Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades.

3º A d'ESO

Capítol 4: Expressions algebraiques. Polinomis.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

i commons.wikimedia

Índex

Resum

Segons avancem en els nostres estudis es van ampliant els nostres coneixements, en particular els de Matemàtiques. Açò no es deu a cap tipus de capritx, tot al contrari: al llarg de la història les Matemàtiques es desenrotllen espentades per les necessitats de les persones. És indubtable la conveniència que una persona tinga soltesa amb els nombres i les seues operacions bàsiques: suma, resta, multiplicació i divisió. Per soltesa no ha d'entendre's que se sàpia de memòria "totes" les taules de multiplicar, sinó que siga conscient del que significa realitzar una operació concreta, que siga capaç de donar resposta a preguntes quotidianes que es resolen *operand* adequadament les dades disponibles. Per a aqueix propòsit és útil fomentar la nostra capacitat d'abstracció; ella ens permet reconéixer com a equivalents situacions en aparença molt allunyades. En aquest capítol es va a fer un pas en aqueix sentit en manipular, manejar, dades numèriques no concretades, no conegudes, a través d'indeterminades o variables. D'aqueixa manera apareixeran les expressions algebraiques i, dins d'elles, unes expressions particulars d'abundant ús i simplicitat d'exposició, els polinomis.

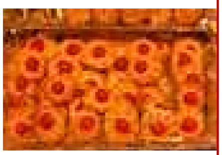
1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

1.1. Introducció

No cal imaginar situacions rebuscades perquè, a l'hora de realitzar un raonament, ens topem amb alguna de les quatre operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació o divisió.

Exemples:

- El pare, la mare i el fill han anat al cine i les entrades han costat 27 euros. Per a calcular el preu de cada entrada es divideix entre 3: 27/ 3 = 9 euros.
- Si comprarem pasta de te i el preu d'un quilogram és de 18'3 euros, resulta habitual que, segons va la dependenta introduint pastes en una safata, anem veient l'import final. Per a això si la safata està sobre una balança, executem l'operació 18'3·*x* on *x* és la quantitat de quilograms que ens ha indicat la balança. Després de cada pesada, el resultat d'aqueixa multiplicació reflectix l'import de les pastes que, en aqueix moment, conté la safata.



- Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel que paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de telefonada. Amb aqueixa tarifa, una telefonada de 3 minuts ens costarà:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ euros}$$

Però quin és el preu d'una telefonada qualsevol? Com desconeixem la seua duració, ens trobem amb una quantitat no determinada, o indeterminada, per la qual cosa en qualsevol resposta que donem a la pregunta anterior s'apreciarà l'absència d'aqueix dada concreta. Podem dir que el cost d'una telefonada qualsevol és

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

on x assenyala la seua duració, en minuts.

Activitats proposades

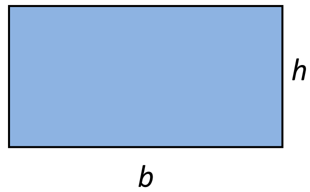
1. A finals de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de telefonades realitzades (*N*) així com la quantitat total de minuts de conversació (*M*). Amb les dades de l'anterior exemple, justifica que l'import de les telefonades efectuades durant aqueix mes és:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

Exemple:

- És ben coneguda la *fórmula* de l'àrea d'un rectangle de base *b* i altura associada *h*:

$$A = b\cdot h$$



En tots aquests exemples han sorgit **expressions algebraiques**.

1.2. Expressions algebraiques

Anomenarem **expressió algebraica** a qualsevol expressió matemàtica que es construïsca amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques: suma, resta, multiplicació i/o divisió. En una expressió algebraica pot haver-hi dades no concretades; segons el context, rebran el nom de ***variable***, ***indeterminada***, ***paràmetre***, entre altres.

Si a una expressió algebraica no hi ha *variables*, la dita expressió no és més que un nombre:

Exemple:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fixar un valor concret per a cada *indeterminada* d'una expressió algebraica apareix un nombre, el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.

