

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

3º B d'ESO

Capítol 1:

Nombres Racionals

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044029

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:50:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es



Autor: Paco Moya

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Paco Moya i Banc d'Imatges d'INTEF

es a les ensenyances acadèmiques. 3º B ESO. Capítol 1: Nombres Racionals

Autor: Paco Moya

le.org.es



Revisora: María Molero

Il·lustracions: Paco Moya i Banco de Imatges d'INTEF

Índex

0. ET CONVÉ RECORDAR

- 0.1. PRIORITAT DE LES OPERACIONS
- 0.2. ÚS DE PARÈNTESI
- 0.3. OPERACIONS AMB ENTERS

1. NOMBRES RACIONALS

- 1.1. DEFINICIÓ
- 1.2. FRACCIONS EQUIVALENTS
- 1.3. ORDENACIÓ DE FRACCIONS
- 1.4. REPRESENTACIÓ EN LA RECTA NUMÈRICA
- 1.5. OPERACIONS AMB FRACCIONS

2. APROXIMACIONS I ERRORS

- 2.1. ARREDONIMENT
- 2.2. XIFRES SIGNIFICATIVES
- 2.3. ERROR ABSOLUT I ERROR RELATIU

3. FRACCIONS I DECIMALS

- 3.1. EXPRESSIÓ DECIMAL D'UNA FRACCIÓ
- 3.2. FORMA DE FRACCIÓ D'UNA EXPRESSIÓ DECIMAL. FRACCIÓ GENERATRIU

4. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES PER MITJÀ DE FRACCIONS

Resum

En este capítol recordarem moltes de les coses que ja saps de cursos anteriors, com les operacions amb nombres naturals i enters, les operacions amb fraccions i expressions decimals. Estudiarem els nombres racionals.

0. ET CONVÉ RECORDAR

0.1. Prioritat de les operacions

Quan no hi ha parèntesi que ens indiquen quina operació fer primer o en operacions dins d'un parèntesi es va arribar a un acord per a saber com actuar. A saber:

1º Es resolen els parèntesis interiors.

Si no hi ha parèntesi o dins d'un parèntesi farem:

2º Les potències i les arrels

3º Les multiplicacions i divisions.

4º Les sumes i restes.

S'han d'evitar:

Expressions del tipus $1 - 100 : 5 \cdot 5$, on no està clar què fer (la multiplicació i divisió tenen la mateixa prioritats). S'han de posar parèntesi per a indicar qual fer primer. L'expressió de dalt pot ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ o bé } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De totes maneres, si te la trobes, faràs:

5º Si hi ha diverses operacions amb la mateixa prioritats es faran d'esquerra a dreta.

Exemples:

✚ $(5 - 7) \cdot 10 - 8$ **No podem fer $10 - 8$** (encara que sí que pots, no deus)

Primer el parèntesi $\rightarrow -2 \cdot 10 - 8$ Després el producte $\rightarrow -20 - 8$ Finalment la resta $\rightarrow -28$

✚ $10 - 2 \cdot 3^2 = 10 - 2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Ací està prohibit fer $10 - 2$ i fer $2 \cdot 3$.

✚ $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$

✚ -10^2 val -100 ja que primer es fa la potència i a més el signe menys no està elevat a 2. No obstant això $(-10)^2$ sí que val $+100$.

✚ $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$

✚ $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$

✚ $\sqrt{9} \cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primer es fa l'arrel.

✚ $10 - 9x$ **no és** $1x$ ja que no pot fer-se la resta de cap manera (el producte amb la x té prioritats)

Tin en compte que esta prioritats és vàlida **sempre**, per a operacions amb tot tipus de nombres o altres objectes (per exemple: polinomis). Val la pena saber-se-la, no?

0.2. Ús de parèntesi

Els parèntesis ens indiquen les operacions que s'han de fer primer. De fet la primera cosa que farem seran els parèntesis **interiors** i seguirem **de dins cap a fora**. És com vestir-se: primer et poses la camiseta, després el jersei i després la caçadora. És complicat fer-ho al contrari. Per això, abans de posar-te a calcular a la babalà, mira tota l'expressió per a veure què es fa primer.

- Ha d'haver-hi tants parèntesis oberts com tancats, en cas contrari es diu que "els parèntesis no estan ben balancejats".
- Si quelcom multiplica a un parèntesi no cal posar el símbol ".".

Exemples:

$$2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$2(3 - 2) = 2 \cdot 1$$

$$(2 - 3)(6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$$

Si volem dividir entre 2 el resultat de fer $75 - 90$ **no posarem açò $75 - 90 : 2$** , ací el 2 només dividix a 90. Escriurem $(75 - 90) : 2$

Els parèntesis s'utilitzen per a ficar arguments de funcions.

Per exemple:

Si en un programa o en la calculadora volem fer l'arrel de $100 \cdot 3^4$, escriurem $arrel(100*3^4)$.

0.3. Operacions amb enters

Recordem el més important:

Regla dels signes per a la suma:

La suma de 2 nombres positius és positiva. **Exemple:** $+5 + 7 = +12$

La suma de 2 nombres negatius és negativa. **Exemple:** $-10 - 17 = -27$

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

Es posa el signe -, i se sumen els seus valors absoluts.

Exemple:

Si perd 10 i després perd altres 17, he perdut 27

La suma d'un nombre positiu amb un altre negatiu tindrà el signe del major en valor absolut.

Exemple:

$$-7 + 15 = +8; \quad +8 + (-20) = 8 - 20 = -12$$

Es posa el signe del més gran (en valor absolut) i es resten.

Exemple:

Si perd 7 i després guanya 15, he guanyat 8 (són majors els guanys que les pèrdues).

Exemple:

Si guanya 8 però després perd 20, he perdut 12 (són majors les pèrdues).

x	+	-
x	+	-
+	+	-
-	-	+

Regla dels signes per a la multiplicació (i la divisió):

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques. 3º B ESO. Capítol 1: Nombres Racionals
LibrosMareaVerde.tk



Revisora: María Molero

- Positiu x Positiu = Positiu
- Positiu x Negatiu = Negatiu x Positiu = Negatiu
- Negatiu x Negatiu = Positiu.

Exemples:

- $+2 \cdot (-7) = -14$. Si rebut d'herència 2 deutes de 7€, tinc un deute de 14€.
- $-2 \cdot (-7) = +14$. Si em lleven 2 deutes de 7 €, he guanyat 14 €!

Ara un poquet de matemàtiques serioses, que ja estem a 3è!

Demostració rigorosa de que " $0 \cdot x = 0$ per a tot x " i de que " $(-1) \cdot (-1) = +1$ "

Per fer això utilitzarem 4 propietats dels nombres que coneixes:

1ª) $a + 0 = a$ per a tot nombre a (0 és l'element neutre de la suma)

2ª) La propietat distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

3ª) $1 \cdot a = a$ per a tot nombre a (1 és l'element neutre del producte)

4ª) $-a$ és l'oposat de $+a$, és a dir $-a + a = a + (-a) = 0$

Demostrem " $0 \cdot x = 0$ per a tot nombre x ":

Com $a - a = 0$, per la propietat distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

Demostrem que " $(-1) \cdot (-1) = +1$ ":

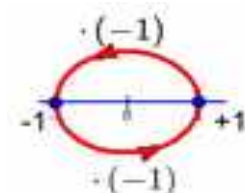
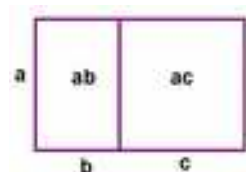
$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; però per la propietat distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Per tant $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Si sumem 1 en ambdós membres: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1 \rightarrow$

$(-1) \cdot (-1) + 0 = +1 \rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1$



Activitats resoltes

- *Calcula pas a pas:*

$$(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4 \cdot 2) \cdot (-10)$$

Calculem en primer lloc $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ y $4 \cdot 2 = 8$ i ens queda:

$$(((-15 - 5 \cdot (-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$$

$$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1180$$

Activitats proposades

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$
 d) $(-80 - 20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$
 d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36} \cdot 4$

3. Calcula:

a) $3 - (4 \times 3 - 2 \times 5)^2 - (3 - 5)^3$ b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$
 c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$ d) $2 - (2 \times 3 - 3 \times 4)^2 - (2 - 4)^3$

1. NOMBRES RACIONALS

1.1. Definició

Els **nombres racionals** són tots aquells nombres que **poden** expressar-se per mitjà d'una fracció de nombres enters. És a dir, el nombre r és **racional** si $r = \frac{a}{b}$, amb a, b nombres enters i $b \neq 0$.

Una fracció és una divisió indicada, així $\frac{7}{3} = 7 : 3$, però la divisió no es realitza fins que ho necessitem. Hi ha moltes ocasions en què és millor deixar les operacions indicades.

Amb un exemple n'hi haurà prou:

🚩 Prova a fer la divisió $1,142857142857... : 8$, difícil, no?, no obstant això, $\frac{8}{7} : 8 = \frac{1}{7}$ és un poc més senzilla i a més **exacta**.

El nom "racional" ve de "**raó**", que en matemàtiques significa divisió o quocient.

El conjunt dels nombres racionals es representa per \mathbb{Q} .

Un nombre racional té infinites representacions en forma de fracció.

Així: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \dots$ son infinites fraccions que representen al mateix nombre racional, se'ls anomena "**equivalents**" ja que tenen el mateix valor numèric. Si fem les divisions en l'exemple totes valen 0,333... que és la seua expressió decimal.

