

3r B d'ESO

Exercicis i Problemes

ÍNDIX:

Capítol 1: Nombres racionals.	2
Capítol 2: Potències i arrels.	7
Capítol 3: Successions. Progressions aritmètiques i geomètriques.	12
Capítol 4: Expressions algebraiques. Polinomis.	18
Capítol 5: Equacions de 2n grau i sistemes lineals.	24
Capítol 6: Proporcionalitat.	30
Capítol 7: Geometria en el plànel.	35
Capítol 8: Moviments en el plànel i en l'espai.	41
Capítol 9: Geometria en l'espai. El globus terraqüi.	54
Capítol 10: Funcions i gràfiques.	62
Capítol 11: Estadística. Atzar i probabilitat.	70

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors de Llibres Marea Verde.

Traducció: IES Juniper Serra (Balears)

Il·lustracions: Banc d'Imatges de INTEF i VVAA (anterioris)



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044030
Fecha y hora de registro: 2014-05-28 17:53:18.0
Licencia de distribución: CC BY-NC-SA



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>

CAPÍTOL 1: NOMBRES RACIONALS

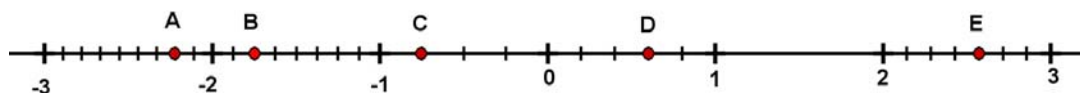
ACTIVITATS PROPOSADES

0. ET CONVÉ RECORDAR

- Calcula:
a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$ d) $(-80 - 20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 3^2)$
- Calcula:
a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$ d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36} \cdot 4$
- Calcula:
a) $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^3$ b) $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2$
c) $7 - 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$ d) $2 - (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4)^2 - (2 - 4)^3$

1. NOMBRES RACIONALS

- Passa a forma mixta les següents fraccions: $\frac{50}{7}$; $\frac{25}{11}$; $\frac{101}{6}$
- Passa a forma mixta les fraccions $\frac{-30}{7}$; $\frac{-50}{13}$; $\frac{-100}{21}$
- Representa en la recta numèrica les fraccions: $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{-5}{8}$; $\frac{-3}{4}$
- Passa a forma mixta i representa les fraccions: $\frac{23}{8}$; $\frac{-23}{8}$; $\frac{180}{50}$; $\frac{-26}{6}$
- Troba les fraccions que es corresponen amb els punts A, B, C, D i E, expressant en forma mixta i com a fracció impròpia les representades pels punts A, B i E.



- Troba les quatre cinquenes parts de les tres quarts parts de 12.
- Les cinc sisenes parts d'un nombre són 100, quin nombre és?

2. APROXIMACIONS I ERRORS

- Copia aquesta taula en el teu quadern i arrodoneix amb el nombre de xifres indicat

Nombre	Xifres significatives			
	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
$1/7$				
95549	100000			
30000	$3 \cdot 10^4$			
1,9995				2,000
20,55				

- Prova que 123,45 amb EA = 0,005 i 0,12345 amb EA = 0,000005 tenen el mateix ER.
- Contesta Verdader o Fals i justifica la teva resposta:
 - Per a una mateixa màquina de mesurar l'error comès és menor com més petita sigui la mesura.
 - No es poden comparar errors relatius de diferents magnituds.
 - Posar preus com 1,99 €/Kg és un intent d'engany.
 - Comprar a 1,99 €/Kg enfront de 2 €/Kg suposa un estalvi.
 - Posar moltes xifres en un resultat significa que un és un gran matemàtic.
 - La precisió es mesura pel nombre de xifres decimals.

3. FRACCIONS I DECIMALS

- Sense fer la divisió indica si les següents fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica:

a) $\frac{21}{750}$

b) $\frac{75}{21}$

c) $\frac{11}{99}$

d) $\frac{35}{56}$

15. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,4142

b) 0,125

c) 6,66

16. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,41424142...

b) 0,125125...

c) 6,666...

17. Passa a fracció i simplifica:

a) 1,041424142...

b) 0,7125125...

c) 6,7666...

18. Determina la fracció generatriu de:

a) $0,333... + 0,666...$

b) $0,888... \cdot 2,5$

c) $0,65 : 0,656565...$

EXERCICIS I PROBLEMES.1. Troba pas a pas: $(-5 + 4 \cdot (-2) + 7) : (7 - (3 - 4) \cdot (-1))$

$$\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$$

2. Ordena de menor a major:

a) $\frac{102}{101}$ y $\frac{98}{99}$ b) $\frac{98}{99}$ y $\frac{97}{98}$ c) $\frac{-102}{101}$ y $\frac{-103}{102}$

3. Indica raonadament quina fracció és major:

4. Demuestra que $4,999... = 5$. Generalitza: Quant val $n,999...$?

$$\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$$

5. Passa a forma mixta:

$$\frac{760}{240}; 3,125; -\frac{46}{14}; -2,1666...$$

6. Representa de forma exacta en la recta numèrica:

a) $\frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10}$ b) $\frac{10 + 6}{10 - 2}$ c) $\frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10}$

7. Simplifica:

8. Troba la fracció que cau just enmig de $3/2$ i $9/4$ en la recta numèrica. Pista: La mitjana aritmètica $\frac{a+b}{2}$. Representa les 3 fraccions en la recta numèrica.

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

9. La mitjana harmònica es defineix com a $H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, l'invers de la mitjana aritmètica dels inversos.

a) Demuestra que $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

b) Troba $H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$

10. Troba la fracció inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$

11. Opera i simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{4}{6}} : \left(\frac{1}{6} - 2\right)$$

12. Resol pas a pas:

13. Calcula les dues tercers part de la sisena part del 80% de 900.

14. Troba el nombre tal que els seus quatre terços valen 520.

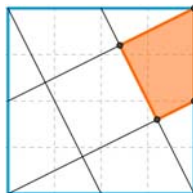
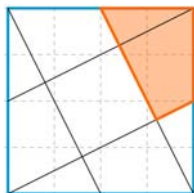
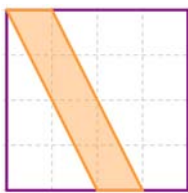
15. Quants pots de tres vuitens de litre puc omplir amb 12 litres?

16. Calcula la fracció per la qual cal multiplicar 450 per obtenir 720.

17. Si 100 polzades són 254 cm:

a) Troba el llarg en centímetres d'una televisió si l'altura són 19,2 polzades i $\text{llarg/alt} = 4/3$ b) Igual però ara $\text{llarg/alt} = 16/9$ 

18. Si en una classe el 77,777... % dels alumnes aproven i hi ha més de 30 alumnes però menys de 40, quants alumnes són i quants aproven?
19. Tres pelegrins decideixen iniciar un viatge de 8 dies. El primer dels pelegrins aporta 5 pans per al camí, el segon pelegrí, 3 pans, i el tercer no aporta cap, però promet pagar-los als seus companys al final del viatge pel pa que hagi menjat. Cadascun dels dies que va durar el viatge, a l'hora de menjar treien un pa de la borsa, ho dividien en tres trossos i cada pelegrí es menjava un tros. Quan van arribar a la seva destinació, el caminant que no havia aportat cap pa va treure 8 monedes i les va lliurar als seus companys: 5 monedes pel qual havia posat 5 pans i 3 monedes pel qual havia contribuït amb 3 pans. Podries explicar per què aquest repartiment de monedes no és just? Quin seria el repartiment just? (Problema de l'Olimpíada d'Albacete. ! S'ha de tenir en compte no els pans que un ha posat sinó el que realment ha aportat (el posat menys el menjat).
20. Aproxima els nombres 32567 i 1,395 amb 2 xifres significatives i digues en quin es comet menor error relatiu.
21. π no pot representar-se mitjançant una fracció d'enters però, pots trobar una fracció que ho approximi amb 5 xifres significatives?
22. Aproximem π per $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$:
- Simplifica fins a una fracció impròpia irreductible.
 - Troba l'error absolut i l'error relatiu.
23. Quantes ampolles de $\frac{3}{4}$ de litre necessito per tenir la mateixa quantitat que en 60 ampolles de $\frac{3}{5}$ de litre?
24. Troba un nombre enter de tal forma que: la seva meitat, la seva tercera part, la seva quarta part, la seva cinquena part, la seva sisena part i la seva setena part siguin nombres enters.
25. A la unitat li llevo les seves 2 cinquenes parts. Per quina fracció cal multiplicar el resultat per arribar una altra vegada a la unitat?
26. Troba la fracció resultant:
- Llevo 1 terç del que tinc i després afegeixo 1 terç del que queda.
 - Afegeixo 1 terç del que tinc i després llevo 1 terç del resultat.
27. Estàs avorrit i decideixes jugar al següent: Avances un metre en línia recta, retrocedeixes la meitat, avances la meitat del que has retrocedit en l'últim pas, retrocedeixes la meitat del que has avançat en l'últim pas, ...
Si ho fas moltes, però que moltes vegades, quant avances en total?
- $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots =$$
28. Darío dona passos de $\frac{3}{5}$ de metre, el seu ca Raig dona passos de $\frac{1}{4}$ de metre. Si tots dos van a igual velocitat i Raig dona 360 passos per minut, quants passos per minut donarà Darío?
29. La figura del costat és un "Tamgran".
- Troba la fracció que es correspon amb cadascuna de les 7 peces.
 - Si el costat del quadrat és de 20cm, troba l'àrea de cada peça.
30. Si el costat del quadrat és de 4 cm troba la fracció i l'àrea de la zona acolorida:



31. Calcula:

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2$

b) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} : \frac{3}{4}\right)^3 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2$

c) $\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3$

AUTOAVALUACIÓ

- Saps operar amb nombres enters, coneixes la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesi. Resol pas a pas:
 $(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$
- Saps obtenir fraccions equivalents. Ordena de major a menor:
 $\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$
- Saps representar fraccions de forma exacta en la recta numèrica. Representa:
 $\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0,125$
- Saps operar amb fraccions. Resol pas a pas i simplifica:

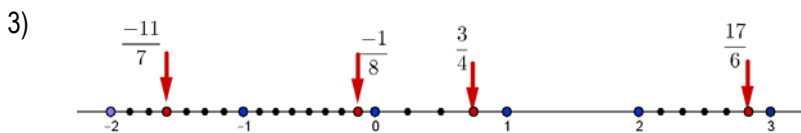
$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6} : \left(2 - \frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$
- Saps trobar la fracció d'un nombre i la fracció d'una fracció.
 - Troba les quatre cinques parts dels cinc vuitens de 360.
 - Una ampolla té plenes les seves set vuitenes parts, si conté 840 cm³, quant li cap plena?
- Saps arrodonir i calcular l'error relatiu comès. Aproxima els nombres 9859 i 9,945 amb 2 xifres significatives i calcula els errors relatius comesos (en %), quin és menor?
- Saps distingir quan una fracció té una expressió decimal exacta.
 - Digues quins de les següents fraccions tenen expressió decimal exacta i quins periòdica: $\frac{6}{120}; \frac{5}{180}; \frac{42}{210}$
 - Quants decimals té $\frac{1}{2^{10} \cdot 5^6}$?
 - Quantes xifres com a màxim pot tenir el període d'1/97?
- Saps passar de decimal a fracció. Passa a fracció i simplifica:
 - 2,225
 - 2,2252525...
 - $\frac{0,125}{0,125125125...}$
- Saps resoldre problemes mitjançant fraccions.

Una medusa creix cada setmana un terç del seu volum.

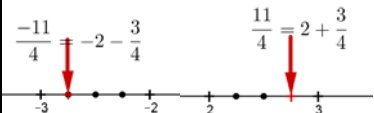
 - Quantes setmanes han de passar perquè el seu volum es multipliqui per més de 3?
 - Si el seu volum actual és de 1200 cm³, quin era el seu volum fa 3 setmanes?
- A un treballador li baixen el sou la sisena part, del que li queda el 25 % es va destinat a imposat s i finalment de la resta que **li queda** les dues cinques parts les hi gasta a pagar la hipoteca del pis. Si àdhuc té disponibles 450 €, quant cobrava abans de la baixada de sou?, quant paga d'impostos i d'hipoteca?