Exemple:

- El volum d'un con ve donat per l'expressió algebraica:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* és el radi del cercle base i *h* és la seua altura. D'aquesta manera, el volum d'un con la base del qual té un radi de 10 cm i d'altura 15 cm és igual a:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 500\cdot\pi\ cm^3 .$$

- L'àrea lateral del con ve donada per $A_L = \pi\cdot r\cdot g$, on *r* és el radi de la base i *g* la generatriu. La superfície total és $A_T = \pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$.
- L'expressió algebraica que representa el producte dels quadrats de dos nombres qualssevol x i y es simbolitza per $x^2\cdot y^2$. Si en ella fixem $x=-2$ i $y=\frac{3}{5}$ resulta

$$(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25} .$$

- Si a l'expressió

$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

particularitzem les tres variables amb els valors

$$x=4\,,\ y=-1\,,\ z=\frac{1}{2}$$

sorgeix el nombre

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expressió algebraica pot no tindre sentit donar algun valor a certa indeterminada. En efecte, en l'últim exemple no és possible fer $z=0$.

Activitats proposades

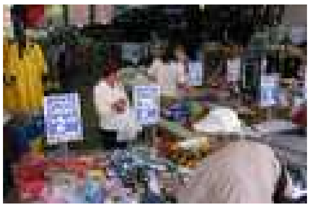
2. Escriu les expressions algebraiques que ens proporcionen la longitud d'una circumferència i l'àrea d'un trapezi.

3. Reescriu, en llenguatge algebraic, els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol x i y :

a) El triple de la seua diferència b) La suma dels seus quadrats c) El quadrat de la seua suma

d) L'invers del seu producte e) La suma dels seus oposats d) El producte dels seus quadrats

4. Una botiga de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 30 % sobre el preu imprés en cada etiqueta. Escriu el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seua etiqueta.



5. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:

a) $-3x^2+\frac{4}{x}-5$ per a $x=-2$.

b) $3b+\frac{a+b}{2-b^3}+a\cdot b^2-1$ per a $a=\frac{1}{3}$ i $b=\frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió $x-2y+3z$:

a) $x=1, y=2, z=1$

b) $x=2, y=0, z=-1$

c) $x=0, y=1, z=0$

7. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:

a) x^2+2x-7 per a $x=2$ b) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ per a $a=3$ i $b=-2$ c) c^2+3c+7 per a $c=1$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

2.1. Monomis. Polinomis

Unes expressions algebraiques de gran utilitat són els **polinomis**, la versió més simple i, dels quals al mateix temps, generadora d'ells són els **monomis**.

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades; la indeterminada, o indeterminades, conformen la **part literal** del monomi.

Exemples:

- L'expressió que ens proporciona el triple d'una quantitat, $3 \cdot x$, és un monomi amb una única variable, *x*, i coeficient 3.
- El volum d'un con, $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, és un monomi amb dues indeterminades, r i h, i coeficient $\frac{1}{3}\pi$. La seua part literal és $r^2 \cdot h$.
- Altres monomis: $5a^2b^3$, $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
- L'expressió $5xy^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{7}x$ està formada per tres termes, tres monomis. Cada un té un coeficient i una part literal:

  Al primer, $5xy^2$, el coeficient és 5 i la part literal xy^2

  Al segon, $\sqrt{3}xy$, té per coeficient $\sqrt{3}$ i part literal xy

  I al tercer, $-\frac{3}{7}x$, el coeficient és $-\frac{3}{7}$ i la part literal x

Atenent a l'exponent de la variable, o variables, adjudicarem un **grau** a cada monomi d'acord amb el criteri següent:

- Quan hi haja una única indeterminada, el grau del monomi serà l'exponent de la seua indeterminada.
- Si apareixen diverses indeterminades, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.

Exemples:

- $3x$ *és* un monomi de grau 1 en la variable *x*.
- $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ és un monomi de grau 3 en les indeterminades r i h.
- $5a^2b^3$ és un monomi de grau 5 en *a* i *b*.
- $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$ és un monomi de grau 7 en x, y i z.

Un nombre pot ser considerat com un monomi de grau 0.

Activitats proposades

8. En cada un dels següents monomis assenyala el seu coeficient, la seua part literal i el seu grau:

- $-12x^3$
- a^4b^3c
- $4xy^2$

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel major grau dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ és un polinomi de grau 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ és un polinomi de grau 4 en les indeterminades x i y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ és un polinomi de grau 5 en x i y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ és un polinomi de grau 1 en x, y i z.

Tant en aquesta secció com en la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable. És habitual escriure els diferents monomis d'un polinomi de manera que els seus graus vagen en descens per a, amb aquest criteri, apreciar en el seu primer monomi quin és el grau del polinomi.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres. El monomi de grau zero, a_0, rep el nom de **terme independent**. Direm que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de major grau és igual a 1.