Els números "**enters**" són racionals ja que es poden expressar per mitjà d'una fracció, per exemple:

$$-2 = \frac{-8}{4}$$

Tot nombre racional té un representant que és la seua fracció **irreductible**, aquella que té els números més xicotets possibles al numerador i al denominador. A aquesta fracció s'arriba a partir de qualsevol altra dividint el numerador i denominador pel mateix nombre. Si es vol fer en un sol pas es dividirà entre el Màxim Comú Divisor (M.C.D.) del numerador i el denominador. Per exemple: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ on hem dividit primer entre 10 i després entre 2, però podíem haver dividit entre 20 directament ja que 20 és el MCD(60, 80). Per tant $\frac{3}{4}$ és la fracció irreductible i per això la que representa al número racional que té moltes altres formes de fracció com $60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 \dots$ i per expressió decimal 0,75

1.2. Fraccions equivalents

Dos fraccions són equivalents si es verifiquen les següents condicions (totes equivalents):

➤ Al fer la divisió obtenim la mateixa expressió **decimal**. Aquesta és la definició.

Exemple:

$4 : 5 = 8 : 10 = 0,8$ doncs $\frac{4}{5}$ i $\frac{8}{10}$ són equivalents i pot escriure's $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

➤ Els productes **creuats són iguals**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

És fàcil de demostrar, multipliquem a un costat i a l'altre de l'igual per b i per d

$\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$, com $b : b = 1$ i $d : d = 1$ ens queda $a \cdot d = b \cdot c$.

Per exemple:

➤ $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ja que $12 \cdot 4 = 8 \cdot 6 = 48$

➤ **Al simplificar les fraccions s'arriba a la mateixa fracció irreductible.**

Si $A = B$ i $C = B$ s'ha de complir que $A = C$

Exemple:

➤ $\frac{80}{60} = \frac{4}{3}$; $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ doncs $\frac{80}{60} = \frac{12}{9}$

➤ **Es pot passar d'una fracció a una altra multiplicant (o dividint) el numerador i el denominador per un mateix nombre.**

Exemple:

$\frac{6}{4} = \frac{24}{16}$ perquè basta multiplicar el numerador i el denominador de la primera per 4 per obtenir la segona..

En general $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$

Reducció a comú denominador

A fi de comparar 2 o més fraccions (veure quina és major) i també per poder sumar-les o restar-les és important obtenir fraccions equivalents que tinguin el mateix denominador.

Primer un **exemple** i després la teoria:

➤ Vull saber si $\frac{5}{6}$ és major que $\frac{6}{7}$ sense fer la divisió. Busquem un múltiple comú de 6 i de 7 (si és el mínim comú múltiple millor, però no és imprescindible), 42 és múltiple de 6 i de 7. Ho escrivim com a nou denominador per a les dues fraccions: $\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$; $\frac{6}{7} = \frac{36}{42}$

Ara calculem els nous numeradors: com el 6 l'he multiplicat per 7 per arribar a 42 perquè el 5 el multipliquem també per 7 per obtenir una fracció equivalent $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$ i com el 7 l'he multiplicat per 6, el 6 també el multiplique per 6 obtenint $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42}$, ara està clar quina de les dues és més gran, no?

Per obtenir fraccions equivalents a $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ amb el **mateix denominador busquem** un múltiple comú de b i d (si és el mínim comú múltiple millor) que anomenarem m , i fem $\frac{a \cdot m}{m}$ i $\frac{c \cdot m}{m}$

1.3. Ordenació de fraccions

Per ordenar una sèrie de fraccions hi ha diversos procediments:

i) Fer les divisions i comparar les expressions decimals.

Aquest procediment és el més fàcil però no el més ràpid (a no ser que tingues calculadora).

Per exemple:

Ens demanen que ordenem de menor a major les fraccions següents:

$$\frac{20}{19}, \frac{21}{20}, \frac{-20}{19}, \frac{-21}{20}, \frac{29}{30}, \frac{28}{29}$$

Fem les divisions que donen respectivament: 1,0526...; 1,05; -1,0526...; -1,05; 0,9666... i 0,9655...

Mirant els nombres decimals sabem que:

$$\frac{-20}{19} < \frac{-21}{20} < \frac{28}{29} < \frac{29}{30} < \frac{21}{20} < \frac{20}{19}$$

Recorda que

Els nombres negatius són sempre menors que els positius i a més entre nombres negatius és menor el que té major valor absolut ($-4 < -3$).

ii) Usar la lògica i el truc següent: Per a fraccions positives $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$.

Exemple:

$\frac{8}{9} < \frac{10}{11}$ perquè $8 \cdot 11 < 9 \cdot 10$.

Demostració:

$$8 \cdot 11 < 9 \cdot 10 \Rightarrow \frac{8 \cdot 11}{9 \cdot 11} < \frac{9 \cdot 10}{9 \cdot 11} \Rightarrow \frac{8}{9} < \frac{10}{11}; \text{ hem dividit entre } 9 \cdot 11. \text{ I simplificat.}$$

I al contrari: $\frac{8}{9} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{8 \cdot 9 \cdot 11}{9} < \frac{10 \cdot 9 \cdot 11}{11} \Rightarrow 8 \cdot 11 < 10 \cdot 9$;hem multiplicat per 9·11 i simplificat.

No cal que uses la demostració, la posem només perquè veges que en matemàtiques “quasi” tot té la seua explicació.

I això d'usar la lògica què és?

Comencem pel més fàcil,

Exemple:

Comparar $\frac{20}{19}$ y $\frac{28}{29}$

$\frac{20}{19} > 1$ ja que $20 > 19$. Però $\frac{28}{29} < 1$ ja que $28 < 29$. Està clar que la segona és menor.

Un poc més difícil, comparem $\frac{20}{19}$ y $\frac{21}{20}$:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20} . \text{ Però què és major } 1/19 \text{ o } 1/20?$$

És major $1/19$ i per tant és major la primera. Pensa que si dividim una pizza en 19 trossos iguals estos són majors que si la dividim en 20 trossos iguals.

$$\text{Si } a \text{ i } b \text{ són positius } \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} .$$

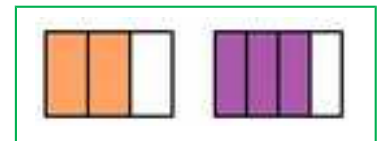
Així que $1/3 > 1/4$ per exemple.

Més difícil encara:

Comparem $\frac{19}{20}$ i $\frac{18}{19}$. Ara $19/20 = 1 - 1/20$ i $18/19 = 1 - 1/19$.

Com $1/19 > 1/20$ ara la fracció major és $19/20$ ja que li falta menys per a arribar a 1.

Amb nombres més senzills s'entén millor: $2/3 < 3/4$ ja que a $2/3$ li falta $1/3$ per arribar a 1, i a $3/4$ només $1/4$.



Important: Si a i b són positius llavors $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

iii) Reduir a comú denominador i comparar els numeradors:

- ✚ Ens demanen que ordenem de major a menor les fraccions següents:

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{-9}{4}, \frac{-7}{3}, \frac{-2}{1}$$

Primer busquem un nombre que siga múltiple de 6, de 8, de 4 i de 3 (si és el mínim comú múltiple millor que millor). Trobem el 24 que és múltiple de tots ells. El posem com a nou denominador de totes les fraccions i calculem els nous numeradors perquè les fraccions siguin equivalents: $24:6 = 4$ després el 6 cal multiplicar-lo per 4 per arribar a 24, el mateix fem amb el 5, $5 \cdot 4 = 20$ és el nou numerador. Així amb les altres.

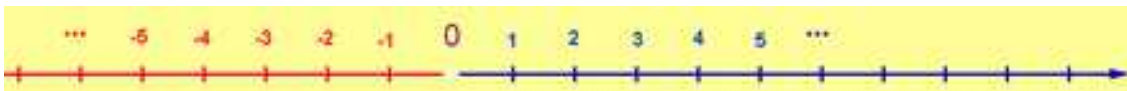
$$\begin{aligned} \frac{5}{6} &= \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} \\ \frac{7}{8} &= \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24} \\ \frac{-9}{4} &= \frac{-9 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{-54}{24} \\ \frac{-7}{3} &= \frac{-7 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{-56}{24} \\ \frac{-2}{1} &= \frac{-2 \cdot 24}{1 \cdot 24} = \frac{-48}{24} \end{aligned}$$

Després comparem els numeradors i obtenim que:

$$\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > -2 > \frac{-9}{4} > \frac{-7}{3}$$

ja que $21 > 20 > -48 > -54 > -56$

1.4. Representació a la recta numèrica



Aquesta és la recta numèrica, en ella tot nombre real té un lloc exacte.

Recordem coses que ja saps:

- Per dibuixar-la només es poden prendre dues decisions: on col·loquem el 0 i on col·loquem l'1, és a dir, on està l'origen i quin és la grandària de la unitat.
- Les unitats han de ser sempre de la mateixa grandària.
- Els nombres positius van a la dreta del 0 i els negatius a l'esquerra.
- El 0 no és ni positiu ni negatiu.
- La recta numèrica no té ni principi ni fi. Nosaltres només podem dibuixar una "xicoteta" part.
- Donats 2 nombres a, b es compleix: **$a < b$ si a està a l'esquerra de b** i viceversa.

