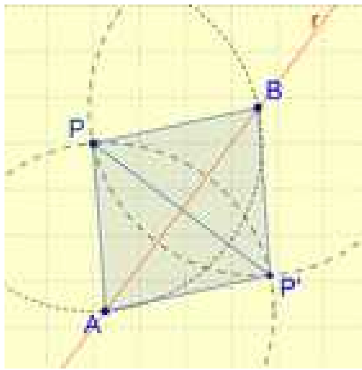
Per a determinar una simetria (simetria axial) és necessari conèixer **l'eix de simetria**.

Si *P'* és el simètric de *P* respecte de la simetria **axial** d'eix *r*, llavors *r* és la **mediatriu** del segment *PP'*.

La simetria axial conserva totes les longituds i la magnitud dels angles, però canvia el sentit d'aquests. Per això no és possible fer coincidir una figura amb la seua simètrica (llevat que les pròpies figures siguen simètriques).

La simetria és per tant un moviment invers.

Activitats resoltes



- Per a trobar el simètric del punt *P* respecte de l'eix de simetria *r*, utilitza un compàs i fent centre en *P* amb radi prou gran traça un arc de circumferència que talle a *r* en dos punts, *A* i *B*. Sense variar de radi i amb centre en *A* i en *B* traça altres dos arcs que es tallen en *P'*, simètric de *P* respecte a *r*. Observa que *PAP'B* és un rombe perquè els seus quatre costats són iguals, per la qual cosa sabem que les seues diagonals són perpendiculars i es tallen al punt mitjà.
- En l'animació pots veure com es dibuixa el punt simètric d'un altre utilitzant regla i esquadra:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/183282_am_1Punto_simetrico.swf

  Tenim l'eix de simetria i volem trobar el simètric del punt *P* (4, 1). Dibuixem el punt *P* (4, 1) en un sistema de coordenades i prenem l'esquadra. Recolzem l'esquadra sobre l'eix de simetria i fins que toque al punt. Tracem una recta auxiliar, perpendicular a l'eix i que passe pel punt *P*. Mesurem la distància del punt a l'eix i portem aqueixa longitud sobre la recta auxiliar, i ja tenim el punt simètric.
- També pots obtindre figures simètriques doblegant un paper. La part per on dobleguem és l'eix de simetria. Si dibuixes una figura, doblegues el paper i la calques obtens la figura simètrica.
- Una altra forma és doblegar un paper i retallar una figura: s'obté una figura simètrica respecte a la part per on dobleguem.

Si dibuixem en paper quadriculat el triangle de vèrtexs *A* (–3, 2), *B* (–5, 4) i *C* (–4, 7) i trobem el simètric respecte a l'eix d'ordenades, les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric són: *A'*(3,2), *B'* (5, 4) i *C'* (4, 7). En general, el simètric de *P* (*x*, *y*) respecte a l'eix d'ordenades és *P'* (–*x*, *y*).

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

Si dibuixes el triangle simètric *d'ABC* respecte a l'eix d'abscisses, observa que les coordenades dels seus vèrtexs són: A' (–3, –2), B' (–5, –4) i C' (–4, –7). En general, el punt simètric de *P* (*x*, *y*) respecte a l'eix d'abscisses és *P'* (*x*, –*y*).

Dos punts **simètrics respecte de l'eix d'ordenades** tenen la mateixa ordenada i les seues abscisses són oposades. Dos punts **simètrics respecte de l'eix d'abscisses** tenen la mateixa abscissa i les seues ordenades són oposades.

Punts invariants:

En una simetria, els punts de l'eix de simetria es transformen en si mateixos.

La simetria axial deixa invariants els punts de l'eix de simetria. L'eix de simetria és una recta invariant de punts invariants.

- Quins altres elements deixa invariants? Hi ha més punts? Hi ha altres rectes? Observa que les rectes perpendiculars a l'eix de simetria es transformen en si mateixes.

Activitats proposades

38. Dibuixa al teu quadern un eix *r* de simetria oblic, i un punt *P*. Dibuixa el punt P' simètric respecte de *r*. Comprova que la recta *r* és la mediatriu del segment *PP'*. (*Recorda*: La mediatriu d'un segment és la perpendicular pel punt mitjà).

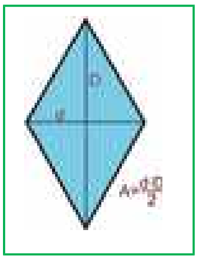
39. Dibuixa al teu quadern dos punts qualssevol *P* i *P'*. Dibuixa l'eix de simetria *r* respecte a què són simètrics.

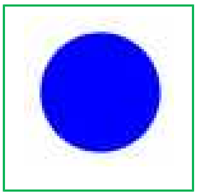
40. Dibuixa en paper quadriculat una lletra L i un eix de simetria vertical. Dibuixa la lletra L simètrica respecte a aqueix eix. Calca una d'elles, i mou el paper de calc per a intentar fer-les coincidir. És impossible, perquè la simetria és un moviment invers.

41. Reprodueix al teu quadern la figura del marge. Dibuixa un eix de simetria oblic i dibuixa la figura simètrica.

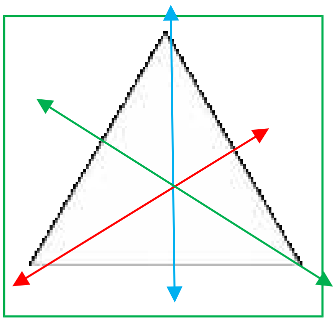
42. Troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'eix d'ordenades del triangle *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). El mateix respecte de l'eix d'abscisses.

Eix de simetria d'una figura:





Si la recta *r* és un eix de simetria d'una figura llavors tot punt d'aqueixa figura té com transformat per la simetria d'eix *r* a un altre punt de la dita figura.



Exemples:

- Un triangle isòsceles té un eix de simetria i un triangle equilàter, tres.
- Un rectangle o un rombe tenen dos eixos de simetria, i un quadrat Quatre.
- Un cercle té una infinitat de eixos de simetria (tots els seus diàmetres).

Activitats proposades

43. Indica quins de les següents lletres majúscules són simètriques, i si ho són, indica si els seus eixos de simetria són horitzontals o verticals: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

44. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant una simetria, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza la resposta.

45. Dibuixa un rectangle *ABCD*. Dibuixa l'eix de simetria que transforma *AB* en *CD*, i l'eix de simetria que transforma *AD* en *BC*.

46. Dibuixa un hexàgon regular i dibuixa els seus eixos de simetria. Quants té? Té 6. Descriu-los.

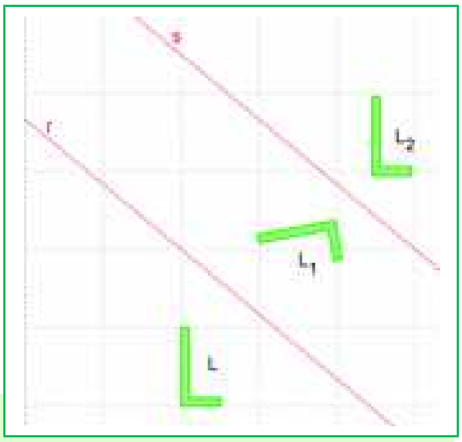
47. Dibuixa un pentàgon regular i els seus eixos de simetria. Quants té? Descriu-los.

4.2. Composició de simetries

Estudiarem ara la composició de simetries. Ja saps que una simetria és un moviment invers. Si canvies el sentit d'un angle i després el tornes a canviar, et queda el sentit original. Per tant la composició de dues simetries no serà un moviment invers sinó un directe.

Vegem-ho primer en un cas particular.

Activitats resoltes

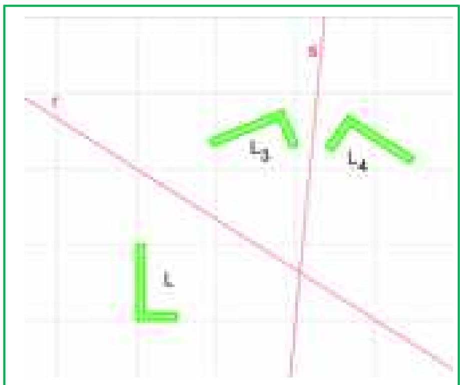


- Tracem dos eixos de simetria, *r* i *s*, paral·lels. Dibuixem una lletra L, i dibuixem la lletra L_1 simètrica de L amb respecte de la recta *r*, i després la lletra L_2 simètrica de L_1 respecte de la recta *s*. Mitjançant quina transformació passem directament de L a L_2? Pot ser una simetria? (Observa que sí es poden superposar L i L_2, per tant és un moviment directe). És un gir? És una translació? Si, és una translació, de quin vector?

La composició de dues simetries d'eixos paral·lels és una translació. És la translació de vector de direcció la recta ortogonal als eixos de simetria, de mòdul el doble de la distància entre ambdós eixos, i de sentit el que va del primer eix al segon.

La composició de simetries **no és commutativa**. Comprova que si a L primer li apliquem la simetria d'eix *s* i després la simetria d'eix *r* obtenim una translació, però el vector de translació és l'oposat al del cas anterior.

- Tracem ara dos eixos de simetria secants, *r* i *s*, i una lletra L. Dibuixem la lletra L_3 simètrica de L respecte a la recta *r*, i dibuixem la lletra L_4 simètrica de L_3 respecte a la recta *s*. Mitjançant quina transformació passem directament de L a L_4? Pot ser una simetria? (Observa que es poden superposar L i L_4, per tant és un moviment directe). És una translació? És un gir? Si, és un gir, de quin centre i de quin angle?



La composició de dues simetries d’eixos secants és un gir. És el gir de centre el punt d’intersecció dels eixos de simetria, d’angle doble del què formen ambdós eixos i de sentit de l’angle, el que va del primer eix al segon.

La composició de simetries **no és commutativa**. Comprova que si a L primer li apliquem la simetria d'eix *s* i després la simetria d’eix *r* obtenim un gir, però l’angle de gir és l’oposat al del cas anterior.

Activitats proposades

48. Reprodueix al teu quadern la figura P del marge.

a) Dibuixa el pardal P’ simètric respecte a l’eix d’ordenades.

c) Dibuixa el pardal P’’ simètric respecte a l’eix d’abscisses.

d) Hi ha alguna simetria axial que transforme P’ en P’’? Hi ha alguna simetria central que transforme P’ en P’’?

e) Si el bec del pardal P tinguera unes coordenades (–2, 5), quines coordenades tindria el bec del pardal P’? I el del pardal P’’?

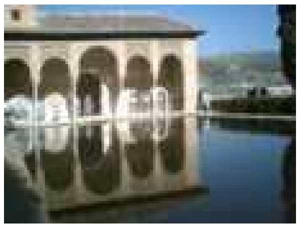
49. Dibuixa al teu quadern dos eixos de simetria paral·lels i una lletra F. Dibuixa la composició d’ambdues simetries a la dita lletra, comprovant que la composició d’elles és una translació i determina el vector de translació.

50. Dibuixa al teu quadern dos eixos de simetria secants i una lletra F. Dibuixa la composició d’ambdues simetries a la dita lletra, comprovant que la composició d’elles és un gir i determina el centre i l’angle de gir.

51. Si apliquem una simetria a una figura, quina transformació hem d’aplicar-li per a obtindre la figura inicial?

52. La composició de dues simetries planes d’eixos secants és un gir. Com han de ser els eixos perquè siga un gir de 180º (o una simetria central)?

4.3. Simetria especular a l’espai. Pla de simetria



Molts mobles són simètrics: moltes taules, moltes cadires… Molts animals són quasi simètrics. Els cotxes, els avions, els trens són simètrics. Si ens mirem en un espill veiem una imatge reflectida que és simètrica de la nostra. Molts edificis són quasi simètrics o tenen elements de simetria.

Per a determinar una simetria en l’espai és necessari conèixer un pla, el **pla de simetria**.

Una simetria a l’espai deixa invariants els punts pertanyents al pla de simetria. Deixa invariant les rectes ortogonals al pla de simetria, i deixa invariant al pla de simetria.