Solucions:

- 10.
- $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$
- $\frac{7}{2}$.
- a) 180; b) 960 cm³.
- 9859: 9900 → EA = 41 → ER = 0,42 %. 9,945: 9,9 → EA = 0,045 → ER = 0,45 %, és un poc menor el primer.
- a) Primer se simplifiquen, són exactes 6/120 i 42/150. 5/180 té expressió decimal periòdica.
 - 10 xifres decimals.
 - 96 xifres (de fet les té).
- a) $\frac{89}{40}$ b) $\frac{2203}{990}$ c) $\frac{999}{1000} = 0,999$
- a) 4 setmanes. b) 506,25 cm³.
- Cobrava 1200 €. Ara cobra 1000 €, paga 250 € d'impostos i 300 € d'hipoteca.



RESUM

Prioritat de les operacions	1r Parèntesis interiors 2n Potències i arrels 3r Productes i divisions 4t Sumes i restes.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signe de la suma	$(+) + (+) = (+)$ se sumen, $(-) + (-) = (-)$ se sumen. $(+) + (-) = ?$ té el signe del major en valor absolut.	$-7/3 - 8/3 = -15/3 = -5$ $-12/5 + 8/5 = -4/5$
Signe del producte i la divisió	Si tenen igual signe dóna positiu. $(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = (+)$ Si tenen signe contrari dóna negatiu. $(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = (-)$	$-4 \cdot (-10) = +40$ $+2 \cdot (-15) = -30$
Nombre racional	Un nombre r és racional si pot escriure's com a $r = a/b$ amb a, b sencers i $b \neq 0$.	$2; -7/2$ són racionals. També $2,6777... \sqrt{2}$ y π no ho són.
Fracció irreductible	S'obté dividint el numerador i el denominador pel mateix nombre. Numerador i denominador són primers entre si.	$360/840 = 3/7$, l'última és irreductible.
Fraccions equivalents	Són equivalents les fraccions que tenen igual expressió decimal. Dues fraccions equivalents representen al mateix nombre racional. Els seus productes creuats valen el mateix.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20} = 0,75$ són equivalents. $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$
Ordenació de fraccions	Es passen a comú denominador o es troba el seu valor decimal o s'usa la lògica i el truc $a/b < c/d$ si $ad < bc$ per a nombres positius.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ ya que $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$
Representació	Si és necessari es passen a forma mixta. Per a $n + a/b$ dividim la unitat que va de n a $n + 1$ en b parts iguals i prenem a . Per a $-n - a/b$ dividim la unitat que va de $-n$ a $-n - 1$ en b parts iguals i comptem a començant en $-n$.	
Suma i resta de fraccions	Es passen a comú denominador i se sumen (resten) els numeradors.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = -\frac{1}{24}$
Producte i divisió	$a/b \cdot c/d = ac/bd$ $a/b : c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$
Fracció d'un nombre	a/b de $x = a/b \cdot x = (ax)/b$	$3/4$ de $60 = 3/4 \cdot 60 = 45$ $3/4$ de $4/5 = 3/4 \cdot 4/5 = 3/5$
Xifres significatives	És el nombre de xifres "amb valor" que s'utilitzen per aproximar un nombre	$0,025$ té 2; $3,020$ té 4; 3000 no sabem les que té
Errors	Error absolut: $EA = \text{valor real} - \text{valor aproximat} $ Error relatiu: $ER = \frac{EA}{ \text{Valor real} }$ es multiplica per 100 per obtenir el % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow EA \approx 0,033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5\%$
Fraccions i decimals	L'expressió decimal d'una fracció sempre és exacta o periòdica. Exacta si el denominador només té com a factors primers el 2 o el 5. Periòdica en cas contrari.	$3/40 = 0,075$ exacta $5/12 = 0,41666...$ periòdica
Pas de decimal a fracció	Expressió decimal exacta: es divideix el nombre sense la coma entre la unitat seguida de punts zeros com a xifres decimals. Expressió decimal periòdica: Es multiplica N per potències de 10 fins aconseguir 2 nombres amb la mateixa part decimal, es resten i s'aïlla N .	$3,175 = 3175/1000 = 127/40$ $N = 2,0333... \rightarrow 100N - 10N = 183$ $90N = 183 \rightarrow N = 183/90 = 61/30$

CAPÍTOL 2: POTÈNCIES I ARRELS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. OPERACIONS AMB POTÈNCIES

1. Determina el signe de les potències: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$
2. Expressa en forma d'una única potència: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$
3. Expressa en forma de potència: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$
4. Expressa en forma de potència: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$
5. Expressa en forma de potència: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$
6. Expressa en forma de potència: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

2. POTÈNCIA DE BASE RACIONAL

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c) $(-1/6)^4$ d) $(-5/2)^{-2}$
8. Expressa com a única potència: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8})$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$
9. Expressa com a única potència: a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$
10. Calcula: a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$
11. Calcula: a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$
12. Calcula: a) $\frac{3^2 \cdot \frac{2^5}{5^5}}{(-4) \cdot 4^5}$ b) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

3. NOTACIÓ CIENTÍFICA

13. Utilitza la teva calculadora per obtenir 2^{16} , 2^{32} i 2^{64} i observa com dona el resultat.
14. Utilitza la calculadora per obtenir la teva edat en segons en notació científica.
15. Efectua les operacions en notació científica: a) $0,000257 + 1,4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3,5 \cdot 10^6 + 8,5 \cdot 10^5$
16. Efectua les operacions en notació científica: a) $(1,3 \cdot 10^5) \cdot (6,1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4,7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2,5 \cdot 10^{-4})$
17. Efectua les operacions en notació científica: a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1,5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3,25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6,15 \cdot 10^{-7})$
18. S'estima que el volum de l'aigua dels oceans és de 1 285 600 000 km³ i el volum d'aigua dolça és de 35 000 000 km³. Escriu aquestes quantitats en notació científica i calcula la proporció d'aigua dolça.
19. Se sap que en un àtom d'hidrogen el nucli constitueix el 99 % de la massa, i que la massa d'un electró és aproximadament de $9,109 \cdot 10^{-31}$ kg. Quina massa té el nucli d'un àtom d'hidrogen? (Recorda: Un àtom d'hidrogen està format pel nucli, amb un protó, i per un únic electró)
20. A Joan li han fet una anàlisi de sang i té 5 milions de glòbuls vermells en cada mm³. Escriu en notació científica el nombre aproximat de glòbuls vermells que té Juan estimant que té 5 litres de sang.

4. ARRELS

21. Calcula totes les solucions: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$
22. Expressa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$
23. Extreu els factors possibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$
24. Expressa en forma de producte o de quocient: a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\frac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{x^3}{y}}$
25. Expressa en forma d'única arrel: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$
26. Expressa en forma de potència: a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$
27. Simplifica l'expressió: a) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

28. Escriu la llista dels 12 primers quadrats perfectes.

29. Calcula **mentalment** en el teu quadern les següents arrels:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

30. Calcula **mentalment** en el teu quadern les aproximacions senceres de les següents arrels:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

31. Indica quines arrels quadrades van a ser nombres naturals, quins nombres irracionals i quins no existeixen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

EXERCICIS I PROBLEMES.

Potències

1. Expressa en forma d'única potència:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$
 e) $(-9)2 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 9$ f) $(-18)4 \cdot (-3)4$ g) $(6)5 \cdot (6)2$ h) $(-3)2 \cdot (-3)4$

2. Expressa en forma d'única potència:

a) $\frac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$
 b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$
 c) $\frac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$
 d) $\frac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expressa en forma de potència d'exponent positiu:

a) $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$

4. Expressa en forma d'única potència:

a) $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$

5. Expressa en forma d'única potència:

a) $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$

6. Expressa en forma d'única potència:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
 d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expressa en forma d'única potència:

a) $\frac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$
 b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$
 c) $\frac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$

8. Expressa en forma de notació científica:

a) 140000000 b) 32800 c) 710000000000000000 d) 0,0000075
 e) -180000000 f) 0,00000000042 g) -0,009 h) 0,00000000007

9. Busca informació expressada en notació científica sobre:

a) La distància entre la Terra i la Lluna b) Unitat de massa atòmica
 c) Km que corresponen a un any llum d) Un gúgol d) La longitud d'ona dels rajos còsmics

10. Realitza les operacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2,4 \cdot 10^6 - 1,7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2,3 \cdot 10^{-5} - 3,45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$
 c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4,5 \cdot 10^2$ d) $1,8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

11. L'estel Sirius està a uns 8,611 anys llum del nostre planeta. Expressa en metres, mitjançant notació científica la distància que recorreria una nau espacial que realitzés un trajecte d'anada i tornada a Sirius. (Recorda: Un any llum, la longitud que recorre la llum en un any, és aproximadament igual a $9,46 \times 10^{12}$ km (9 460 730 472 580,8 km amb més aproximació))

12. La massa d'un electró en repòs s'estima en $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, la d'un protó és d' $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg, i la d'un neutró $1,64 \times 10^{-27}$ kg. Calcula la massa d'un àtom de carboni 14 (C_{14}) format per sis protons, sis electrons i $6 + 2 = 8$ neutrons. (El C_{14} és un isòtop que té dos neutrons més que el carboni normal i que s'utilitza per datar).

13. Calcula i expressa en notació científica:

a) $0,00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7,45 \cdot 10^{-5} - 6,32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^6 - 2,8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^5$
 c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^2 + 1,4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2,7) \cdot 10^{-3} + 4,2 \cdot 10^{-6}$



- ## Arrels

- Matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics 3r B ESO. Exercicis i Problemes



AUTOAVALUACIÓ

1. El resultat de les operacions següents és: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ i $(12)^7 : (12)^5$
 a) 6 i 12^2 b) $1/6$ i 12^5 c) $-1/6$ i 12^2
2. El resultat de les operacions següents és: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ i $(-8)^7 : (5)^7$
 a) $(-30)^4$ i $(-3)^7$ b) 30^4 i $(-8/5)^7$ c) 30^4 i $(-3)^7$
3. El resultat de les operacions següents és: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ i $((-5)^{2/3})^6$
 a) $(-2)^{15}$; (-1) i $(5)^{8/3}$ b) -2^{15} ; (-1) i -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) i $(-5)^4$
4. El resultat de les operacions següents és: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ i $(10^5)^{-2}$
 a) $1/512$; $1/16$ i $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ i $1/10^{10}$
5. El resultat de les operacions següents és: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ i $(-2/5)^4$
 a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ i $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 i $2^4/5^4$
6. El resultat de les operacions següents és: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
 a) 1 b) $2/3$ c) $-2/3$ d) $(2/3) \cdot (-3/2)$
7. Les expressions $3,1 \cdot 10^8$ i $0,0000000095$ corresponen a :
 a) 3100000000 i $9,5 \cdot 10^{-10}$ b) 3100000000 i $9,5 \cdot 10^{-10}$ c) 3100000000 i $9,5 \cdot 10^{-9}$
8. El resultat d'aquesta operació és: $(0,00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4,2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2,5 \cdot 10^5$
 a) $124,5$ b) $2407,5$ c) $107,5$ d) $140,75$
9. El resultat de les operacions següents és: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ i $\sqrt[5]{-1}$
 a) $-11, 16, -1$ b) $11, 16, 1$ c) $-11, -16, -1$
10. Les següents expressions corresponen a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ i $(-5)^{4/3}$
 a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{-(5^4)}$
11. El resultat d'extreure factors d'aquests radicals és: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ i $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
 a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ i $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ i $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ i $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$
12. Les operacions següents $\sqrt[3]{-(5):12}$ i $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$ poden expressar-se:
 a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ i $\sqrt[9]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ i $\sqrt[6]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ i $\sqrt[9]{18}$