Així per exemple:

$$1 < 3; \quad -1 < 1; \quad -4 < -2$$

Tot nombre racional té una posició predeterminada en la recta numèrica. Les infinites fraccions equivalents que formen un nombre racional ocupen el mateix punt de la recta. Així que $2/3$ i $4/6$, que són el mateix nombre ocupen el mateix punt.

Vegem com representar les fraccions de forma exacta.

Fracció pròpia, fracció impròpia i forma mixta

Fracció pròpia: Es diu de la fracció a/b on $a < b$. És a dir, el numerador és menor que el denominador.

Per exemple:

✚ 4/5 o 99/100.

Si $a < b$ al fer la divisió l'expressió **decimal serà menor que 1**.

Per exemple:

✚ 4/5 = 4:5 = 0,8.

Fracció impròpia: Es diu de la fracció a/b on $a > b$, numerador major que el denominador.

Exemple:

✚ 15/4 o 37/27. Si fem la divisió l'expressió **decimal és major d'1**. 15/4 = 3,75 y 37/27 = 1,37037037...

Nombre mixt: Les fraccions impròpies poden escriure's com la suma d'un nombre enter i d'una fracció pròpia.

Així per exemple:

✚ $\frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = 1 + \frac{4}{5}$, aquesta última és la forma mixta.

A Espanya no és freqüent però en el món anglosaxó sol escriure's $1\frac{4}{5}$ que significa el mateix.

La calculadora científica passa a forma mixta, investiga-ho.

La forma ràpida i automàtica d'escriure una fracció en forma mixta és la següent:

✚ $\frac{77}{6}$ és impròpia perquè $77 > 6$, per a escriure-la en forma mixta fem la divisió sencera $77 : 6$, és a dir, sense decimals, ens interessa el quocient i la resta.

$$\begin{array}{r} 77 \overline{) 6} \\ \underline{12} \\ 5 \end{array} \quad \frac{77}{6} = 12 + \frac{5}{6}$$

El quocient és la part sencera, la resta és el numerador de la fracció i el divisor és el denominador.

És important que ho intentes fer de cap (quan siga raonable), és fàcil, per exemple:

✚ 47/6, busquem el múltiple de 6 més pròxim a 47 per baix, aquest és $7 \cdot 6 = 42$, per tant:

$$47/6 = 7 + 5/6$$

ja que de 42 a 47 van 5. Pensa-ho, si ens mengem 47/6 de pizza, ens hem menjat 7 pizzas senceres i a més 5/6 de pizza.

Nota:

També és fàcil trobar el quocient i la resta amb la calculadora, per si tens pressa.

Per a $437/6$, fes la divisió $437 : 6$, obtens $72,83333\dots$, la part sencera és 72, només ens queda calcular la resta. Tenim 2 camins:

1º) Fas $437 - 72 \cdot 6 = 5$ i ja està.

2º) Multiplica la part decimal pel divisor: $0,8333\dots \cdot 6 = 5$, que és la resta. Si és necessari arrodonix ($0,8333 \cdot 6 = 4,9998$ que arrodonim a 5).

Només et permetem fer açò si saps per què funciona, si no ho saps, oblida-ho.

Si la fracció és negativa procedim de la manera següent:

$$\color{red}{\oplus} \quad \frac{-19}{5} = - \left(3 + \frac{4}{5} \right) = -3 - \frac{4}{5}, \text{ ja que la divisió dona 3 de quocient i 4 de resta.}$$

Representació de fraccions

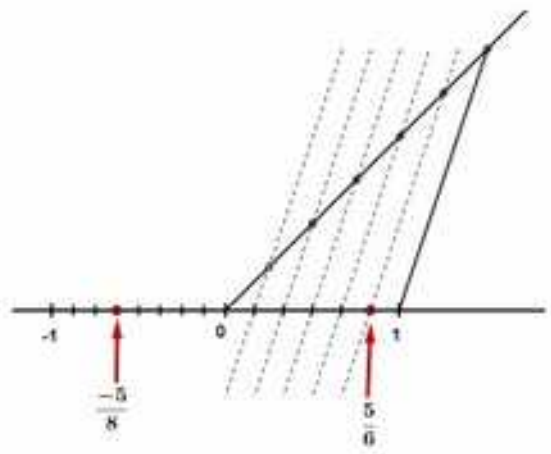
a) Si la fracció és pròpia:

Per exemple

$\color{red}{\oplus}$ Representa la fracció $5/6$: El valor està entre 0 i 1, per tant dividim la primera unitat en 6 parts iguals i prenem 5.

A la figura s'indica com fer-ho de manera exacta emprant el **Teorema de Tals**. Tracem una recta obliqua qualsevol que passe per 0, marquem amb el compàs 6 punts a la mateixa distància entre si (la que siga, però igual). Unim l'últim punt amb l'1 i tracem paral·leles a eixe segment que passen pels punts intermedis de la recta obliqua (les línies discontinúes). Aquestes rectes paral·leles dividixen l'interval $[0, 1]$ en 6 parts iguals.

Fixa't que per a dividir en 6 parts iguals només cal marcar 5 punts intermedis a la mateixa distància, sempre un menys. Per a dividir en 8 parts iguals marquem 7 punts intermedis.



Si la fracció és negativa es fa igual però a l'interval $[-1, 0]$.

En la figura hem representat $-5/8$, hem dividit l'interval $[-1, 0]$ en 8 parts iguals i hem comptat 5 començant en el 0. Assegura't d'entendre-ho i si no és el cas pregunta. Per cert, la fletxa apunta al punt i no a l'espai que hi ha entre ells.

Si volem representar la fracció pròpia a/b es divideix la primera unitat en " b " parts iguals i es compten " a " divisions.

En cas de ser **negativa** es fa igual però comptant des de 0 cap a l'esquerra.

b) Si la fracció és impròpia:

Activitats resoltes

Representem $13/6$. El primer és escriure-la en la seua forma mixta, $\frac{13}{6} = 2 + \frac{1}{6}$, ara és fàcil representar-la, ens n'anem al 2, la unitat que va del 2 al 3 la dividim en 6 parts iguals i prenem 1 (veure imatge).

Igual per $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$, ens n'anem a l'1 i la unitat que va de l'1 al 2 la dividim en 8 parts iguals i prenem 3.

Si la fracció és negativa procedim així:

Representem $\frac{-12}{7} = -\left(1 + \frac{5}{7}\right) = -1 - \frac{5}{7}$, ens n'anem al -1 , la unitat que va del -1 al -2 la dividim en 7 parts iguals i comptem 5 cap a l'esquerra començant en -1 .

Representem $\frac{-11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, ens n'anem al -2 , dividim en 4 parts iguals i prenem 3, comptant cap a l'esquerra i començant en -2 (veure imatge).



Activitats proposades

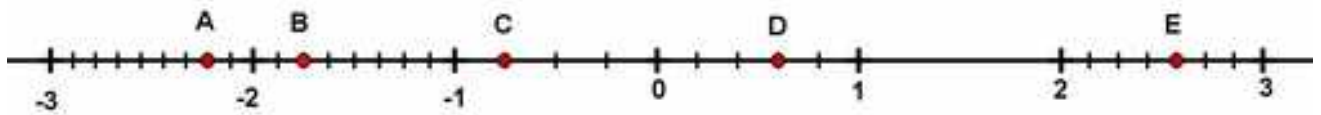
4. Passa a forma mixta les fraccions següents: $\frac{50}{7}$; $\frac{25}{11}$; $\frac{101}{6}$

5. Passa a forma mixta les fraccions $\frac{-30}{7}$; $\frac{-50}{13}$; $\frac{-100}{21}$

6. Representa en la recta numèrica les fraccions: $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{-5}{8}$; $\frac{-3}{4}$

7. Passa a forma mixta i representa les fraccions: $\frac{23}{8}$; $\frac{-23}{8}$; $\frac{180}{50}$; $\frac{-26}{6}$

8. Troba les fraccions que es corresponen amb els punts A, B, C, D i E, expressant en forma mixta i com a fracció impròpia les representades pels punts A, B i E.



1.5. Operacions amb fraccions

Repassarem les operacions amb fraccions, en concret, la suma, la resta, el producte i la divisió.

Suma i resta de fraccions

La suma i la resta són les operacions més exigents ja que només poden sumar-se o restar-se coses iguals. No podem sumar metres amb segons, ni € amb litres. De la mateixa manera **no poden sumar-se terços amb quintos** ni quarts amb mitjans. És a dir, no es pot fer la suma $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ així tal qual, ja que els sisens i els quarts són de distinta grandària. Però, hi haurà alguna manera de sumar-les?, si.

El primer és trobar 2 fraccions equivalents que tinguen el mateix denominador, i llavors ja sí es podran sumar.

Vegem l'exemple:

✚ Un múltiple de 6 i 4 és 12. Escrivim 12 com a nou denominador i trobem els numeradors perquè les fraccions siguin equivalents:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 2}{12} + \frac{3 \cdot 3}{12} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{10+9}{12} = \frac{19}{12}, \text{ els dotzens ja sí es poden sumar, i el resultat són dotzens.}$$

Un altre exemple:

$$\color{red}{\oplus} \frac{13}{6} - \frac{51}{10} + \frac{8}{12} = \frac{13 \cdot 10}{60} - \frac{51 \cdot 6}{60} + \frac{8 \cdot 5}{60} = \frac{130 - 306 + 40}{60} = \frac{-136}{60} = \frac{-34}{15}$$

Hem trobat un múltiple de 6, de 10 i de 12 (si és el mínim comú múltiple millor que millor), s'escriu com a denominador comú i fem $60 : 6 = 10$, després el 13 el multipliquem per 10, $60 : 10 = 6$ després el 51 el multipliquem per 6, etc.