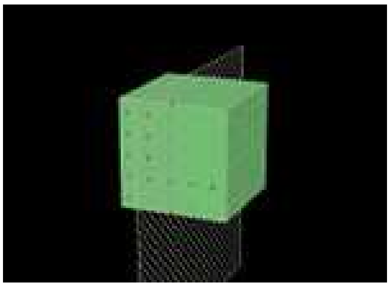
Pla de simetria: El pla de simetria d’una figura és un pla imaginari tal, que tot punt de la figura es transforma per la simetria respecte d’aqueix pla en un altre punt de la dita figura.

La torre amb la porta del marge té un pla de simetria.

Un pla de simetria és com un espill que reflectix exactament un fragment de la figura en l'altre fragment.

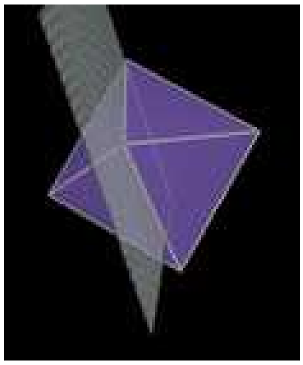
Activitats resoltes

Construeix poliedres regulars, amb cartolina, amb palletes, amb …, per a comprovar el que segueix:



• Analitzem el pla de simetria del cub de la il·lustració del marge. Veiem que passa pels punts mitjans de les arestes. Quants plans de simetria hi ha semblants a aquest? Com el cub té 12 arestes i cada pla passa per 4 hi ha 3 d'aquest tipus. Un altre pla de simetria passa per una diagonal d'una cara, una aresta, una altra diagonal i una altra aresta. Quants hi ha d'aqueix un altre tipus? Com el cub té 12 arestes i prenem 2, hi ha 6 d'aqueix tipus.

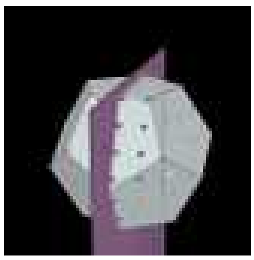
• Busca un eix de gir del cub. Observa que té un eix de gir de 90º que va de centre de cara a centre de cara. Quants eixos de gir té d'aqueix tipus? Comprova que hi ha 3 (6 cares : 2 = 3). Observa que també hi ha un eix de gir de 120º que va de vèrtex a vèrtex oposat. Quants hi ha d'aqueix altre tipus? Com el cub té 8 vèrtexs hi ha 4 d'aquest tipus. Observa que també hi ha un eix de gir de 180º que va de centre d'aresta a centre d'aresta oposada. Quants hi ha d'aqueix un altre tipus? Com el cub té 12 arestes, hi ha 6 d'aqueix tipus. Hi ha simetria central? Observa que sí.



• Analitzarem ara les isometries d'un octaedre. Observa que té centre de simetria, igual que el cub. Plans de simetria: Hi ha plans, com el de la figura, que passen per quatre arestes. Com té 12 arestes hi ha 3 d'aquest tipus. També hi ha plans que passen per l'eix de simetria de les cares. Quants hi ha? Tenim el mateix nombre de plans de simetria que al cub? Sí. El cub i l'octaedre són duals. Si en el cub fixem els centres de les cares i els unim, tenim un octaedre. I si en l'octaedre unim els centres de les cares, tenim un cub. Observa que el nombre de cares d'un cub, 6, coincideix amb el nombre de vèrtexs d'un octaedre, i que el nombre de cares d'un octaedre, 8, coincideix amb el nombre de vèrtexs del cub. I ambdós tenen el mateix nombre d'arestes, 12.

• Busquem ara aqueixos de gir en un octaedre. Té eixos de gir de 90º? Si, van de vèrtex a vèrtex oposat. Hi ha 6 vèrtexs, per tant hi ha 3 eixos de gir d'aquest tipus. Hi ha eixos de gir de 120º, com al cub? Naturalment, van de centre de cara a centre de cara, i com té 8 cares, hi ha 4 d'aquest tipus. I els eixos de gir de 180º? Van, com al cub, de centre d'aresta a centre d'aresta, i hi ha 6.

• L'estudi del tetraedre és més senzill. Comprova que NO té centre de simetria. Els plans de simetria passen per una aresta, l'eix de simetria d'una cara i l'eix de simetria d'una altra. Hi ha 6 arestes, per tant hi ha 6 d'aquest tipus. Té eixos de gir de 120º. Passen per un vèrtex i el centre de la cara oposada. Com té 4 cares hi ha 4 d'aquest tipus.



• L'estudi del dodecaedre i de l'icosaedre és més complicat. Observa que també són duals. Si unim els centres de les cares d'un dodecaedre s'obté un icosaedre, i si unim els centres de les cares d'un icosaedre, s'obté un dodecaedre. El dodecaedre té 12 cares i l'icosaedre 12 vèrtexs. L'icosaedre té 20 cares i el dodecaedre 20 vèrtexs. Ambdós tenen 30 arestes. Descriurem el pla de simetria del dodecaedre de la figura del marge: Veiem que passa pels dos eixos de simetria de dues cares, per una aresta. I després? Ja no ho veiem? Observa que torna a passar per dos eixos de simetria de cares i per una altra aresta. Com el dodecaedre té 20 arestes, hi ha 10 plans de simetria d'aquest tipus.

Activitats proposades

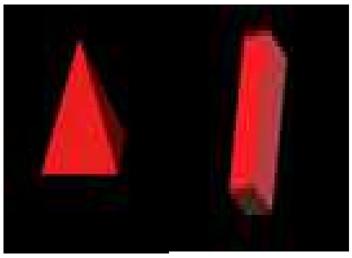
53. Escriu cinc objectes que estiguen al teu voltant que siguen simètrics i indica el seu pla de simetria. Mira en l'aula i busca simetries. Són simètriques les cadires, el llum, la finestra, les taules...? Quin és el seu pla de simetria?

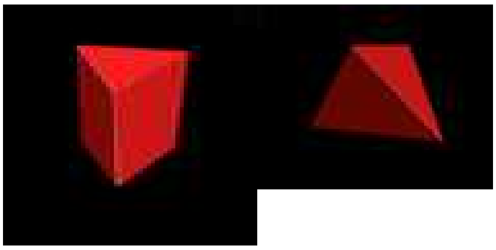
54. Defineix els plans de simetria i els eixos de rotació de les figures següents:

a) Un prisma recte de base quadrada. I si és oblic?

b) Una piràmide recta de base quadrada.

c) Si el prisma i la piràmide són rectes, però les seues bases són rectangles, quines simetries es mantenen?





55. Determina els plans de simetria i els eixos de rotació d'aquestes figures:

a) Un prisma recte la base del qual és un triangle equilàter.

b) Una piràmide recta de base un triangle equilàter. I si és obliqua?

c) Si el prisma i la piràmide són rectes però de base un triangle isòsceles, quines simetries es mantenen?

56. Mitjançant una simetria especular, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

4.4. Isometries al pla

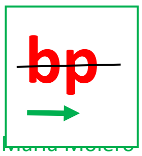
Les **isometries** són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.

Al pla hem estudiat les translacions, els girs i les simetries (axials) que són isometries.

Ja sabem que la simetria central en el pla coincideix amb un cas particular de gir, el gir de 180º.

Els girs i les translacions són isometries directes, perquè no canvien el sentit dels angles. Les simetries són isometries inverses perquè sí els canvien.

Hem vist que la composició de dues translacions és sempre una altra translació, que la composició de dos girs del mateix centre és un altre gir del mateix centre, que la composició de dues simetries és un gir o una translació. Podríem continuar estudiant què ocorre si componem girs de distint centre, girs amb translacions, translacions amb simetries i simetries amb girs. Veuríem que quasi sempre obteníem una simetria, una translació o un gir. Excepte quan componem una translació amb una simetria. Obtenim una isometria nova que anomenarem **simetria amb**



lliscament. Passem de la lletra b del marge a la lletra p per una simetria d'eix horitzontal (en negre) i una translació (de vector de translació a verd).

Punts invariants: La translació no deixa cap punt invariant. Els girs deixen u, el centre de gir, i la simetria axial deixa una recta, l'eix de simetria. La simetria amb lliscament tampoc deixa cap punt invariant.

Si en un pla una isometria deixa tres punts invariants no alineats, aleshores deixa invariant tot el pla, per tant és la identitat.

Al pla			
	Punts invariants	**Rectes de punts invariants**	**Rectes invariants**
Translació	Cap	Cap	Les de direcció igual a la del vector de translació
Girs (d'angle de gir diferent de 180º i 0º)	Centre de gir	Cap	Cap
Simetria (axial)	Els de l'eix de simetria	L'eix de simetria	L'eix de simetria i les rectes ortogonals a l'eix de simetria.
Identitat	Tot el pla	Totes	Totes
Simetria amb lliscament	Cap	Cap	Les de direcció igual al vector de translació i de l'eix de simetria.

4.5. Ús de Geogebra per a analitzar les isometries al pla

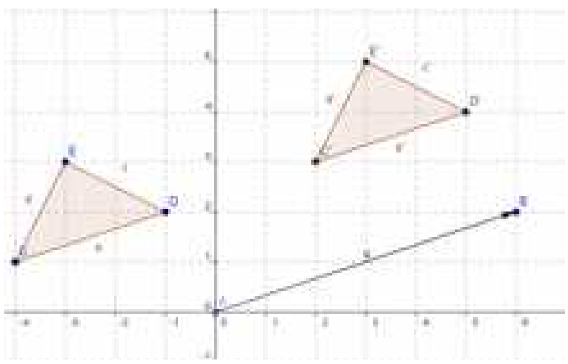
Utilitzarem el programa **Geogebra** per a estudiar els moviments al pla. Estudiarem les translacions i la simetria axial.

Activitats resoltes

Translació

Utilitza Geogebra per a estudiar vectors i translacions.

- En un arxiu de *Geogebra* **Visualitza** els eixos, la quadrícula i la finestra algebraica.
- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix l'origen de coordenades com *A i* el punt de coordenades (6, 2) com a *B. i* amb la ferramenta **Vector entre dos punts** determina el vector *u* d'origen *A* i extrem *B* que tindrà coordenades (6, 2).
- Defineix amb **Nou Punt** *C* (–4, 1), D(-1, 2) i E (-3,3)i amb **Polígon** dibuixa el triangle que té per vèrtexs aquests punts.



- Observa que els punts que has dibuixat apareixen en la finestra algebraica com a objectes lliures i el triangle com a objecte dependent.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

- Utilitza la ferramenta **Traslladar objecte d'acord amb vector** per a traslladar el triangle *CDE* segons el vector *u*, s'obté el triangle *C'D'E'*.

57. Què tipus de quadrilàters són els polígons *ACC'B, ADD'B i AEE'B*?

58. Comprova en la finestra algebraica que:

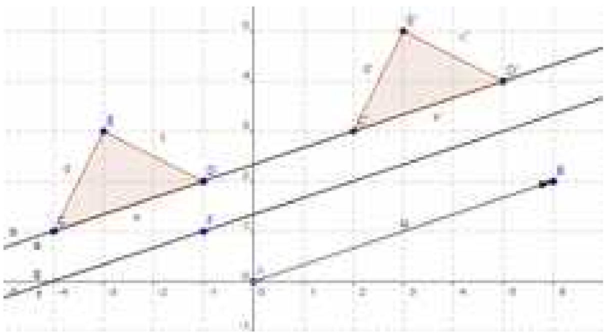
a) Les coordenades dels punts *C', D' i E'* s'obtenen respectivament en sumar a les coordenades dels punts *C, D, i E* les coordenades del vector *u.*

b) La longitud de cada costat del triangle és la mateixa que la del seu traslladat i les àrees dels triangle *CDE* i *C'D'E'* coincideixen

- Dibuixa amb **Recta que passa per 2 punts**, la recta *a* què passa pels punts per *C* i *D* i comprova, amb l'equació de la recta, que *C'* i *D'* estan en la mateixa recta.
- Trasllada ara la recta *a* segons el vector *u*, apareix, denominada *b*, la mateixa recta.

