Matemàtiques orientades a las ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO
Capítol 7:
Geometria en el pla

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Luis Suberviola

Revisor: Alberto de la Torre

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF; Pedro Luis Suberviola i Milagros Latasa

Índex

Resum

Tales, Pitàgores i molt posteriorment Euclides són matemàtics grecs als què devem l'estudi de la Geometria deductiva. Anteriorment egipcis i babilonis van utilitzar la Geometria per a resoldre problemes concrets, com tornar a posar límits a les terres després de les inundacions del Nil. Però a Grècia es va utilitzar el raonament lògic per a deduir les propietats. Euclides va intentar arreplegar el coneixement que existia i va escriure *Els Elements* que consta de 13 llibres o capítols, dels que els sis primers tracten de Geometria Plana, i l'últim de Geometria en l'espai. En aquest llibre defineix conceptes, tan difícils de definir com a punt o recta, i enuncia els cinc axiomes d'Euclides dels que part com a veritats no demostrables, i a partir d'ells demostra la resta de les propietats o teoremes. Aquests axiomes són:

Euclides

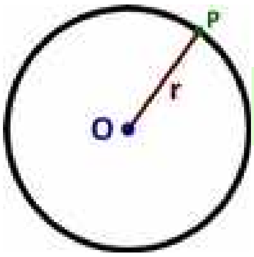
1. Donats dos punts es pot traçar una recta que els uneix.
2. Qualsevol segment pot ser prolongat de forma contínua en una recta il·limitada.
3. Es pot traçar una circumferència de centre en qualsevol punt i radi qualsevol.
4. Tots els angles rectes són iguals.
5. Donada una recta i un punt, es pot traçar una única recta paral·lela a la recta pel dit punt.

En aquest capítol recordarem qüestions que ja coneixes de Geometria en el pla, aprofundint en algunes d'elles, com en els criteris de semblança dels triangles. D'esta manera seràs capaç de resoldre un bon nombre de problemes.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

1. LLOCS GEOMÈTRICS

Moltes vegades definim una figura geomètrica com els punts del pla que compleixen una determinada condició. Diem llavors que és un *lloc geomètric del pla*.



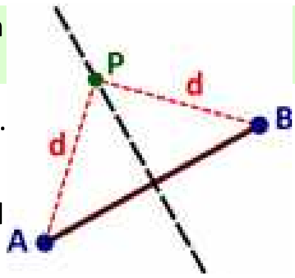
1.1. La circumferència

La **circumferència** és el lloc geomètric dels punts del pla la distància del qual a un punt del mateix (el centre) és un valor determinat (el radi).

Tots els punts de la circumferència tenen una distància igual al radi (*r*) del centre (*O*).

1.2. Mediatriu d'un segment

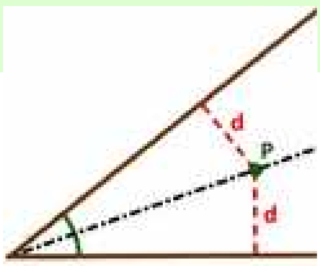
La **mediatriu** d'un segment és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels extrems del mateix.



Un punt *P* de la mediatriu verifica que està a la mateixa distància de A que de *B*. Qualsevol altre punt que ho complisca pertany a la mediatriu.

La mediatriu és una recta perpendicular al segment que passa pel punt mitjà del mateix.

1.3. Bisectriu d'un angle



Donat un angle delimitat per dues rectes, la **bisectriu** de l'angle és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les mateixes.

Un punt *P* de la bisectriu verifica que està a la mateixa distància de les dues rectes que formen l'angle. Qualsevol altre punt que ho complisca pertany a la bisectriu.

La bisectriu passa pel vèrtex de l'angle i divideix a aquest en dos angles iguals.

Activitats proposades

1. Un agricultor troba en el seu camp una bomba de la Guerra Civil. Les autoritats estableixen una distància de seguretat de 50 metres. Com s'ha d'acordonar la zona?

2. Un joc de dos participants consisteix en el fet que se situen a una distància de dos metres entre si i es posen diverses banderes a la mateixa distància d'ambdós. La primera a 5 metres, la segona a 10 metres, la tercera a 15 i així successivament. Sobre quina línia imaginària estarien situades les banderes?

3. Quan en una acampada s'assenten al voltant del foc ho fan formant un cercle. Per què?

4. Utilitza regla i compàs per a dibuixar la bisectriu d'un angle i la mediatriu d'un segment.

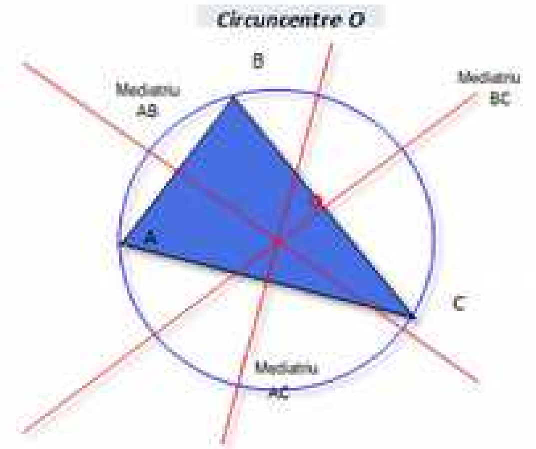
Autor: Pedro Luis Superviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Superviola

1.4. Rectes i punts notables d'un triangle

Recorda que:

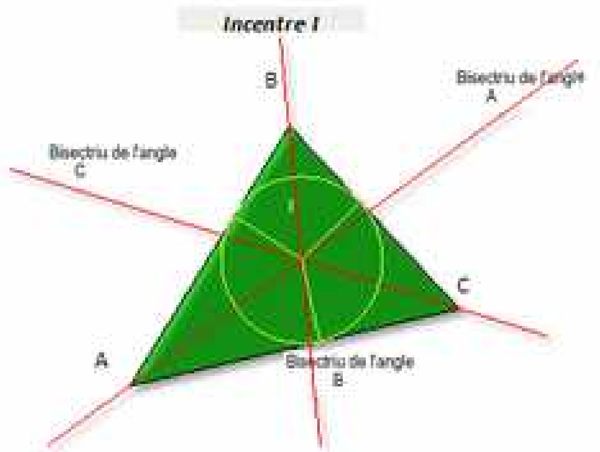
En qualsevol triangle podem trobar les seues mediatrius, bisectrius, altures i mitjanes.

Mediatrius. Circuncentre.



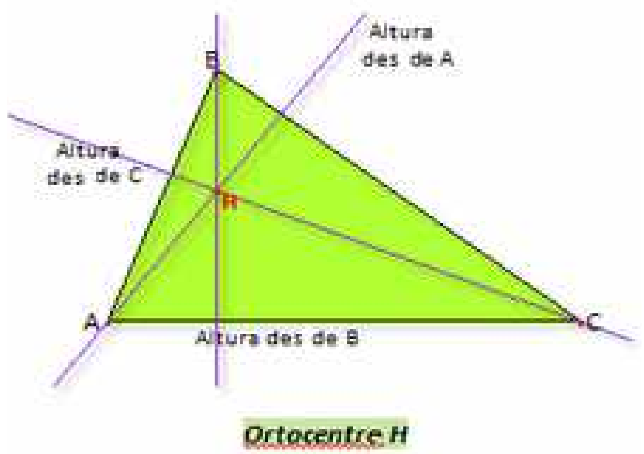
Les mediatrius es tallen en el circumcentre.
El circumcentre està a la mateixa distància dels tres vèrtexs. És el centre de la circumferència circumscrita.

Bisectrius. Incentre.



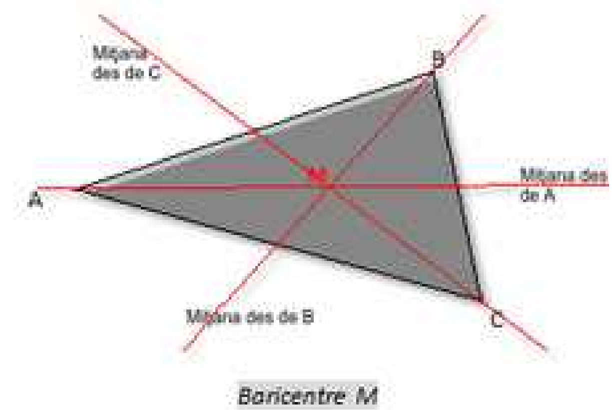
Les bisectrius es tallen en l'Incentre.L'incentre està a la mateixa distància dels tres costats.
És el centre de la circumferència inscrita.

Altures. Ortocentre.



Les altures són les perpendiculars a un costat traçades des del vèrtex oposat. Es tallen en l'ortocentre.

Mitjanes. Baricentre.



Les mitjanes són les rectes que passen per un vèrtex i pel punt mitjà del costat oposat. Divideixen al triangle en dos triangles de la mateixa àrea.
Es tallen en el baricentre. La distància del mateix a cada costat és el doble de la seua distància al vèrtex oposat corresponent.

Si la **mediatriu** d'un segment és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels extrems del segment, cada mediatriu d'un triangle equidistarà de dos dels vèrtexs del triangle i és la mediatriu d'un dels seus costats. Les tres mediatrius es tallen en un punt, el **circumcentre**, que, per tant, distarà el mateix de cada un dels tres vèrtexs del triangle, i és el centre d'una circumferència circumscrita al triangle, que passa pels seus tres vèrtexs.

Si la bisectriu d'un angle equidista dels costats de l'angle, ara cada una de les tres bisectrius d'un triangle equidistarà de dos dels costats del triangle. Les tres bisectrius es tallen en un punt, **l'incentre**, que, per tant, equidista dels tres costats del triangle i és el centre de la circumferència inscrita al triangle.