Quan totes les fraccions tenen el mateix denominador, es sumen o resten els numeradors, deixant el mateix denominador. Si és possible es simplifica la fracció resultant.

Als casos en què no siga fàcil trobar el mínim comú múltiple es fa el següent:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Així per exemple:

$$\frac{15}{387} + \frac{19}{155} = \frac{15 \cdot 155 + 19 \cdot 387}{387 \cdot 155} = \frac{9678}{59985} = \frac{3226}{19995}$$

Producte i divisió de fraccions:

Sorprén que el producte i la divisió de fraccions siguin més senzills que la suma i la resta.

Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, es multipliquen els numeradors entre si per a obtenir el numerador de la fracció producte i els denominadors entre si per a determinar el denominador de la dita fracció, fàcil no?

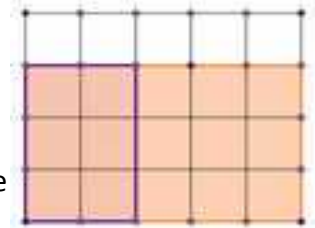
Així:

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 7} = \frac{15}{77}$$

Per què les fraccions es multipliquen així?

No demostrarem el cas general, amb un exemple ens serà suficient.

- $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ significa dividir en 4 parts iguals i agafar 3 (els 3 franges inferiors de la figura). Ara hem de fer $\frac{2}{5}$ del que ens ha quedat, així que dividim les 3 franges en 5 parts iguals i prenem 2. Com pots veure's ens queden 6 parts iguals de les 20 totals.



De vegades convé fer la multiplicació amb intel·ligència:

- Abans de multiplicar ens fixem en que el 17 es pot simplificar (per a què multiplicar per 17 i després dividir per 17?) i després el 5 ja que $15=3 \cdot 5$.

$$\frac{17}{15} \cdot \frac{5}{17} = \frac{\cancel{17} \cdot 5}{15 \cdot \cancel{17}} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

Un altre exemple:

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ fes-la, esperem que arribes al resultat correcte ja simplificat que és $\frac{1}{6}$ 😊

Tenim quelcom important que dir-te, no volem veure açò mai, mai:



$$\frac{\cancel{7} + 3}{\cancel{7} + 5} = \frac{3}{5}$$

és absolutament **fals** ($\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ és el correcte). Només poden simplificar-se si el nombre està multiplicat al numerador i al denominador (si és factor comú). Açò tampoc està gens **bé**.

$$\frac{\cancel{7} \cdot 2 + 3}{\cancel{7} \cdot 4 + 5} = \frac{2 + 3}{4 + 5}$$



Fracció inversa:

La fracció inversa $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ doncs es compleix que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$ que és la definició d'invers.

Exemples:

La inversa de $3/4$ és $4/3$ i la inversa de 2 és $1/2$.

Divisió:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Doncs per a dividir es multiplica per la inversa de la fracció que divideix. $\frac{6}{10} : \frac{9}{15} = \frac{6}{10} \cdot \frac{15}{9} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

També pots multiplicar i després simplificar: $\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$

Preguntaràs que si pots multiplicar en **X**, això dependrà del teu professor.

Casos curiosos:

- Dividir entre una desena és multiplicar per 10 ja que $a : \frac{1}{10} = \frac{a \cdot 10}{1 \cdot 1} = 10a$

Com a cas general: dividir entre $1/a$ és multiplicar per a .

- Dividir entre un nombre és com multiplicar pel seu invers: $a : 2 = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$

- **Torres de fraccions:** No t'espantes si veus açò $\frac{6}{\frac{10}{4}}$, és molt fàcil, és el mateix que $\frac{6}{15}$

$$\frac{6}{10} : \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 15}{5 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{9}{4}, \text{ no oblidés que " " és el mateix que " : "}$$

Ara tot junt.

Operacions combinades.

Aplicarem tot el que "sabem" sobre prioritats i ús de parèntesi.

Activitats resoltes

- **Calcula pas a pas i simplifica:**

$$\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{6} \right) \right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} \right)$$

Primer fem el parèntesi de més dins i la multiplicació del segon parèntesi que té prioritats sobre la resta.

$$\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{6}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{-1}{6}\right)\right) \cdot \left(\frac{7}{14} - \frac{2}{14}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{5}{14} = \left(\frac{9}{12} + \frac{2}{12}\right) \cdot \frac{5}{14} = \frac{11}{12} \cdot \frac{5}{14} = \frac{154}{60} = \frac{77}{30}$$

La fracció com a operador

a) Fracció d'un nombre:

Ens demanen trobar les 3 quartes parts de 120.

Traduïm: trobar $\frac{3}{4}$ de 120. Aquest "de" es tradueix en matemàtiques per un "per", així que:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 120 = \frac{3}{4} \cdot 120 = \frac{3 \cdot 120}{4} = 3 \cdot 30 = 90$$

En general $\frac{a}{b} \text{ de } c = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$

b) Fracció d'una fracció:

Exemples:

$$\frac{10}{6} \text{ de } \frac{4}{15} = \frac{10}{6} \cdot \frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

Troba les dos quintes parts de les deu dotzenes parts de 360.

$$\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 12} \cdot 360 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 360}{5 \cdot 12} = \frac{20 \cdot 360}{60} = 20 \cdot 6 = 120$$

c) Problema invers:

Em diuen que les tres quartes parts d'un nombre valen 66. Quin nombre és?

Està clar que un quart serà $66 : 3 = 22$ i els 4 quarts són

$$22 \cdot 4 = 88$$

Resumint $66 \cdot \frac{4}{3} = 88$



El cas general és: $\frac{a}{b} \cdot x = c \Rightarrow x = c \cdot \frac{b}{a}$, es **multiplica el nombre per la fracció inversa**.

Activitats proposades

9. Troba les quatre cinquenes parts de les tres quartes parts de 12.

10. Les cinc sisenes parts d'un nombre són 100, quin nombre és?

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques. 3º B ESO. Capítol 1: Nombres Racionals
LibrosMareaVerde.tk

Autor: Paco Moya



Revisora: María Molero

www.apuntesmareaverde.org.es

Il·lustracions: Paco Moya i Banco de Imatges d'INTEF

2. APROXIMACIONS I ERRORS

A la vida quotidiana i també en les Ciències Aplicades és necessari treballar amb nombres aproximats.

Uns exemples:

- ✚ Volem comprar un terç de metre de tela, hem de dir-li al dependent quant volem i no serem tan idiotes com per a dir-li que ens done 0,333... metres o 33,333... cm que és l'exacte. El normal és demanar 33 cm o 333 mm si som molt exactes.
- ✚ Mesurem un foli A4 amb el regle i ens dóna 29,7 cm, el regle arriba als mm. Volem dividir-lo en 8 parts iguals, quant mesurarà cada part?, si fem $29,7:8$ ens dóna 3,7125 cm, però el regle no arriba a tant, serà millor aproximar a 3,7 cm.
- ✚ Fem un examen amb 9 preguntes que valen totes igual. Tenim 5 bé i les altres en blanc. Quina nota tenim?, $10 \cdot 5/9 = 5,55555556$ segons la calculadora, les posem totes?, si ho fem estem suposant que som capaços de distingir 1 part d'entre 10000 milions de parts iguals de l'examen. El raonable és 5,6 o 5,56 si som molt però que molt precisos.
- ✚ Resulta curiós i hauria de ser delictes que en les gasolineres s'anuncie: Preu del gasoil 1,399 €/litre. Si algú va i demana un litre exacte, o 2 o 15 no se'l poden cobrar exactament ja que no hi ha mil·lèsimes d'€ haurien d'escriure 1,40 €/litre. És cert que d'eixa manera t'estalvies 5 cèntims si tires 50 litres però a ells els compensa el tema psicològic, la gent poc culta en nombres veu 1,3 en compte de 1,4.
- ✚ Exactament el mateix passa als supermercats: lluç 5,99€/Kg. Són trucs barats que una ment entrenada sap detectar i actuar en conseqüència. La diferència entre 6 €/Kg i 5,99 €/Kg és que t'estalvies 1 cèntim! si compres 1 Kg, si compres mitjà, quant t'estalvies?, gens ni miqueta!, $5,99:2 = 2,995$ que arrodonit és 3, que és el que cobren. Encara que ben mirada l'oferta no està tan malament, si compres 5 Kg. de lluç estalvies per a comprar-te un caramel, això sí, has de comprar més de mig Kg per vegada.

Utilitzar massa xifres decimals sense estar segur d'elles no és sinònim de precisió sinó de malaptesa.

2.1. Arrodoniment.

Et recordem com s'arrodoneixen correctament els nombres.

- ✚ Arrodonir π a les deumil·lèsimes: $\pi = 3,1415926535\dots$, la xifra de les deumil·lèsimes és 5, com la xifra següent és 9 que és ≥ 5 , li sumem 1 al 5 i posarem $\pi \approx 3,1416$.