Quina propietat té la recta a perquè romanga invariant mitjançant la translació? Una conjectura és que la recta a és paral·lela al vector u.

- Per a comprovar la conjectura defineix un **Nou Punt** *F* (-1, 1) i amb **Recta paral·lela** dibuixa una recta *f* que passe per *F* i paral·lela al vector *u*.
- Trasllada la recta *f segons* el vector *u* i veuràs que apareix la recta *g* que coincideix amb ella. Dibuixa altres rectes paral·leles al vector u i comprova que la translació les deixa invariants.



- Mou amb el punter el punt *B*, per tal que el vector *u* tinga distinta direcció i observa com la recta *a* ja no té la mateixa direcció que el vector *u* i la seua traslladada, la recta *b*, és distinta i paral·lela a ella, no obstant això la recta *f* té la mateixa direcció que el vector *u* i la seua traslladada *g* coincideix amb ella.

59. Investiga si algun punt del pla roman invariant mitjançant translacions segons diferents vectors.

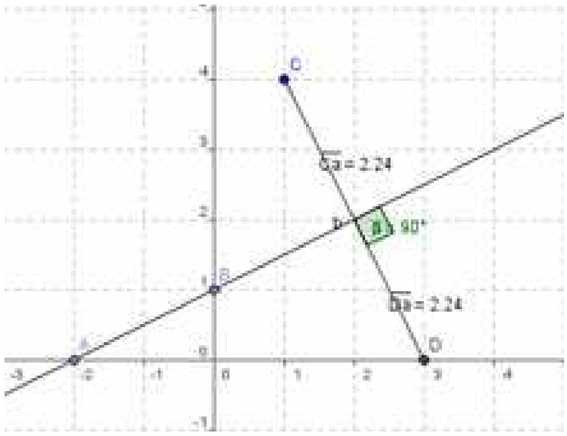
Simetria axial

Utilitza Geogebra per a estudiar les propietats de la simetria axial.

- Obri una nova finestra de *Geogebra* i visualitza els eixos, la quadrícula i la finestra algebraica.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix *A* (-2, 0) i *B* (0, 1) i amb **Recta que passa per 2 punts**, dibuixa la recta *a* què passa per *A* i *B*, que serà l'eix de simetria.
- Determina el punt *C* (1, 4) i amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta**, el seu simètric respecte a la recta *a*, que és el punt *D* (3, 0).
- Amb la ferramenta **Distància** comprova que la distància del punt *C* a la recta *a* coincideix amb la del punt *D* a dita recta.
- Dibuixa amb **Segment entre dos punts** el que uneix els punts *C* i *D*.



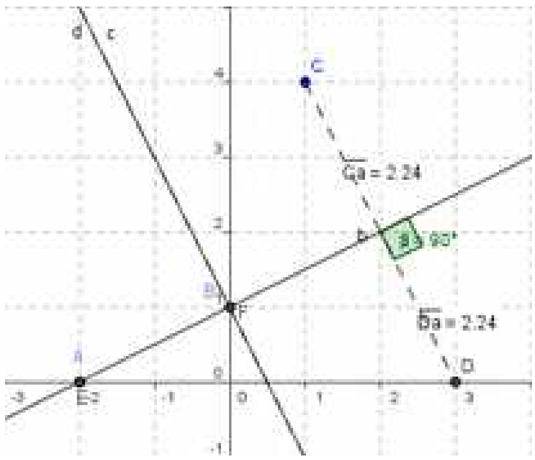
- Amb la ferramenta **Angle** calcula la mesura de l'angle que formen el segment *CD* i la recta *a* per a verificar que són perpendiculars.

Les següents propietats, que acabes de comprovar, caracteritzen la simetria axial:

1ª: Les distàncies d'un punt i del seu simètric a l'eix de simetria coincideixen.

2ª: El segment que uneix un punt i el seu simètric és perpendicular a l'eix de simetria.

- Amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta** troba el simètric dels punts *A i B* respecte a l'eix *a* i comprova que *A i* el seu simètric de *E* coincideixen el mateix que *B* i *F*. Prova amb altres punts de la recta *a* per a verificar que tots els punts de l'eix resulten invariants mitjançant una simetria axial respecte a aquest eix. Verifica, també, que l'eix, la recta *a*, i la seua simètrica la recta *b* coincideixen.
- Utilitza **Recta perpendicular** per a traçar la recta *c*, perpendicular a l'eix *a* què passa pel punt *B*.
- Calcula la recta simètrica de la recta *c* respecte a l'eix *a*, s'obté la recta *d* que coincideix amb *c*.



- Millora l'aspecte de la construcció dibuixant el segment CD i les rectes *c* i *d* amb traç discontinu. Fes clic amb el botó dret del ratolí sobre l'element o la seua equació i en **Propietats**, **Estil**, tria un traç discontinu.

60. Quins són els punts invariants d'una simetria axial? I les rectes invariants?

Activitats proposades

61. Utilitza la ferramenta **Rota objecte entorn d'un punt, l'angle indicat** per a estudiar els girs en el pla. Defineix un punt *O* com a centre de gir, per exemple, el centre de coordenades. Defineix tres punts per a determinar amb **Angle** un de 45º.

a) Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen mitjançant aquest gir.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

b) Investiga si en realitzar un gir hi ha punts i/o rectes que romanen invariants.

62. Utilitza la ferramenta **Reflectix objecte per punt** per a estudiar la simetria central. Defineix un punt *O* com a centre de simetria, per exemple, el centre de coordenades.

a) Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen per una simetria central.

b) Comprova que una simetria central equival a un gir de 180º.

c) Investiga si en una simetria central hi ha punts i/o rectes que romanen invariants.

4.6. Isometries a l’espai

A l’espai hem estudiat les translacions, els girs, les simetries centrals i les simetries (especulars). La simetria central és un moviment nou diferent dels girs.

A l’espai, translacions i girs són isometries directes, i simetries especulars i simetries centrals són isometries inverses.

No hem estudiat la seua composició, però no ens costaria gens veure que la composició de dues translacions és una altra translació, de vector, la suma dels vectors de translació. La composició de dos girs del mateix eix és un altre gir del mateix eix i d’angle, la suma dels angles. La composició de dues simetries de plans paral·lels és una translació, i la composició de dues simetries de plans secants és un gir d’eix, la recta d’intersecció dels plans. La composició de dues simetries centrals del mateix centre és la identitat. El comportament d’aquestes composicions és semblant al que ocorre al pla.

Més complicat és estudiar a l’espai la composició de girs de distint eix, girs amb simetries, simetries amb translacions i translacions amb girs a l’espai. Igual que al pla van aparéixer noves isometries, la simetria amb lliscament, ara també ens apareixen noves isometries: simetria rotativa, simetria amb lliscament…

Punts invariants: La **translació** no deixa **cap** punt invariant. La **simetria central** deixa **un** punt invariant, el centre. Els **girs** deixen una **recta**, l’eix de gir. La **simetria** especular deixa un **pla** de punts invariants, el pla de simetria. I si una isometria a l’espai deixa quatre punts invariants no coplanaris, és la identitat.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

5. MOSAICS, FRISOS I ROSETONS

En passejar per una ciutat o pel camp pots veure muntons de transformacions geomètriques: veuràs simetries, girs i translacions pertot arreu, formant mosaics, frisos o rosetons; o bé a les formes de les flors.

5.1. Mosaics

63. Mira aquest taulellet d'un mosaic d'Istanbul. La cel·la unitat és cada un dels taulellets amb què es construeix tot el mosaic mitjançant translacions. Indica els vectors de translació. Però pots reduir el motiu mínim. Utilitzant girs? Utilitzant simetries? Mira l'ampliació: Comprova que pots utilitzar com a motiu mínim la huitena part del taulellet.

Realitza la mateixa observació amb els següents taulellets d'Istanbul

64. **Anàlisi de mosaics de l'Alhambra**: Observa el mosaic del marge. Imagina que és infinit, que completa tot el pla. Pots prendre com a motiu mínim un parell de fulles. Per a passar d'un parell de fulles a l'altra parella adjacent, quina transformació has utilitzat? És una simetria? És un gir? Hi ha centres de gir de 60º? I de 180º? I de 30º?

Utilitza una trama de triangles, o dibuixa una al teu quadern, per a dissenyar un mosaic semblant a aquest. Marca a la trama els centres de girs de 60º, de 180º i de 30º. Dibuixa un motiu mínim senzillet, per exemple una poligonal o una fulla, i mou-la usant aqueixes transformacions.

65. Analitza l'animació de generació d'un mosaic mitjançant girs i translacions, analitza l'animació:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/185487_am_1_Alhambra_3.swf

Observa com primer dibuixa una trama de quadrats, dibuixa un motiu mínim format per dos segments, després li aplica isometries a aqueix motiu: girs de 90º, amb els que dibuixa l'estrela, que per simetria completa la cel·la unitat que finalment traslla da per tot el mosaic.

66. També pots veure en l'animació següent:

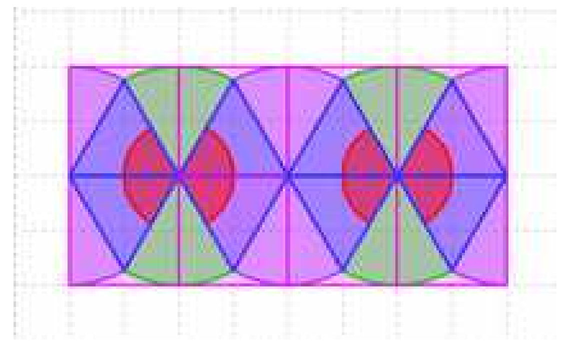
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195377_am_1Alhambra2.swf

com es realitza un estudi del **mosaic** del marge, buscant la cel·la unitat, el motiu mínim i estudiant els seus girs (de 90º i 180º) i els seus eixos de simetria.

Utilitza una trama de quadrats, o dibuixa una al teu quadern, per a dissenyar un mosaic semblant a aquest. Marca a la trama els centres de girs de 90º i de 180º. Marca els eixos de simetria. Dibuixa un motiu mínim senzillet, per exemple una poligonal, i mou-lo usant aqueixes transformacions. Completa primer la cel·la unitat, i després trasllada-la.

5.2. Frisos

Les randes, les greques dels brodats, les teles estampades, les reixes... utilitzen molt sovint les translacions als seus dissenys. Són els frisos.



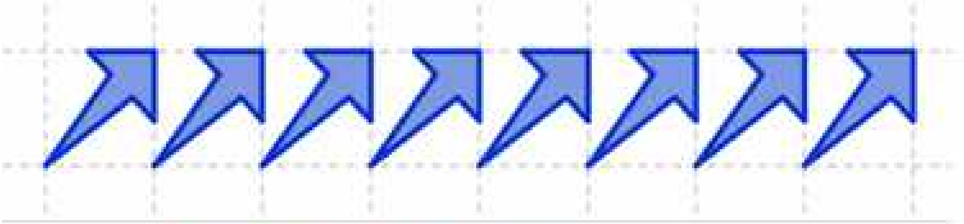
Observa el fris del marge. Com tots els frisos s'obté traslladant un motiu. Però poden tindre altres isometries a més de la translació. La combinació de translació, simetries i girs permeten obtindre set tipus de frisos diferents.