RESUM

	POTÈNCIES I ARRELS	Exemples
Producte i quocient de potències	En el producte de potències amb la mateixa base se sumen els exponents. En el quocient es resten els exponents Amb el mateix exponent: En el producte, es multipliquen les bases i s'eleva el resultat al mateix exponent. En el quocient es divideixen les bases i s'eleva el resultat al mateix exponent	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potència d'un producte i d'un quocient	La potència d'un producte és igual al producte de cadascun dels factors elevats a aquesta potència $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ La potència d'un quocient és igual al quocient del dividend i el divisor elevats a aquesta potència: $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6 / (-2)^6$
Potència d'una altra potència	$((d^m)^n) = d^{m \cdot n}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potència de base racional	$(a/b)^n = a^n / b^n$	$(6/5)^2 = 6^2 / 5^2$
Potència d'exponent negatiu	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notació científica: operacions	$a \cdot 10^{\pm n}$ sent $1 \leq a \leq 9$. +n per a grans nombres -n per a petits nombres	$320000000 = 3,2 \cdot 10^8$ $0,0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicals: arrels d'índex qualsevol	$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt[3]{-216} = -6$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{-32} = -2$	
Potències d'exponent racional	Una potència amb exponent racional pot expressar-se en forma d'arrel l'índex de la qual és el denominador de l'exponent i el radicand queda elevat al numerador de l'exponent: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracció de factors d'un radical	Si $m = n \cdot c + r$ llavors $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operacions amb radicals	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

CAPÍTOL 3: SUCCESIONS. PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES I GEOMÈTRIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. SUCCESIONS DE NOMBRES REALS

1. Escriu els deu primers termes de les següents successions:
a) $-1, -2, -3, -4, \dots$ b) $1, 4, 9, 16, \dots$ c) $1, 3, 5, 7, \dots$
2. Escriu el terme que ocupa el lloc 100 de cadascuna de les successions anteriors.
3. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra té una velocitat que augmenta 9,8 m/s. Si en el primer segon la seva velocitat és de 15 m/s, escriu en el teu quadern la velocitat en els segons indicats en la taula. Observes alguna regla que et permeti conèixer la velocitat al cap de 20 segons? Representa gràficament aquesta funció.

Temps en segons	1	2	3
Velocitat en m/s	15		

4. Escriu els quatre primers termes de les següents successions:
 $a_n = 2n^2 + 1$ $b_n = \frac{4n-1}{3n}$ $c_1 = 1, c_n = 3c_{n-1} + 5$ $d_1 = 2, d_2 = 5, d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escriu l'expressió del terme general de les següents successions:

a) $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$, b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$, c) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$, d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \dots\right\}$

6. En una successió el primer terme és 2 i els altres s'obtenen sumant 4 al terme anterior. Trobar els 6 primers termes de la successió.
7. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 17 hores i 30 minuts. Triga a fer una volta completa a la seva òrbita 87 minuts.
 A) Completa en el teu quadern la taula adjunta.
 B) Escriu una expressió general que et permeti conèixer l'hora en què ha completat la tornada n-èsima.
 C) Busca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de l'hora de l'òrbita anterior.
 D) Busca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de la primera.
 E) Quantes voltes completes haurà donat 20 dies més tard a les 14 hores?

Nº d'òrbites	1	2	3	4	5	6
Hora en la qual l'ha completat						

2. PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES

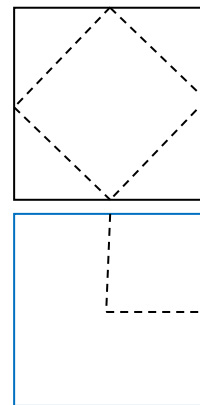
8. Assenyala raonadament si la següent successió és una progressió aritmètica: $\{1, 10, 100, 1000, 100000, \dots\}$.
9. Calcula els tres primers termes d'una progressió aritmètica sabent que el primer és 1 i la diferència és -2 .
10. Donada una progressió aritmètica dues dels termes de la qual són: $a_3 = 4$ i $a_{10} = 18$.
 a) Calcula la seva diferència.
 b) Calcula el seu terme general.
11. Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica amb diferència 2 i $a_{30} = 60$.
12. Quin és el terme general d'una progressió aritmètica amb $a_{22} = 45$ i $d = 3$?
13. Els costats d'un pentàgon estan en progressió aritmètica de diferència 5. Sabent a més que el seu perímetre és 65, calcula el valor dels costats.
14. Calcula els 5 primers termes d'una progressió aritmètica de primer terme 2 i de diferència 3. Representa'ls gràficament. Observa que la seva representació gràfica és un conjunt de punts aïllats que estan sobre una recta.
15. Calcula l'expressió general de les progressions aritmètiques:
 a) De diferència $d = 2,5$ i de primer terme 2.
 b) De diferència $d = -2$ i de primer terme 0.
 c) De diferència $d = 1/3$ i de segon terme 5.
 d) De diferència $d = 4$ i de cinquè terme 1.
16. Quants múltiples de 7 estan compresos entre el 4 i el 893?
17. Suma els 10 primers termes de la progressió aritmètica: $\{-5, 4, 13, 22, 31, 40, \dots\}$
18. Troba la suma dels 50 primers múltiples de 3.
19. En una successió aritmètica d'un nombre imparell de termes el central val 12, quant valdrà la suma del primer més l'últim?
20. L'amo d'un pou contracta a un saurí per conèixer la profunditat a la qual es troba l'aigua i aquest dictamina que a 5 m hi

ha aigua en abundància. Demana un pressupost a un contractista, que li diu que el primer metre li costarà 50 euros i per cada mig metre més 6 euros més que pel mig metre anterior. Quant li costarà el pou si es compleixen les prediccions?

21. Antonio s'ha comprat un mòbil, però no pot pagar-ho al comptat. Paga 60 euros cada setmana, però el venedor li puja 5 euros cada setmana en concepte de pagament ajornat. Aconsegueix pagar-ho en 10 setmanes. Quant li va costar? Quant va pagar de més? Quin percentatge suposa aquest recàrrec sobre el preu de venda?
22. Un nedador s'entrena en una piscina de 50 m i vol controlar les pèrdues de velocitat per cansament. Cronometra en cinc dies consecutius els temps que triga a fer 2, 5, 8, 11, 14 llargs.
 - a) Troba el terme general de la successió a n que dona els metres recorreguts en el dia n.
 - b) Quants metres haurà nedat en aquests cronometratges?

3. PROGRESSIONS GEOMÈTRIQUES

23. Esbrina la raó d'una progressió geomètrica el primer terme de la qual és 27 i el quart és 8.
24. El quart terme d'una progressió geomètrica és $1/9$ i la raó $1/3$. Troba el primer terme.
25. Troba el sisè terme de la següent progressió geomètrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots\}$
26. Donada una progressió geomètrica dues dels termes de la qual són: $a_3 = -8$ i $a_6 = -2048$. A) Calcula la seva raó. B) Calcula el seu terme general.
27. Certa classe d'alga, cridada *clorella*, es reproduceix doblgant la seva quantitat cada dues hores i mitja. Al cap d'altres dues hores i mitja torna a doblgar la seva quantitat, i així successivament. Si es té en el moment inicial un quilo, al cap de dues hores i mitja hi ha dos quilos.
 - a) Fes una taula de valors en la qual indiquis per a cada període de reproducció el nombre de quilos de *clorella*.
 - b) Indica el terme general.
 - c) Al cap de 4 dies, han transcorregut 40 períodes, consideres possible aquest creixement?
28. El primer terme d'una progressió geomètrica és 3 i el vuitè 384. Troba la raó i el producte dels 8 primers termes.
29. Calcula el producte dels 5 primers termes de la progressió: 3, 6, 12, 24, ...
30. Un agricultor en la seva granja té 59049 litres d'aigua per donar de beure als animals. Un dia va utilitzar la meitat del contingut, al següent la meitat del que li quedava i així successivament cada dia. Quants litres d'aigua va utilitzar fins al sisè dia?
31. Suma els quinze primers termes d'una progressió geomètrica en la qual $a_1 = 5$ i $r = 1/2$
32. Calcula la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, $3/2$, $3/4$, ...
33. Tenim a la mà un quadrat d'àrea 1. Tallem les quatre cantonades pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem les retallades damunt de la taula. Quina àrea de retallades hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà efectuem la mateixa operació de tallar les quatre cantonades i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I les retallades que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinïtes àrees de retallades així obtingudes.
34. De nou tenim un quadrat d'àrea 1 a la mà, i ho tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros major ho deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, al que tornem a tallar de la mateixa forma. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creixen o disminueixen? Escribe el terme general de la successió d'àrees que tenim a la mà. I les retallades que queden sobre la taula? Creix l'àrea o disminueix? Anem sumant àrees, calcula la suma d'aquestes àrees si haguéssim fet infinits talls.
35. Calcula la fracció generatriu del número $4,5\overline{61}$.
36. Un empresari acudeix a una entitat financera per informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha tingut en un mes. Li plantegen dues opcions.
 - a) Mantenir aquest capital durant 5 anys al 3,5 % anual, o
 - b) Rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3 % els tres anys restants. Quina opció li interessa més?



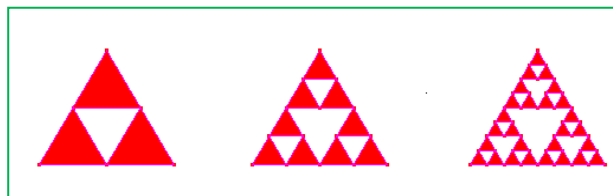
EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Calcula el terme que ocupa el lloc 100 d'una progressió aritmètica el primer terme de la qual és 4 i la diferència és 5.
2. El desè terme d'una progressió aritmètica és 45 i la diferència és 4. Troba el primer terme.
3. Sabent que el primer terme d'una progressió aritmètica és 4, la diferència 7 i el terme n-èsim 88, troba n.
4. Troba el primer terme d'una progressió aritmètica i la diferència, sabent que $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.
5. El terme sisè d'una progressió aritmètica és 4 i la diferència $1/2$. Troba el terme 20.
6. Calcula els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 3.