En qualsevol triangle el circumcentre, ortocentre i baricentre estan sobre una mateixa línia recta, a la que es denomina *Recta d'Euler*. Aquesta recta conté altres punts notables. L'incentre està en dita recta només si el triangle és isòsceles.

Activitats proposades

5. Dibuixa al teu quadern un triangle de costats 7, 6 i 4 cm. Traça en ell les circumferències inscrites i circumscrites.

6. Dibuixa al teu quadern un triangle de costat 8 cm i angles adjacents al mateix de 40º i 30º. Troba el seu ortocentre i el seu baricentre.

7. Dibuixa al teu quadern un triangle amb un angle de 40º comprés entre dos costats de 6 i 4 cm. Obtín el seu circumcentre i el seu incentre.

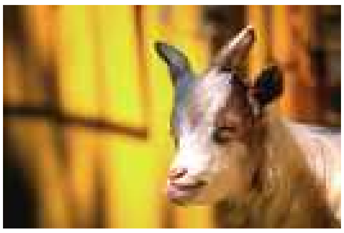
8. Què passa amb les rectes i els punts notables en un triangle equilàter?

9. Dibuixa un triangle isòsceles amb l'angle desigual de 40º. Traça les rectes notables per al costat desigual i per a un dels costats iguals. Què passa?

10. Una formiga camina per una mitjana d'un triangle partint del vèrtex. Quan arriba al baricentre ha recorregut 8 centímetres. Quina distància li falta per a arribar al punt mitjà del costat oposat al vèrtex d'on va partir?

11. Volem situar un fanal en una plaça triangular. On la posaríem?

12. Tenim un camp triangular sense tancar i volem lligar una cabra de manera que no isca del camp però que accedisca al màxim de past possible. On posaríem el pal?



13. A Yaiza i al seu germà Aitor els encanta la tortada. Sa mare els ha fet una triangular. Yaiza l'ha de tallar però Aitor triarà primer el seu tros. Com hauria de tallar Yaiza la tortada?

14. L'ortocentre d'un triangle rectangle, on està?

15. Comprova que el circumcentre d'un triangle rectangle està sempre en el punt mitjà de la hipotenusa.

16. El baricentre és el centre de gravetat. Construeix un triangle de cartolina i dibuixa el seu baricentre. Si poses el triangle horitzontalment en l'aire només subjectat per la punta d'un llapis en el baricentre comprovaràs que es subjecta.

17. Calcula el costat d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència de 10 cm de radi. [*Ajuda*: Aplica que en aquest cas el circumcentre coincideix amb el baricentre i que aquest últim està al doble de distància del vèrtex que del costat oposat.]

1.5. Ús de Geogebra per a l'estudi dels punts i rectes notables d'un triangle

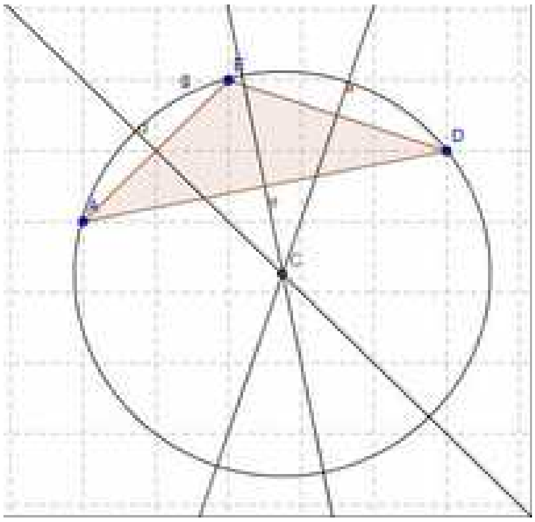
S'utilitza el programa **Geogebra** per a determinar el *circumcentre*, *l'incentre* i el *baricentre* d'un triangle, estudiar les seues propietats i dibuixar la *recta d'Euler*.

Activitats resoltes

Una vegada obert el programa en l'opció del menú **Visualitza**, oculta **Eixos** i activa **Quadrícula.**

Circumcentre:

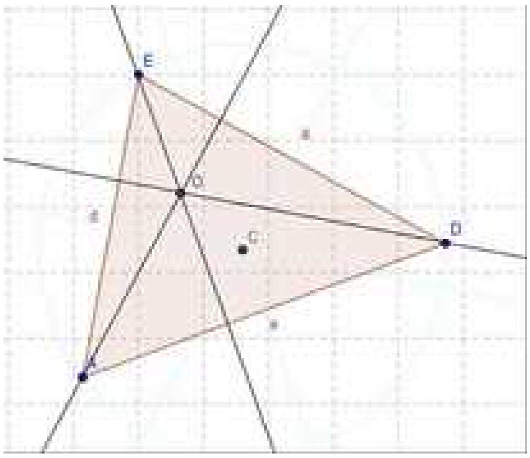
- *Dibuixa les tres mediatrius d'un triangle i determina el seu circumcentre.*



- Defineix tres punts *A*, *D* i *E*, observa que el programa els defineix com *A, B* i *C*, utilitza el botó dret del ratolí i l'opció **Renomenar** per a canviar el nom.
- Amb la ferramenta **Polígon** activada dibuixa el triangle que té per vèrtexs aquests punts. Observa que cada costat té la mateixa lletra que l'angle oposat amb minúscula.
- Amb la ferramenta **Mediatriu** dibuixa les mediatrius de dos costats, els segments *a* i *d*.
- Determina amb **Intersecció de dos objectes** el punt comú d'aquestes rectes i amb **Renomena** posa'l *C*. El dit punt és el *circumcentre* del triangle.
- Dibuixa la **Mediatriu** del segment *e* i observa que passa pel punt *C*.
- Activa **circumferència per centre i punt que creua** per a dibuixar la circumferència circumscrita al triangle.
- Utilitza el **Punter** per a desplaçar els vèrtexs *A*, *D* o *E* i comprovar que la circumferència roman circumscrita al triangle.

Ortocentre:

- *Dibuixa les tres altures d'un triangle i determina el seu ortocentre.*

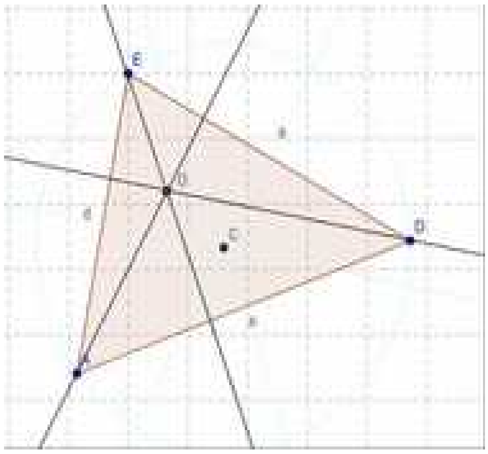


- Al mateix triangle canvia el color de les mediatrius i la circumferència situant-te amb el ratolí sobre el traç o sobre la seua equació i amb el botó dret tria en **Propietats, Color** un blau molt pròxim al blanc.
- Dibuixa dues altures amb la ferramenta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa et demana que el punt pel qual vas a traçar-la i la recta o el segment respecte a què és perpendicular.
- Determina amb **Intersecció de dos objectes *l'ortocentre*** com el punt de tall de les dues altures i amb **Renomena** denomina'l *O*.
- Dibuixa la tercera altura i comprova que passa per *l'ortocentre*, desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.

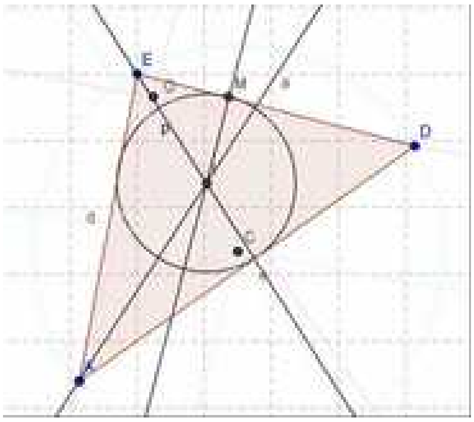
Autor: Pedro Luis Subervola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Subervola

Incentre:

Dibuixa les tres bisectrius d'un triangle i determina el seu incentre.



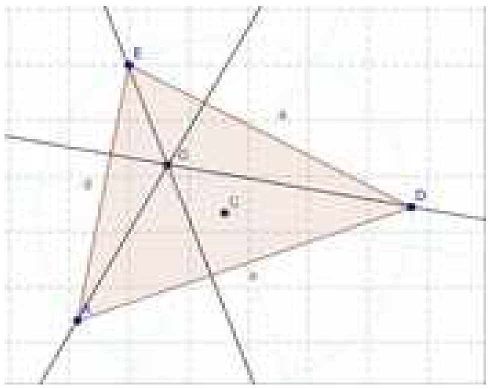
- Canvia el color de les altures com en la construcció anterior, ara amb color rosa pàl·lid.
- Amb la ferramenta **Bisectriu** dibuixa dues bisectrius. Observa que per a determinar la bisectriu d'un angle és prou assenyalar tres punts que poden ser els vèrtexs del triangle en l'orde adequat.
- Determina *l'incentre* amb **Intersecció de dos objectes** com el punt de tall de les dues bisectrius i amb **Renomena** denomina'l *I*.
- Dibuixa la tercera bisectriu i comprova que sempre passa per *l'incentre*, desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.



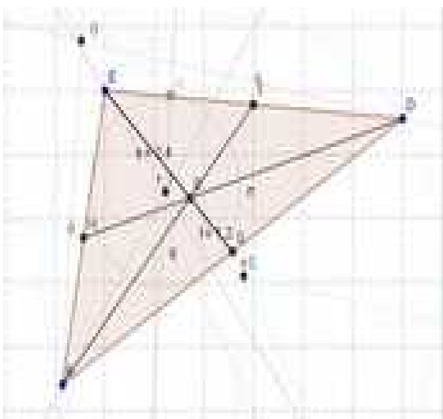
- Traça des del punt *I* una **Recta perpendicular** a un dels costats i amb **Intersecció de dos objectes** calcula el punt de tall entre aquesta recta i el costat del triangle i amb **Renomena** anomena'l *M*.
- Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.
- Desplaça amb el **punter** els vèrtexs del triangle per a comprovar que la circumferència roman inscrita al triangle.