Exemples:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ és un polinomi de grau 4 en la variable x, el terme independent del qual és 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ és un polinomi de grau 3 en la indeterminada y amb terme independent -7.
- $z^2 - 3z + 12$ és un polinomi de grau 2 en z. A més, és un polinomi mònic.
- $3x + 9$ és un polinomi de grau 1 en x.

Activitats proposades

9. Para cada un dels següents polinomis trau el seu grau i els monomis que el constitueixen:

- $5x^4 + 7x^2 - x$
- $6x^2 + 10 - 2x^3$
- $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Com ocorre amb qualsevol expressió algebraica, si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre: el **valor numèric** del polinomi per a aqueix valor determinat de la variable. Si hem anomenat p a un polinomi, a l'avaluació de p en, per exemple, el nombre -3 la denotarem per $p(-3)$, i llegirem *"p de menys tres"* o *"p en menys tres"*. Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x, podem referir-nos a ell com p o $p(x)$ indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entés com una manera concreta d'assignar a cada nombre un altre nombre.

Exemples:

- Si avaluem el polinomi $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ ens trobem amb el nombre

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomi $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ per a $y = -1$ és

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- En particularitzar el polinomi $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el nombre $r(0) = 12$.

Activitats proposades

10. Considerem el polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Troba els següents valors numèrics de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ i $p(1/2)$.

2.2. Suma de polinomis

Com un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis de la mateixa part literal.

Exemples:

- La suma dels polinomis $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ i $-x^4+4x^2-5x-6$ és el polinomi

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy+5xy+2x=8xy+2x$

En el següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre un altre.

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si *p* i *q* són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Exemple:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

També:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Activitats proposades

11. Realitza les següents sumes de polinomis:

- $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$
- $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el *polinomi zero*.

Exemple:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Element oposat. Cada polinomi té associat un altre, a què anomenarem el seu *polinomi oposat*, tal que la suma d'ambdós és igual al polinomi zero. Aconseguim el polinomi oposat d'un donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

- El polinomi oposat de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ és $2x^4-x^3-2x+7$, al què denotarem com $-p$. Ratifiquem que la seua suma és el polinomi zero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Activitats proposades

12. Escriu el polinomi oposat de cada un dels polinomis següents:

- $2x^3-2x^2-3x+9$
- $-5x$
- $-x^3+7x$

13. Considera els polinomis $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv -x^3+2x-3$, així com el polinomi suma $s\equiv p+q$. Troba els valors que adopta cada un d'ells per a $x=-2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si hi ha alguna relació entre aqueixos tres valors.

14. Obtín el valor del polinomi $p\equiv 4x^3-x^2+1$ en $x=2$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x=2$?

2.3. Producte de polinomis

Una altra operació que podem realitzar amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com ella adopta valors numèrics, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte entre nombres, en particular la propietat distributiva del producte respecte de la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6) \cdot (x^3 - 2x) = (x-6) \cdot x^3 + (x-6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

També podem materialitzar el producte de polinomis tal com multipliquem nombres enters:

Exemple:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordem que el polinomi *oposat* d'un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon de multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta manera el polinomi oposat de p és

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural **l'operació diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat d'un donat:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Exemple:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Activitats proposades

15. Efectua els següents productes de polinomis:

- $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$
- $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$
- $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$
- $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

16. Realitza les següents diferències de polinomis:

- $(5x^2 + 2) - (-2x)$
- $(-2x^3 + 4x) - (-2x - 1)$
- $(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

17. Multiplica cada un dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgisquen polinomis mònics:

- $3x^2 - x + 2$
- $-6x^3 + 2x - 3$
- $-x^2 + 9x - 2$

18. Calcula i simplifica els productes següents:

a) $x \cdot (-2x + 4)$ b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$

c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$ d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si *p* i *q* són dos polinomis, no importa l'orde en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemple:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2) = 2x\cdot(-x^3+x^2) - 7\cdot(-x^3+x^2) = -2x^4+2x^3+7x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7) = -x^3\cdot(2x-7) + x^2\cdot(2x-7) = -2x^4+7x^3+2x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. Basta fer-ho agrupant-los de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Exemple:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x) = (-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x) =$$
$$= 12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x = 12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

També:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right) = (4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x) =$$
$$= 12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x = 12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Activitats proposades

19. Realitza els següents productes de polinomis:

- $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$
- $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$
- $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: en multiplicar-lo per qualsevol altre sempre ens dóna aquest últim. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat*.