7. Troba tres nombres que estiguin en progressió aritmètica i tals que, augmentats en 5, 4 i 7 unitats respectivament, siguin proporcionals a 5, 6 i 9.
8. Calcula la suma dels múltiples de 59 compresos entre 1000 i 2000.
9. El producte de tres termes consecutius d'una progressió aritmètica és 80 i la diferència és 3. Troba aquests termes.
10. Quants termes cal sumar de la progressió aritmètica 2, 8, 14,... per obtenir com a resultat 1064?
11. La suma de n nombres naturals consecutius presos a partir d'11 és 1715. Quants termes hem sumat?
12. Sabent que el cinquè terme d'una progressió aritmètica és 18 i la diferència és 2, troba la suma dels nou primers termes de la successió.
13. La suma de tres nombres en progressió aritmètica és 33 i el seu producte 1287. Troba aquests nombres.
14. Tres nombres en progressió aritmètica tenen per producte 16640; el més petit val 20. Troba els altres dos.
15. El producte de cinc nombres en progressió aritmètica és 12320 i la seva summa 40. Troba aquests nombres sabent que són enters.
16. Calcula tres nombres sabent que estan en progressió aritmètica, que la seva suma és 18 i que la suma del primer i del segon és igual al tercer disminuït en dues unitats.
17. La suma dels onze primers termes d'una progressió aritmètica és 176 i la diferència dels extrems és 30. Troba els termes de la progressió.
18. Troba quatre nombres en progressió aritmètica, sabent que la seva suma és 22, i la suma dels seus quadrats 166.
19. La diferència d'una progressió aritmètica és 4. El producte dels quatre primers termes és 585. Troba els termes.
20. Troba els sis primers termes d'una progressió aritmètica sabent que els tres primers sumen -3 i els tres últims 24.
21. En una progressió aritmètica el onzè terme excedeix en 2 unitats al vuitè, i el primer i el novè sumen 6. Calcula la diferència i els termes esmentats.
22. En una progressió aritmètica, els termes segon i tercer sumen 19, i els termes cinquè i setè sumen 40. Troba'ls.
23. Sabent que les mesures dels tres angles d'un triangle estan en progressió aritmètica i que un d'ells mesura 100° , calcula els altres dos.
24. Troba les dimensions d'un ortòedre sabent que estan en progressió aritmètica, que sumen 78 m i que el volum de l'ortòedre és de 15470 m^3 .
25. Els sis angles d'un hexàgon estan en progressió aritmètica. La diferència entre el major i el menor és 60° . Calcula el valor de cada angle.
26. Les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica i sumen 36 metres. Quant mesura cada costat?
27. Un coronel mana 5050 soldats i vol formar amb ells un triangle per a una exhibició, de manera que la primera fila tingui un soldat, la segona dues, la tercera tres, etc. Quantes files han d'haver-hi?
28. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 800 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 50 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 12 anys?
29. Les edats de quatre germans formen una progressió aritmètica, i la seva suma és 32 anys. El major té 6 anys més que el menor. Troba les edats dels quatre germans.
30. Un esquiador comença la pretemporada d'esquí fent peses en un gimnàs durant una hora. Decideix incrementar l'entrenament 10 minuts cada dia. Quant temps haurà d'entrenar al cap de 15 dies? Quant temps en total haurà dedicat a l'entrenament al llarg de tot un mes de 30 dies?
31. En una sala de cinema, la primera fila de butaques dista de la pantalla 86 dm, i la sisena, 134 dm. En quina fila estarà una persona si la seva distància a la pantalla és de 230 dm?
32. Calcula el terme onzè d'una progressió geomètrica el primer terme de la qual és igual a 1 i la raó és 2.
33. El cinquè terme d'una progressió geomètrica és 81 i el primer és 1. Troba els cinc primers termes d'aquesta progressió.
34. En una progressió geomètrica de primer terme 7 i raó 2, un cert terme és 28672. Quin lloc ocupa aquest terme?
35. Sabent que el setè terme d'una progressió geomètrica és 1 i la raó $1/2$, troba el primer terme.
36. En una progressió geomètrica se sap que el terme quinzè és igual a 512 i que el terme desè és igual a 16. Troba el primer terme i la raó.
37. Descompon el número 124 en tres sumands que formin progressió geomètrica, sent 96 la diferència entre el major i el menor.
38. El volum d'un ortòedre és de 3375 cm^3 . Troba la longitud de les seves arestes, sabent que estan en progressió geomètrica i que l'aresta intermèdia mesura 10 cm més que la menor.
39. Troba el producte dels vuit primers termes de la progressió 3, 6, 12, 24,...
40. Troba la suma dels deu primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, 24,...
41. La suma dels vuit primers termes d'una progressió geomètrica és 17 vegades la suma dels quatre primers. Troba el valor de la raó.
42. Troba la suma dels termes de la progressió il·limitada: 8, 4, 2, 1,...



43. Troba tres nombres en progressió geomètrica sabent que la seva suma és 26 i el seu producte 216.
44. Calcula el producte dels onze primers termes d'una progressió geomètrica sabent que el terme central val 2.
45. Tres nombres en progressió geomètrica sumen 525 i el seu producte val un milió. Calcula aquests nombres.
46. Determina quatre nombres en progressió geomètrica de manera que els dos primers sumin 0,5 i els dos últims 0,125.
47. Quants termes s'han pres en una progressió geomètrica, sabent que el primer terme és 7, l'últim 448 i la seva suma 889?
48. La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Troba els termes primer i setè.
49. Troba tres nombres en progressió geomètrica el producte dels és 328509, sabent que el major excedeix en 115 a la suma dels altres dos.
50. Tres nombres estan en progressió geomètrica; el segon és 32 unitats major que el primer, i el tercer, 96 unitats major que el segon. Troba els nombres.
51. Troba els quatre primers termes d'una progressió geomètrica, sabent que el segon és 20 i la suma dels quatre primers és 425.
52. Troba els angles d'un quadrilàter, si se sap que estan en progressió geomètrica i que el major és 27 vegades el menor.
53. Les dimensions d'un ortòedre estan en progressió geomètrica. Calcula aquestes dimensions sabent que el seu perímetre és 420 m i el seu volum 8000 m³.
54. Divideix el número 221 en tres parts enteres que formen una progressió geomètrica tal que el tercer terme sobrepassa al primer en 136.
55. La suma de tres nombres en progressió geomètrica és 248 i la diferència entre els extrems 192. Troba aquests nombres.
56. Troba quatre nombres en progressió geomètrica sabent que la suma dels dos primers és 28 i la suma dels dos últims 175.
57. En una progressió geomètrica, els termes primer i quinze són 6 i 54, respectivament. Troba el terme sisè.
58. Una progressió geomètrica té cinc termes, la raó és igual a la quarta part del primer terme i la suma dels dos primers termes és 24. Troba els cinc termes.
59. Troba x perquè $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estiguin en progressió geomètrica.
60. A una corda de 700 m de longitud se li fan dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 100 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determina la longitud de cada tros.
61. Troba la fracció generatriu del nombre decimal 0,737373..., com suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.
62. Es té una cuba de vi que conté 1024 litres. L'1 d'octubre es va buidar la meitat del contingut; l'endemà es va tornar a buidar la meitat del que quedava, i així successivament tots els dies. Quina quantitat de vi es va treure el dia 10 d'octubre?
63. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim dos a dos els punts mitjans dels seus costats; obtenim un nou quadrat, en el qual tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les àrees així obtingudes.
64. Tres nombres que la seva suma és 36 estan en progressió aritmètica. Troba aquests nombres sabent que si se'ls suma 1, 4 i 43, respectivament, els resultats formen una progressió geomètrica.
65. Triangle de Sierpinski: Anem a construir un fractal. Es parteix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cadascun dels altres tres triangles es repeteix el procés. I així successivament. A la figura formada per iteració infinita la hi denomina Triangle de Sierpinski, i és un fractal. Imagina que el primer triangle té un àrea A . Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és $(3/4)A$. I en la segona? Escribe la successió de les àrees. És creixent o decreixent? Imagina ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L . Escribe la successió de les longituds. És creixent o decreixent?



AUTOAVALUACIÓ

- Quina és la raó de la següent progressió geomètrica: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$?
 a) 5 b) 3 c) 2 d) No és una progressió geomètrica
- En la successió de múltiples de 13, el 169 ocupa el lloc:
 a) 1 b) 2 c) 13 d) 169
- La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 7, 13, 19, 31,... és:
 a) 170 b) 34 c) 19 d) 340
- La successió 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
 a) És una progressió geomètrica de raó 5
 b) És una progressió aritmètica de diferència 5
 c) És una progressió geomètrica de raó 3
 d) És una progressió aritmètica de diferència 3.
- Sigui la successió: 2, 10, 50, 250, 1250... el seu terme general és:
 a) $a_n = 2 \cdot 5n-1$ b) $a_n = 2 \cdot 2n-1$ c) $a_n = 5 \cdot 5n-1$ d) $a_n = 5 \cdot 2n-1$
- Quant sumen les potències de 2 compreses entre 2^1 i 2^{10} ?
 a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048
- La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 1 i la seva diferència 2, té com a terme general:
 a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$
- Quin és el valor de la suma: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$?
 a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000
- María està preparant l'examen de selectivitat. Per no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar tres pàgines, quantes haurà estudiat al cap de 7 dies?
 a) 381 b) 192 c) 765 d) 378
- A Roberto li han tocat 6000 € en la loteria i decideix dipositar-los al banc a un tipus d'interès compost del 4 %. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?
 a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

RESUM

Concepte	Definició	Exemples
Progressió aritmètica	És una successió de nombres reals en la qual la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. Aquesta constant s'anomena diferència de la progressió i se sol denotar amb la lletra d .	2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
Terme general	$a_n = a_k + (n - k)$ sent a_k el terme que ocupa el lloc k	$a_n = 2 + 3n$
Suma dels n primers termes	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = \frac{8 \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8))}{2} =$ $4 \cdot (4 + 24) = 4 \cdot 28 = 112$
Progressió geomètrica	És una successió de nombres reals en la qual el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. A aquesta constant es denomina raó de la progressió i se sol denotar amb la lletra r . És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sent i un nombre natural.	3, 6, 12, 24, ... 1, 1/2, 1/4, 1/8...
Terme general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ sent a_k el terme de la successió que ocupa el lloc k	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Per a $r \neq 1$, i un <u>nombre finit</u> de termes: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ - Per a $r \neq 1$, i una <u>quantitat il·limitada</u> de termes: $S = \frac{a_1}{1 - r}$	$S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3(256 - 1) =$ $3(255) = 765.$ $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
Producte dels n primers termes	$P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = + \sqrt{(3 \cdot (3 \cdot 2^8))^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

CAPÍTOL 4: EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES. POLINOMIS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. INTRODUCCIÓ. EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

1. Suposem que tenim un contracte amb una companyia de telefonia mòbil pel qual paguem 5 cèntims d'euro per minut, així com 12 cèntims per establiment de trucada. A la fi de cada mes l'empresa de telefonia mòbil ens proporciona la factura mensual. En ella apareix molta informació, en particular, el nombre total de trucades realitzades (N) així com la quantitat total de minuts de conversa (M). Justifica que l'import de les trucades efectuades durant aquest mes és:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

2. Escribe les expressions algebraiques que ens proporcionen la longitud d'una circumferència i l'àrea d'un trapezi.
3. Reescriu, en llenguatge algebraic, els següents enunciats, referits a dos nombres qualssevol x i y :
- El triple de la seva diferència
 - La suma de les seves quadrats
 - El quadrat de la seva suma
 - L'invers del seu producte
 - La suma de les seves oposats
 - El producte dels seus quadrats
4. Una tenda de roba anuncia en els seus aparadors que està de rebaixes i que tots els seus articles estan rebaixats un 30 % sobre el preu imprès en cada etiqueta. Escribe el que pagarem per una peça en funció del que apareix en la seva etiqueta.
5. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:
- $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ per a $x = -2$.
 - $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ per a $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{1}{2}$.
6. Indica, en cada cas, el valor numèric de l'expressió $x - 2y + 3z$:
- $x = 1, y = 2, z = 1$
 - $x = 2, y = 0, z = -1$
 - $x = 0, y = 1, z = 0$
7. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o els valors que s'indiquen:
- $x^2 + 2x - 7$ per a $x = 2$
 - $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ per a $a = 3$ i $b = -2$
 - $c^2 + 3c + 7$ per a $c = 1$.

2. POLINOMIS. SUMA I PRODUCTE

8. En cadascun dels següents monomis assenyalat el seu coeficient, la seva part literal i el seu grau:
- $$-12x^3 \qquad a^4b^3c \qquad 4xy^2$$
9. Per a cadascun dels següents polinomis destaca el seu grau i els monomis que ho constitueixen:
- $$5x^4 + 7x^2 - x \qquad 6x^2 + 10 - 2x^3 \qquad 2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$$
10. Considerem el polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Troba els següents valors numèrics de $p(x)$: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ i $p(1/2)$.
11. Realitza les següents summes de polinomis:
- $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$
 - $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$
12. Escribe el polinomi oposat de cadascun dels següents polinomis:
- $2x^3 - 2x^2 - 3x + 9$
 - $-5x$
 - $-x^3 + 7x$
13. Considera els polinomis $p \equiv x^2 - x + 1$, $q \equiv -x^3 + 2x - 3$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Troba els valors que adopta cadascun d'ells per a $x = -2$, és a dir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudia si existeix alguna relació entre aquests tres valors.
14. Obté el valor del polinomi $p \equiv 4x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$. Quin valor pren el polinomi oposat de p en $x = 2$?
15. Efectua els següents productes de polinomis:
- $$\begin{array}{ll} (-2x) \cdot (3x^2 - 4) & (2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5) \\ (4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6) & (-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9) \end{array}$$
16. Realitza les següents diferències de polinomis:
- $$\begin{array}{lll} (5x^2 + 2) - (-2x) & (-2x^3 + 4x) - (-2x - 1) & (7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1) \end{array}$$
17. Multiplica cadascun dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgeixin polinomis mònics:
- $$\begin{array}{lll} 3x^2 - x + 2 & -6x^3 + 2x - 3 & -x^2 + 9x - 2 \end{array}$$

18. Calcula i simplifica els següents productes:

a) $x \cdot (-2x + 4)$ b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$ c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$ d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

19. Realitza els següents productes de polinomis:

a) $x \cdot (-3x^2 + 4x + 2) \cdot x^2$ b) $(-2x + 1) \cdot (5x^2 - x + 3) \cdot (-x)$ c) $(3a - 1) \cdot (2 - a) \cdot (5 - 4a)$

20. De cadascun dels següents polinomis extreu algun factor que sigui comú als seus monomis:

a) $-10x^3 - 15x^2 + 20x$ b) $30x^4 + 24x^2$

3. DIVISIÓ DE POLINOMIS

21. Comprova que els càlculs que tens a continuació reflecteixen el que es va fer en l'exemple anterior per dividir el polinomi

$p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} | 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 \end{array}$$

Primera i segona etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} | 2x^2 - x + 3 \\ \hline 3x^2 + 4x \end{array}$$

- Les tres etapes:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \\ 4x^2 - 2x + 6 \\ \hline -11x + 4 \end{array}$$

22. Divideix els següents polinomis:

a) $3x^3 + 4x^2 - 9x + 7$ entre $x^2 + 2x - 1$
 b) $-6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $3x^3 + x^2 - 2x + 1$
 c) $-6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7$ entre $-3x^2 - 2x + 1$
 d) $3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 14x + 14$ entre $x^3 - 2x^2 - x + 3$
 e) $x^5 - 4x - 6$ entre $x^2 + 3$

23. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparegui $q(x) = x^2 - 2x - 1$ com a polinomi quocient i $r(x) = 2x^2 - 3$ com a residu.