Baricentre:

Dibuixa les tres mitjanes d'un triangle i determina el seu baricentre.



- Canvia el color de les bisectrius, del punt *M* i de la circumferència inscrita, amb gris molt pàl·lid, com en les construccions anteriors.
- Amb la ferramenta **Punt mitjà o centre** calcula els punts mitjans de dos costats. Si el programa anomena algun amb la lletra *B*, utilitza **Reanomena** per a anomenar-lo *H*.



- Amb la ferramenta **Segment entre dos punts** dibuixa dues **mitjanes** i amb **Intersecció de dos objectes**, el seu punt de tall, el **baricentre**, que anomenaràs *B*.
- Traça la tercera mitjana i verifica que el baricentre pertany a aquest segment desplaçant amb el **Punter** els vèrtexs del triangle.

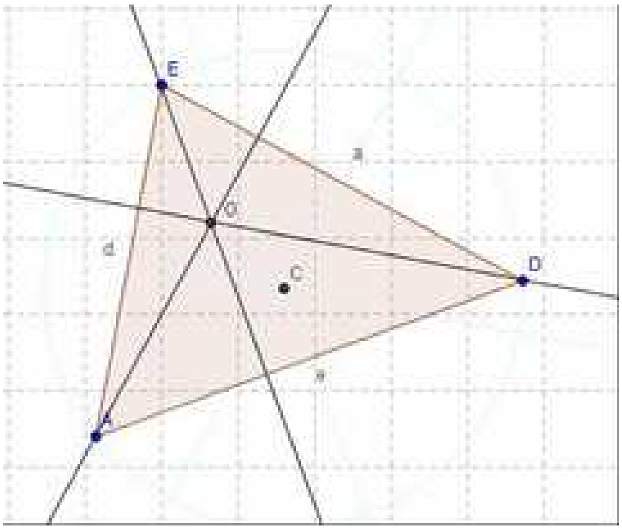
Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

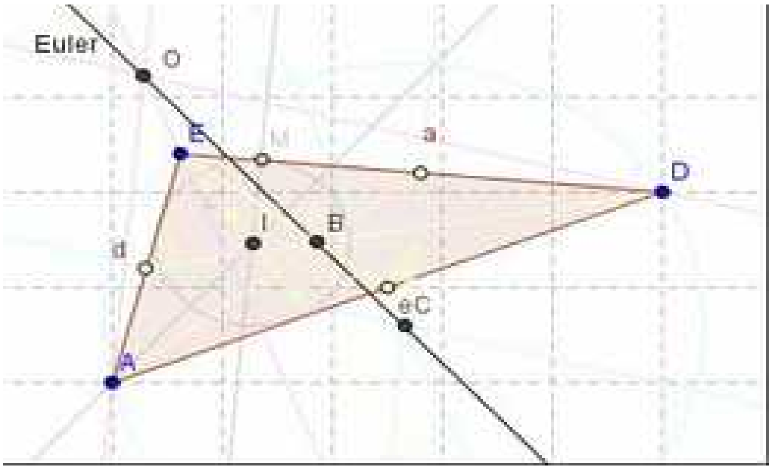
- Activa **Segment entre dos punts** i determina els dos segments determinats pel baricentre en una de les mitjanes.
- Activa Distància **per a** mesurar aquests segments.
- Desplaça els vèrtexs del triangle amb el **Punter** i observa la relació que existeix entre les mesures realitzades.

Recta d'Euler

Dibuixa la recta que passa pel circumcentre i l'ortocentre.

- Canvia el color de les mitjanes, dels punts mitjans dels costats i dels dos segments de la mitjana, amb groc molt pàl·lid.
- Amb la ferramenta **Recta que passa per dos punts** dibuixa la recta d'Euler que passa pel *circumcentre* i *l'ortocentre* i utilitza Reanomena **per anomenar**-**la** *Euler*. Comprova que el baricentre pertany a la recta d'Euler i que l'incentre no sempre pertany.





Activitats proposades

18. Repeteix les activitats resoltes. Modifica al teu gust colors i línies.

19. Mou un dels vèrtexs originals del triangle i indica quines coses romanen invariants.

20. Comprova que es verifiquen les propietats de *circumcentre*, com a centre de la circumferència circumscrita, *de l'incentre*, com a centre de la circumferència inscrita.

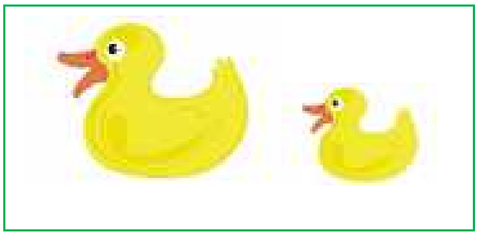
21. El *baricentre* divideix a la mitjana en dues part, sent una dos terços de l'altra. Comprova-ho.

22. La recta *d'Euler* passa pel *circumcentre*, el *baricentre* i *l'ortocentre*, i què *l'incentre* no sempre pertany a la recta *d'Euler*. Com ha de ser el triangle perquè pertanga?

23. Mou els vèrtexs del triangle per a determinar si és possible que els seus quatre punts notables coincidisquen.

2. SEMBLANÇA

2.1. Figures semblants

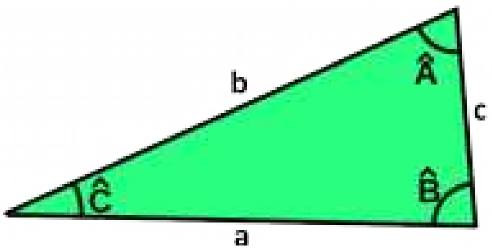


Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. És molt útil saber reconéixer la semblança per a poder estudiar una figura i inferir així propietats d'una figura semblant a ella que és més gran o inaccessible. La semblança conserva els angles i manté la proporció entre les distàncies.

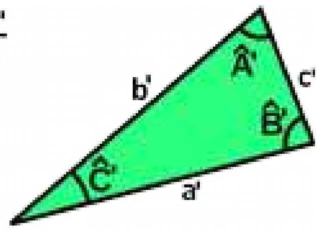
Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.

2.2. Triangles semblants. Criteris de semblança.

Dos triangles són **semblants** tenen tots els angles iguals i els costats proporcionals.



$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$
$$\hat{A}=\hat{A}'$$
$$\hat{B}=\hat{B}'$$
$$\hat{C}=\hat{C}'$$



Per reconéixer dos triangles semblants no cal conéixer tots els costats i angles, és prou amb què es complisca algun dels següents **criteris de semblança.**

Dos triangles són semblants sí:

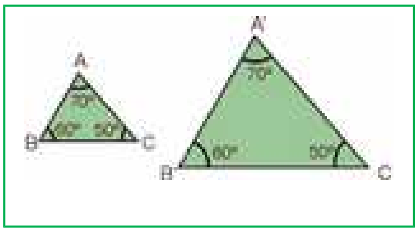
Primer: Tenen dos angles iguals.

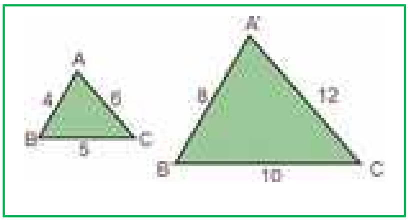
Segon: Tenen els tres costats proporcionals.

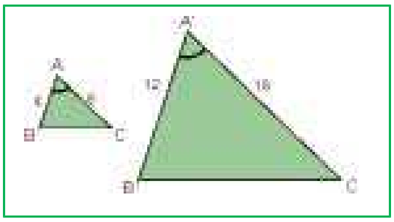
Tercer: Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual.

La demostració es basa en els criteris d'igualtat de triangles. Ja saps que dos triangles són iguals si tenen els seus tres costats iguals i els seus tres angles iguals, però no cal que es verifiquen aqueixes sis igualtats perquè ho siguen. Basta per exemple que tinguen un costat i dos angles iguals. Així, es pot construir un triangle igual a un dels donats en posició *Tales* amb el segon i deduir la semblança.

Exemple







Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

Activitats proposades

24. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a) Un angle de 80º i un altre de 40º. Un angle de 80º i un altre de 60º.
b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 70º. Triangle isòsceles amb angle igual de 50º.
c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm
d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

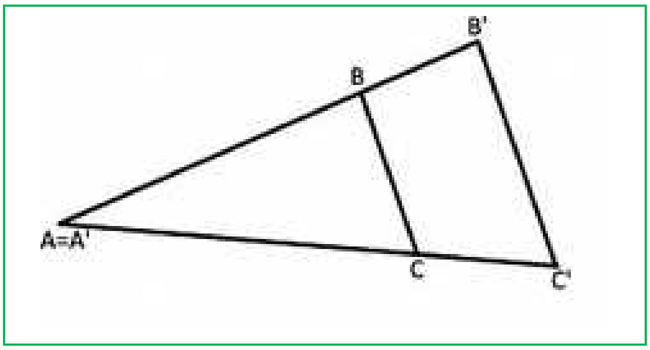
25. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, c'?

b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 8 cm, a'?

26. Un triangle té costats de 6 cm, 7 cm i 7 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 60 cm. Quant medeixen els seus costats?