Exemple:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3) = (-5x^3-2x+3)\cdot 1 = -5x^3-2x+3$$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenim dues opcions per a conéixer el resultat:

a) realitzar la suma i, després, multiplicar

$$(3x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2 - x)\cdot\left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cada un dels sumands i, després, sumar:

$$(3x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2 - x)\cdot(-2x+7) + (3x^2 - x)\cdot(x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte de la suma ens diu que

$$p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q) + (p\cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **traure factor comú**.

Exemple:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1)\cdot 2x^2$$

Activitats proposades

20. De cada un dels següents polinomis extrau algun factor que siga comú als seus monomis:

- $-10x^3 - 15x^2 + 20x$
- $30x^4 + 24x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

3.1. Introducció a les fraccions polinòmiques

Fins a aquest moment hem estudiat diverses operacions amb polinomis: suma, resta i producte. En qualsevol dels casos el resultat sempre és un altre polinomi. Quan establim una **fracció polinòmica** com, per exemple,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

el que tenim és una expressió algebraica, una **fracció algebraica**, la qual, en general, no és un polinomi. Sí que apareix un polinomi en el molt particular cas en què el denominador és un nombre diferent de zero, açò és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que l'expressió anterior no és un polinomi: qualsevol polinomi pot ser avaluat en qualsevol nombre. No obstant això aqueixa expressió no pot ser avaluada per a $x = 1$, ja que ens quedaria el nombre 0 al denominador.

Podríem creure que la següent fracció polinòmica sí que és un polinomi:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí que és un polinomi, perquè es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x = 0$. No obstant això, aqueixa fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluats en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor. Són **expressions equivalents** allí on ambdues tenen sentit, açò és, per a aquells nombres en què el denominador no es fa zero.

3.2. Divisió de polinomis

Encara que, com hem vist a l'apartat anterior, una fracció polinòmica, en general, no és un polinomi, anem a endinsar-nos en la divisió de polinomis perquè és una qüestió important i útil.

Analitzem amb deteniment la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, *D* (dividend) entre *d* (divisor, diferent de 0), sorgeixen altres dos, el quocient (*c*) i el residu (*r*). Ells es troben lligats per l'anomenada *prova de la divisió*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r = 0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu *r* siga un nombre menor que el divisor *d*, i major o igual que zero. Fixem-nos en que, sense aquesta exigència per al residu *r*, podem triar arbitràriament un valor per al quocient *c* el qual ens subministra el seu valor associat com a residu *r*. En efecte, si tenim com a dividend *D* = 673 i com divisor *d* = 12, "si volem” que el quocient siga c = 48 el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

i la connexió entre aquests quatre nombres és

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Aquesta última “lectura” de la divisió de nombres enters va a guiar-nos a l’hora de dividir dos polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També ací pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau haurà de ser menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

encara que, en aquest cas, serem conscients de les cauteles assenyalades a l’apartat anterior quant a les equivalències entre polinomis i altres expressions algebraiques.

Igual que ocorre amb l’algoritme de la divisió entera, l’algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cada una de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu “provisionals” de manera que el grau d’aqueixos polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem conclòs. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

- Dividirem el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Com el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

  $$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

  o, com a igualtat entre expressions algebraiques,

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

  A la vista dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, i del que s’ha dit sobre $r(x)$, és evident que el grau del polinomi quocient, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Anem a obtindre'l monomi a monomi.

- Primera aproximació als polinomis quocient i residu:

Per a poder aconseguir la igualtat $p \equiv q \cdot c + r$, com el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de major grau de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x) \cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació de $c(x)$, el seu monomi de major grau:

$$c_1(x) = 3x^2$$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$

¿ $$(6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Com aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, major que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Segona aproximació als polinomis quocient i residu:

Si particularitzem la igualtat entre expressions algebraiques $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ al que tenim fins ara resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, sorgit com a residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

El nou objectiu és aconseguir la igualtat $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Igual que abans, el grau hauria de ser 1 o 0. Com el terme de major grau de $r_1(x)$, $8x^3$, ix del producte $q(x) \cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient continga el monomi

$$c_2(x) = 4x$$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Com aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu no és el definitiu; hem de continuar.

- Tercera aproximació als polinomis quocient i residu:

Allò que s'ha realitzat a l'etapa segona ens permet avançar en l'adequada descomposició de l'expressió algebraica que ens ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Com en cada pas, el grau hauria de ser 1 o 0. El terme de major grau de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x)\cdot c_3(x)$, pel que

$$c_3(x)=-2$$

i el tercer residu $r_3(x)$ és

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Com aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aqueix polinomi residu sí que és el definitiu. Hem conclòs:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Si ho expressem mitjançant polinomis:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusió: en dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x)=3x^2+4x-2$ i com a polinomi residu $r(x)=-11x+4$.