24. Realitza els càlculs:

a) $(1 + x)^2$ b) $(-x + 2)^2$ c) $(x - 2)^2$ d) $(2a - 3)^2$ e) $(x^2 + 1)^3$ f) $(2b - 4)^3$

25. Obté les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a) $(a + b + c)^2$ b) $(a - b + c)^2$

26. Desenvolupa les següents potències:

a) $(3x - y)^2$ b) $(2a + x/2)^2$ c) $(4y - 2/y)^2$
 d) $(5a + a^2)^2$ e) $(-a^2 + 2b^2)^2$ f) $(2/3y - 1/y)^2$

27. Expressa com quadrat d'una summa o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^2 - 6a + 9$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$
 d) $4y^2 - 12y + 9$ e) $a^4 + 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2$

28. Efectua aquests productes:

a) $(3x + 2) \cdot (3x - 2)$ b) $(2x + 4y) \cdot (2x - 4y)$ c) $(4x^2 + 3) \cdot (4x^2 - 3)$
 d) $(3a - 5b) \cdot (3a + 5b)$ e) $(-x^2 + 5x) \cdot (x^2 + 5x)$

29. Expressa com suma per diferència les següents expressions

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

30. Realitza les següents divisions de polinomis a partir de la conversió del dividend en la potència d'un binomi o en un producte de la forma summa per diferència:
- a) $x^2 + 12x + 36$ entre $x + 6$ b) $4x^4 - 16x^2$ entre $2x^2 - 4x$
 c) $9x^2 - 24x + 16$ entre $3x - 4$ d) $x^2 - 5$ entre $x + \sqrt{5}$
31. Efectua els següents càlculs:
- a) $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{5}{x}$ c) $\frac{-x+1}{x+3} \cdot \frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2} : \frac{x}{x-3}$
32. Realitza les següents operacions alterant, en cada apartat, solament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:
- a) $\frac{-2x^2 - x + 1}{x^3} + \frac{3x + 1}{x^2}$ b) $\frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{3x}{x-2}$
33. Calcula els següents quocients:
- a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$ b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$ c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$ d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$
34. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:
- a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$ b) $\frac{8x^3y - 2xy^2}{4xy} = 2x^2 - \frac{1}{2}y$
 c) $\frac{4x^2 + 2x}{2x - 8} = \frac{2x^2 + x}{x - 4}$ d) $\frac{6a^2b^2 - 4a^2b^3 + 4ab}{2ab^2 - 8a^2b} = \frac{3ab - 2ab^2 + 2}{b - 4a}$
35. Simplifica les següents fraccions algebraïques:
- a) $\frac{3x^2 + 6x}{9x^2 + 18}$ b) $\frac{a^3 - 7a^2}{3a^3 + 5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2 - 7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2 - ab}{a^3b + ab}$
36. En cadascuna de les següents fraccions algebraïques escriu, quan sigui possible, el polinomi numerador, o denominador, en forma de potència d'un binomi o de suma per diferència per, posteriorment, poder simplificar cada expressió:
- a) $\frac{x^2 - 4}{3x + 6}$ b) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 16}$ c) $\frac{6 - 4a}{4a^2 - 9}$

EXERCICIS I PROBLEMES

- Una empresa majorista de viatges està confeccionant una oferta per distribuir-la en diferents agències de viatge. Es tracta d'un viatge amb avió, d'anada i tornada, a Madrid el preu de la qual dependrà del nombre final de viatgers. Les dades concretes són:
 - Si no hi ha més de 100 persones interessades, el vol costarà 150 euros per persona.
 - Si hi ha més de 100 persones interessades, per cada viatger que passi del centenar el preu del viatge es reduirà en 1 euro. No obstant això, el preu del vol en cap cas serà inferior a 90 euros.
 Estudia i determina el preu final del vol, per persona, en funció del nombre total de viatgers. Així mateix, expressa la quantitat que ingressarà l'empresa segons el nombre de viatgers.
- En aquest exercici es va a presentar un *truc* mitjançant el qual anem a endevinar el nombre que resulta després de manipular repetidament un nombre desconegut. Converteix en una expressió algebraica les successives alteracions del nombre desconegut i justifica el que ocorre.
 - Digue-li a un company que escrigui en un paper un nombre parell i que no ho mostri
 - Que ho multipliqui per 5
 - Que al resultat anterior li sumi 5
 - Que multipliqui per 2 el resultat
 - Que al resultat anterior li sumi 10
 - Que multipliqui per 5
 - Que divideixi entre 100 la darrera quantitat
 - Que al resultat precedent li resti la meitat del nombre que va escriure
 - Independentment del nombre desconegut original quin nombre ha sorgit?
- Els responsables d'una empresa, en previsió d'uns futurs alts i baixos en les vendes dels productes que fabriquen, pensen proposar als seus treballadors a la fi de l'any 2014 el següent:
 - La disminució dels sous, per al proper any 2015, en un 10%.
 - Per 2016 ofereixen augmentar un 10% els salaris de 2015.
 - En general, suggereixen que el sou disminueixi un 10% cada any imparell i que augmenti un 10% cada any parell.

Si finalment s'aplica aquest pla, estudia si els treballadors recuperaran l'any 2016 el salari que tenien en 2014. Analitza què ocorre amb els sous després del pas de molts anys.

4. Els responsables de l'anterior empresa, després de rebre l'informe d'una consultora, alteren la seva intenció inicial i van a proposar als seus treballadors, a la fi de l'any 2014, el següent:
- Un augment dels sous, per al proper any 2015, d'un 10%.
 - Per 2016, una reducció del 10% sobre els salaris de 2015.
 - En general, suggereixen que el sou augmenti un 10% cada any imparell i que disminueixi un 10% cada any parell.

Si s'aplica el nou pla, analitza si el salari dels treballadors de l'any 2016 coincidirà amb el que tenien en 2014. Estudia com evolucionen els sous després del pas de molts d'anys.

5. Observa si hi ha nombres en els quals les següents expressions no poden ser avaluades:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$ c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Troba el valor numèric de les següents expressions en els nombres que s'indiquen:

a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x = 1$ b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ per a $x = -2$ c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ i $y=-1$
d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ per a $a=-1$, $b=0$ i $c=2$ e) $\frac{2x-1}{(x-5) \cdot (2x+7)}$ en $x = \frac{1}{2}$

7. Una persona té estalviats 3000 € i decideix dipositar-los en un producte bancari amb un tipus d'interès anual del 2'5 %. Si decideix recuperar els seus estalvis al cap de dos anys, quin serà la quantitat total de la qual disposarà?

8. Construeix un polinomi de grau 2, $p(x)$, tal que $p(-2) = -6$.

9. Considera els polinomis $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ i $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Fes les següents operacions:

a) $p + q + r$ b) $p - q$ c) $p \cdot r$ d) $p \cdot r - q$

10. Calcula els productes:

a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0'1x + 0'2y - 0'3z) \cdot (0'3x - 0'2y + 0'1z)$ c) $(x-y) \cdot (y-1) \cdot (x+a)$

11. Efectua les divisions de polinomis:

a) $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x + 3$ b) $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$
c) $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

12. Calcula els quocients: a) $(4x^3) : (x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4) : (3x^2yz^2)$ c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2) : (x^2 - 2y)$

13. Realitza les operacions entre fraccions algebraiques:

a) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$ b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$ d) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$ e) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

14. Troba un polinomi $p(x)$ tal que en dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ s'obtingui com a residu $r(x) = -3x^2 + 1$.

15. Calcula les potències: a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

16. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte suma per diferència. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $x^4 + 8x^2 + 16$ c) $x^2 - \sqrt{12}xy + 3y^2$ d) $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$
e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ f) $x^2 - 25$ g) $x^2 + 5$ h) $5x^2 - 1$
i) $x^2 - 8y^2$ j) $x^4 - 1$ k) $x^2 - y^2$ l) $x^2 - 2y^2z^2$

17. Analitza si el numerador i el denominador de les següents expressions algebraiques procedeixen del desenvolupament d'un binomi, o d'un producte suma per diferència, i simplifica-les:

a) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$

c) $\frac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

18. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a) $\frac{3}{x(3-x)} - \frac{1}{2(3-x)}$

b) $3x^4 - 5x^3 + \frac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \frac{x^5}{x^2 + 1}$

c) $\frac{x-2y}{a-b} + \frac{4x+5y}{3a-3b}$

19. Simplifica tot el possible:

a) $\left(yx^4 - \frac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{4}{a-b}$

20. Simplifica tot el possible:

a) $\frac{\frac{1}{a+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}}$

b) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$

c) $\frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}$

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyal els coeficients que apareixen en les següents expressions algebraiques:

a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$

b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$

c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$

2. Destaca les variables, o indeterminades, de les precedents expressions algebraiques.

3. Del polinomi $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica el seu grau i els monomis que ho integren.

4. L'expressió $\frac{x-7}{4-2x}$ no té sentit per a : a) $x = 7$, b) $x = 2$, c) $x = 7$ i $x = 2$, d) $x = 0$

5. Qualsevol polinomi:

- a) pot ser avaluat en qualsevol nombre.
- b) no pot ser avaluat en el número zero.
- c) no pot ser avaluat en certs nombres concrets.

6. El valor numèric de l'expressió $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ és:

- a) -11
- b) 7
- c) 1
- d) -5

7. Completa adequadament les següents frases:

- a) La suma de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau
- b) La suma de tres polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau
- c) El producte de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- d) La diferència de dos polinomis de grau dos sol ser un altre polinomi de grau

8. Finalitza adequadament les següents frases:

- a) La suma de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- b) La suma de tres polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau
- c) La diferència de dos polinomis de grau dos és sempre un altre polinomi de grau

9. En dividir el polinomi $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$ el polinomi residu resultant:

- a) ha de ser de grau 2.
- b) pot ser de grau 2.
- c) ha de ser de grau 1.
- d) cap de les opcions precedents.

10. Perquè una fracció polinòmica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sigui *equivalent* a un polinomi:

- a) els polinomis $p(x)$ i $q(x)$ han de ser del mateix grau.
- b) no importen els graus d'i $p(x)$ i $q(x)$.
- c) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser superior o igual al grau del polinomi denominador, $q(x)$.
- d) el grau del polinomi numerador, $p(x)$, ha de ser inferior al grau del polinomi denominador, $q(x)$.