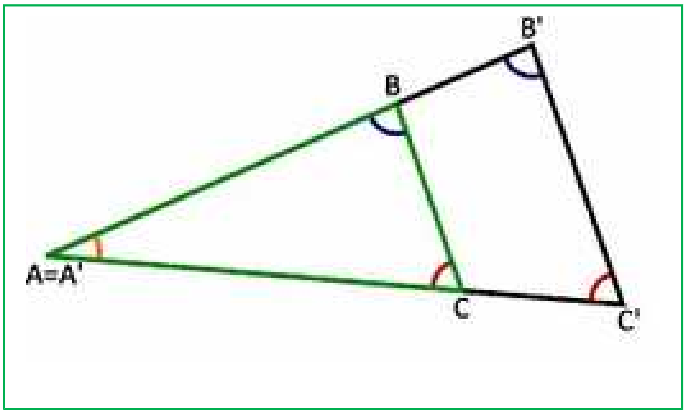
2.3. Triangles en posició de Tales



Diem que dos triangles estan en posició de Tales quan dos dels costats de cada un estan sobre les mateixes rectes i els altres costats són paral·lels.

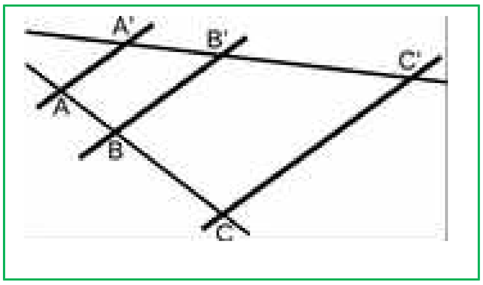
Els angles són iguals. Un perquè és el mateix. Els altres per estar formats per rectes paral·leles. Per tant, pel primer criteri de semblança de triangles, els triangles són proporcionals i es compleix:

$$\frac{A'B'}{AB} \quad \frac{B'C'}{BC} \quad \frac{A'C'}{AC}$$



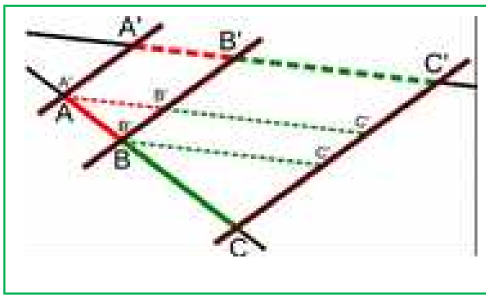
Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

2.4. Teorema de Tales



El teorema de Tales estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles.

En la segona figura es pot apreciar com es formen en aquest cas tres triangles semblants i que per tant s'estableix que:



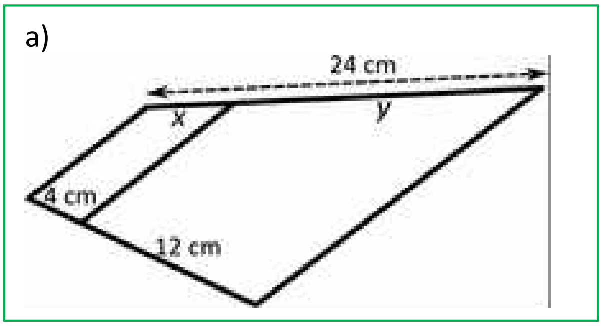
$$\frac{A'B'}{AB} \quad \frac{B'C'}{BC} \quad \frac{A'C'}{AC}$$

Observació: En aquest cas no relacionem els segments *AA'*, *BB'* i *CC'* que es formen sobre els costats paral·lels.

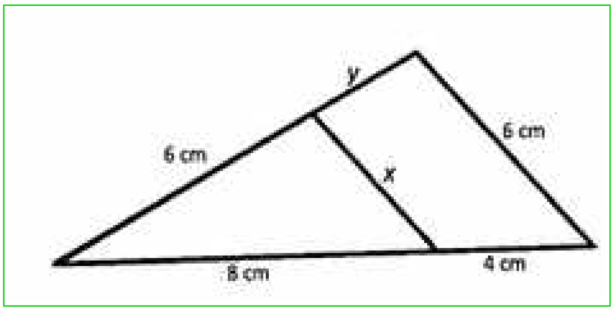
Activitats proposades

27. Calcula els valors de *x* i *y* en les següents figures.

a)



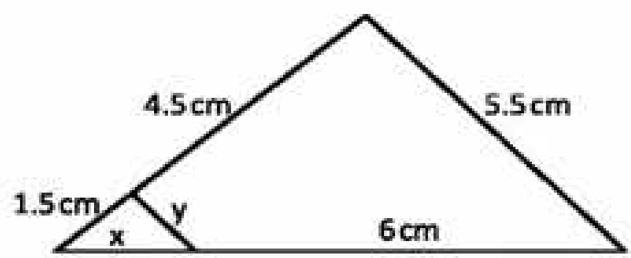
b)

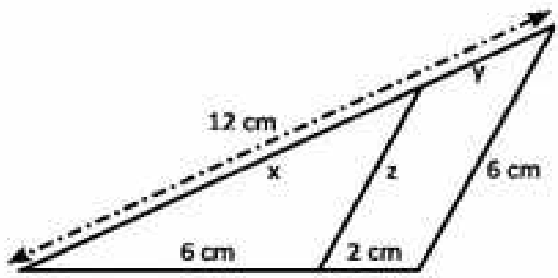


28. Un pal molt alt se subjecta amb cables d'acer que van del seu extrem superior al sòl. La distància de l'ancoratge d'un dels cables a la base del pal és 6 metres. Posem una barra de 120 centímetres de manera que està perpendicular al sòl i justa toca el sòl i el cable. La seua distància a l'ancoratge del cable és 90 centímetres. Calcula la longitud del pal i la longitud del cable d'acer.

29. Maria medeix 160 cm. La seua ombra medeix 90 cm. En aqueix mateix instant es mesura l'ombra d'un edifici i medeix 7,2 m. Quant medeix l'edifici?

30. Calcula les longituds que s'indiquen:



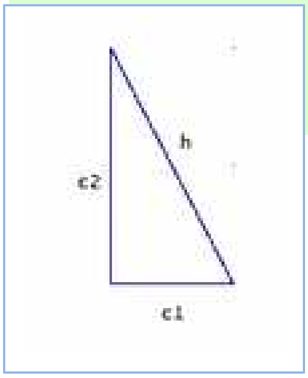


Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

3. ANGLES, LONGITUDS I ÀREES

3.1. Teorema de Pitàgores

Teorema de Pitàgores



A un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Utilitzant el teorema de Pitàgores podem obtindre el valor de la hipotenusa d'un triangle rectangle si coneixem el que medeixen els catets: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o també podem obtindre el valor d'un catet a partir dels valors de la hipotenusa i de l'altre catet: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Exemple:

- Si els catets d'un triangle rectangle medeixen 10 *cm* i 24 *cm*, la seua hipotenusa val 26 *cm*, ja que:

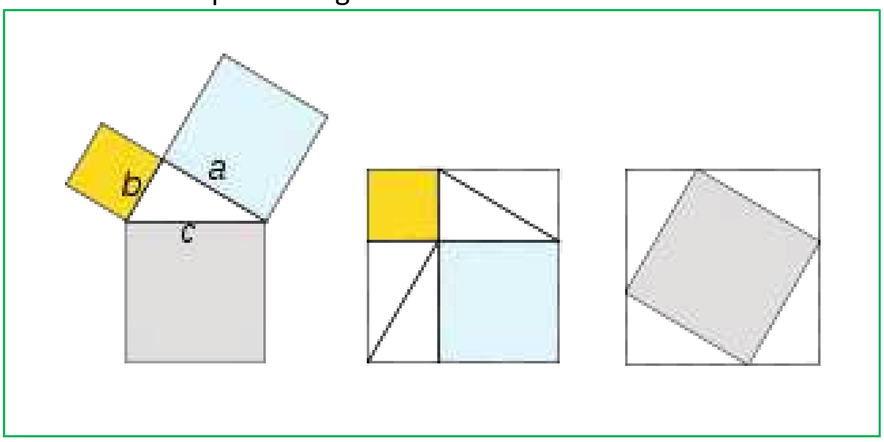
$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26\ cm.$$

Interpretació del teorema de Pitàgores

Si dibuixem un quadrat de costat la hipotenusa *h* d'un triangle rectangle, la seua àrea és h^2 (veure el primer exemple de 1.1). Si dibuixem dos quadrats de costats els catets c_1 i c_2 d'aqueix triangle rectangle, les seues àrees són c_1^2, c_2^2. Aleshores el teorema de Pitàgores diu que l'àrea del primer quadrat (quadrat gris de la figura de l'esquerra) és igual a la suma de les àrees dels altres dos (quadrats blau clar i groc de la figura de l'esquerra).

Existeixen més de 367 demostracions diferents del Teorema de Pitàgores.

Una comprovació gràfica consisteix a dibuixar dos quadrats iguals de costat la suma dels catets *a* i *b* (figures del centre i de la dreta). En un es dibuixen els quadrats de costat *a* i *b*, en groc i blau en el dibuix. En l'altre el quadrat de costat la hipotenusa (en gris en el dibuix). Observa que llevant 4 triangles iguals al de partida ens queda que el quadrat gris és igual a la suma dels quadrats groc i blau.



Per tant:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Activitats proposades

31. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesuren 5 i 12 *cm* i la seua hipotenusa 24 *cm*? Si la teua resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets de la qual mesuren 5 i 12 *cm*. Utilitza calculadora per a resoldre aquesta activitat si et resulta necessària.

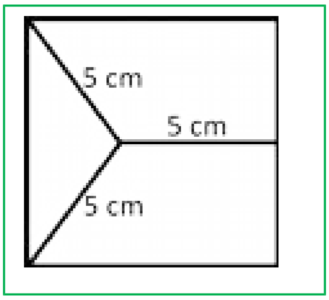
32. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 6 *cm* i 8 *cm* b) 4 *m* i 3 *m* c) 8 *dm* i 15 dm d) 13,6 *km* i 21,4 *km*.

33. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 26 *cm* i 10 *cm* b) 17 *m* i 8 *m* c) 37 *dm* i 35 *dm* d) 14,7 *km* i 5,9 *km*

34. Calcula el costat del quadrat de la figura del marge:



35. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 9 *m*.

36. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 *cm*.

37. Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 *dm*.

38. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 3 *m*.

39. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 *cm* i altura 8 *cm*.

40. Una porteria de futbol mesura 7,32 m d'alt per 2,44 m d'ample. El punt de penal està a 10 metres. Calcula la distància que recorre el baló en:

a) Un tir directe a la base del pal.

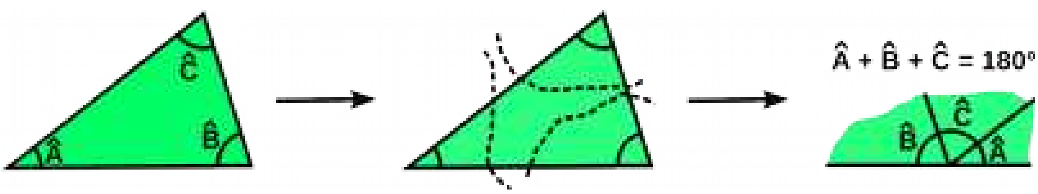
b) Un tir directe a l'escaire.

41. Demostra que el diàmetre d'un quadrat de costat *x* és $d = \sqrt{2}x$.

42. Demostra que l'altura d'un triangle equilàter de costat *x* és $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

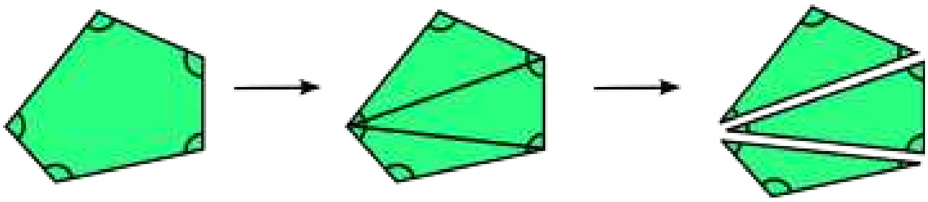
3.2. Suma d'angles d'un polígon

La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º .



La suma dels angles interiors d'un polígon de *n* costats és (*n* – 2)·180º.

1. Per comprovar-lo hi ha prou amb traçar les diagonals d'un polígon des d'un vèrtex i ho haurem dividit en triangles.

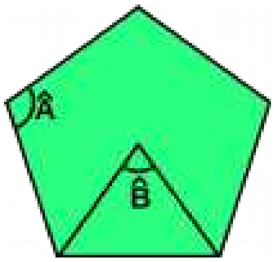


Per tant:

Polígon	**Suma d'angles**	**Polígon**	**Suma d'angles**
Triangle	180º	Quadrilàter	180º · 2 = 360º
Pentàgon	180º · 3 = 540º	Hexàgon	180º · 4 = 720º

Si el polígon de *n* costats és regular, tots els angles interiors són iguals i per a calcular el valor del seu angle interior es divideix entre *n* la suma dels angles interiors.

Exemple:



- *En un pentàgon la suma dels angles centrals és* 180 · 3 = 540º.

Per tant **l'angle interior:** $\hat{B} = \dfrac{540^{o}}{5} = 108^{o}$

També és molt comú calcular **l'angle central**: $\hat{B} = \dfrac{360^{o}}{5} = 72^{o}$

Activitats proposades

43. Calcula els angles central i interior del triangle equilàter, quadrat, pentàgon regular, hexàgon regular i enneàgon regular.

44. Justifica que un hexàgon regular es pot descompondre en 6 triangles equilàters.

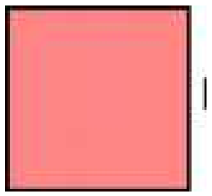
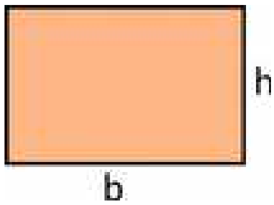
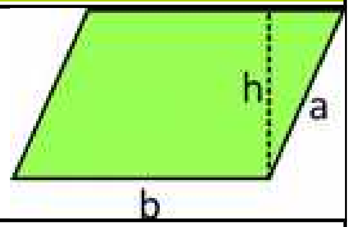
45. Dos angles d'un triangle isòsceles mesuren 35º i 72º, quant pot mesurar l'angle que falta?

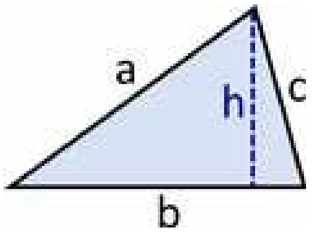
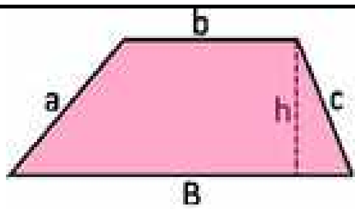
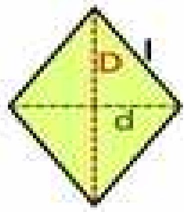
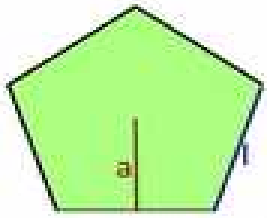
46. Dos angles d'un trapezi isòsceles mesuren 35º i 72º, quant mesuren els angles que falten?

47. Quant mesura la suma dels angles interiors d'un decàgon irregular?

3.3. Longituds i àrees de figures poligonals

Recorda que:

Quadrat	Rectangle	Romboide
		
Perímetre: P = $4l$ **Àrea: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$ **A** = $b \cdot h$	**P** = $2b + 2a$ **A** = $b \cdot h$

Triangle	Trapezi	Rombe	Polígon regular de *n* costats
			
P = $a + b + c$ $A = \frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$ $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$	$P = 4l$ $A = \frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$ $A = \frac{P \cdot a}{2}$

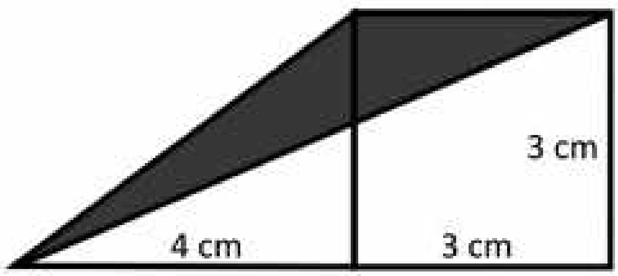
Activitats proposades

48. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 50 cm i 26 cm i altura 5 cm.

49. Calcula l'àrea i perímetre d'un trapezi rectangle de bases 100 cm i 64 cm, i d'altura 77 cm.

50. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 80 cm i 60 cm i costats laterals 29 cm.

51. Utilitza el teorema de Tales per a determinar l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada de la figura.



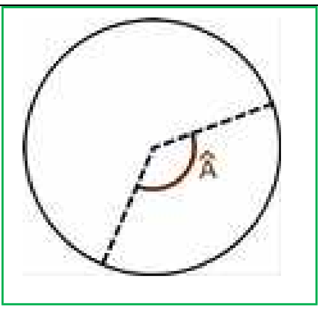
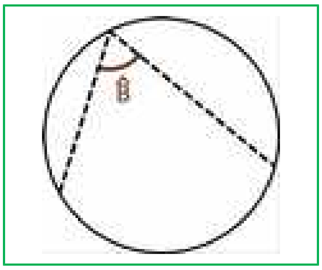
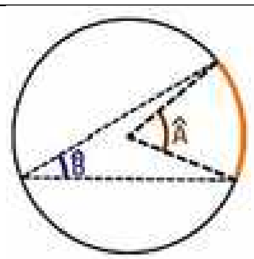
52. Tenint en compte que un hexàgon regular es pot dividir en sis triangles equilàters (l'altura del quals és l'apotema de l'hexàgon regular) calcula, l'àrea d'un hexàgon regular de 5 cm de costat.

53. Volem cobrir el pla amb polígons regulars de 100 cm^2. Les úniques opcions possibles són el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon. Calcula quin d'aquestes tres figures té menor perímetre. Quin animal aplica aquest resultat? [Utilitza la relació entre costat i altura d'un triangle equilàter obtinguda anteriorment]

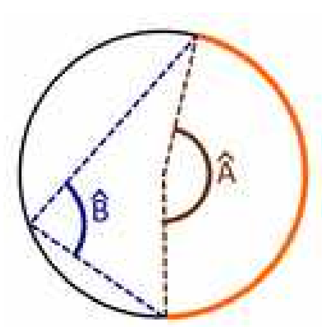
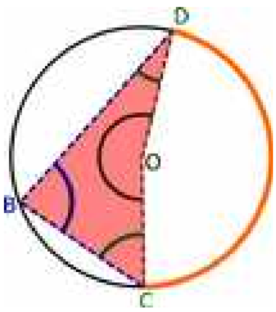
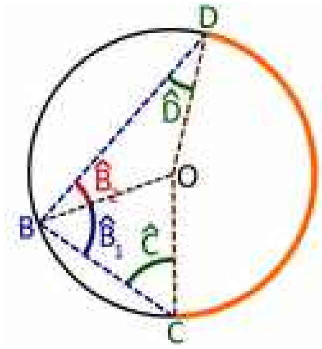
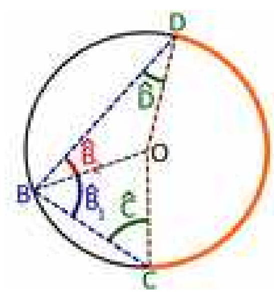
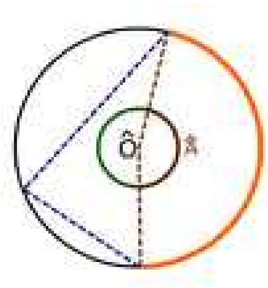
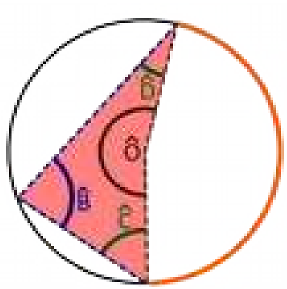
Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

3.4. Angles de la circumferència

En una circumferència tenen especial importància els **angles centrals** (tenen el seu vèrtex en el centre de la circumferència) i els **angles inscrits** (tenen el seu vèrtex en un punt de la circumferència).