67. Hem format frisos utilitzant les lletres de l'alfabet. Tots ells es formen per translació. Però de vegades hi ha altres isometries. A) En quines hi ha una simetria d'eix horitzontal. B) En quins hi ha girs de 180º. C) En quines hi ha simetries d'eix vertical? D) Hi ha simetries amb lliscament? E) Assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es prolongue fins a l'infinit).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

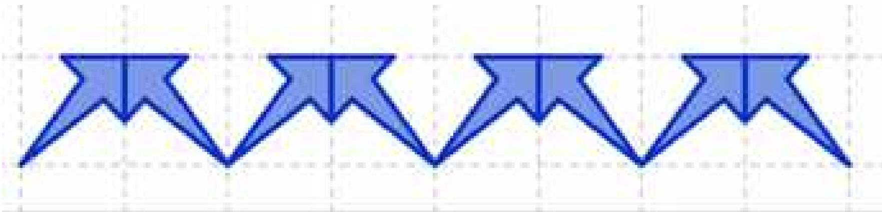
68. Ix al carrer o en ta casa i busca frisos. Fotografia reixes, mira randes i greques... i fes un estudi dels diferents frisos que trobes. Dibuixa al teu quadern el seu disseny i intenta classificar-los segons l'esquema de les lletres del problema anterior, segons les transformacions que utilitzen. Per a això fes-te les preguntes següents: 1) Té girs? Si la resposta és NO, aleshores: 2) Té simetria horitzontal? Si la resposta és SI, és un L4, que com el fris format per la lletra C o la lletra D, no té girs i si, simetria d'eix horitzontal. Si la resposta és NO, aleshores: 3) Té simetria vertical? Si la resposta és SI, és un L3, com el fris format per la lletra V o la lletra A, que no té ni girs, ni simetria horitzontal i si simetria vertical. Si la resposta és NO, aleshores: 4) Té simetria amb lliscament? Si la té és un L6, i si no és un L1. Però si té girs pot tindre també simetria horitzontal i és un L5, o tindre simetria amb lliscament i ser un L7, o només tindre el gir i ser un L2, com el fris format per la lletra N o la lletra S.

69. Als frisos següents assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es prolongue fins a l'infinit).

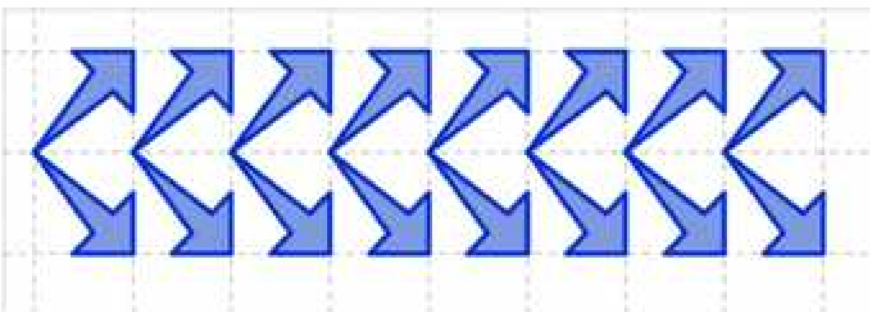


Fris L1: Només translació

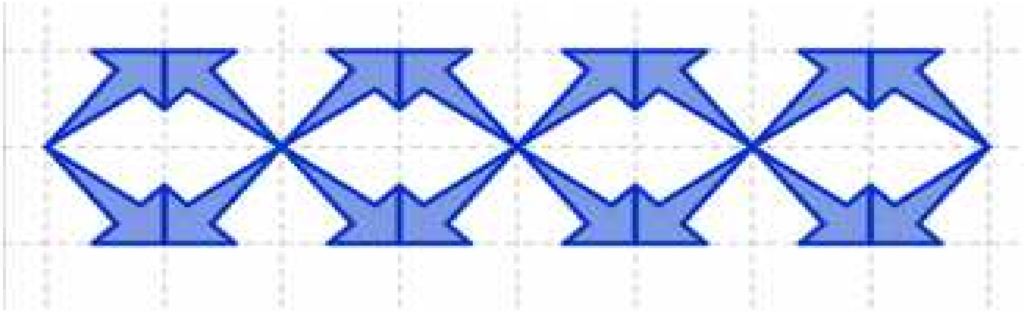
Fris L2: Girs de 180º



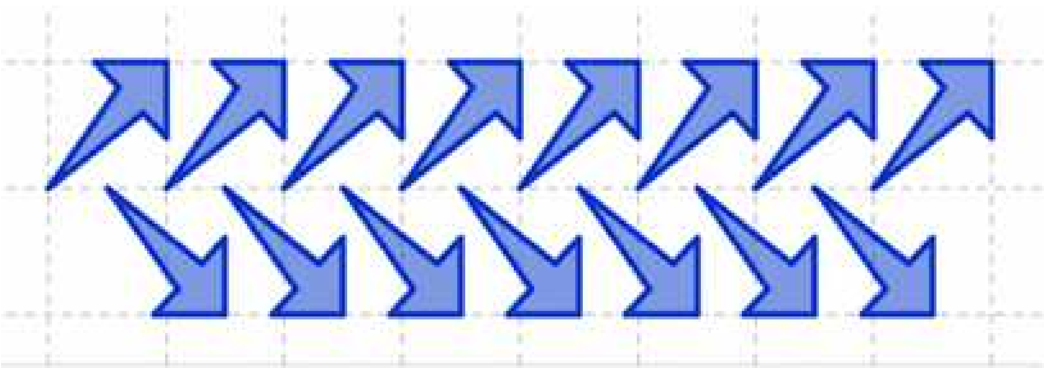
Fris L3: Simetria vertical



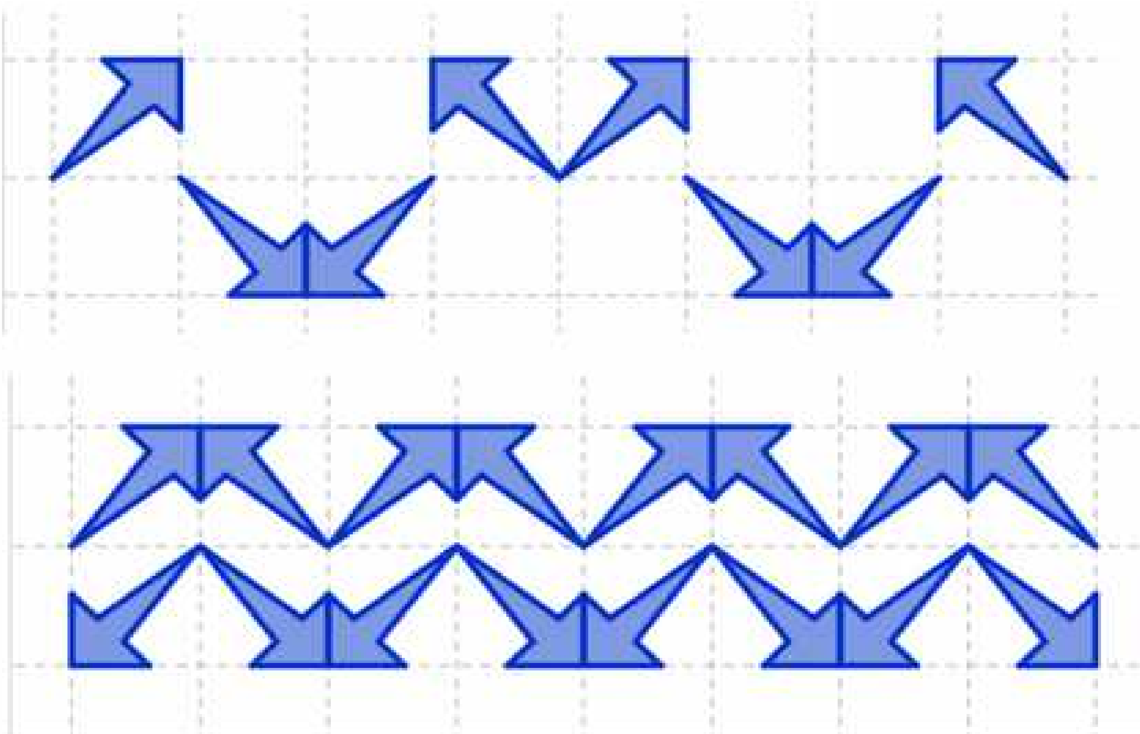
Fris L4: Simetria Horitzontal



Fris L5: Girs, simetries verticals i simetries horitzontals



Fris L6: Simetria amb lliscament



Fris L7: Simetria amb lliscament i simetria vertical

5.3. Rosetons

Els rosetons de les catedrals són espectaculars, però també es poden veure en situacions més quotidianes, com els tapaboques dels cotxes.

Es denominen grups de Lleonard als grups d'isometries d'aquests rosetons. Poden tindre simetries o únicament girs. Aquest rosetó d'una catedral té eixos de simetria i divideix la circumferència en 12 trossos iguals. Diem que és un D12. Si no hi ha simetries, només girs diem que és un C5, o un C6… segons dividisca a la circumferència en 5 o en 6… parts iguals.

Per exemple, t'has fixat als tapaboques dels cotxes? De vegades tenen dissenys interessants. Hem arreplegat fotografies d'alguns tapaboques perquè els estudies.

70. Anàlisi de tapaboques: Observa els següents tapaboques. Indica, per a cada un d'ells, les qüestions següents:

 1	 2	 3	 4
 5	 6	 7	 8
 9	 10	 11	 12

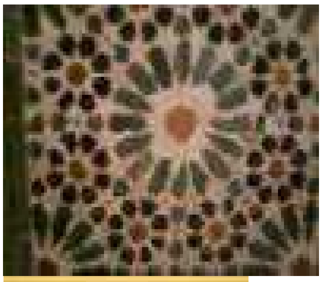
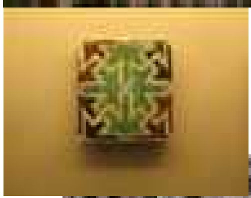
a) Té simetria central.

b) Té eixos de simetria axial. Quants?

c) Té centre de gir, quin és el menor angle de gir que el deixa invariant?

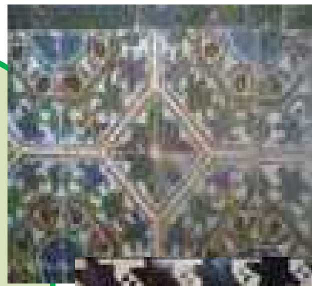
d) Ix al carrer i fotografia o dibuixa els tapaboques que veges i et pareguen interessants. Fes un estudi d'ells.

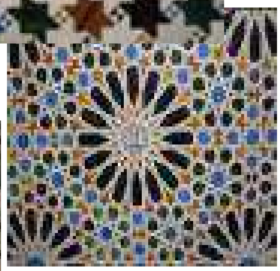
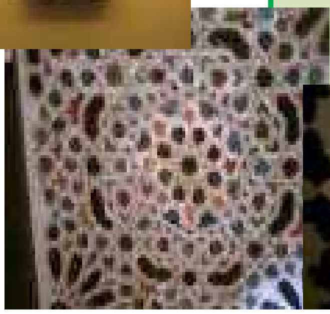
CURIOSITATS. REVISTA

Mosaics de l'Alhambra

Com saps els àrabs d'Espanya eren grands matemàtics i als mosaics de l'Alhambra demostren, a més del seu sentit artístic, els seus coneixements de Matemàtiques. S'ha demostrat que, partint d'un motiu mínim, i aplicant-li girs, simetries, translacions... sols hi ha 17 formes distintes d'emplenar el pla fent un mosaic. És sorprenent que eixes 17 formes ja es troben als mosaics de l'Alhambra.



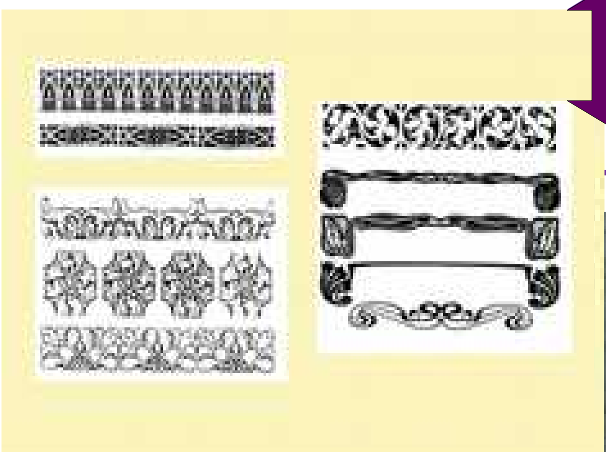

Pots veure la generació d'un d'aquests mosaics de l'Alhambra mitjançant simetries:

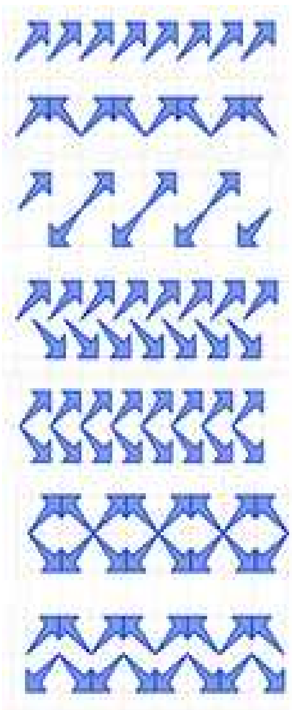
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Busca "mosaics" en Internet, i sabràs més sobre la generació de mosaics.