RESUM

Noció	Descripció	Exemples
Expressió algebraica	Es construeix amb nombres i les operacions matemàtiques bàsiques de suma, resta, multiplicació i/o divisió	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	El no concretat en una expressió algebraica	Les variables, o indeterminades, de l'exemple anterior són x, y, z
Valor numèric d'una expressió algebraica	En fixar un valor concret per a cada indeterminada, o variable, d'una expressió algebraica s'obté un nombre, el valor numèric d'aquesta expressió algebraica per a tals valors de les indeterminades.	Si, fem $x = 3, y = -2, z = 1/2$ obtenim $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-9}{-2} - 6 = \frac{9}{2} - 6 = \frac{9 - 12}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomi	Expressió donada pel producte de nombres i indeterminades.	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2, 7 \cdot x^2$
Coefficient d'un monomi	El nombre que multiplica a la indeterminada, o indeterminades, del monomi	Els coeficients dels anteriors monomis són, respectivament, -5 i 7
Part literal d'un monomi	La indeterminada, o producte d'indeterminades, que multiplica al coeficient del monomi	La part literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ és $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grau d'un monomi	Quan hi ha una única indeterminada és l'exponent d'aquesta indeterminada. Si apareixen diverses, el grau del monomi serà la suma dels exponents d'aquestes indeterminades.	Els graus dels monomis precedents són 6 i 2 , respectivament
Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis.	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grau d'un polinomi	El major grau dels seus monomis	L'anterior polinomi és de grau 3
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p \equiv x + 3, q \equiv x^2 - 2$ $p + q \equiv x^2 + x + 1$ $p - q \equiv -x^2 + x + 5$ $p \cdot q \equiv x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
Divisió de dos polinomis	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient ($c(x)$) i residu ($r(x)$), lligats als polinomis inicials: els polinomis dividend ($p(x)$) i divisor ($q(x)$)	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

CAPÍTOL 5: EQUACIONS DE 2n GRAU I SISTEMES LINEALS

ACTIVITATS PROPOSADES

1. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

1. Còpia en el teu quadern la següent taula i completa-la:

Equació	Primer membre	Segon membre	Incògnites
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica el nombre d'incògnites de les següents equacions:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica el grau de les següents equacions:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

4. Resol les següents equacions:

a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

2. EQUACIONS DE 2º GRAU

5. Indica si són equacions de segon grau les següents equacions:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$
 b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7,3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. En les següents equacions de segon grau, indica qui són a, b i c.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$ c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

7. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

8. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

9. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

10. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$
 d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escriu una equació de segon grau les solucions del qual siguin 3 i 7.

12. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seva àrea 15 cm². Calcula les seves dimensions.

13. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a?

14. Resol les equacions següents:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

17. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els següents sistemes:

$$a) \begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$$

18. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

$$a) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$$

19. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$a) \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

20. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

21. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$a) \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

4. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

22. En un hotel hi ha 47 habitacions simples i dobles. Si en total té 57 llits, quantes habitacions són simples i quantes són dobles?
23. En una granja hi ha 100 animals entre gallines i conills, i entre tots els animals sumen 280 potes. Quantes gallines hi ha en la granja?
24. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
25. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats sigui 365.
26. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?
27. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seva àrea.
28. La suma de les edats de Raquel i Lluís són 65 anys. L'edat de Lluís més quatre vegades l'edat de Raquel és igual a 104. Quina edat tenen cadascun?
29. La suma de les edats de Maria i Albert és 32 anys. Dins de 8 anys, l'edat de n'Albert serà dues vegades l'edat de na Maria. Quina edat té cadascun en l'actualitat?
30. Troba dos nombres la diferència dels quals sigui 24 i la seva suma sigui 123.

EXERCICIS I PROBLEMES.

Equacions de primer grau

1. Resol les següents equacions de primer grau

a) $-x - 6x - 8 = 0$

b) $-1 + x = 6$

c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$

e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$

f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$

h) $x + 2 = 2x + 168$

i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resol les següents equacions de primer grau amb denominadors:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$

c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$

f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Equacions de segon grau

3. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

b) $x(-1 + x) = 6$

c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$

e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$

f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$

h) $x \cdot (x + 2) = 168$

i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$

c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$

f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x(-1 + x) = 0$

c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoritza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 5, escriu:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-5) = 0.$$

Observa que si el coeficient de x^2 fos diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats per aquest coeficient.7. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Així per resoldre $x^2 - 6x + 8 = 0$ prou dir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, després les seves solucions són 2 i 4.

Utilitza aquesta expressió per resoldre:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per tornar a resoldre-les.

a) $(x-2) \cdot (x-6) = 0$

b) $(x+1) \cdot (x-3) = 0$

c) $(x-9) \cdot (x-3) = 0$

d) $(x-1) \cdot (x+4) = 0$

e) $(x+7) \cdot (x-2) = 0$

f) $(x-4) \cdot (x+6) = 0$

9. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol-les.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$

c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$

e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$

f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguin cap solució real. Ajuda: Utilitza el discriminant.

11. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin una solució doble.

12. Escriu tres equacions de segon grau que tinguin dues solucions reals i diferents.

13. Podries escriure una equació de segon grau amb únicament una solució real que no fos doble?

Sistemes lineals d'equacions

14. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

15. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases} \end{array}$$

16. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases} \end{array}$$

17. Resol de forma gràfica els següents sistemes

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases} \end{array}$$

18. Resol els següents sistemes pel mètode que creguis més apropiat:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x + y = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \end{array}$$

19. Còpia en el teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es compleixi el que es demana en cadascun:

Compatible indeterminat

$$\text{a)} \begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Incompatible

$$\text{b)} \begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$$

La seva solució sigui $x = 2$ i $y = 1$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$$

Incompatible

$$\text{d)} \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \end{cases}$$

La seva solució sigui $x = -1$ i $y = 1$

$$\text{e)} \begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$$

Compatible indeterminat

$$\text{f)} \begin{cases} ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

20. Escribe tres sistemes lineals que siguin incompatibles.

21. Escribe tres sistemes lineals que siguin compatibles indeterminats.

22. Escribe tres sistemes lineals que siguin compatibles determinats.

23. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases} \end{array}$$

Problemes

24. En una tenda lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

25. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per completar el seu quadrat?

26. Descompon 8 en dos factors que la seva suma sigui 6

27. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin nombre és?

28. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina aquests nombres.

29. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portés un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu preses un dels meus, els dos portarem igual càrrega. Quants sacs porta cadascun?

30. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?

31. Calcula tres nombres consecutius que la seva suma de quadrats és 365

32. Dins d'11 anys, l'edat de Mario serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té Mario?

33. Dos nombres naturals es diferencien en 2 unitats i la suma dels seus quadrats és 580. Quins són aquests nombres?

34. La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és -84. De quins nombres es tracta?

35. Maria vol formar safates d'un quilogram amb massapans i polvorons. Si els polvorons li costen a 5 euros el quilo i els massapans a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata sigui de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, Quina quantitat de polvorons i de massapans va a necessitar?

36. Determina els catets d'un triangle rectangle que la seva suma és 7 cm i la hipotenusa d'aquest triangle mesura 5 cm.

37. El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula aquests nombres

38. La suma de dos nombres és 20. El doble del primer més el triple del segon és 45. De quins nombres es tracta?

39. En un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha en el garatge?
40. L'edat actual de Pedro és el doble de la de Raquel. Dins de 10 anys, les seves edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment Pedro i Raquel?
41. En la meua classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada nina 2 bolígrafs i a cada nin 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants nins i nines som en classe?
42. Entre el meu avi i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu avi té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cadascun?
43. Dos entrepans i un refresc costen 5€. Tres entrepans i dos refrescs costen 8€. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?
44. En una granja hi ha pollastres i vaques. Si es compten els caps, són 50. Si es compten les potes, són 134. Quants pollastres i vaques hi ha en la granja?
45. Un rectangle té un perímetre de 172 metres. Si el llarg és 22 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?
46. En una borsa hi ha monedes de 1€ i 2€. Si en total hi ha 40 monedes i 53€, quantes monedes de cada valor hi ha en la borsa?
47. En una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha en la baralla?
48. Una classe té 32 estudiants, i el nombre d'alumnes és triple al d'alumnes, quants nins i nines hi ha?
49. Yolanda té 6 anys més que el seu germà Pau, i la seva mare té 50 anys. Dins de 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, Quines edats tenen?

AUTOAVALUACIÓ

1. Les solucions de l'equació $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ són:

a) $x = 2$ i $x = 1$	b) $x = 1$ i $x = -3$	c) $x = 1$ i $x = -2/3$	d) $x = 2$ i $x = -6/5$
----------------------	-----------------------	-------------------------	-------------------------
2. Les solucions de l'equació $156 = x(x - 1)$ són:

a) $x = 11$ i $x = -13$	b) $x = 13$ i $x = -12$	c) $x = 10$ i $x = 14$	d) $x = -12$ i $x = -11$
-------------------------	-------------------------	------------------------	--------------------------
3. Les solucions de l'equació $3x^2 - 14x + 15 = 0$ són:

a) $x = 2$ i $x = 2/3$	b) $x = 1/3$ i $x = 4$	c) $x = 1$ i $x = 4/3$	d) $x = 5/3$ i $x = 3$
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------
4. Les solucions de l'equació $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ són:

a) $x = 24$ i $x = 8$	b) $x = 21$ i $x = 3$	c) $x = 5$ i $x = 19$	d) $x = 23$ i $x = 2$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------
5. Les solucions de l'equació $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ són:

a) Infinites	b) $x = 9$ i $x = 5$	c) no té solució	d) $x = 1$ i $x = 4$
--------------	----------------------	------------------	----------------------
6. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ són:

a) Secants	b) Paral·leles	c) Coincidents	d) Es creuen
------------	----------------	----------------	--------------
7. La solució del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = 1$	b) $x = 1$ i $y = 1$	c) $x = 3$ i $y = 2$	d) No té solució
----------------------	----------------------	----------------------	------------------
8. La solució del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ és:

a) $x = 4$ i $y = 2$	b) $x = 3$ i $y = 3$	c) $x = 2$ i $y = -1$	d) $x = 5$ i $y = 1$
----------------------	----------------------	-----------------------	----------------------
9. En una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha en la granja?

a) 16 pollastres i 11 porcs	b) 15 pollastres i 12 porcs	c) 13 pollastres i 14 porcs
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------
10. Quin és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15, li falten 100 unitats per arribar al seu quadrat?

a) 16 anys	b) 17 anys	c) 20 anys	d) 18 anys
------------	------------	------------	------------

RESUM

Equació de primer grau	És una equació algebraica en la qual la major potència de la incògnita és 1.	$-5x + 6 = 0$
Equació de segon grau	És una equació algebraica en la qual la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, on a , b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau completes	S'utilitza la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0:$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i diferents Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 4x - 5 = 0: \Delta = 36 > 0$, té dues solucions 5 i -1. $x^2 - 2x + 1 = 0: \Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0: \Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, buidem la incògnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0: x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma i producte d'arrels	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	Compatible determinat: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són secants: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ Compatible indeterminat: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són coincidentes: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No té solució, les rectes són paral·leles: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	Substitució: aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. Igalació: aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. Reducció: sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

CAPÍTOL 6: PROPORCIONALITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

- Estima quantes persones caben dempeus en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplert completament un local de 260 m², quantes persones estimes que han anat a aquesta festa?
- En una recepta ens diuen que per fer una mermelada de maduixa necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de maduixes. Volem fer 5 quilograms de mermelada, quants quilograms de sucre i quants de maduixes hem de posar?
- L'altura d'un arbre és proporcional a la seva ombra (a una mateixa hora). Un arbre que mesura 1,2 m té una ombra de 2,3 m. Quina altura tindrà un arbre l'ombra del qual mesuri 4,2 m?
- Còpia en el teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat.