		
Angle central	**Angle inscrit**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

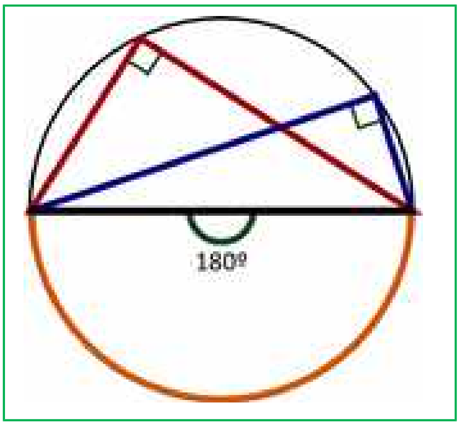
Es verifica a més que un angle inscrit medeix la meitat que un angle central que comprén el mateix arc de circumferència.

Demostració de la propietat		
		
Hem de comprovar que l'angle $\hat{B}$ és la meitat de $\hat{A}$. $2\hat{B}=\hat{A}$	Estudiarem el quadrilàter *BCOD* i aplicar en l'últim pas que els seus angles sumen 360º.	*BO* i *OD* són radis de la circumferència. Per tant *BDO* és isòsceles i $\hat{B}_2$ i $\hat{D}$ són iguals.
		
El mateix per a $\hat{B}_1$ i $\hat{C}$ Aleshores $\hat{C}+\hat{D}=\hat{B}_2+\hat{B}_2=\hat{B}$	A més l'angle $\hat{O}$ del quadrilàter medeix 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B}+(\hat{C}+\hat{D})$ + **Ô** =360º. $\hat{B}+(\hat{B})$ **+360º–** $\hat{A}$ =

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

		$=360º·2\ \hat{B}=\hat{A}$

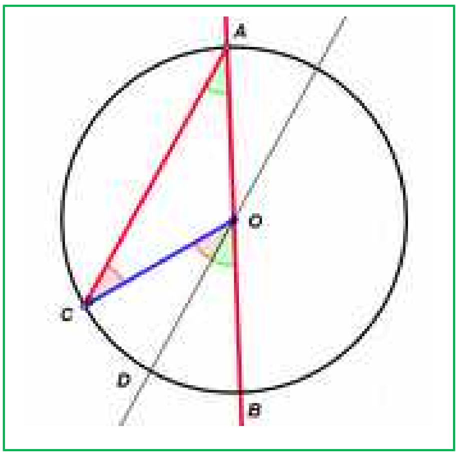
Tales va observar que en qualsevol triangle rectangle el circumcentre sempre estava en el punt mitjà de la hipotenusa.



54. Un angle inscrit en la circumferència que comprén un diàmetre és un angle recte. Per què? Raona la resposta.

55. En quines posicions té un futbolista el mateix angle de tir que des del punt de penal?

56. Una altra demostració. Intenta comprendre-la. Tracem un angle inscrit en la circumferència *CAB* que tinga un costat que passe pel centre *O* de la circumferència. Tracem el seu central *COB*. El triangle *OAC* és isòsceles perquè dos dels seus costats són radis de la circumferència. Tracem per *O* una recta paral·lela a *AC*. L'angle *CAO* és igual a l'angle *DOB* perquè tenen els seus costats paral·lels. L'angle *ACO* és igual a l'angle *COD* per alterns interns entre paral·leles, i és igual a l'angle *CAO* per ser el triangle isòsceles. Per tant el central mesura el doble que l'angle inscrit.



3.5. Longituds i àrees de figures circulars

Ja saps que:

El **nombre π** es defineix com el quocient entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre.

π = Longitud de la circumferència / Diàmetre

Ja saps que és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de **π** és 3,14, una altra 3,1416, i una altra 3,141592. Des de l'antiguitat més llunyana fins hui en dia els matemàtics continuen investigant sobre ell.

Si una circumferència té un ràdio *r*, llavors el seu diàmetre mesura 2*r*, i la seua longitud, per la definició de π, mesura $2·\pi·r$.

Longitud de la circumferència = $2·\pi·r$.

Per a calcular la l**ongitud d'un arc de circumferència** que comprén un angle de α graus, hem de tindre en compte que la circumferència completa comprén un angle de 360º. Per tant:

$$L = 2·\pi·r·\alpha/360.$$

L'àrea del cercle és igual al producte del nombre nombre pel quadrat del radi.

$$A = \pi·r^2.$$

L'àrea d'una corona circular és igual a l'àrea del cercle major menys l'àrea del cercle menor.

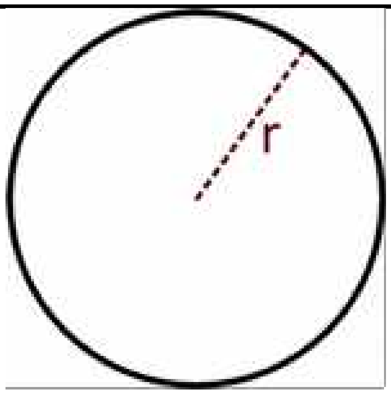
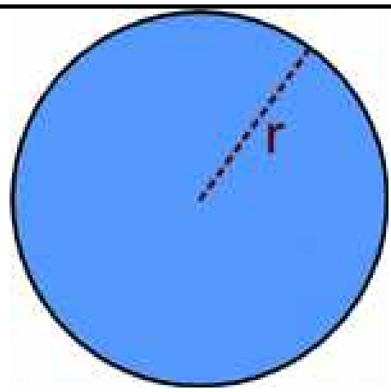
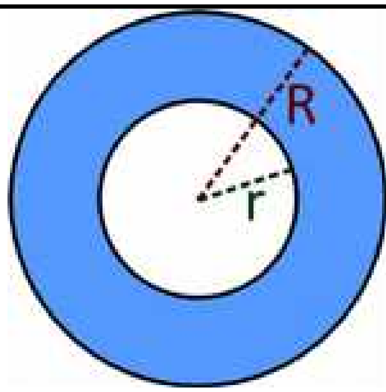
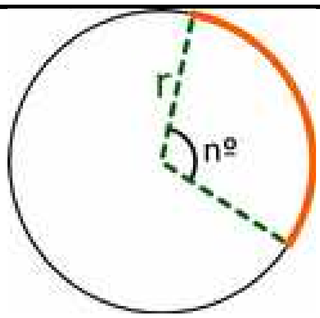
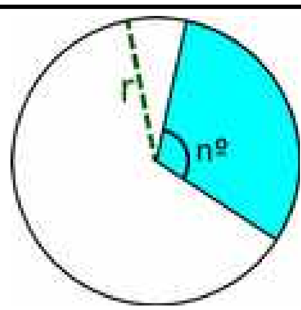
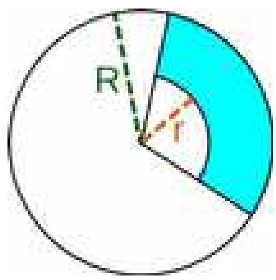
$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi·(R^2 - r^2)$$

L' **àrea d'un sector circular** que comprén un angle de *n* graus és igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n/360.$$

Per a trobar **l'àrea del segment circular restem** a l'àrea del sector circular l'àrea del triangle.

En resum

Longitud de la circumferència	**Àrea del cercle**	**Àrea de la corona circular**
		
L = $2 \cdot \pi \cdot r$	**A** = $\pi \cdot r^2$	**A** = $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
π és la raó entre el la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre. És un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques. Una aproximació de π és 3,14, una altra 3,1416 i una altra 3,141592		
Longitud de l'arc de circumferència	**Àrea del sector circular**	**Àrea del trapezi circular**
		
$L = \dfrac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \dfrac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \dfrac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Activitats resoltes

- La circumferència de radi 5 *cm* té una longitud L = $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10 \cdot \pi \approx 31{,}416$.
- Les rodes d'un carro mesuren 60 *cm* de diàmetre, i tenen 16 radis. La longitud de l'arc entre cada radi és:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360 = 60 \cdot \pi/16 \approx 11{,}78\ cm.$$

- L' àrea d'un cercle de radi 8 *cm* és A = $64\ \pi \approx 201{,}06\ cm^2$. I el d'un cercle de 10 *cm* de radi és A = $\pi \approx 314{,}16\ cm^2$.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

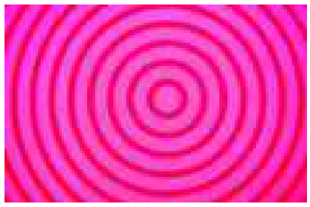
- L' àrea d'un cercle de diàmetre 10 m és A = 25π ≈ 78,54 m^2.
- L'àrea de la corona circular formada per les circumferències concèntriques de radis 9 *cm* i 5 *cm* és igual a: A = $\pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (9^2 - 5^2) = \pi \cdot (81 - 25) = \pi \cdot 56 \approx 175{,}93$ cm^2.
- Per a trobar l'àrea del *sector* circular de radi 10 m que comprén un angle de 90º, calculem l'àrea del cercle complet: $\pi \cdot 10^2 = 100\ \pi$, i trobem la proporció:

$$A_S = 100\pi \cdot 90/360 = 25\pi \approx 78{,}54\ m^2.$$

- Per a trobar l'àrea del *segment circular*, restem a l'àrea anterior l'àrea del triangle rectangle de base 10 m'i altura 10 *m*, $A_T = 10 \cdot 10/2 = 50\ m^2$. Doncs l'àrea del segment és:

$$A = A_S - A_T = 78{,}54 - 50 = 28{,}54\ m^2.$$

Activitats proposades



57. Les circumferències de grandària real de la il·lustració del marge tenen com a radi, la menor 1 *cm*, la següent, un poc més fosca 2 *cm*, la clara següent 3 *cm*, i així, augmenta un centímetre. Calcula les longituds de les 10 primeres circumferències.