Frisos

Les sanefes, randes..., en les reixes, en... podem veure disenys que es repeteixen al llarg d'una línia per translación. S'ha demostrat que només hi ha 7 formes distintes de fer aqueixos disenys emprant, a més de les traslacions, girs i simetries.





Pots veure la generació d'un fris: (http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195415_am_1Friso.swf)

Cristalls

Igual que al pla només existeixen 17 possibles disenys de mosaics, a l'espai existeixen 230 possibles tipus de disenys cristalogràfics que compacten l'espai.

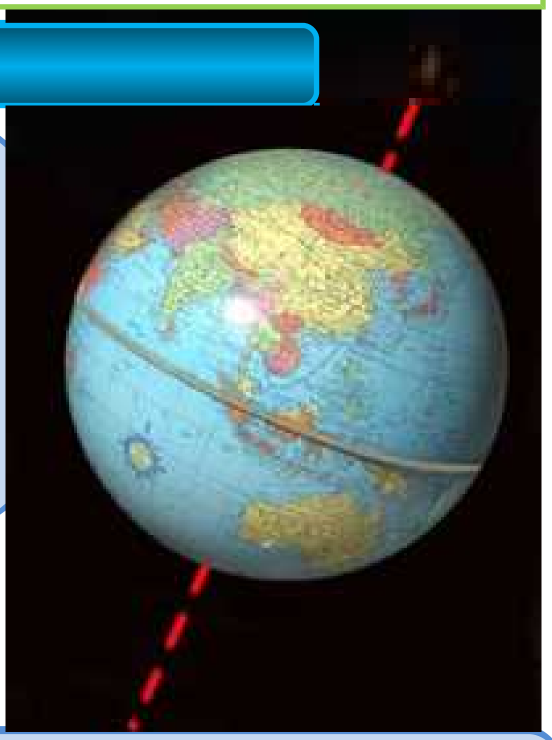
Per a ser matemàtic hi ha que ser poeta. *Sonya Kovalevkaya.*

Rosetons

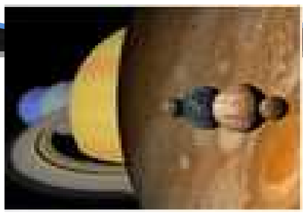
Girs i simetries pasant tots per un centre. Així es disenyen els rosetons. Si només hi ha girs s'anomenen C_n, sent C_2 si només té un gir de 180º, C_3 si el té de 120º... El tapaboques de baix és, per tant, un C_5. I si té simetries, s'anomenen D_n com els rosetons que veiem que són D_{12} o D_{16}. Busca en Internet "grups de Leonardo" i voràs més coses d'ells

Tot es mou.

Et mous no sols quan camines o vas amb cotxe. Quan estàs quiet també et mous. Tot es mou a l'Univers. La Terra gira al voltant del seu eix. El radi de la Terra és de 6.400 km, per la qual cosa la longitud de l'Equador terrestre és de $2\pi r$ = 40.192 km. Tarda 24 hores a fer una volta, per tant 40192/24 = 1674,67, per la qual cosa si estigueres a l'Ecuador estaries movent-te a una velocitat aproximada de 1.675 km/h.



Planetes del Sistema Solar



La Terra gira al voltant del Sol. Tarda aproximadament 365 dies en fer una volta sencera. Ara viatgem a 107.000 km/h girant al voltant del Sol.

Imatge en infrarrojos del centre de la Via Làctia

El Sol es mou dins de la nostra galàxia, on també gira a una velocitat de 810.000 km/h al voltant del centre de la galàxia. El Sol està a 27.000 anys llum del centre de la nostra galàxia i tarda 200 milions d'anys en fer una volta.

Galàxia Andròmeda

La nostra galàxia, la Via Làctia, també es mou. S'acosta a la Galàxia Andròmeda a una velocitat de 230.000 km/h.

Mareig em dóna el pensar a quina velocitat m'estic movent!

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

RESUM

		Exemples
Semblança	Transformació geomètrica que conserva els angles i les distàncies són proporcionals.	Una fotocòpia reduïda
Translació	Ve determinada pel seu vector de translació. Són isometries directes. La composició de dues translacions és una translació.	El traslladat del punt *P* (1, 2) per la translació de vector **v** = (4, 5) és *P'* (5, 7).
Gir o rotació al pla	Ve determinat pel centre de gir i l'angle de gir.	El girat del punt *P* (1, 2) pel gir de centre l'origen i angle 90º és *P'* (2, –1)
Gir a l'espai	Ve determinat per l'eix de gir i l'angle	
Simetria axial	Es coneix pel seu eix de simetria	El simètric del punt *P* (1, 2) per la simetria d'eix l'eix d'ordenades és *P'* (–1, 2)
Simetria especular	Es coneix pel seu pla de simetria	
Isometries	Són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.	Translacions, girs i simetries
Composició d'isometries	La composició de dues isometries directes és una isometria directa. La composició de dues isometries inverses és una isometria directa. La composició d'una isometria directa amb una inversa és una isometria inversa.	
Composició d'isometries al pla	La composició de dos girs del mateix centre és un gir del mateix centre. La composició de dues simetries és un gir o una translació.	
Elements invariants al pla	La **translació** no deixa **cap** punt invariant. El **gir** deixa invariant **un** punt, el centre de gir. La **simetria** deixa invariant una **recta**, l'eix de simetria La **identitat** deixa invariant **tot** el pla.	
Elements invariants a l'espai	La **translació** no deixa **cap** punt invariant. La simetria **central** deixa invariant **un** únic punt, el centre de simetria. El **gir** deixa invariant una **recta**, l'eix de gir. La **simetria** deixa invariant el **pla** de simetria La **identitat** deixa invariant **tot** l'espai.	

Un bon resum d'aquest capítol el tens en aquesta presentació en Power Point:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

MATERIALS PER A L'AULA

Presentacions:

- Un bon resum d'aquest capítol el tens en aquesta presentació en Power Point:

  http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaicosyfrisos.pdf

- Algunes presentacions de Power Point:
  - Sobre frisos i mosaics

    http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Movimientosenelplano.pdf
  - Frisos i mosaics en la web: En Pensament Matemàtic:

    http://innovacioneducativa.upm.es/sandbox/pensamiento/chip_geometrico/geometria_y_arte.pdf

- Treballs realitzats per estudiants que poden servir de model perquè, ara ells, realitzen altres de similars:
  - Frisos i reixes units per les Matemàtiques.
    http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/rejas.pdf

Presentació confeccionada per dues alumnes de 2º de batxillerat de l'Institut Salvador Victòria de Monreal del Camp de Terol: Pilar Lorente Lorente i Paloma Plumed Martín. És un treball interessant sobre frisos i reixes, encara que, opinem, que algun fris no està correctament classificat. No obstant això és un magnífic model per a inspirar altres treballs d'eixir al carrer i fotografiar o dibuixar reixes, (o mosaics, o altres tipus de frisos) que es vagen veient.

  - Power Point que arreplega treballs sobre mosaics de diferents alumnes de la Universitat Politècnica de Madrid. Pot també servir d'inspiració per a proposar a l'alumnat que confeccione els seus propis mosaics.
    http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Mosaico.pdf

Internet

- Buscant en internet hem trobat, davall el títol dels 17 grups de simetria en el pla, l'entrada següent: http://www.acorral.es/index3.htm. Són pràctiques amb Geogebra sobre mosaics, frisos i zelosies. Estan dissenyats, amb dissenys vistosos i originals mosaics amb els 17 grups. Al final hi ha una taula, a manera de resum, que permet identificar i classificar cada grup de simetria. També hi ha un full de treball per a l'alumnat.
- També a Internet, en http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia i en particular en:
  http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html

  un treball sobre els grups d'autosimetria dels cristalls summament interessant i d'un nivell molt alt. Existeix 32 classes de xarxes cristal·lines: triclínic, monoclínic, tetragonal, cúbic, hexagonal… Estudia que només 11 tenen centre de simetria. En analitzar quines són compatibles amb la translació s'obtenen les xarxes (o xarxes de Bravais) de les que hi ha 11 xarxes. Combinant els 32 grups cristal·logràfics amb les 11 xarxes troba que hi ha 230 formes possibles de repetir un objecte finit (motiu mínim) a l'espai de dimensió tres.

Llibres:

L'Alhambra. Treball monogràfic editat per l'Associació de Professors de Matemàtiques d'Andalusia, en 1987, que arreplega treballs de diversos autors, que permet aprendre molt més sobre transformacions geomètriques i els grups d'autosimetria al pla. Editat per la revista "Epsilón".

EXERCICIS I PROBLEMES.

Translació

1. Dibuixa al teu quadern un paral·lelogram sobre un sistema de referència i una quadrícula. Tens quatre segments orientats. Determina les coordenades dels vectors sobre els dits segments. Quins tenen les mateixes coordenades?

2. Tenim els punts *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) i *D* (7, 3). Calcula les coordenades dels vectors ***AB***; ***AC***; ***AD***; ***BC***; ***BD***; ***CD***; ***DC***; ***BA***.

3. Determina el vector de translació que trasllada el punt *A* (3, 7) al punt *A'* (1, 5).

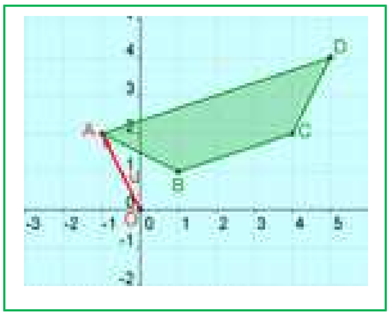
4. Per la translació de vector **u** = (2, 8) es trasllada el punt *A* (9, 4) al punt *A'*. Quines són les coordenades de *A'*?

5. Per la translació de vector **u** = (–3, –1) es trasllada el punt *A* al punt *A'* (3, 3). Quines són les coordenades de *A*?

6. Traslladem la circumferència de centre *C* (5, 2) i radi 3 unitats amb la translació de vector **u** = (–5, –2). Determina el centre i el radi de la circumferència traslladada.

7. Dibuixa al teu quadern uns eixos coordenats i en ells un quadrat de costat 2 unitats al que anomenes *C*, li apliques una translació segons el vector ***u*** = (4, 1) i anomenes *C*' al seu traslladat. Ara apliques a *C'* una translació segons el vector ***v*** = (–2, 4). La isometria que transforma *C* en *C*'', és una translació? Escriu les coordenades del seu vector. Mitjançant aqueixa translació, en quin punt es transforma l'origen de coordenades?

8. El vèrtex inferior esquerre d'un quadrat és A (3, 1) i el vèrtex superior esquerre és B (1, 3). Li apliques una translació de vector ***u*** = (–2, 4), quines són les coordenades dels quatre vèrtexs del quadrat transformat?



9. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al trapezi de la figura la translació de vector ***OA*** = (–1, 2). Determina les coordenades dels punts transformats de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) i *D* (5, 4) per la dita translació.

10. Aplica la translació de vector ***u*** = (–3, 4) al triangle *ABC* de vèrtexs *A*(3,1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), i calcula les coordenades del triangle transformat.

11. Dibuixa al teu quadern un cercle de centre l'origen i radi 2 unitats.

a) Trasllada'l amb la translació de vector **u** = (3, 0).

b) Trasllada'l després mitjançant la translació de vector **v** = (0, 4).

c) Indica les coordenades del centre del segon cercle traslladat.

d) Indica les coordenades del traslladat del punt (0, 2) en aplicar-li cada una de les dues translacions.