A continuació agilitzarem la divisió de polinomis:

Activitats proposades

21. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

- Primera i segona etapes:

$$
\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\
-4x^2-9x-2 &
\end{array}
$$

- Les tres etapes:

$$
\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}
$$

22. Divideix els polinomis següents:

- $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1
- $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$
- $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$
- $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3
- x^5-4x-6 entre x^2+3

23. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparega $q(x)=x^2-2x-1$ com a polinomi quocient i $r(x)=2x^2-3$ com a residu.

3.3. Igualtats notables

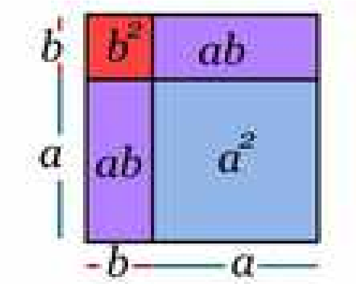
En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen sovint. Podem exposar-los de molt diverses formes. Tal com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en algun cas particular, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret açò no farà ni més menys que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, després d'efectuar els oportuns càlculs:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

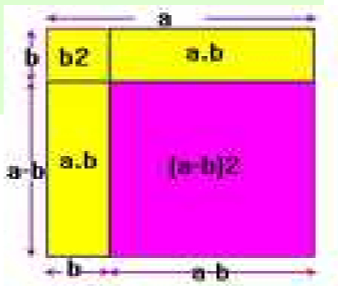
El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Comprova la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la il·lustració.

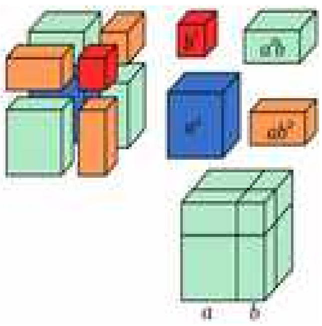


$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.



Observa la figura i connecta-la amb la igualtat.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualtat amb els cubs i prismes de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podem observar que, en cada un dels desenrotllaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cada un dels monomis.

Exemples:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot (2x)^2\cdot 5 + 3\cdot (2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Activitats proposades

24. Realitza els càlculs:

- $(1+x)^2$
- $(-x+2)^2$
- $(x-2)^2$
- $(2a-3)^2$
- $(x^2+1)^3$
- $(2b-4)^3$

25. Obtín les fórmules dels quadrats dels trinomis següents:

- $(a+b+c)^2$
- $(a-b+c)^2$

26. Desenrotlla les potències següents:

a) $(3x-y)^2$ b) $(2a+x/2)^2$ c) $(4y-2/y)^2$

d) $(5a+a^2)^2$ e) $(-a^2+2b^2)^2$ f) $(2/3y-1/y)^2$

27. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) a^2-6a+9 b) $4x^2+4x+1$ c) $b^2-10b+25$

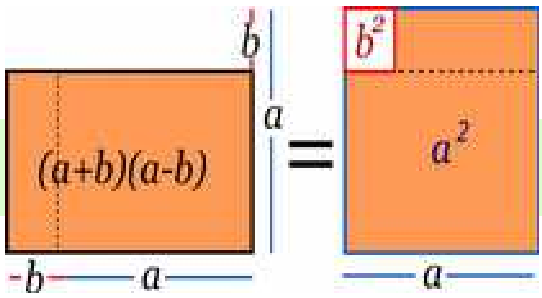
d) $4y^2-12y+9$ e) a^4+2a^2+1 f) $y^4+6xy^2+9x^2$

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté després d'efectuar el producte assenyalat:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observa les figures i connecta-les amb la igualtat.



Exemples:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Activitats proposades

28. Efectua aquests productes:

- $(3x+2)\cdot(3x-2)$
- $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$
- $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$
- $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$
- $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

29. Expressa com a suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

De volta als polinomis d'una variable, podem dir que en aquest apartat hem expandit *potències d'un polinomi*, o productes d'un polinomi per si mateix, així com productes de la forma *suma per diferència*. Convé donar-se compte que les seues fórmules, llegides al revés, ens informen del resultat de certes divisions de polinomis. En efecte, igual que quan llegim $17\times 11 = 187$ deduïm que $\frac{187}{17}=11$ i, també, $\frac{187}{11}=17$, a partir del desenrotllament d'un binomi com, per exemple:

$(-3x^2+2x)^2 = (-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x) = 9x^4-12x^3+4x^2$, podem obtindre que:

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x} = -3x^2+2x$$

El mateix ocorre amb el producte de polinomis de la forma *suma per diferència*. Ja que, per exemple, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5) = 4x^6-25$, deduïm que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5} = 2x^3+5$, i també $\frac{4x^6-25}{2x^3+5} = 2x^3-5$.