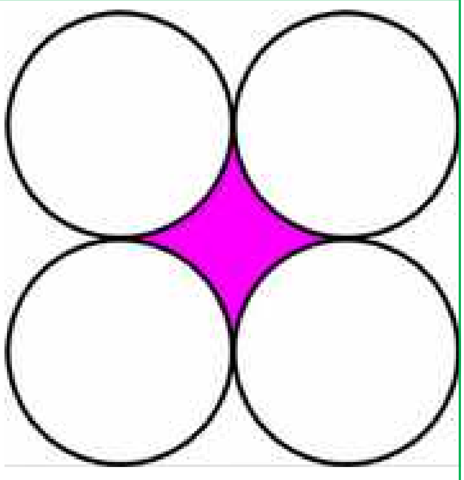
58. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 *km*. Quant mesura l'Equador?

59. Antigament es definia un metre com: *"la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París"*. Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?

60. Un far gira descrivint un arc de 170º. A una distància de 5 *km*, quina és la longitud de l'arc de circumferència en què es veu la llum?

61. Determina el costat del triangle equilàter de la figura construït usant arcs de circumferència de 10 cm de radi.

62. Calcula l'àrea tancada per una circumferència de radi 9 cm.

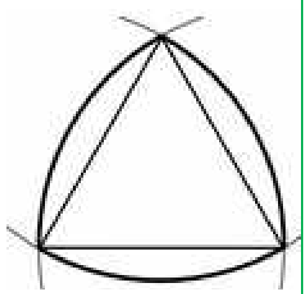


63. Calcula l'àrea de la corona circular de radis 12 i 5 *cm*.

64. Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 6 *cm* i que forma un angle de 60º.

65. Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 25 *cm* i 18 *cm* i que forma un angle de 60º.

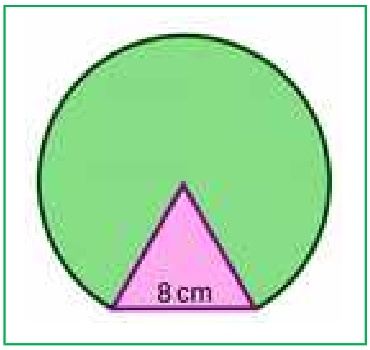
66. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.



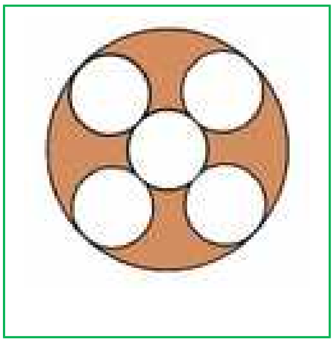
67. Volem construir una rotonda per a una carretera de 9 metres d'ample de manera que el cercle interior de la rotonda tinga el mateix àrea que la corona circular que forma la carretera. Quin radi ha de tindre la rotonda?

68. Una figura típica de l'arquitectura gòtica es dibuixa a partir d'un triangle equilàter traçant arcs de circumferència amb centre en cada un dels seus vèrtexs i que passen pels dos vèrtexs restants. Calcula l'àrea d'una d'aquestes figures si es construeix a partir d'un triangle equilàter de 2 metres de costat. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola



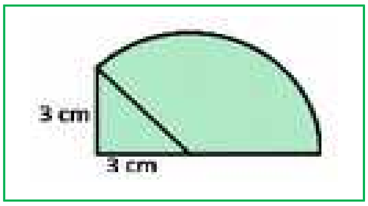
69. Calcula l’àrea i el perímetre de la figura formada per un triangle equilàter de 8 cm de costat sobre el qual es construeix un sector circular.



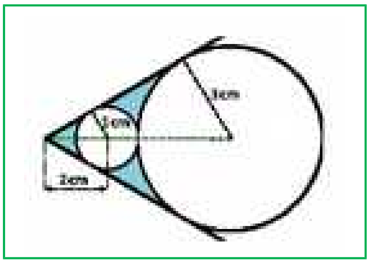
70. Hi ha 5 circumferències inscrites en una circumferència de 12 cm de radi tal com indica la figura. Quant val l’àrea ombrejada?

71. Un formatge cilíndric té una base circular de 14 cm de diàmetre i una etiqueta circular de 8 cm de diàmetre. Es talla una falca de 70º. Quina àrea té el tros d’etiqueta tallada?

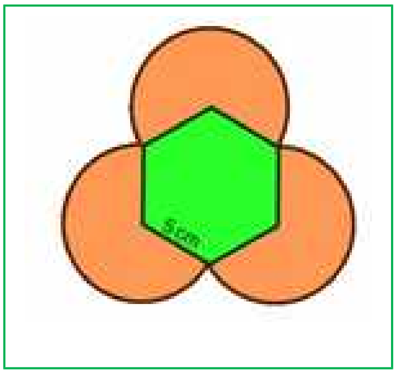
72. D'un formatge de 18 cm de diàmetre tallem una falca de 50º. L’etiqueta té 7 cm de radi. Quina àrea del formatge està visible?



73. A partir d’un triangle rectangle isòsceles de 3 cm de catet construïm un sector circular. Calcula l’àrea de la figura.



74. En dues rectes que formen 60º s’inscriuen dues circumferències tangents entre si. La primera té el centre a 2 centímetres del vèrtex i el radi d’1 centímetre. La segona té de radi 3 centímetres. Quant val l’àrea ombrejada?



75. Tracem tres arcs circulars des de tres vèrtexs d’un hexàgon de 5 cm de costat. Calcula l’àrea i el perímetre de la figura.

Tot el que hem vist en aquest capítol, excepte l’enunciat del teorema de Tales i la semblança de triangles ja ho coneixies. Ho vas estudiar a primer d’ESO. Allí es va veure amb deteniment. Si no ho recordes i necessites més explicacions o problemes pots veure-ho al capítol 8: Figures Planes, de Primer d’ESO, pàgina 184, i al capítol 9: Longituds i àrees, de primer d’ESO, pàgina 216.

CURIOSITATS. REVISTA

Un poc d'historia de la Geometria

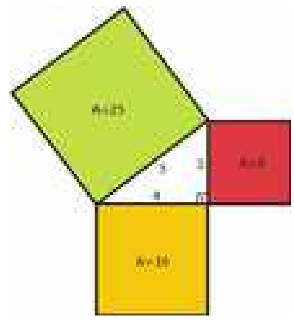
Es conjectura que l'inici de la Geometria pot ser anterior a **egipcis i babilonis**, però com no hi ha informació escrita, és impossible afirmar-ho.

Heròdot opinava que s'havia originat a Egipte per la necessitat de refer els límits de les terres després de les inundacions del Nil.

Al *papir de Moscú* apareix el volum d'una piràmide quadrada

A Mesopotàmia es coneixia molta Geometria. En el llistó Plimpton, que no es conserva sencera, es poden identificar amb dificultat ternes *pitagòriques* (molt anteriors a *Pitàgores*).

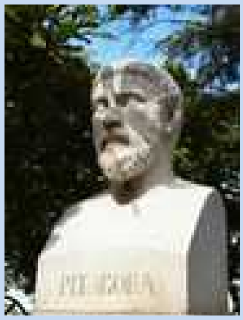
La **terna pitagórica** més coneguda es 3, 4 i 5. Es feien nucs a aqueixes distàncies i així es construïen triangles rectangles.

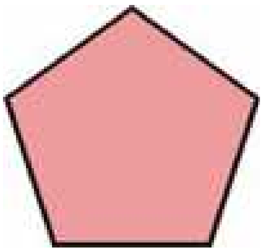


En altres llistons babilònics, les de Susa, apareixen les àrees dels polígons i les relacions entre elles

Encara que podem conéixer molt poc de **Tales** i de **Pitàgores**, perquè no ha quedat cap obra escrita per ells, s'accepta que van ser grans matemàtics i geòmetres.

Ambdós van viatjar als centres del saber, Egipte i Babilònia. Ja hem vist que ja es coneixia l'anomenat teorema de Tales o de Pitàgores. La seua importància està en la forma de pensar, a utilitzar el raonament deductiu per a obtindre els resultats matemàtics.





El pentàgon, i l'estrela pitagòrica, que obtens traçant les diagonals del pentàgon, tenen grans propietats relacionades amb el nombre d'or, ho recordes? L'escola va prendre a l'estrela com a emblema.

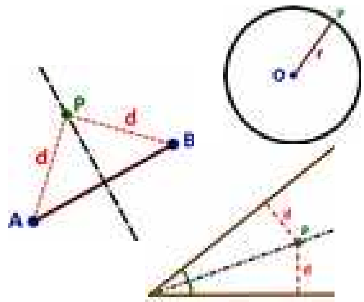
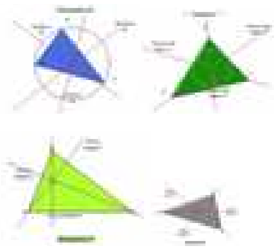
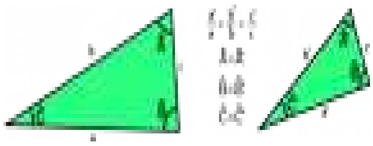
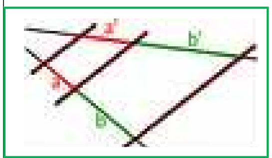
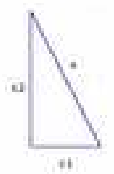
Teano, la dona de Pitàgores, va dirigir l'Escola Pitagòrica a la mort d'aquest.