12. Traslladem el triangle *ABC* de vèrtexs *A* (6, 1), *B* (–3, 4) i *C* (0, 8), mitjançant la translació de vector **u** = (7, 1), i després mitjançant la translació de vector **v** = (2, 8). Determina les coordenades del triangle transformat analíticament i gràficament.

13. La composició de dues translacions té per vector (5, 9). Si una d'elles és la translació de vector **u** = (7,3), quins components té l'altre vector de translació?

14. a) Dibuixa al teu quadern un triangle *ABC* i trasllada'l 5 cm a la dreta. Denomina *A'B'C'* al triangle obtingut.

b) Trasllada *A'B'C'* ara 4 cm cap amunt i denomina *A''B''C''* al nou triangle.

c) Dibuixa el vector que permet passar directament del triangle *ABC* al *A''B''C''* i mesura la seua longitud. Quines són les seues coordenades?

15. Determina el vector de translació de la translació inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).

16. a) Dibuixa al teu quadern una figura, i repeteix el dibuix traslladant la figura 4 vegades amb la mateixa translació. En fer-ho, dibuixaràs un fris.

b) Un fris confeccionat amb lletres L és: L L L L L. Dibuixa un fris confeccionat amb lletres J. Un altre confeccionat amb lletres M. A més de translació, té simetries?

c) Busca un fris. Mira les reixes del teu carrer, un brodat o una punta, les greques d'uns taulellets… i dibuixa el seu disseny al teu quadern.

17. Mitjançant una translació a l'espai, en què es transforma un pla? I una esfera? I un con? I dos plans paral·lels? I dos plans ortogonals? Analitza els resultats.

Girs

18. Dibuixa al teu quadern el punt *A* (5, 4). Indica les coordenades del punt *A'* què s'obté en girar 180º i amb centre l'origen el punt *A*. Indica les coordenades del punt *A''* obtingut en girar *A'* 90º amb el mateix centre de gir.

19. Dibuixa una figura al teu quadern, calca-la, retalla-la i apega-la inclinada al costat de la inicial. Les dues figures, tenen totes les longituds iguals?, i els seus angles? Determina, amb compàs i transportador, el centre i l'angle de gir.

20. Dibuixa al teu quadern una lletra F i la lletra F girada 30º amb centre de gir el seu punt més inferior.

21. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle isòsceles i amb centre en el vèrtex d'un dels angles aguts aplica-li un gir de 45º en sentit positiu. Després aplica-li un altre gir de 45º, i així successivament fins a arribar al triangle inicial. Quins girs has estat fent?

22. Dibuixa al teu quadern un cercle de centre *O*, dos diàmetres perpendiculars *AB* i *CD* i una corda *CB*. Sobre el mateix dibuix traça les figures obtingudes fent girar la figura formada pels dos diàmetres i la corda, amb girs de centre *O* i angles 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º i 315º. Hauràs fet la composició de girs de 45º diverses vegades.

23. La lletra H té centre de simetria? Indica tres objectes quotidians que tinguen simetria central.

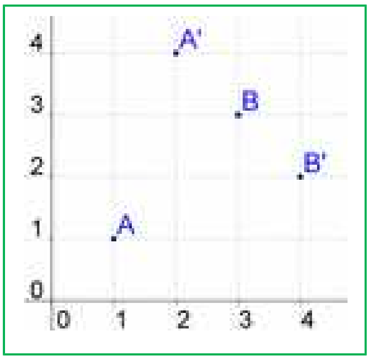
24. Sobre uns eixos cartesians representa els punts *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) i els seus simètrics respecte a l'origen *A'*, *B'* i *C'*. Quines coordenades tenen *A'*, *B'* i *C'*?

25. Dibuixa al teu quadern el triangle de vèrtexs *A* (3, 7), *B* (5, –5) i *C* (7, 2). Dibuixa el triangle que s'obté en girar-lo amb centre al punt *D* (8, 8) un angle de 180º. És una simetria central. Quines són les coordenades dels vèrtexs *A'*, *B'* i *C'* del nou triangle?

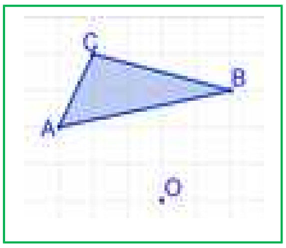
26. Dibuixa en un sistema de referència un punt *P* i el seu simètric *P'* respecte de l'origen. Si les coordenades de *P* són (*x*, *y*), quins són les de *P'*?

27. Donat el triangle *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'origen.

28. Dibuixa un triangle equilàter *ABC* i amb centre en el vèrtex *A* aplica-li un gir d'angle 60º. El triangle donat i el transformat, quina figura formen? Torna a aplicar al triangle transformat el mateix gir de centre *A*, quins girs has estat fent? Quants girs has d'aplicar al triangle inicial perquè torne a ocupar la posició inicial?



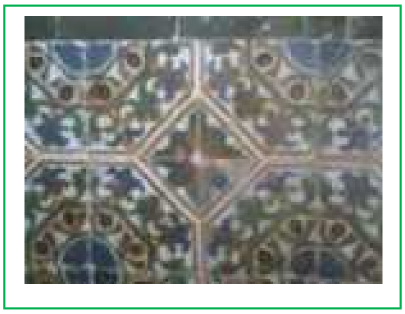
29. Dibuixa al teu quadern els quatre punts de la figura. Determina, amb regla, compàs i transportador, el centre i l'angle de gir sabent que els punts *A* i *B* s'han transformat mitjançant un gir en *A'* i *B'*.



30. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al triangle de la figura el gir de centre *O* que transforma el punt *A* en el punt *B*.

31. Utilitza un transportador d'angles, regla i compàs, per a girar una recta 60º respecte a un punt *O* exterior a ella (és prou girar dos punts de dita recta). Mesura els angles que formen les dues rectes, la inicial i la girada. Observes alguna regularitat? Investiga un mètode per a girar una recta transformant un sol punt. Quin punt has de triar i per què?

32. Joc per a dos jugadors: Forma sobre la taula un polígon regular utilitzant monedes (o fitxes o boletes de paper) com a vèrtexs. Alternativament cada jugador retira o una moneda o dues monedes adjacents. Gana qui retire l'última moneda. (***Ajuda***: És un joc d'estratègia guanyadora que pots descobrir utilitzant la simetria central).

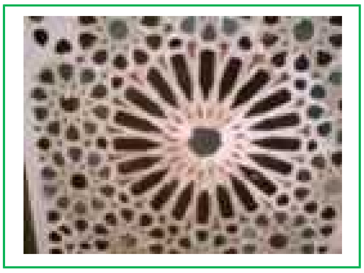


33. Al disseny d'aquest mosaic s'han utilitzat girs al pla. No el veiem complet, però podem imaginar que fóra infinit. Indica els centres de gir que veges. En el centre de la figura hi ha un centre de gir claríssim, de quin angle? Hi ha girs de 45º? Quins són els seus centres de gir? Hi ha centres de simetria? Indica'ls.

34. Para cada un dels següents polígons indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixen invariants a cada un d'ells:

a) Pentàgon regular	b) Hexàgon regular	c) Decàgon regular
d) Triangle equilàter	e) Rectangle	f) Quadrat
g) Rombe	h) Paral·lelepípede	i) Octògon regular

35. A la simetria central de centre (2, 3) hem vist que el simètric del punt *A* (8, 1) és el punt *A'* (–4, 5). Calcula els simètrics dels punts *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) i *E* (7, 6).

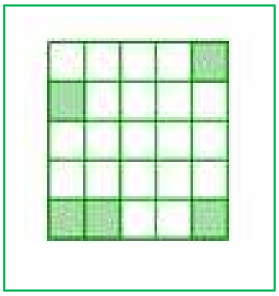


36. Indica si el mosaic de l'Alhambra del marge té centre de gir, i determina quin és el menor angle de gir que fa que el mosaic se superpose (sense tindre en compte els canvis de color). Hi ha centres de simetria?

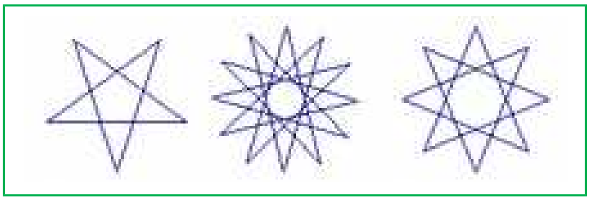
37. Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una simetria central, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

38. Quin nombre mínim de quadrats és necessari pintar de verd perquè el quadrat gran tinga un centre de simetria?



39. Hem girat el punt *A* (3, 5) i hem obtingut el punt *A'* (7, –2). Determina el centre de gir i l'angle utilitzant regla, compàs i transportador d'angles.

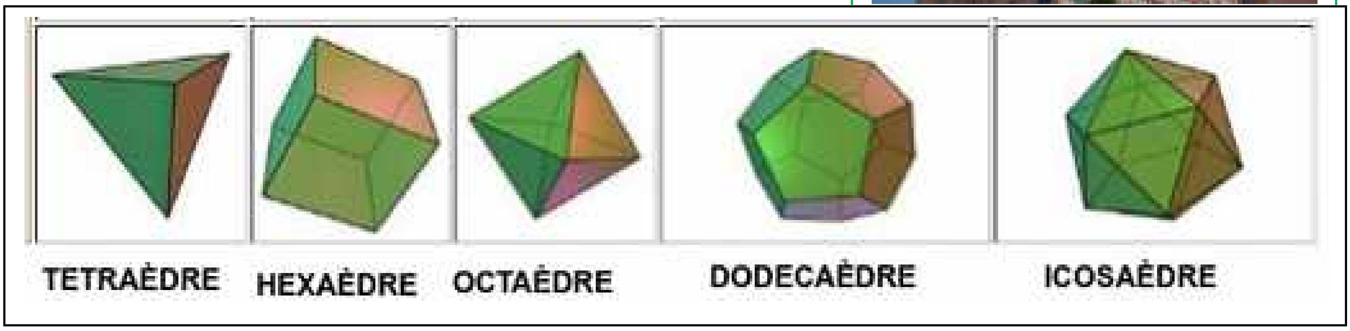


40. Quins dels polígons estrelats de la figura del marge tenen centre de simetria? Indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixa invariants a cada un d'ells.

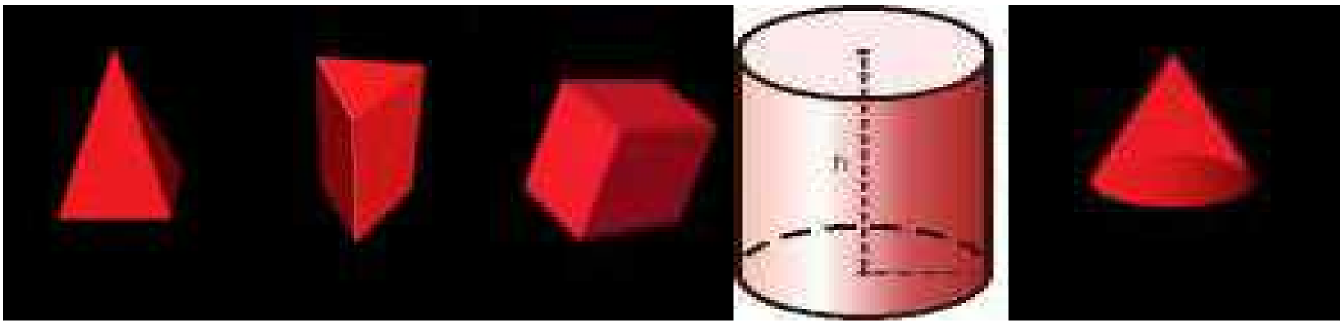
41. Determina tres objectes quotidians que tinguen algun eix de gir.

42. Observa aquesta torre mudèjar de Terol. Està dissenyada utilitzant girs a l'espai. Quin és el seu eix de gir? I l'angle de gir?