Activitats proposades

30. Realitza les següents divisions de polinomis a partir de la conversió del dividend en la potència d'un binomi o en un producte de la forma suma per diferència:

- $x^2+12x+36$ entre $x+6$
- $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$
- $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$
- x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

3.4. Operacions amb fraccions algebraiques

Ja que tant els polinomis com les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potència, nombres, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres.

- **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions polinòmiques haurem d'aconseguir que tinguen el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-ho, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producte.** Basta multiplicar els numeradors i denominadors entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Exemples:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{3x+1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{3x^2+x}{x^2+x}=$$

$$=\frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x}=\frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$$

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{7}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-7x-7}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

$$\frac{x+1}{x-5}\cdot\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$$

$$\frac{-3x+2}{x+3}:\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{-3x+2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$$

De vegades pot ser útil apreciar que una fracció polinòmica pot ser reescrita com la suma, diferència, producte o quocient d'altres dues fraccions polinòmiques. En particular, això pot ser aprofitat per a **simplificar** una expressió polinòmica:

Exemples:

- $$\frac{4x^2-3x}{8x-6}=\frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$
- $$\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}=\frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1)=\frac{-x+3}{3+x}$$

Activitats proposades

31. Efectua els càlculs següents:

- $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$
- $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$
- $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$
- $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

32. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, només un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

- $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$
- $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

33. Calcula els quocients següents:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$

b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$

c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$

d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

34. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:

- $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$
- $\frac{8x^3y - 2xy^2}{4xy} = 2x^2 - \frac{1}{2}y$
- $\frac{4x^2 + 2x}{2x - 8} = \frac{2x^2 + x}{x - 4}$
- $\frac{6a^2b^2 - 4a^2b^3 + 4ab}{2ab^2 - 8a^2b} = \frac{3ab - 2ab^2 + 2}{b - 4a}$

35. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\frac{3x^2 + 6x}{9x^2 + 18}$ b) $\frac{a^3 - 7a^2}{3a^3 + 5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2 - 7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2 - ab}{a^3b + ab}$

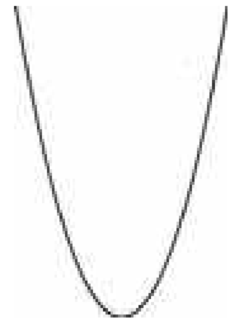
36. En cada una de les següents fraccions algebraiques escriu, quan siga possible, el polinomi numerador, o denominador, en forma de potència d'un binomi o de suma per diferència per a, posteriorment, poder simplificar cada expressió:

a) $\frac{x^2 - 4}{3x + 6}$ b) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 16}$ c) $\frac{6 - 4a}{4a^2 - 9}$

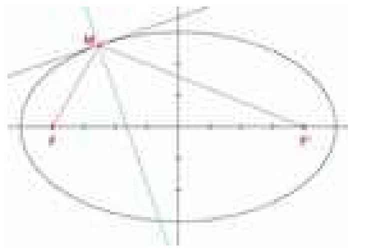
CURIOSITATS. REVISTA

GEOMETRIA

Tal com podràs comprovar durant aquest curs i els següents, gràcies als polinomis serà possible i senzill descriure nombrosos objectes geomètrics com a rectes, circumferències, el·lipses, paràboles, plans, esferes, cilindres, cons, etc.

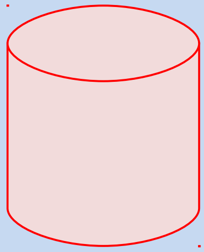


$y = ax^2 + bx + c$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$x^2 + y^2 = r^2$

Per a veure geomètricament el quadrat d'un trinomi:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Per a veure geomètricament suma per diferència:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Per a veure geomètricament el quadrat d'una diferència:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

ALTRES CIÈNCIES

Hem vist en aquest capítol que les fórmules que ens proporcionen l'àrea o el volum de diferents figures vénen donades per polinomis. Aquests també apareixen en nombrosos **principis** o **lleis de la Física** i **de la Química** com, per exemple, en diferents Lleis *de Conservació*, la Llei *General dels Gasos*, etc.