Euclides d'Alexandria és l'autor dels *Elements*, on destaca la forma d'exposar el fonament de la Matemàtica amb un orde lògic

Consta de 13 llibres sent els sis primers de Geometria plana, i l'últim sobre cossos. Amb definicions i postulats construeix el saber.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

RESUM

		Exemples
Llocs geomètrics	**Circumferència** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del centre. **Mediatriu d'un segment** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels extrems del mateix. Donat un angle delimitat per dues rectes, la **bisectriu de l'angle** és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les mateixes.	
Rectes i punts notables d'un triangle	Mediatrius i circumcentre Bisectrius i incentre Altures i ortocentre Mitjanes i baricentre	
Semblança	Dues figures semblants tenen *la mateixa forma*. Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants si: 1) Tenen 2 angles iguals. 2) Tenen els 3 costats proporcionals. 3) Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual	
Teorema de Tales	Estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitàgores	A un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ *cm*.	
Suma dels angles d'un polígon	La suma dels angles interiors d'un triangle és 180º	

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

EXERCICIS I PROBLEMES

Llocs geomètrics

1. Dibuixa al teu quadern un triangle de costats 2 cm, 3 cm i 4 cm. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mediatrius i bisectrius. Determina el circumcentre i l'incentre. Traça les circumferències inscrites i circumscrites.

2. Dibuixa al teu quadern un triangle de costat 5 cm i angles adjacents al mateix de 30º i 50º. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mitjanes i les altures. Determina el seu ortocentre i el seu baricentre.

3. Dibuixa al teu quadern un triangle amb un angle de 50º comprés entre dos costats de 5 i 8 cm. Obtín el seu circumcentre i el seu incentre.

4. Com són les rectes i punts notables d'un triangle rectangle?

5. Com són les rectes i punts notables d'un triangle isòsceles?

Semblança

6. Indica si són semblants els següents parells de triangles:

a)Un angle de 70º i un altre de 20º. Un angle de 90º i un altre de 20º.

b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80º. Triangle isòsceles amb un angle igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguen semblants:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?

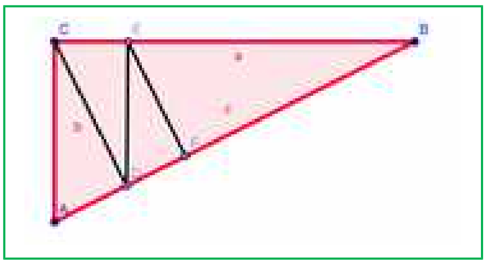
8. Les longituds dels costats d'un triangle són 12 cm, 14 cm i 14 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 90 cm. Quant mesuren els seus costats?

9. Dibuixa al teu quadern un pentàgon regular. Traça les seues diagonals. El triangle format per un costat del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat es denomina triangle auri, perquè en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or, quant mesuren els seus angles? Busca en la figura que has traçat altres triangles auris. Quina és la relació de proporcionalitat?

10. Quant és la suma dels angles interiors d'un rombe?

11. L'ombra d'un edifici mesura 15 m, i la del primer pis 2 m. Sabem que l'altura d'aqueix primer pis és de 3 m, quant mesura l'edifici?

12. En el museu de Bagdad es conserva un llistó en què apareix dibuixat un triangle rectangle *ABC*, de costats a = 60, b = 45 i c= 75, subdividit en 4 triangles rectangles menors *ACD*, *CDE*, *DEF* i *EFB*, i l'escriba calcula la longitud del costat *AD* com 27. Ha utilitzat la semblança de triangles? Com es podria calcular? Quines dades necessites? Calcula l'àrea del triangle *ABC* i del triangle *ACD*. Determina la longitud dels segments



CD, *DE* i *EF*.

13. Demostra que en dos triangles semblants les mitjanes són proporcionals.

14. Un triangle rectangle isòsceles té un catet de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees d'ambdós triangles?

15. El mapa a escala 1:3000000 d'un poble té una àrea de 2500 cm^2, quant mesura la superfície verdadera del dit poble?

16. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Com són? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seues àrees?

17. L'altura i la base d'un triangle rectangle mesuren respectivament 4 i 7 cm; i és semblant a un altre de base 26 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees d'ambdós.

Angles, longituds i àrees

18. Construeix un triangle coneixent l'altura sobre el costat *a*, el costat *a* i el *c*.

19. Calcula la longitud del costat d'un octògon regular inscrit en una circumferència de radi 5 cm.

20. Calcula l'apotema d'un hexàgon regular costat 7 cm.

21. Calcula l'àrea d'un cercle la circumferència del qual mesura 50 cm.

22. Calcula la longitud d'una circumferència el cercle de la qual té una superfície que medeix 50 cm^2.

23. La Terra fa una volta cada 24 hores, a quina velocitat es mou un punt de l'Equador?

24. Quina relació hi ha entre les àrees un triangle inscrit en un cercle i la del cercle?

25. Els grecs coneixien les dos següents possibles formes de construir un triangle rectangle amb els seus tres costats de longitud un nombre natural, sense més que donar valors a *n*. Comprova si es verifiquen per a n = 1, 2, …. a) Catets: $2n$ y $n^2 – 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catets: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

26. En augmentar en 3 cm el costat d'un quadrat la seua àrea augmenta 32 cm^2 Quant mesura el costat de dites quadrats?

27. Es vol cobrir un terreny circular de 25 m de diàmetre amb graveta, tirant 10 kg per cada metre quadrat. Quanta graveta es necessita?

28. Una escala de 4 m de longitud està recolzada sobre una paret. El peu de l'escala dista 1,5 m de la paret. A quina altura arriba l'escala sobre la paret?

29. Calcula l'àrea de la circumferència circumscrita a un rectangle de costats 7 i 9 cm.

30. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 3 cm de costat. Prolonga els costats de l'hexàgon i dibuixa un hexàgon estrelat. Calcula la seua àrea.

31. El senyal de circulació de STOP té forma d'octògon regular. La seua altura mesura 90 cm, i el seu costat 37 cm, quant mesura la seua superfície?

32. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 10 cm.

33. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de perímetre 60 cm.

34. Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de base menor 5 cm, costat 3 cm i altura 4 cm.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola

35. Calcula l’àrea d’un trapezi isòsceles de bases 8 i 6 cm i costat 3 cm.

36. Calcula l’àrea i el perímetre d’un rectangle de costat 4 cm i diagonal 7 cm.

37. Calcula l’àrea i el perímetre d’un quadrat de diagonal 9 cm.

38. Calcula l’àrea i el perímetre d’un triangle isòsceles de base 8 cm i altura 6 cm.

39. Un triangle mesura d’altura π i de base π + 1. És rectangle?

40. Dibuixa un triangle rectangle isòsceles de catets de longitud 1, quant mesura la hipotenusa? Prenent la dita hipotenusa com a catet i amb l’altre catet igual a 1 dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 4 vegades, quant mesura l’última hipotenusa?

41. Dibuixa un triangle rectangle de catets de longitud 1 i 2 cm, quant mesura la hipotenusa? Prenent la dita hipotenusa com a catet i amb l’altre catet de longitud 1 cm dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 3 vegades, quant mesura l’última hipotenusa?

42. Calcula l’altura d’una piràmide regular quadrangular de costat de la base 10 m i d’aresta 15 m.

43. Calcula la generatriu d’un con de radi de la base 5 m i d’altura 7 m.

44. Dos ascetes hindús viuen en la part alta d’un penya-segat de 10 m d’altura el peu de la qual està a 200 metres del poble més pròxim. Un dels ascetes baixa del penya-segat i va al poble. L’altre, que és mag, ascendeix una distància *x i* viatja volant en línia recta al poble. Ambdós recorren la mateixa distància. Quant ha ascendit el mag?

45. Quant mesura l’aresta de la base de la piràmide de Keops si mesura 138 m d’altura i 227 m d’aresta?

Autor: Pedro Luis Subervióla
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Subervióla

AUTOAVALUACIÓ

1. Tots els punts que estan a la mateixa distància de dos punts donats estan a:

a) una bisectriu b) una circumferència c) una el·lipse d) una mediatriu

2. Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en el:

a) ortocentre b) baricentre c) incentre d) circumcentre

3. El circumcentre és el centre de:

a)gravetat del triangle b) la circumferència inscrita c) la circumferència circumscrita

4. Dos triangles són semblants si:

a) tenen dos angles iguals b) tenen dos costats proporcionals

c) tenen un angle igual d) les seues àrees són semblants

5. Sabem que els triangles *ABC* i *A'B'C'* són semblants. Calcula el valor de *a'* i *c'* perquè ho siguen, sabent que a = 10 cm, b = 6 cm, b' = 3 cm, c = 8 cm:

a) a' = 4 cm i c' = 6 cm b) a' = 5 cm i c' = 6 cm

c) a' = 4 cm i c' = 4 cm d) a' = 5 cm i c' = 4 cm

6. Si la hipotenusa d'un triangle rectangle medeix 7 cm i un catet mesura 3 cm, aleshores l'altre catet medeix aproximadament:

a) 6,3 cm b) 5 cm c) 5,8 cm d) 6,9 cm

7. La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:

a) 1440º b) 1620º c) 1800º d) 1260º

8. L' àrea d'un rombe de costat 5 cm i una diagonal de 8 cm medeix:

a) 48 cm^2 b) 36,7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21,2 cm^2

9. L' angle central de l'inscrit en la circumferència que comprén un angle de 72º mesura:

a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º

10. La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle de radi 3 cm són respectivament:

a) 6π cm i 9π cm^2 b) 9π cm i 6π cm^2 c) 3π cm i 3π cm^2 d) 18 cm i 27 cm^2

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Il·lustracions: Banc d'imatges INTEF i Pedro Luis Suberviola