Fixa't que π està més prop de 3,1416 que de 3,1415

- ✚ Arrodonir $\sqrt{2}$ a les centèsimes: $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, ara la xifra següent és $4 < 5$ doncs la deixem tal qual, $\sqrt{2} \approx 1,41$

La regla és: Localitzem la xifra d'arrodoniment, mirem la següent xifra (només la següent), si aquesta és menor que 5 deixem la xifra d'arrodoniment igual, si la xifra següent és 5 o més gran que 5 incrementem en 1 la xifra d'arrodoniment.



Més exemples:

Arrodoneix

- ✚ 1,995 a les centèsimes → 2,00 i els zeros cal escriure'ls per a indicar l'ordre on hem arrodonit.
- ✚ 1555555 als milers → 1556000 on cal completar amb zeros després dels milers.
- ✚ 6,94999 a les dècimes → 6,9 només cal mirar el 4

Nota important: Si el resultat d'un problema son **€ s'arrodoneix sempre als cèntims.**

Una altra nota important: Si volem donar un resultat amb 2 decimals als passos intermedis treballarem amb més decimals, almenys 3 o 4, en cas contrari el resultat no tindrà la precisió que pretenem, un exemple:

- ✚ $A = 9,65$; $B = 6,98$ y $C = 4,99$. Volem fer $(A \cdot B) \cdot C^2$, si fem $A \cdot B$ i arrodonim a les centèsimes ens queda 67,36 i si ara multipliquem per $4,99^2 = 24,90$ ens ix 1677,26.

El resultat correcte és 1677,20 on només hem arrodonit al final.

2.2. Xifres significatives.

És el nombre de xifres "amb valor" que s'utilitzen per a expressar un nombre aproximat.

Uns quants **exemples** i ho entens:

- ✚ 2,25 en té 3 xifres significatives; 28,049 en té 5 xifres significatives.
- ✚ 5,00 en té 3; 4000,01 en té 6;
- ✚ 10000 no sabem les xifres significatives que en té, pot ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, ens han de dir en quina xifra s'ha aproximat. Per a aquest últim cas pot recórrer-se a la notació científica per dir amb precisió el nombre de xifres significatives, així:
 $1 \cdot 10^4$ té una xifra significativa, $1,0 \cdot 10^4$ en té 2 i així fins a $1,0000 \cdot 10^4$ que en té 5.

Consideracions:

- Les xifres **diferents** de 0 sempre són significatives.
- Els zeros a l'esquerra mai són xifres significatives: 0,0002 en té una xifra significativa.
- Els zeros al mig d'altres xifres diferents de 0 sempre són significatius 2004 en té 4 xifres significatives.

Més que el nombre de decimals la precisió d'una aproximació es mesura pel nombre de xifres significatives.

No han d'utilitzar-se més xifres de les què requerisca la situació.

Activitats proposades

11. Còpia esta taula al teu quadern i arrodoneix amb el nombre de xifres indicat

Nombre	Xifres significatives			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95549	100000			

30000	$3 \cdot 10^4$			
1,9995				2,000
20,55				

2.3. Error absolut i error relatiu

I.- Error absolut

Es defineix l'error **absolut** (EA) com $EA = |valor\ real - valor\ aproximat|$.

Les barres verticals es lligen "valor absolut" i signifiquen que el resultat ens donarà sempre positiu.

Exemple:

🚩 Aproximem $1/3$ de litre per 0,33 litres.

$$EA = \left| \frac{1}{3} - 0,33 \right| = 0,00333... \approx 0,0033 \text{ litres}$$

Un altre exemple:

🚩 Aproximem $16/6$ Kg. amb 2 xifres significatives (2,7 Kg.)

$$EA = \left| \frac{16}{6} - 2,7 \right| = |-0,0333...| \approx 0,033 \text{ Kg.}$$

- No han de posar-se massa xifres significatives a l'error absolut, 2 o 3 és prou.
- L'error absolut té les mateixes unitats que la magnitud que s'aproxima.

Aquests errors són grans o xicotets?, la resposta és, comparats amb què?

Per a això es defineix l'error relatiu que sí ens dona una mesura del gran o xicotet que és l'error absolut.

II.- Error relatiu

Per a comparar errors de distintes magnituds o nombres es defineix l'**Error Relatiu (ER)** com:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per parlar de % d'error relatiu.

Si no es coneix el valor real se substitueix pel valor aproximat (la diferència normalment és xicoteta).

Calculem l'error relatiu per als exemples de dalt:

$$1^a) ER = \frac{0,0033}{1/3} = 0,0099 \Rightarrow 0,99\% \text{ de ER}$$

$$2^a) ER = \frac{0,033}{8/3} \approx 0,0124 \Rightarrow 1,2\% \text{ de ER}$$

Ara sí que podem dir que la 1ª aproximació té menys error que la 2ª, ja que l'error relatiu és menor.

L'error relatiu (ER) no té unitats i per això es poden comparar errors de diferents magnituds o amb diferents unitats.

Què fer si no es coneix el valor exacte?

En este cas no es pot calcular l'error absolut, no obstant això tots els aparells de mesura tenen un error absolut màxim.

- ✚ Balances de bany que mesuren de 100 g en 100 g el seu error absolut màxim és de 50 g.
- ✚ Cronòmetres que mesuren centèsimes de segon, el seu error absolut màxim serà de 0,005 s, mitja centèsima.
- ✚ Regles normals que mesuren mm, el seu error absolut màxim serà de 0,5 mm = 0,05 cm = 0,0005 m

A açò se li denomina **cota o fita d'error absolut**.

Activitats resoltes

- ✚ Et peses en una bàscula de bany i et marca 65,3 Kg, l'error absolut màxim és de 0,05 Kg (50 g). Ara pesem un cotxe en una bàscula especial i pesa 1250 Kg amb error absolut màxim de 10 Kg. Quina mesura és més precisa?

$$\text{Tu mateix} \rightarrow ER \leq \frac{0,05}{65,3} = 0,00077 \Rightarrow ER \leq 0,077\%$$

$$\text{Cotxe} \rightarrow ER \leq \frac{10}{1250} = 0,008 \Rightarrow ER \leq 0,8\%$$

És molt més precisa la bàscula de bany en aquest cas. No obstant això, si en la mateixa bàscula pesem un bebè i marca 3,1 Kg, l'error relatiu ix menor o igual que 1,6 % (prova-ho) i ara la mesura de la bàscula de bany és molt menys precisa.

Així que l'error depèn de la precisió de la màquina i de la mesura que fem amb ella.

Activitats proposades

12. Prova que 123,45 amb EA = 0,005 i 0,12345 amb EA = 0,000005 tenen el mateix ER.
13. Contesta Verdader o Fals i justifica la teua resposta:
 - a) Per a una mateixa màquina de mesurar l'error comés és menor com més xicoteta siga la mesura.
 - b) No es poden comparar errors relatius de diferents magnituds.
 - c) Posar preus com 1,99 €/Kg és un intent d'engany.
 - d) Comprar a 1,99 €/Kg enfront de 2 €/Kg suposa un estalvi.
 - e) Posar moltes xifres en un resultat vol dir que la persona és un gran matemàtic.
 - f) La precisió es mesura pel nombre de xifres decimals.

3. FRACCIONS I DECIMALS

Veurem com es passa de fracció a decimal i de decimal a fracció.

3.1. Expressió decimal d'una fracció

Tota fracció té una expressió decimal que s'obté dividint el numerador entre el denominador:

$$a/b = a:b$$

Exemples:

$$\frac{3}{25} = 0,12; \frac{68}{99} = 0,686868...; \frac{91}{80} = 1,1375; \frac{177}{90} = 1,9666...$$

Com pots observar unes vegades l'expressió decimal és exacta (ja que la resta ix 0) i altres vegades ix periòdica, infinits decimals entre els que es repeteix un bloc de xifres que es denomina període.

Sempre ix així, exacte o periòdic?, tu et contestes quan lliges el següent.

✚ Fem $1/17 = 1 : 17 = 0,05882352941...$, que són les xifres que mostra la calculadora, no pareix tindre període, però serà possible que sí el tinga però que no el vegem per ser molt llarg?

Comencem a fer la divisió:

Els residus obtinguts són 10; 15; 14; 4; 6; ...

Com saps els residus són inferiors al divisor i en aquest cas poden ser 1; 2; 3; 4; ...; 15 o 16, el 0 no pot eixir, ho expliquem després.

$$\begin{array}{r} 100 \quad | \quad 17 \\ \underline{150} \quad | \quad 0,05882 \\ 140 \quad | \\ \underline{40} \quad | \\ 6 \quad | \\ \dots \end{array}$$

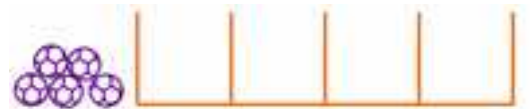
Fem ara 2 preguntes: Què ocorre si torna a eixir el mateix residu 2 vegades?, té a la força que repetir-se alguna vegada un residu?

La resposta a la primera pregunta és que si es repeteix una resta es repetirà la xifra del quocient i a partir d'ací es repetiran totes en forma de període.

La resposta a la segona pregunta és: Sí, a la força, segur que sí!, si tinc 16 possibles residus i suposem que han eixit els 16 possibles ja, què ocorre al traure el següent?

Ho entendràs millor amb caramels, tinc molts caramels per a repartir entre 16 persones, ja li he donat 1 caramel a cada u, és a dir, tots tenen ja 1 caramel, em dispose a repartir el següent, li tocara a algú que ja en té?