Litres	16	4,5		1		50
Euros	36		8,10		10	

- Hem gastat 72 l de gasolina per recórrer 960 km. Quants l necessitem per a una distància de 1500 km?
- El meu cotxe gasta 6 litres de gasolina cada 100 km, quants litres gastará en un viatge de 1250 km?
- Un llibre de 420 pàgines pesa 200 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 300 pàgines?
- Sis persones realitzen un viatge de vuit dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 5 dies?
- Calcula el preu final d'un rentavaixelles que costava 430 € més un 21 % d'IVA, al que se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 15 %.
- Calcula els termes que falten per completar les proporcions: a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$
- Dos pantalons ens van costar 32 €, quant pagarem per 5 pantalons?
- Còpia en el teu quadern i completa:
 - D'una factura de 127 € he pagat 111 €. M'han aplicat un % de descompte
 - M'han descomptat el 12 % d'una factura de € i he pagat 365 €.
 - Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 15 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?
- La distància real entre dos pobles és 18,5 km. Si en el mapa estan a 10 cm de distància. A quina escala està dibuixat?
- Quina altura té un edifici si la seva maqueta construïda a escala 1 : 300 presenta una altura de 12 cm?
- Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.
- Les dimensions d'una superfície rectangular en el plànol són 6 cm i 14 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 40, calcula les seves mesures reals.

2. PROPORCIONALITAT INVERSA

- Còpia en el teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa:

Magnitud A	36	0,09		12	
Magnitud B	0,25		6		72

- En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 6 panells de 2,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 1,5 m de llarg?
- Per omplir un dipòsit s'obren tres aixetes que donen 2 litres per minut cadascuna i triguen 6 hores. Quant temps trigaran 4 aixetes similars que donen 5 litres per minut cadascun?
- Tres màquines fabriquen 1200 peces funcionant 5 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per aconseguir 6000 peces durant 9 hores diàries?
- En la construcció d'un pont de 900 m s'han utilitzat 250 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 75 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?
- En un hort ecològic s'utilitzen 3000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 10 % de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob per què les plantes rebin la mateixa quantitat de nitrats?
- Aquest mateix hort necessita 1200 caixes per envasar les seves mandarines en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per envasar-les en caixes de mig quilogram? I per envasar-les en caixes de 2 quilograms?

3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

24. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 € Quant correspon a cadascun?
25. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 6, 5, 2, i 1 error, han de repartir-se els 1400 punts. Quants punts rebrà cadascun?
26. En el testament, l'avi estableix que vol repartir entre els seus néts 22200 €, de manera proporcional a les seves edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat sigui per als néts menors. Quant rebrà cadascun?
27. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € aquest any en la seva empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500 €, quant correspon a cadascun?
28. Calcula el preu del quilo de barreja de dos tipus de cafè: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.
29. Quants litres de suc d'aranja de 2,40 €/l han de barrejar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per obtenir una barreja a 2,13 €/l?
30. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 110 g i conté 82 g d'or pur.
31. Quants quirats, aproximadament té la joia anterior?

4. INTERÈS

32. Calcula l'interès simple que produeixen 105000 € al 4,8 % durant 750 dies.
33. Al 5 % d'interès compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en dipositar 39500 €? Ajuda: també pots utilitzar el full de càlcul.
34. Quin capital cal dipositar a l'1,80 % durant 6 anys per obtenir un interès simple de 777,6 €?

EXERCICIS I PROBLEMES.

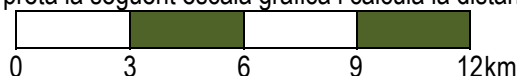
1. Còpia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Amb 76 € hem pagat 12,5 m de tela, quant ens costaran 22,5 m?
3. Cada setmana paguem 82 € en transport. Quant gastarem els mesos de juny i juliol?
4. Per tapissar cinc cadires he utilitzat 2,3 m de tela, quantes cadires podré tapissar amb la peça completa de 23 m?
5. Un camió ha transportat en 3 viatges 220 sacs de patates de 24 kg cadascun. Quants viatges seran necessaris per transportar 550 sacs de 30 kg cadascun?
6. Una edició de 350 llibres de 210 pàgines cadascun aconseguix un pes total de 70 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 630 llibres de 140 pàgines cadascun?
7. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és $\frac{A}{B} = 1,8$, còpia en el teu quadern i completa la següent taula:

Magnitud A	12,6			4,14	
Magnitud B		9	0,1		2,7

8. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
9. Per retardar-se dos mesos en el pagament d'un deute de 1520 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %, quant ha de retornar en total?
10. Quin tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1820 € si finalment es van pagar 1274 €?
11. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60 €, quin era el preu del televisor sense descompte?
12. Per liquidar un deute de 3500 € abans del previst, una persona paga finalment 3080 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
13. El preu d'un viatge s'anuncia a 907,50 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
14. Quin increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 38 € i ara es paga a 47,12 €?
15. Un mapa està dibuixat a escala 1:700000. La distància real entre dues ciutats és 21 km. Quin és la seva distància en el mapa?
16. La distància entre Oviedo i La Corunya és de 340 km. Si en el mapa estan a 10 cm, quin és l'escala a la qual està dibuixat?
17. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància



18. Còpia en el teu quadern i completa la següent taula:

Grandària en el dibuix	Grandària real	Escala
24 cm llarg i 5 cm d'ample		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

19. Còpia en el teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

Magnitud A	4	7,5		3,6	
Magnitud B		12	0,18		10

20. Quina velocitat ha de portar un automòbil per recórrer en 4 hores certa distància si a 80 km/h ha trigat 5 hores i 15 minuts?

21. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5,4. Còpia en el teu quadern i completa la taula següent:

A	18		9		10,8
B		0,03		2,7	

22. En la granja es fa la comanda de farratge per alimentar a 240 vaques durant 9 setmanes. Si ven 60 vaques, quantes setmanes li durarà el farratge? I si en lloc de vendre, compra trenta vaques? I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb les 240 vaques?

23. Amb dotze paquets de 3,5 kg cadascun poden menjar 80 gallines diàriament. Si els paquets fossin de 2 kg, quants necessitaríem per donar de menjar a les mateixes gallines?

24. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula en el teu quadern:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

25. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 15 operaris per realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per realitzar el mateix treball?

26. En un magatzem es guarden reserves de menjar per 80 persones durant 15 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria el mateix menjar per 75 persones amb 4 racions diàries?

27. Deu operaris instal·len 3600 m de tanca en 6 dies. Quants dies trigaran 12 operaris a instal·lar 5040 m de tanca?

28. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cadascun?

29. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.

30. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris ho realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cadascun?

31. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.

32. Cinc persones comparteixen un microbús per realitzar diferents trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cadascun?

33. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cadascuna?

34. Barregem 3 kg d'ametlles a 14 €/kg, 1,5 kg de nous a 6 €/kg, 1,75 kg d'anacards a 18 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de barreja de fruita seca.

35. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix barrejant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una ampolla de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?

36. Per aconseguir un tipus de pintura es barregen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte Y a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de barreja.

37. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quin és la seva llei?

38. Quants grams d'or conté una joia de 0,900 de llei, que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?

39. Quin capital cal dipositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per obtenir un interès simple de 810 €?

40. Quin és el capital final que es rebrà per dipositar 25400 € a l'1,4 % en 10 anys?

41. Quants mesos ha de dipositar-se un capital de 74500 € al 3 % per obtenir un interès de 2980 €?

42. Al 3 % d'interès compost, un capital s'ha convertit en 63338,5 €. De quin capital es tracta?

AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

- a) 160; 0,3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20
2. Amb 450 € paguem les despeses de gas durant 8 mesos. En 30 mesos pagarem:
a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €
3. Un article que costava 1600 € s'ha rebaixat a 1400 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:
a) 12,5 % b) 14 % c) 15,625 % d) 16,25 %
4. Per envasar 360 litres d'aigua, quantes ampolles necessitem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?
a) 440 ampolles b) 280 ampolles c) 480 ampolles d) 360 ampolles
5. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seves parcel·les. La major, que mesura 15 ha rep 24 tones, la segona és de 10 ha i la tercera de 8 ha rebran:
a) 16 t i 5 t b) 12,8 t i 16 t c) 16 t i 12,8 t d) 16 t i 11 t
6. L'escala a la qual s'ha dibuixat un mapa en el qual 3,4 cm equivalen a 1,02 km és:
a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300
7. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc folrar 32 llibres. Quants rotllos necessitem per folrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?
a) 3 rotllos b) 5 rotllos c) 4 rotllos d) 2 rotllos
8. El preu final del kg de barreja de 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg és:
a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,05€
9. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:
a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g
10. Al 2 % d'interès compost, durant 6 anys, 14500 € s'hauran convertit en:
a) 16225,35 € b) 16329,35 € c) 15632,35 € d) 14550 €

RESUM

		Exemples
Proporcionalitat directa	Dues magnituds són directament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre. La raó de proporcionalitat directa k és el valor que s'obté mitjançant el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra.	Per empaperar 300 m ² hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m ² , necessitem 8,32 rotllos, ja que $k = 300/24 = 12,5$, i $12,5 = 104/x$, i per tant $x = 104/12,5 = 8,32$.
Proporcionalitat inversa	Dues magnituds són inversament proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La raó de proporcionalitat inversa k' és el producte de cada parell de magnituds: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$	Dues persones pinten un habitatge en 4 dies treballant 9 h diàries. Per pintar el mateix habitatge, 3 persones, treballant 8 h diàries trigaran... 3 dies
Percentatges	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escala	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km en la realitat.
Repartiment proporcional directe	Rep més quantitat qui més parts té.	Repartir directament a 6, 10 i 14, 105000 € $6 + 10 + 14 = 30$ $105000 : 30 = 3500$ $6 \cdot 3500 = 21000$ € $10 \cdot 3500 = 35000$ € $14 \cdot 3500 = 49000$ €
Repartiment proporcional invers	Rep més quantitat qui menys parts té.	Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6; $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ $5670 : 21 = 270$ $270 \cdot 10 = \mathbf{2700}$; $270 \cdot 6 = \mathbf{1620}$ $270 \cdot 5 = \mathbf{1350}$
Barreges i aliatges	Barrejar diferents quantitats de productes, de diferents preus. La lleï d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.	Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seva lleï és: $\frac{195}{245} = 0,795$
Interès simple i compost	L'interès és el benefici que s'obté en dipositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	$C = 3600$; $r = 4,3 \%$; $t = 8$ anys $I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4$ €