Així mateix, són de freqüent ús a l'hora d'obtindre distints **índexs** o **indicadors** propis de **l'Economia** com, per exemple, l'*IPC* (índex de preus al consum), *l'euribor*, etc.

Revisor: Javier Rodrigo
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

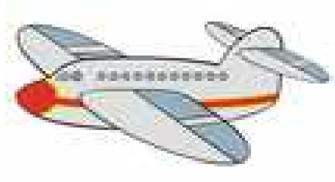
RESUM

Noció	*Descripció*	*Exemples*
Expressió algebraica	Es construeix amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	Allò no concretat a una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són *x*, *y*, *z*
Valor numèric d'una expressió algebraica	Al fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica s'obté un nombre, el **valor numèric** d'aqueixa expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.	Si, fem *x* = 3, *y* = –2, *z* = 1/2 obtenim $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres i indeterminades.	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$, $7 \cdot x^2$
Coeficient d'un monomi	El nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, –5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ és $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent de dita indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aqueixes indeterminades.	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2, respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis.	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El mayor grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p \equiv x + 3$, $q \equiv x^2 - 2$ $p + q \equiv x^2 + x + 1$ $p - q \equiv -x^2 + x + 5$ $p \cdot q \equiv x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient (*c*(*x*)) i residu (*r*(*x*)), lligats als polinomis inicials: els polinomis dividend (*p*(*x*)) i divisor (*q*(*x*))	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

EXERCICIS I PROBLEMES

1. Una empresa majorista de viatges està confeccionant una oferta per a distribuir-la en diferents agències de viatge. Es tracta d'un viatge amb avió, d'anada i tornada, a Palma de Mallorca el preu del qual dependrà del nombre final de viatgers. Les dades concretes són:

a) Si no hi ha més de 100 persones interessades, el vol costarà 150 euros per persona.



b) Si hi ha més de 100 persones interessades, per cada viatger que passe del centenar el preu del viatge es reduirà en 1 euro. No obstant això, el preu del vol en cap cas serà inferior a 90 euros.

Estudia i determina el preu final del vol, per persona, en funció del nombre total de viatgers. Així mateix, expressa la quantitat que ingressarà l'empresa segons el nombre de viatgers.

2. En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual endevinarem el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.

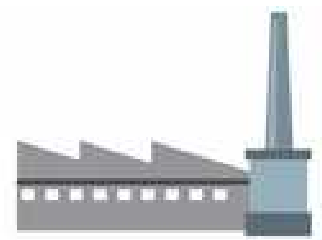
i. Dis-li a un company que escriga a un paper un nombre parell i que no el mostre
ii. Que el multiplique per 5
iii. Que al resultat anterior li sume 5
iv. Que multiplique per 2 el que obté
v. Que al resultat anterior li sume 10
vi. Que multiplique per 5 el que obté
vii. Que dividisca entre 100 l'última quantitat
viii. Que al resultat precedent li reste la mitat del nombre que va escriure
ix. Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?

3. Els responsables d'una empresa, en previsió d'uns futurs alts i baixos en les vendes dels productes que fabriquen, pensen proposar als seus treballadors a finals de l'any 2014 el següent:

a) La disminució dels sous, per a l'any que ve 2015, en un 10%.

b) Per a 2016 ofereixen augmentar un 10% els salaris de 2015.

c) En general, suggereixen que el sou disminuïsca un 10% cada any imparell i que augmente un 10% cada any parell.



Si finalment s'aplica allò que s'ha exposat, estudia si els treballadors recuperaran l'any 2016 el salari que tenien en 2014. Analitza què ocorre amb els sous després del pas de molts anys.

4. Els responsables de l'anterior empresa, després de rebre l'informe d'una consultora, alteren la seua intenció inicial i proposaran als seus treballadors, a finals de l'any 2014, el següent:

a) Un augment dels sous, per a l'any que ve 2015, d'un 10%.

b) Per a 2016, una reducció del 10% sobre els salaris de 2015.

c) En general, suggereixen que el sou augmente un 10% cada any imparell i que disminuïsca un 10% cada any parell.

Si s'aplica allò que s'ha exposat, analitza si el salari dels treballadors de l'any 2016 coincidirà amb el que tenien en 2014. Estudia com evolucionen els sous després del pas de molts anys.