A açò se li denomina en matemàtiques "**Principi de les caselles**" i és una ferramenta molt potent. Busca informació d'ell.



✚ Fique 5 pilotes en 4 caixes, hi haurà alguna caixa amb més d'1 pilota?

Esperem que ho hages entès, **al pitjor dels casos** el residu número 17 ha de coincidir amb algun dels anteriors, es repetiran les xifres del quocient i per tant l'expressió decimal és periòdica.

✚ Pots comprovar que efectivament els residus són 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10,

Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques. 3º B ESO. Capítol 1: Nombres Racionals
LibrosMareaVerde.tk

Autor: Paco Moya



Revisora: María Molero

www.apuntesmareaverde.org.es

Il·lustracions: Paco Moya i Banco de Imatges d'INTEF

..., el pitjor dels casos possibles, es repeteix el que fa el número 17. El normal és que es repetisca abans. Per cert que la divisió ix

$$1:17 = 0,05882352941176470588235294117647... \text{ un període de només 16 xifres!}$$

Encara que hem vist un cas particular, esta és una regla general:

L'expressió decimal d'una fracció és exacta o periòdica.

El nombre de xifres del període d' $1/n$ és menor o igual que $n - 1$.

Quan ix exacta i quan periòdica?

- Doncs és fàcil, ens donen una fracció com per exemple $\frac{27}{150}$, primer la simplifiquem fins a obtenir la irreductible: $\frac{27}{150} = \frac{9}{50}$, ens fixem només en el denominador i el descomponem en factors primers, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, com els factors primers són només 2 i 5 l'expressió decimal és exacta.

Vegem la raó:

- $2 \cdot 5^2$ és divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ una potència de 10. Es compleix $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0,02$, només falta multiplicar per 9 $\Rightarrow \frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0,02 \cdot 9 = 0,18$.

Fixa't que el nombre de decimals és 2, el major dels exponents de 2 i 5.

- Per exemple $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0,0005$ té 4 xifres decimals perquè el major exponent és 4.

En general $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ té expressió decimal exacta i el nombre de xifres decimals és el màxim entre n i m .

- Un altre cas: $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$, descomponem el 21 en factors primers, $21 = 3 \cdot 7$, com hi ha factors diferents de 2 i 5 l'expressió serà periòdica.

Vegem: si l'expressió fóra exacta podríem escriure $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, amb "a" un nombre enter. Però açò no pot ser!, 10 només té els factors 2 i 5 i els factors 3 i 7 no poden simplificar-se. Com no pot ser exacta serà periòdica.

Si al denominador d'una fracció irreductible apareixen factors primers diferents de 2 i de 5 l'expressió decimal serà periòdica.

Activitats proposades

14. Sense fer la divisió indica si les següents fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracció d'una expressió decimal

Els nombres decimals exactes o periòdics poden expressar-se com una fracció. A aquesta fracció se la denomina fracció **generatriu**.

De decimal exacte a fracció:

És molt fàcil, mira els exemples de la dreta.

Has agarrat el truc?

$$\begin{aligned} 1,175 &= \frac{1175}{1000} = \frac{47}{40} \\ 20,68 &= \frac{2068}{100} = \frac{517}{25} \\ 3,1416 &= \frac{31416}{10000} = \frac{3927}{1250} \end{aligned}$$

Per obtenir la fracció generatriu es posa en el numerador el nombre sense la coma i en el denominador la unitat seguida de tants zeros com a xifres decimals en té. S'ha de simplificar la fracció.

Les persones intel·ligents comproven el que han fet, divideix 47 entre 40, si te dona 1,175 està bé!, i no cal que ningú t'ho diga 😊

De decimal periòdic a fracció:

Abans de veure el mètode rigorós jugarem una estona.

👉 Agafa la **calculadora** i fes les següents divisions i apunta els resultats decimals al teu quadern:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Al fer 6/9 la calculadora dona 0,6666666667, realment és 6 periòdic, la calculadora ho fa bé i arrodoneix en l'última xifra.

Si has observat bé, ja saps escriure un muntó d'expressions decimals periòdiques a la seua forma de fracció, és a dir, saps calcular la seua fracció **generatriu**.

Per exemple:

- 👉 0,444... = 4/9;
- 👉 0,333... = 3/9 = 1/3.
- 👉 0,171717... = 17/99;
- 👉 0,454545... = 45/99 = 5/11;
- 👉 0,878787... = 87/99 = 29/33
- 👉 0,337337337... = 337/999;
- 👉 0,549549... = 549/999 = 61/111
- 👉 ¿Cómo será 0,1234512345...?, pues 12345/99999 = 4115/33333



Així que ja ho saps, per a tindre un període de n xifres el denominador té n nous.

- Però el truc anterior no val per 5,888...

$$\text{L'adaptem: } 5,888... = 5 + 0,888... = 5 + \frac{8}{9} = \frac{45}{9} + \frac{8}{9} = \frac{53}{9}$$

- Segueix sense valdre per 0,7333...

$$\text{Fem } 0,7333... = 0,7 + 0,0333... = \frac{7}{10} + \frac{3}{9} : 10 = \frac{7}{10} + \frac{3}{90} = \frac{21}{30} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

Combinant els 3 trucs anteriors ixen tots, però no seguim, et deixem que investigues tu. Nosaltres explicarem el mètode seriós.

Un altre exemple:

- Ens demanen expressar el nombre 7,3252525... a la seua forma de fracció. El primer serà posar-li un nom, per exemple $N = 7,3252525...$, la segona cosa és aconseguir **2 nombres amb la mateixa part decimal**.

- L'avantperíode té 1 xifra i el període 2. Per aconseguir la mateixa part decimal multipliquem per 1000 i la coma se'n va fins després del primer període, si multipliquem per 10 la coma se'n va fins davant del primer període.

$$\begin{array}{r} 1000N = 7325,2525... \\ - 10N = 73,2525... \\ \hline 990N = 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{3626}{495}$$

Ja tenim 2 números amb la mateixa part decimal, si els restem aquesta desapareix i podem aïllar N .

Fixa't que la resta es fa en els 2 membres al mateix temps.

Mètode formal:

Per obtindre la fracció generatriu d'una expressió decimal multipliquem el nombre per la potència de 10 necessària per emportar-nos la coma al final del primer període, després el multipliquem una altra vegada perquè la coma quede al principi del primer període.

Un altre exemple i ho entens:

- $N = 15,25636363...$

Com aconseguir 2 nombres amb la part decimal ,636363...?

Doncs el més fàcil és $10000N = 152563,6363...$ i $100N = 1525,6363...$

$$\text{Restem: } 9900N = 151038 \Rightarrow N = \frac{151038}{9900} = \frac{8391}{550}$$

Aquests són els casos més difícils (periòdics mixtos), quan no hi haja avantperíode (periòdic pur) només caldrà multiplicar una vegada ja que ja tenim el període just després de la coma:

- $N = 4,545454...$

$$100N = 454,5454\dots$$

$$- 1N = 4,5454\dots$$

$$99N = 450 \rightarrow N = \frac{450}{99} = \frac{50}{11}$$

Exemples:

N	10N –	1N =	9N	
1,333...	13,333... –	1,333... =	12	N = 12/9
N	100N –	10N =	90N	
5,6777...	567,77... –	56,77... =	511	N = 511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8,65888...	8658,88... –	865,88... =	7793	N = 7793/900

Finalment, si et diuen que hi ha un truc per a fer açò en segons i sense calfar-se el cap, perquè és cert, n'hi ha, el coneixem. És una regla que s'oblida i per tant no val per a res, no és raonada.

Activitats proposades

15. Passa a fracció i simplifica:

- 1,4142
- 0,125
- 6,66

16. Passa a fracció i simplifica:

- 1,41424142...
- 0,125125...
- 6,666...

17. Passa a fracció i simplifica:

- 1,041424142...
- 0,7125125...
- 6,7666...

18. Determina la fracció generatriu de:

- 0,333... + 0,666...
- 0,888... · 2,5
- 0,65 : 0,656565...

4.- RESOLUCIÓ DE PROBLEMES PER MITJÀ DE FRACCIONS.

Veiem uns quants exemples:

i) *Quants litres hi ha en 90 botelles de 3 quarts de litre cadascuna?*

La primera cosa que has de fer és posar-te un exemple amb nombres més fàcils.

Tinc 10 botelles cadascuna de 2 litres. Està clar que tenim 20 litres, quina operació hem fet?, multiplicar?, aleshores el mateix hem de fer amb els nombres del problema:

$$\frac{3}{4} \text{ litres/botella} \cdot 80 \text{ botelles} = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60 \text{ litres}$$

(Observa que botelles se'n van amb botelles i les unitats finals són litres).

ii) *Quantes botelles de 3 huitens de litre necessite per envasar 900 litres?*

Novament canviem els nombres per altres més senzills: vull envasar 10 litres en botelles de 2 litres. Està clar que necessite 5 botelles (10 : 2).