43. Pensa als cinc poliedres regulars. Uns tenen simetria central a l'espai, altres no. Quins la tenen?



44. Pensa ara als següents cossos geomètrics: Una piràmide quadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboïdal oblic, un cilindre i un con. Quins poden formar-se mitjançant girs a l'espai? Quin és el seu eix de gir? Quines tenen simetria central i quins no?



Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

Simetries

45. Dibuixa al teu quadern un sistema de referència i una lletra B. Dibuixa la lletra simètrica de B respecte de l'eix d'abscisses i respecte de l'eix d'ordenades.

46. Classifica les lletres majúscules de l'alfabet, a) en les que són simètriques respecte d'un eix de simetria horitzontal i un eix de simetria vertical. b) en les que només són simètriques respecte d'un eix de simetria vertical, c) en les que només ho són respecte de l'eix de simetria horitzontal, i d) en les que no tenen cap eix de simetria. e) Comprova que les lletres que tenen dos eixos de simetria tenen centre de simetria. La raó ja la saps: La composició de dues simetries d'eixos secants és un gir.

47. Quins de les següents successions de lletres tenen un únic eix de simetria? Quines tenen dos eixos? Quines cap? Quines tenen centre de simetria?

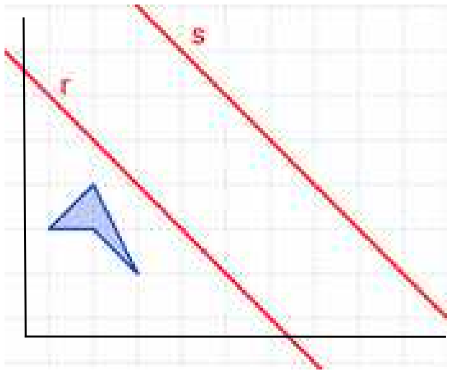
a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica els eixos de simetria de les figures següents:

a) Quadrat. b) Triangle equilàter. c) Trapezi isòsceles. d) Hexàgon.

e) Circumferència. f) Rectangle. g) Rombe. h) Pentàgon.

49. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2,4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos paral·lels, la primera respecte a l'eix *r* i la segona respecte a l'eix *s*.



a) Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per la dita composició de simetries.

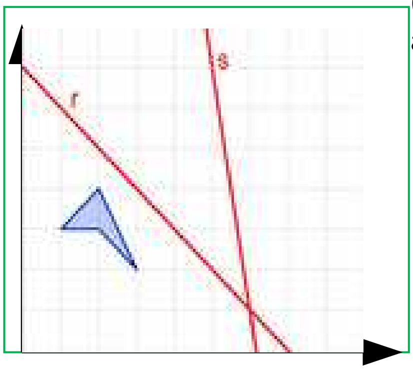
Si anomenem *C* al quadrilàter inicial, *C'* al seu simètric respecte a l'eix *r* i *C''* al simètric de *C'* respecte a l'eix *s*:

b) Quina isometria ens permet transformar directament *C* en *C''*.

c) Quins elements la defineixen?

d) Què ocorre si apliquem les dues simetries en distint orde, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix *r*? Quines són ara les coordenades dels vèrtexs de la figura *C'''* transformada?

50. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2,4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos secants, la primera respecte a l'eix *r* i la segona respecte a l'eix *s*.



a) Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per la composició de simetries.

b) Si anomenem *C* al polígon inicial, *C'* al simètric respecte a l'eix *r* i *C''* al simètric de *C'* respecte a l'eix *s*: Quina isometria ens permet transformar directament *C* en *C''*. Quins elements la defineixen?

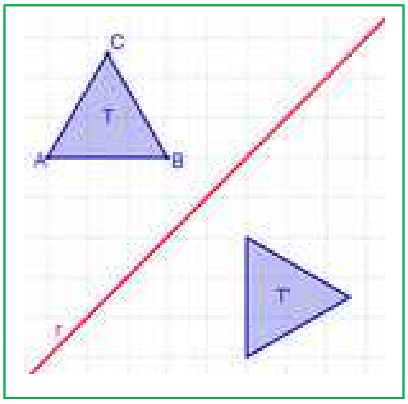
c) Què ocorre si apliquem les dues simetries en distint orde, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix *r*? Quina isometria tenim ara? Quins elements la defineixen?

Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

d) Indica les coordenades dels vèrtexs de la figura transformada si primer apliquem la simetria d'eix s i després la d'eix *r*.

51. Dibuixa en un paper el contorn d'una figura irregular, en almenys cinc posicions. (Si no se t'acut cap figura, dibuixa una lletra G). a) Són iguals aquestes figures? Explica el teu raonament. b) Com pots passar d'una figura a una altra? c) Pinta amb el mateix color totes les figures que pots aconseguir des de la posició inicial, desplaçant la figura sense alçar-la. Utilitza un altre color per a les restants. Es pot passar sempre d'una figura a una altra del mateix color, lliscant la figura sense donar-li la volta? Canvien les dimensions de la figura?

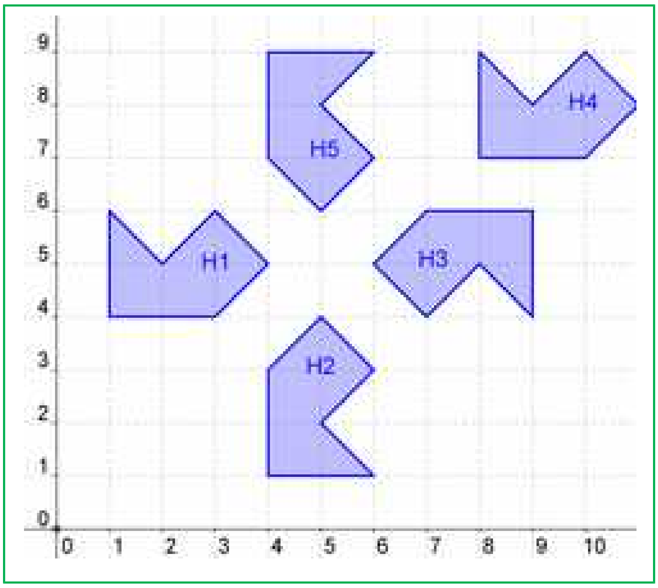
52. El triangle equilàter T de la figura s'ha transformat en el triangle T' mitjançant una simetria axial d'eix *r*. a) Copia el dibuix al teu quadern i anomena al dibuix a *A'*, *B'* i *C'*, que són els transformats de *A, B i C* respectivament. b) Troba un gir que transforme T en T', indicant el centre i l'angle de gir, quins són ara els transformats dels vèrtexs *A, B i C*.



53. Llibre d'espills: Utilitza un llibre d'espills per a obtindre simetries. Pots construir un amb dos rectangles de metacrilat units amb cinta d'embalar. Mira pel llibre d'espills un segment, una circumferència, diferents figures...

Problemes

54. Indica els punts invariants i les rectes invariants en cada un dels següents moviments.



a) Una translació segons el vector (1, 3).
b) Una simetria axial respecte a l'eix d'ordenades.
c) Una simetria central respecte al centre de coordenades.

55. A la figura adjunta l'hexàgon 1, denominat H1, ha canviat de posició mitjançant moviments. A) Indica el tipus de moviment: translació, gir o simetria que transforma H1 en cada un dels altres hexàgons. B) Determina, en cada cas, els elements bàsics que defineixen cada transformació indicant les coordenades de cada un dels vèrtexs de H1 quines coordenades té en cada un dels transformats, i si és possible, generalitza.

56. Sabem que les translacions no deixen cap punt invariant, però, a) deixa alguna recta invariant?

b) La simetria central deixa un punt invariant, el centre, però, quines recta deixa invariants una simetria central en el pla? I una simetria central a l'espai?

c) Una simetria axial deixa invariants tots els punts del seu eix, que és una recta invariant de punts invariants, però quines altres rectes invariants deixa una simetria axial? I quins altres punts?

d) Una simetria especular, a l'espai, deixa un pla invariant de punts invariants, el pla de simetria, quins altres plans deixa invariants? Quines altres rectes? Quins altres punts?

57. Copia al teu quadern i completa les taules següents:

Taula I: Al pla	Punts invariants	Rectes invariants	Rectes invariants de punts invariants
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria axial			
Simetria amb lliscament			

Taula II: A l'espai	Punts invariants	Rectes invariants	Plans invariants
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria especular			
Simetria amb lliscament			

58. Dibuixa el triangle T de vèrtexs *A* (2, 1), *B* (4, 2) i *C* (1, 3)

a) Aplica a T una translació segons el vector ***u*** = (–3, 2), anomena T' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

b) Dibuixa el triangle T'' que resulta d'aplicar a T' un gir de 270º respecte a l'origen de coordenades i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

59. Dibuixa el quadrat *K* de vèrtexs *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) i *D* (3, 4).

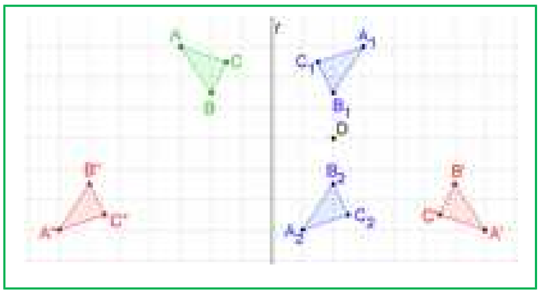
a) Aplica a *K* una translació segons el vector ***u*** = (–3, –1), anomena *K*' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

b) Dibuixa el quadrat *C*'' que resulta d'aplicar a *C* una simetria central respecte al punt (3, 0) i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

Problemes d'ampliació

60. Transforma la lletra L mitjançant dues isometries consecutives. Pots obtindre el resultat final mitjançant una única isometria? Analitza possibles situacions.

61. Plega una tira de paper com un acordió. Fes alguns talls i desplega-la. Hauràs confeccionat un fris. Assenyala en ell totes les isometries. Assaja altres dissenys de frisos.

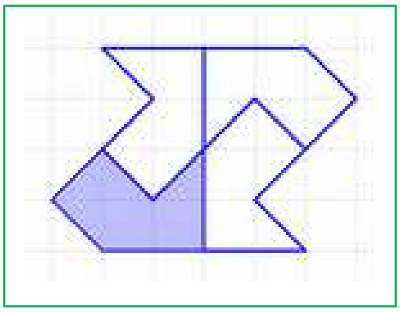


62. La composició d'isometries no és commutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometria que transforma el triangle *ABC* en $A_1B_1C_1$ i la que transforma aquest en $A_2B_2C_2$

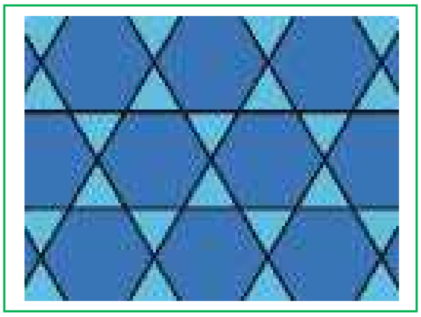
b) Indica la isometria que transforma el triangle *ABC* en *A'B'C'* i la que transforma aquest en *A''B''C''*.

c) Quina conclusió obtens?



63. Indica les isometries que cal aplicar a la figura pintada en blau per a obtindre la figura completa. Determina els elements que defineixen cada isometria. Pinta de distint color cada un dels quatre polígons i construeix un fris.

64. 1) La lletra A té un eix de simetria vertical. 2) La lletra H té dos eixos de simetria, un vertical i l'altre horitzontal, a més d'un centre de simetria. 3) La lletra Z té centre de simetria, però cap eix de simetria. 4) La lletra E té un eix de simetria horitzontal. 5) La lletra F no té centre de simetria ni cap eix de simetria. Classifica les lletres de **l'abecedari** en aquests grups, al primer grup estaran les que tenen un eix de simetria vertical, com la lletra A, al segon les que té dos eixos de simetria, un vertical i l'altre horitzontal, com la lletra H, al tercer les que només tenen centre de simetria com la lletra Z, i al quart les que com la lletra E tenen un eix de simetria horitzontal. Finalment, en un cinquè grup les que no tenen cap tipus de simetria com la lletra F.