5. Observa si hi ha nombres en què les següents expressions no poden ser avaluades:

- $\dfrac{x-3}{x+1}$
- $\dfrac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$
- $\dfrac{x}{x^2-2x+1}$
- $\dfrac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Troba el valor numèric de les següents expressions en els nombres que s'indiquen:

- $\dfrac{x-3}{x+1}$ en $x=1$
- $\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ per a $x=-2$
- $\dfrac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ i $y=-1$
- $\dfrac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ per a $a=-1$, $b=0$ i $c=2$
- $\dfrac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\dfrac{1}{2}$

7. Una persona té estalviats 3000 euros i decideix depositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interés anual del 2'5 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quina serà la quantitat total de què disposarà?

8. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.

9. Considera els polinomis $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ i $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Fes les operacions següents:

- $p + q + r$
- $p - q$
- $p \cdot r$
- $p \cdot r - q$

10. Calcula els productes:

a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0'1x + 0'2y - 0'3z) \cdot (0'3x - 0'2y + 0'1z)$ c) $(x - y) \cdot (y - 1) \cdot (x + a)$

11. Efectua les divisions de polinomis:

- $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x + 3$
- $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$
- $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

12. Calcula els quocients:

a) $(4x^3) : (x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4) : (3x^2yz^2)$ c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y)$

13. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques:

- $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$
- $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

14. Troba un polinomi $p(x)$ tal que en dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ s'obtinga com a polinomi residu $r(x) = -3x^2 + 1$.

15. Calcula les potències:

a) $(x + 2y - z)^2$ b) $(x - 3y)^3$ c) $\left(a + \frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2 - 2z^3)^2$

16. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenrotllament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seua procedència.

- $x^2 - 6x + 9$
- $x^4 + 8x^2 + 16$
- $x^2 - \sqrt{12}\,xy + 3y^2$
- $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$
- $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
- $x^2 - 25$
- $x^2 + 5$
- $5x^2 - 1$
- $x^2 - 8y^2$
- $x^4 - 1$
- $x^2 - y^2$
- $x^2 - 2y^2z^2$

17. Analitza si el numerador i el denominador de les següents expressions algebraiques procedeixen del desenrotllament d'un binomi, o d'un producte suma per diferència, i simplifica-les:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

18. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{3}{x(3-x)} - \dfrac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4 - 5x^3 + \dfrac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$ c) $\dfrac{x - 2y}{a - b} + \dfrac{4x + 5y}{3a - 3b}$

19. Simplifica tot el possible:

a) $\left(yx^4 - \dfrac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b - a} : \dfrac{b + a}{b - a}$ c) $\left(\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}\right) : \dfrac{4}{a - b}$

20. Simplifica tot el possible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a + y} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{a + y} + \dfrac{1}{x}} : \dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x + y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x + y}}$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala els coeficients que apareixen a les següents expressions algebraiques:

a) $3\cdot\sqrt{5}\cdot x\cdot y^2$ b) $-3x^4-x^3+x+7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2}+6xa^2-\frac{3}{a}+9$

2. Destaca les variables, o indeterminades, de les precedents expressions algebraiques.

3. Del polinomi $5x^4-8x^2-x+9$ indica el seu grau i els monomis que l'integren.

4. L'expressió $\frac{x-7}{4-2x}$ no té sentit per a

a) $x=7$ b) $x=2$ c) $x=7$ i $x=2$ d) $x=0$

5. Qualsevol polinomi:

a) pot ser avaluat en qualsevol nombre.
b) no pot ser avaluat en el nombre zero.
c) no pot ser avaluat en certs nombres concrets.

6. El valor numèric de l'expressió $\frac{x+7}{4-2y^2}+6xz^2-\frac{3}{z}$ en $x=1,\ y=2,\ z=-1$ és:

a) -11 b) 7 c) $\mathbf{1}$ d) -5

7. Completa adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….
b) La suma de tres polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….
c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….
d) La diferència de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau ……….

8. Finalitza adequadament les frases següents:

a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….
b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….
c) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau ……….

9. En dividir el polinomi $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2.
b) pot ser de grau 2.
c) ha de ser de grau 1.
d) cap de les opcions precedents.

10. Perquè una fracció polinòmica $\frac{p(x)}{q(x)}$ siga *equivalent* a un polinomi:

a) els polinomis $p(x)$ i $q(x)$ han de ser del mateix grau.
b) no importen els graus de $p(x)$ i $q(x)$.
c) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser superior o igual al grau del polinomi denominador, $q(x)$.
d) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser inferior al grau del polinomi denominador, $q(x)$.