Fem el mateix amb els nostres nombres:

$$900 \text{ litres} : \frac{3}{8} \text{ litres/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2400 \text{ botelles}$$

Fixa't que litres se'n va amb litres i que les botelles que dividixen en el denominador al final passen multiplicant en el numerador, per la qual cosa unitat del resultat és "botelles".

$$\frac{\text{litres}}{1} : \frac{\text{litres}}{\text{botella}} = \frac{\text{litres} \cdot \text{botella}}{\text{litres}} = \text{botella}$$

iii) *Sol guanya uns certs diners al mes, si es gasta el 40 % d'ells per pagar la lletra del pis, el 75 % del **que li queda** en factures i li sobren 90 € per a menjar. Quant guanya i quant gasta en el pis i en factures?*

$$\text{El primer: } 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \text{ i } 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

El fem de 2 maneres i tries la que més t'agrada:

a) Mètode gràfic:

Fem un rectangle de 5 x 4 quadrats que són els denominadors.

De les 5 franges verticals iguals llevem 2 que és el que es gasta en la lletra del pis.

El que queda està dividit en 4 parts iguals i llevem 3 que és el que es gasta en factures. Ens queden 3 quadradets que són els 90 € del menjar. Aleshores un quadradet és $90 : 3 = 30$ €.

El que guanya és $30 \cdot 20 = 600$ €.

En la lletra es gasta $30 \cdot 8 = 240$ € i en factures $30 \cdot 9 = 270$ €.



b) Amb fraccions:

Si a una quantitat li llevem els seus $\frac{2}{5}$ ens queden $\frac{3}{5}$ d'ella ($1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5}$)

En factures ens gastem $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

Si teníem $\frac{3}{5}$ i ens gastem $\frac{9}{20}$ ens queden $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12-9}{20} = \frac{3}{20}$ de la quantitat inicial. Eixos $\frac{3}{20}$ ens diuen que són 90 €. Per tant $\frac{1}{20}$ seran $90 : 3 = 30$ €.

La quantitat total són els $\frac{20}{20}$ per tant $30 \cdot 20 = 600$ €.

En la lletra del pis em gaste $\frac{2}{5}$ de $600 = 1200 : 5 = 240$ € i en factures $\frac{3}{4}$ de $(600 - 240) = \frac{3}{4}$ de $360 = 270$ €.

En qualsevol cas els problemes es comproven.

40 % de 600 = $0,4 \cdot 600 = 240$ € es gasta en la lletra.

$600 - 240 = 360$ € em queden.

75 % de 360 = $0,75 \cdot 360 = 270$ € es gasta en factures.

$360 - 270 = 90$ € que li queden per a menjar. Funciona!

Tinc	Lleve	Em queda
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5} = \frac{9}{20}$	$\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$

iv) Una pilota perd en cada bot 1 cinqué de l'altura des de la que cau.

a) Quants bots ha de donar perquè l'altura aconseguida siga inferior a 1 desé de la inicial?

b) Si després del quart bot la seua altura és de 12,8 cm, quina era l'altura inicial?

El primer és donar-se compte que si perd un cinqué de l'altura es queda amb els 4 cinquens d'aquesta. Per tant en cada bot l'altura es multiplica per $\frac{4}{5}$.

a) Hem de veure per a què n es compleix $\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{10} = 0,1$

I açò ho fem provant amb la calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,107 > 0,1$ però $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0,0859 < 0,1$, per tant fan falta 11 bots.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$ que és la fracció per la qual s'ha multiplicat l'altura inicial.

$$\frac{256}{625}h = 12,8 \Rightarrow h = 12,8 \cdot \frac{625}{256} = 31,25 \text{ cm}$$



v) A Mariana li descompten la cinquena part del seu sou brut en concepte d'IRPF i la sisena part del mateix per a la Seguretat Social. Si cobra 600 € nets, quin és el seu sou brut?

Sumem les dos fraccions ja que es referixen a la mateixa quantitat:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$$

que és la part que descompten del sou brut per tindre el net. Li queden $1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$ de la quantitat inicial. Eixos 19/30 ens diuen que són 600 €.

Per calcular el sou brut fem:

$$600 \cdot \frac{30}{19} \approx 947,37€.$$

Comprovació:

1/5 de 947,37 = 189,47 € paga d'IRPF

1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la S.S.

947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que és el sou net. **Bé!**

Podria hi haver hagut un xicotet desfasament d'algun cèntim degut a les aproximacions.



CURIOSITATS. REVISTA

Suma d'infinites fraccions.

El sentit comú et diu que si sumem infinits nombres positius la suma ha de ser infinita. Però, no necessàriament!

Et proposem un repte, sumarem $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ on cada fracció és la meitat de l'anterior. Els punts suspensius indiquen que açò no acaba mai, en teoria hauríem de sumar i sumar i continuar sumant de forma indefinida. En la pràctica no pot fer-se, però per a això estan les matemàtiques.

Agafa la calculadora i comença: $1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 + 1:32 + 1:64$

Et dona 0,984375 o si tens sort $63/64$, només falta $1/64$ per a arribar a 1!

Suma ara al resultat anterior $1/128$, obtenim 0,9921875 o el que és el mateix $127/128$, només falta $1/128$ per arribar a 1. Has de seguir, els següents nombres a sumar són $1/256$, $1/512$, $1/1024$, ...

Si t'has fixat ens acostem cada vegada més a 1. Val, no arribarem mai, però si voldríem donar-li un valor a la suma infinita de dalt, tu quin li donaries?



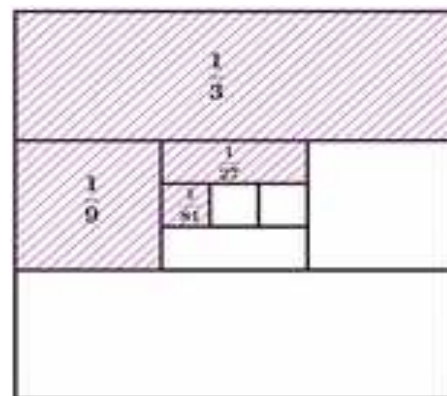
Els matemàtics li donen el valor 1.

Observa. Tens un full de paper quadrat d'àrea 1. El talles per la meitat, i deixes el tros tallat damunt de la taula i el sense tallar a la teua mà. Tornes a tallar per la meitat el tros que tens a la teua mà, i tornes a deixar damunt de la taula el tros tallat. I seguixes, i seguixes... Sumes els trossos de paper que tens a la taula. Podria alguna vegada sumar més d'1? No, evidentment, són trossos d'un paper d'àrea 1. Alguna vegada tindries tot el paper damunt de la taula? Cada vegada tens menys paper a la mà, i més en la taula, però al tallar per la meitat, mai ho tindries tot. No obstant això, els matemàtics diuen que en l'infinít eixa suma val 1.

Ara tenim una pizza i ens anem a dinar la pizza de "terços en terços", és a dir, primer $1/3$, després $1/3$ d' $1/3$, després $1/3$ d' $1/3$ d' $1/3$, i així successivament...

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots =$$

Quant crees que val aquesta suma?



RESUM

Prioritat de les operacions	1r Parèntesis interiors, 2º Potències i arrels, 3º Productes i divisions, 4º Sumes i restes.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signe de la suma	$(+) + (+) = (+)$ es sumen, $(-) + (-) = (-)$ es sumen. $(+) + (-) = ?$ té el signe del més gran en valor absolut.	$-7/3 - 8/3 = -15/3 = -5$ $-12/5 + 8/5 = -4/5$
Signe del producte i la divisió	Si tenen el mateix signe dóna positiu. $(+)\cdot(+)=(-)\cdot(-)=(+)$ Si tenen signe contrari dóna negatiu. $(+)\cdot(-)=(-)\cdot(+)=(-)$	$-4 \cdot (-10) = +40$ $+2 \cdot (-15) = -30$
Nombre Racional	Un nombre r és racional si es pot escriure com $r = a/b$ amb a, b enters i $b \neq 0$.	2; $3/8$; $-7/2$ són racionals. També $0,125$ i $2,6777\dots$ $\sqrt{2}$ i π no ho son.
Fracció irreductible	S'obté dividint el numerador i el denominador pel mateix nombre. Numerador i denominador són primers entre si.	$360/840 = 3/7$, l'última és irreductible.
Fraccions equivalents	Són equivalents les fraccions que tenen la mateixa expressió decimal. Dos fraccions equivalents representen al mateix nombre racional. Els seus productes creuats valen el mateix.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = 0,75$ són equivalents. $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$
Ordenació de fraccions	Es passen a comú denominador o es troba el seu valor decimal o s'usa la lògica i el truc $a/b < c/d$ si $ad < bc$ per a nombres positius.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ per què $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre altres motius
Representació	Si és necessari es passen a forma mixta. Per a $n + a/b$ dividim la unitat que va de n a $n + 1$ en b parts iguals i prenem a . Per $-n - a/b$ dividim la unitat que va de $-n$ a $-n - 1$ en b parts iguals i comptem a començant en $-n$.	
Suma i resta de fraccions	Es passen a comú denominador i es sumen (resten) els numeradors.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Producte i divisió	$a/b \cdot c/d = ac/bd$ $a/b : c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 14} = \frac{6}{7}$
Fracció d'un nombre	a/b de $x = a/b \cdot x = (ax)/b$	$3/4$ de $60 = 3/4 \cdot 60 = 45$ $3/4$ de $4/5 = 3/4 \cdot 4/5 = 3/5$
Xifres significatives	És el nombre de xifres "amb valor" que s'utilitzen per a aproximar un nombre	0,025 té 2 3,020 té 4 3000 no sabem les que en té