65. **Anàlisi d'un mosaic:** Dibuixa al teu quadern una trama de triangles, en ella un esquema del mosaic del marge i assenyala al teu dibuix tots els eixos de simetria, els centres de gir i els vectors de translacions pels quals el transformat d'un punt del mosaic (suposat que es prolonga fins a l'infinit) és també un punt del mosaic.

a) Hi ha girs de 60º? Si n'hi ha marca els centres d'aquests girs amb un asterisc *.

b) Hi ha girs de 180º? Si n'hi ha marca els centres d'aquests girs amb un cercle o.

c) Assenyala els eixos de simetria que trobes amb una línia de punts.

Autores: Adela Salvador i María Molero

Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

d) Dibuixa al marge els vectors de translació, horitzontals i verticals, que hi haja.

e) Dissenya el teu propi mosaic que mantinga els mateixos moviments fent quelcom senzill (un arc, una poligonal) que es vaja movent.

66. Analitza aquest altre mosaic. Indica les transformacions que hem d'aplicar a l'element mínim del mosaic adjunt per a deixar-ho invariant. Indica també els elements que les caracteritzen.

67. A l'animació següent observa la forma d'obtindre un mosaic.

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/195375_am_1.swf

Ha pres una cel·la unitat de 4 quadradets, ha seleccionat un motiu mínim... Indica que simetries ha utilitzat, quins girs i quines translacions.

68. Determina els eixos i centres de simetria de les següents gràfiques de funcions. Assenyala quins són parells i quins imparells. (Dibuixa prèviament la seua gràfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetraedre regular té 6 plans de simetria, dibuixa'ls al teu quadern i indica la forma de determinar-los.

70. Un octaedre té 9 plans de simetria, dibuixa'ls, 6 passen pels punts mitjans d'arestes oposades, saps caracteritzar els altres 3? Intenta trobar plans de simetria en un dodecaedre, i en un icosaedre.

71. Un ser humà és més o menys simètric. Els mamífers, pardals i peixos també ho són. Tenen un pla de simetria. A) I les estreles de mar com la de la figura, tenen un pla de simetria? B) Tenen més? Quants? C) Té un eix de gir? De quins angles? D) Té simetria central? E) Dibuixa al teu quadern una estrela de cinc puntes i indica els seus eixos de simetria i el seu centre de gir. (És un grup de Leonardo D_5)

72. Un prisma recte de base un rectangle, té simetria central? Té plans de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

73. Una piràmide regular de base un triangle equilàter, té simetria central? Té plans de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

74. Descriu les **isometries** que deixen invariants als següents cossos geomètrics, analitzant els seus elements:

a) Esfera	b) Cilindre recte	c) Prisma regular de base quadrada
d) Con	e) Cilindre oblic	f) Piràmide recta de base un triangle equilàter

75. Retalla un triangle isòsceles obtusangle. Col·loca'l al llibre d'espills de manera que dos costats queden recolzats en la superfície dels espills, i l'altre sobre la taula. Mou les pàgines del llibre de manera que veges distintes piràmides, en les que la seua base són polígons regulars. Açò ens permet estudiar el gir de les piràmides, de quin angle és. (Pots construir-te un llibre d'espills amb dos espills xicotets o dos fulls de metacrilat, apegats amb cinta d'embalar adhesiva).

76. Pensa en els poliedres regulars. Copia la següent taula al teu quadern i completa-la:

POLIEDRE	Té centre de simetria? SI/NO	Té eixos de gir? SI/NO	Quants eixos de gir té? De quins angles?	Té plans de simetria? SI/NO	Quants plans de simetria té?
Tetraedre					
Cub					
Octaedre					
Dodecaedre					
Icosaedre					

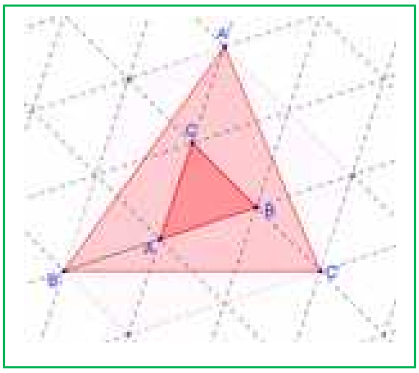
77. Contesta a les següents preguntes justificant les respostes.

a) És possible que una figura tinga dos eixos de simetria paral·lels?

b) La intersecció de dos eixos de simetria, és sempre un centre de simetria?

c) Per què un espill canvia la dreta per l'esquerra i no canvia el de dalt pel de baix?

d) És cert que dos cercles simètrics respecte a un pla són sempre talls d'una esfera?

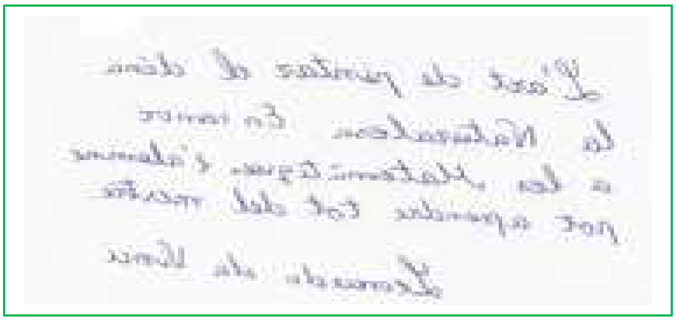


78. A partir d'un triangle qualsevol *ABC* construïm el triangle *A'B'C'*, en el que *A'* és el simètric de *A* respecte al centre *C*, *B'* és el simètric de *B* respecte al centre *A* i *C'* és el simètric de *C* respecte al centre *B*. Utilitza la trama de triangles per a calcular l'àrea del triangle *A'B'C' sabent* que el valor de l'àrea del triangle *ABC* és 1 u^2.

79. Calidoscopis dièdrics: Has mirat alguna vegada per un calidoscopi? Estan formats per un tub de cartó, dos espills formant angle i trossets de plàstic o cristallets que combinen les seues imatges donant lloc a precioses composicions plenes de simetries. Fabrica un, i estudia els girs i simetries que observes.

80. Simetries plegant paper: a) Doblega un full de paper i retalla una figura. En desplegar hauràs obtingut la figura simètrica. b) Doblega un full de paper mitjançant dos duplicitats perpendiculars. (Hauràs de fer coincidir la duplicitat amb si mateixa). Mantenint el paper doblegat retalla una figura. En desplegar, la figura obtinguda tindrà una doble simetria. c) Amb un altre full de paper, torna a doblegar mitjançant dos duplicitats perpendiculars. Doblega novament per la mitat l'angle recte obtingut. Retalla els dissenys que més t'agraden. Estàs construint models de floc de neu. Quants eixos de simetria has obtingut? d) Intenta ara doblegar el full de paper per a obtindre eixos de simetria que formen angles de 60º i de 30º. Utilitza la teua imaginació per a obtindre nous dissenys de flocs de neu.

81. La simetria a l'escriptura de Leonardo da Vinci: Sabies que, si mires allò que s'ha escrit per Leonardo en un espill pots llegir-ho amb facilitat? És un bon exemple de simetria especular. Llig el següent text de Leonardo.



Autores: Adela Salvador i María Molero
Traducció al valencià: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: María Molero; Milagros Latasa; Banc d'Imatges d'INTEF i Adela Salvador

82. Utilitza la propietat de la composició de dues simetries d'eixos secants per a demostrar que un angle inscrit en una circumferència és la mitat del central que comprén el mateix arc. *Ajuda*: Traça la circumferència, un angle inscrit i el seu central. Traça dues rectes perpendiculars pel centre de la circumferència als costats de l'angle inscrit.

83. Estudia les isometries que deixen invariant a un triangle equilàter. Anomena els seus vèrtexs i els seus eixos de simetria. a) Aplica al triangle un gir de 120º i després una simetria. Pots obtindre el mateix resultat amb una única transformació? b) Repeteix el mateix amb un gir de 240º i una altra simetria. c) Comprova que sempre la composició d'un gir per una simetria és una altra simetria. d) Fes ara un gir de 120º i un altre de 240º, què obtens? e) I amb dos girs de 240º? f) Comprova que la composició de dos girs del mateix centre és sempre un gir (o la identitat).

84. En passejar per la ciutat, mirar l'aula, en tot el que ens rodeja podem veure com la Geometria permet explicar-ho. Mira aquest mosaic. Busca un motiu mínim, és a dir, un tros de mosaic que et permet, mitjançant moviments, recompondre-ho. Al disseny d'aquest mosaic, s'han utilitzat simetries?

- Hi ha simetries d'eix vertical?
- Hi ha simetries d'eix horitzontal?
- Hi ha altres eixos de simetria? Quins?
- Hi ha girs de 90º?
- Hi ha girs de 45º?
- Hi ha translacions?

85. Dissenya al teu quadern un motiu mínim (si no se t'acut cap, usa la lletra L), i utilitza les mateixes simetries, girs i translacions que s'usen en aquest mosaic per a fer el teu propi disseny de mosaic.

Observa el teu disseny, i respon a les preguntes següents:

- Si compons dues simetries d'eixos paral·lels, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica al teu disseny de mosaic en quina ocasió has composat dues simetries d'eixos paral·lels i descriu completament el moviment que has obtingut.
- Si compons dues simetries d'eixos secants, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica al teu disseny en quina ocasió has composat dues simetries d'eixos secants i descriu completament el moviment que has obtingut.

86. Mira aquest altre mosaic. És el famós mosaic Nassarita dels ossos. No tindrem en compte el color. Per a dissenyar l'os, dibuixa al teu quadern un quadrat. Mira la figura. Talla als costats verticals un trapezi i col·loca'l sobre els costats horitzontals. Ja tens l'os. És simètric? Té un eix de simetria vertical i un altre horitzontal, per la qual cosa podríem prendre com a motiu mínim la quarta part de l'os.

- Per a passar d'un os de color a un os blanc, quina transformació s'ha usat?

- Dibuixa al teu quadern, en color roig, eixos de simetria verticals i en color blau, eixos de simetria horitzontals.
- Assenyala, amb un asterisc, (*), centres de gir de 90º, i amb un cercle, (o), centres de simetria.
- Utilitzant l'os dibuixa al teu quadern el mosaic complet.

87. Dibuixa al teu quadern una lletra F majúscula, i traça també dues rectes *m* i *n* que formen un angle de 30º i es tallen en un punt *O*. Dibuixa el seu transformat per:

a) Un gir de centre el punt *O* i angle 60º.
b) La simetria d'eix *n*
c) La simetria d'eix *m*
d) La composició de la simetria d'eix *n* amb la d'eix *m*
e) Compara el resultat obtingut en l'apartat a) amb el de l'apartat d). Què observes?

AUTOAVALUACIÓ

1. Amb la translació de vector **u** = (–3, 8) traslladem el punt *P* (5, –4) fins al punt *P'* i les coordenades de *P´* són:

a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)

2. En traslladar *A* (–1, 8) fins *A'* (4, 6) s'utilitza el vector **u**:

a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)

3. La transformació que porta el punt *A* (2, 0) al punt *A'* (0, 2) **no** pot ser:

a) Un gir de centre l'origen i angle 90º

b) Una translació de vector **u** = (–2, 2)

c) Un gir de centre l'origen i angle 270º

d) Una simetria d'eix y = *x*.

4. La transformació identitat també s'anomena:

a) Simetria central b) Simetria axial c) Gir de 180º d) Translació de vector nul (0, 0)

5. Com ha de ser un triangle per a tindre més de dos eixos de simetria?

a) rectangle b) isòsceles c) equilàter d) rectangle isòsceles

6.La simetria central al pla és un gir de:

a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º

7. Al pla, la composició de dues simetries d'eixos secants sempre és:

a)una translació b) un gir c) una altra simetria d) la simetria central

8. Les coordenades del punt simètric al punt *A* (3, 7) respecte de l'eix d'ordenades són:

a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)

9. Indica quina de les següents lletres **no** té simetria central:

a) O b) H c) S d) D

10. Sempre s'obté un gir fent successivament:

a) Dos girs de distint centre

b) Dues simetries d'eixos secants

c) Un gir i una simetria

d) Dues simetries d'eixos paral·lels.