Errors	<p>Error absolut: $EA = \text{valor real} - \text{valor aproximat}$</p> <p>Error relatiu: $ER = \frac{EA}{ \text{Valor real} }$ es multiplica per 100 per obtindre el % d'ER.</p>	$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow EA \approx 0,033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5\%$
Fraccions i decimals	<p>L'expressió decimal d'una fracció sempre és exacta o periòdica. Exacta si el denominador només té com a factors primers el 2 o el 5. Periòdica en cas contrari.</p>	<p>$3/40 = 0,075$ exacta $5/12 = 0,41666\dots$ periòdica</p>
Pas de decimal a fracció	<p>Expressió decimal exacta: es divideix el nombre sense la coma entre la unitat seguida de tants zeros com a xifres decimals en té.</p> <p>Expressió decimal periòdica: Es multiplica N per potències de 10 fins a aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal, es resten i s'aïlla N.</p>	<p>$3,175 = 3175/1000 = 127/40$ $N = 2,0333\dots$ $100N - 10N = 183$ $90N = 183 \rightarrow$ $N = 183/90 = 61/30$.</p>



EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Troba pas a pas

$$(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1))$$

2. Ordena de menor a major:

$$\frac{8}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{38}{45}, \frac{77}{90}, \frac{-9}{8}$$

3. Indica raonadament quina fracció és major:

a) $\frac{102}{101}$ i $\frac{98}{99}$

b) $\frac{98}{99}$ i $\frac{97}{98}$

c) $\frac{-102}{101}$ i $-\frac{103}{102}$

4. Demuestra que $4,999... = 5$

Generalitza: Quant val $n,999...?$

5. Passa a forma mixta: $\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$

6. Representa de forma **exacta** en la recta numèrica:

$$\frac{760}{240}; 3,125; -\frac{46}{14}; -2,1666...$$

7. Simplifica:

a) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10}$ b) $\frac{10+6}{10-2}$ c) $\frac{2 \cdot 3+4}{2 \cdot 5+10}$

8. Troba la fracció que cau just al mig de $\frac{3}{2}$ i $\frac{9}{4}$ en la recta numèrica.

Pista: La mitjana aritmètica $\frac{a+b}{2}$

Representa les 3 fraccions en la recta numèrica.

9. La mitjana harmònica es definix com $H(a, b) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, l'invers de la mitjana aritmètica dels inversos.

a) Demuestra que $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

b) Troba $H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$

10. Troba la fracció inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$



11. Opera i simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$

12. Resol pas a pas:

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2 \right)}$$

13. Calcula les dos tercers parts de la sisena part del 80% de 900.

14. troba el nombre tal que els seus quatre terços valen 520.

15. Quants pots de tres huitens de litre puc omplir amb 12 litres?

16. Calcula la fracció per la qual cal multiplicar 450 per obtindre 720.

17. Si 100 polzades són 254 cm:

- Troba el llarg en centímetres d'una televisió si l'alçaria són 19,2 polzades i llarg/alt = 4/3
- Igual però ara llarg/alt = 16/9

18. Si en una classe el 77,777... % dels alumnes aproven i hi ha més de 30 alumnes però menys de 40, quants alumnes són i quants aproven?

19. Tres pelegrins decideixen iniciar un viatge de 8 dies. El primer dels pelegrins aporta 5 pans per al camí, el segon pelegrí, 3 pans, i el tercer no aporta cap, però promet pagar-los als seus companys al final del viatge pel pa que haja menjat. Cada un dels dies que va durar el viatge, a l'hora de menjar treien un pa de la bossa, ho dividien en tres trossos i cada pelegrí es menjava un tros. Quan van arribar al seu destí, el caminant que no havia aportat cap pa va traure 8 monedes i les va entregar als seus companys: 5 monedes per al que havia posat 5 pans i 3 monedes per al que havia contribuït amb 3 pans. Podries explicar per què este repartiment de monedes no és just? Quin seria el repartiment just? (*Problema de l'Olimpiada d'Albacete.*) S'ha de tindre en compte no els pans que un ha posat sinó el que realment ha aportat (el que posa menys el que menja).

20. Aproxima els nombres 32567 i 1,395 amb 2 xifres significatives i digues en quin es comet menor error relatiu.

21. π no pot representar-se per mitjà d'una fracció de enters però, pots trobar una fracció que ho aproxime amb 5 xifres significatives?

22. Aproximem π per:

- Simplifica fins a una fracció impròpia irreductible.
- Troba l'error absolut i l'error relatiu.

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$$



23. Quantes botelles de $\frac{3}{4}$ de litre necessita per a tindre la mateixa quantitat que en 60 botelles de $\frac{3}{5}$ de litre?
24. Troba un nombre enter de tal forma que: la seua mitat, la seua tercera part, la seua quarta part, la seua cinquena part, la seua sisena part i la seua setena part siguen nombres enters.
25. A la unitat li lleve les seues 2 cinquenes parts. Per quina fracció cal multiplicar el resultat per arribar una altra vegada a la unitat?
26. Troba la fracció resultant:
- Lleve 1 terç del que tinc i després afig 1 terç del que queda.
 - Afig 1 terç del que tinc i després lleve 1 terç del resultat.
27. Estàs avorrit i decideixes jugar al següent: Avances un metre en línia recta, retrocedeixes la meitat, avances la meitat del que has retrocedit en l'últim pas, retrocedeixes la meitat del que has avançat en l'últim pas, ...

Si ho fas moltes, però que moltes vegades, quant avances en total?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots =$$

28. Darío dona passos de $\frac{3}{5}$ de metre, el seu gos Raig dona passos de $\frac{1}{4}$ de metre. Si ambdós van a la mateixa velocitat i Raig dona 360 passos per minut, quants passos per minut donarà Darío?
29. La figura del costat és un "Tamgran".
- Troba la fracció que li correspon a cadascuna de les 7 peces.
 - Si el costat del quadrat és de 20cm, troba l'àrea de cada peça.



30. Si el costat del quadrat és de 4 cm troba la fracció i l'àrea de la zona pintada:



31. Calcula:

$$\text{a) } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{b) } \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{c) } \frac{8}{3} \times \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$$

AUTOAVALUACIÓ

1. Saps operar amb nombres enters, coneixes la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesi. Resol pas a pas:

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6)) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2 \cdot (-2)$$

2. Saps obtindre fraccions equivalents. Ordena de major a menor:

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{-5}{6}, \frac{-5}{4}$$

3. Saps representar fraccions de forma exacta en la recta numèrica. Representa:

$$\frac{3}{4}, \frac{17}{6}, \frac{-11}{7}, -0,125$$

4. Saps operar amb fraccions. Resol pas a pas i simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}{\frac{2}{6}} : \left(2 - \frac{11}{3} \right)$$

5. Saps trobar la fracció d'un nombre i la fracció d'una fracció.

a) Troba les quatre cinquenes parts dels cinc octaus de 360.

b) Una botella té plenes les seues set octaves parts, si conté 840 cm³, quant li cap plena?

6. Saps arrodonir i calcular l'error relativa comés. Aproxima els nombres 9859 i 9,945 amb 2 xifres significatives i calcula els errors relatius comesos (en %), quin és menor?

7. Saps distingir quan una fracció té una expressió decimal exacta.

a) Digues quines de les següents fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{6}{120}, \frac{5}{180}, \frac{42}{210}$$

b) Quants decimals té $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?

c) Quantes xifres com a màxim pot tindre el període d'1/97?

8. Saps passar de decimal a fracció. Passa a fracció i simplifica:

a) 2,225 b) 2,2252525... c) $\frac{0,125}{0,125125125...}$

9. Saps resoldre problemes per mitjà de fraccions.

Una medusa creix cada setmana un terç del seu volum.

a) Quantes setmanes han de passar perquè el seu volum es multiplique per més de 3?

b) Si el seu volum actual és de 1200 cm³, quin era el seu volum fa 3 setmanes?



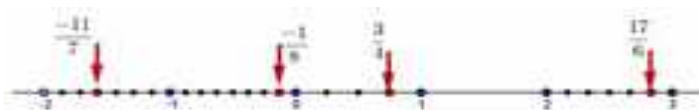
10. A un treballador li abaixen el sou la sisena part, del que li **queda** el 25 % se'n va destinat a impostos i finalment de la resta que li **queda** les dos cinquenes parts se les gasta a pagar la hipoteca del pis. Si encara té disponibles 450 €, quant cobrava abans de la baixada de sou?, quant paga d'impostos i d'hipoteca?

Solucions:

1) 10.

$$2) \frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}.$$

3)



$$4) \frac{7}{2}.$$

5) a) 180;

b) 960 cm^3 .

6) $9859:9900 \rightarrow EA = 41 \rightarrow ER = 0,42 \%$.

$9,945:9,9 \rightarrow EA = 0,045 \rightarrow ER = 0,45 \%$, és un poc menor el primer.

7) a) Primer se simplifiquen, són exactes $6/120$ y $42/150$. $5/180$ té expressió decimal periòdica.

b) 10 xifres decimals.

c) 96 xifres (de fet les té).

$$8) a) \frac{89}{40}$$

$$b) \frac{2203}{990}$$

$$c) \frac{999}{1000} = 0,999$$

9) a) 4 setmanes.

b) $506,25 \text{ cm}^3$.

10) Cobrava 1200 €. Ara cobra 1000 €, paga 250 € de impostos i 300 € d'hipoteca.