CAPÍTOL 7: GEOMETRIA EN EL PLÀNOL

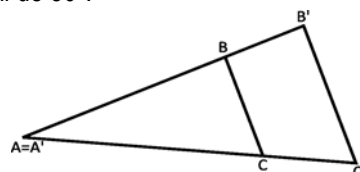
ACTIVITATS PROPOSADES

1. LLOCS GEOMÈTRICS

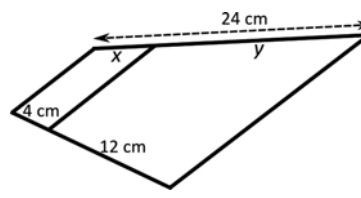
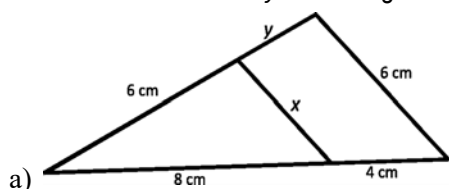
1. Un agricultor troba en el seu camp una bomba de la Guerra Civil. Les autoritats estableixen una distància de seguretat de 50 metres. Com s'ha d'acordonar la zona?
2. Un joc de dos participants consisteix que se situen a una distància de dos metres entre ells i es posen diverses banderes a la mateixa distància de tots dos. La primera a 5 metres, la segona a 10 metres, la tercera a 15 i així successivament. Sobre quina línia imaginària estarien situades les banderes?
3. Quan en una acampada ens seiem al voltant del foc ho fem formant un cercle. Per què?
4. Utilitza regla i compàs per dibuixar la bisectriu d'un angle i la mediatriu d'un segment.
5. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costats 7, 6 i 4 cm. Traça en ell les circumferències inscrites i circumscrites.
6. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costat 8 cm i angles adjacents al mateix de 40° i 30° . Troba el seu ortocentre i el seu baricentre.
7. Dibuixa en el teu quadern un triangle amb un angle de 40° comprès entre dos costats de 6 i 4 cm. Obtingues el seu circumcentre i el seu incentre.
8. Què passa amb les rectes i els punts notables en un triangle equilàter?
9. Dibuixa un triangle isòsceles amb l'angle desigual de 40° . Traça les rectes notables per al costat desigual i per a un dels costats iguals. Què passa?
10. Volem situar un fanal en una plaça triangular. On la posaríem?
11. Una formiga camina per una mitjana d'un triangle partint del vèrtex. Quan arriba al baricentre ha recorregut 8 centímetres. Quina distància li falta per arribar al punt mitjà del costat oposat al vèrtex d'on va partir?
12. Tenim un camp triangular sense tancar i volem lligar una cabra de manera que no surti del camp però que accedeixi al màxim de pastura possible. On posaríem el pal?
13. A Yaiza i al seu germà Aitor els encanta el pastís. La seva mare els ha fet un triangular. Yaiza l'ha de tallar però Aitor triarà primer el seu tros. Com hauria de tallar Yaiza el pastís?
14. L'ortocentre d'un triangle rectangle, on està?
15. Comprova que el circumcentre d'un triangle rectangle està sempre en el punt mitjà de la hipotenusa.
16. El baricentre és el centre de gravetat. Construeix un triangle de cartolina i dibuixa el seu baricentre. Si poses el triangle horitzontalment en l'aire només subjectat per la punta d'un llapis en el baricentre comprovaràs que se subjecta.
17. Calcula el costat d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència de 10 cm de radi. [Ajuda: Aplica que en aquest cas el circumcentre coincideix amb el baricentre i que aquest últim està al doble de distància del vèrtex que del costat oposat.]
18. Repeteix les activitats resoltes amb *Geogebra*. Modifica al teu gust colors i línies.
19. Mou un dels vèrtexs originals del triangle i indica quines coses romanen invariants.
20. Comprova que es verifiquen les propietats de *circumcentre*, com a centre de la circumferència circumscrita, de l'incentre, com a centre de la circumferència inscrita.
21. En *baricentre* divideix a la mitjana en dues part, sent una dos terços de l'altra. Comprova-ho.
22. La recta de *Euler* passa pel *circumcentre*, el *baricentre* i l'ortocentre, però l'incentre no sempre pertany a la recta de *Euler*. Com ha de ser el triangle perquè pertanyi?
23. Mou els vèrtexs del triangle per determinar si és possible que els seus quatre punts notables coincideixin.

2. SEMBLANÇA

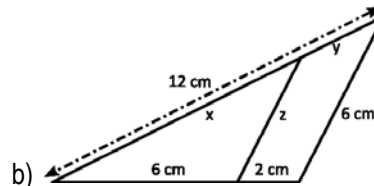
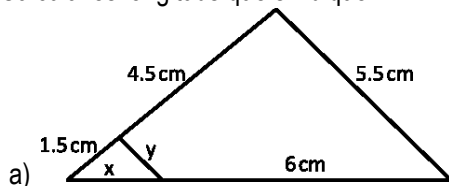
24. Indica si són semblants els següents parells de triangles:
 - a) Un angle de 80° i un altre de 40° . Un angle de 80° i un altre de 60° .
 - b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 70° . Triangle isòsceles amb angle igual de 50° .
 - c) $A = 30^\circ$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 3.5$ cm, $c' = 4.5$ cm
 - d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 12.5$ cm, $c' = 24.5$ cm
25. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:
 - a) $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, $c' = ?$
 - b) $A = 45^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 8$ cm, $a' = ?$
26. Un triangle té costats de 6 cm, 7 cm i 7 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 60 cm. Quant mesuren els seus costats?



27. Calcula els valors de x i y en les següents figures.

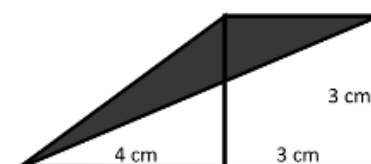
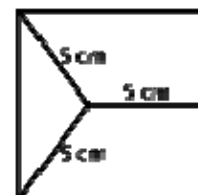


28. Un pal molt alt se subjecta amb cables d'acer que van del seu extrem superior al sòl. La distància de l'ancoratge d'un dels cables a la base del pal és 6 metres. Posem una barra de 120 centímetres de manera que està perpendicular al sòl i just toca el sòl i el cable. La seva distància a l'ancoratge del cable és 90 centímetres. Calcula la longitud del pal i la longitud del cable d'acer.
29. Maria mesura 160 cm. La seva ombra mesura 90 cm. En aquest mateix instant es mesura l'ombra d'un edifici i mesura 7,2 m. Quant mesura l'edifici?
30. Calcula les longituds que s'indiquen:

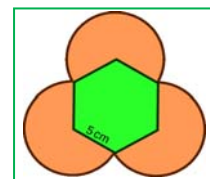
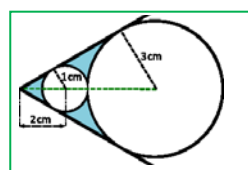
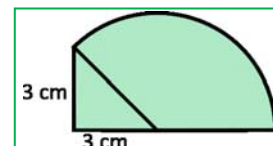
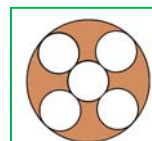
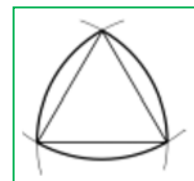
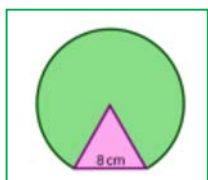
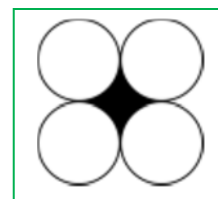
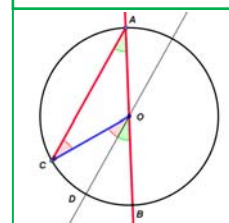
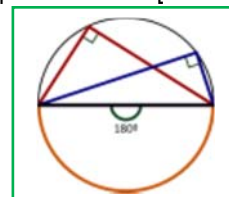


3. ANGLES, LONGITUDS I ÀREES

31. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesurin 5 i 12 cm i la seva hipotenusa 24 cm? Si la teva resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 5 i 12 cm. Utilitza calculadora per resoldre aquesta activitat si et resulta necessària.
32. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:
- a) 6 cm i 8 cm b) 4 m i 3 m c) 8 dm i 15 dm d) 13,6 km i 21,4 km.
33. Calcula la longitud del catet que falta en els següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:
- a) 26 cm i 10 cm b) 17 m i 8 m c) 37 dm i 35 dm d) 14,7 km i 5,9 km
34. Calcula el costat del quadrat de la figura del marge:
35. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 9 m.
36. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2 cm.
37. Calcula el volum d'un tetraedre regular de costat 7 dm.
38. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 3 m.
39. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 cm i altura 8 cm.
40. Una porteria de futbol mesura 7,32 m d'ample per 2,44 m d'alt. El punt de penal està a 10 metres. Calcula la distància que recorre la pilota en:
- a) Un tir directe a la base del pal.
b) Un tir directe a l'esquadra.
41. Demuestra que el diàmetre d'un quadrat de costat x és $d = \sqrt{2}x$.
42. Demuestra que l'altura d'un triangle equilàter de costat x és $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
43. Calcula els angles central i interior del triangle equilàter, quadrat, pentàgon regular, hexàgon regular i enneàgon regular.
44. Justifica que un hexàgon regular es pot descompondre en 6 triangles equilàters.
45. Dos angles d'un triangle isòsceles mesuren 35° i 72° , quant pot mesurar l'angle que falta?
46. Dos angles d'un trapezi isòsceles mesuren 35° i 72° , quant mesuren els angles que falten?
47. Quant mesura la suma dels angles interiors d'un decàgon irregular?
48. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 50 cm i 26 cm i altura 5 cm.
49. Calcula l'àrea i perímetre d'un trapezi rectangle de bases 100 cm i 64 cm, i d'altura 77 cm.
50. Calcula l'àrea i el perímetre d'un trapezi isòsceles de bases 100 cm i 60 cm i costats laterals 29 cm.
51. Utilitza el teorema de Tales per determinar l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada de la figura.
52. Tenint en compte que un hexàgon regular es pot dividir en sis triangles equilàters (l'altura de la qual és l'apotema de l'hexàgon regular), calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 5 cm de costat.



53. Volem cobrir el plànol amb polígons regulars de 100 cm^2 . Les úniques opcions possibles són el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon. Calcula quina d'aquestes tres figures té menor perímetre. Quin animal aplica aquest resultat? [Utilitza la relació entre costat i altura d'un triangle equilàter obtinguda anteriorment]
54. Tales va observar que en qualsevol triangle rectangle el circumcentre sempre estava en el punt mitjà de la hipotenusa.
55. Un angle inscrit en la circumferència que abasta un diàmetre és un angle recte. Per què? Raona la resposta.
56. En quines posicions té un futbolista el mateix angle de tir que des del punt de penal?
57. *Una altra demostració. Intenta comprendre-la.* Tracem un angle inscrit en la circumferència CAB que tingui un costat que passi pel centre O de la circumferència. Tracem la seva central COB. El triangle OAC és isòsceles ja que dos dels seus costats són radis de la circumferència. Tracem per O una recta paral·lela a AC. L'angle CAO és igual a l'angle DOB ja que tenen els seus costats paral·lels. L'angle ACO és igual a l'angle COD per alterns interns entre paral·leles, i és igual a l'angle CAO per ser el triangle isòsceles. Per tant el central mesura el doble que l'angle inscrit.
58. Les circumferències de grandària real de la il·lustració del marge tenen com a radi, la menor 1 cm, la següent, una mica més fosca 2 cm, la clara següent 3 cm, i així, augmenta un centímetre. Calcula les longituds de les 10 primeres circumferències.
59. La Terra és aproximadament una esfera de radi 6.379 km . Quant mesura l'Equador?
60. Antigament es definia un metre com: "la deu milionèsima part del quadrant del meridià terrestre que passa per París". Segons aquesta definició, quant mesura (en metres) el diàmetre terrestre?
61. Un far gira descrivint un arc de 170° . A una distància de 5 km , quina és la longitud de l'arc de circumferència en el qual es veu la llum?
62. Determina l'àrea del triangle equilàter de 10 cm de radi.
63. Calcula l'àrea tancada per una circumferència de radi 9 cm .
64. Calcula l'àrea de la corona circular de radis 12 i 5 cm .
65. Calcula l'àrea del sector circular i del segment circular de radi 6 cm i que forma un angle de 60° .
66. Calcula l'àrea del sector de corona circular de radis 25 cm i 18 cm i que forma un angle de 60° .
67. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.
68. Volem construir una rotonda per a una carretera de 9 metres d'ample de manera que el cercle interior de la rotonda tingui la mateixa àrea que la corona circular que forma la carretera. Quin radi ha de tenir la rotonda?
69. Una figura típica de l'arquitectura gòtica es dibuixa a partir d'un triangle equilàter traçant arcs de circumferència amb centre en cadascun dels seus vèrtexs i que passen pels dos vèrtexs restants. Calcula l'àrea d'una d'aquestes figures si es construeix a partir d'un triangle equilàter de 2 metres de costat. Calcula l'àrea tancada entre aquests cercles de 5 cm de radi.
70. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura formada per un triangle equilàter de 8 cm de costat sobre el qual es construeix un sector circular.
71. Hi ha 5 circumferències inscrites en una circumferència de 12 cm de radi tal com indica la figura. Quant val l'àrea ombrejada?
72. Un formatge cilíndric té una base circular de 14 cm de diàmetre i una etiqueta circular de 8 cm de diàmetre. Es talla un tascó de 70° . Quina àrea té el tros d'etiqueta tallada?
73. D'un formatge de 18 cm de diàmetre tallem un tascó de 50° . L'etiqueta té 7 cm de radi. Quina àrea del formatge està visible?
74. A partir d'un triangle rectangle isòsceles de 3 cm de catet construïm un sector circular. Calcula l'àrea de la figura.
75. En dues rectes que formen 60° s'inscriuen dues circumferències tangents entre si. La primera té el centre a 2 centímetres del vèrtex i el radi de 1 centímetre . La segona té de radi 3 centímetres . Quant val l'àrea ombrejada?
76. Tracem tres arcs circulars des de tres vèrtexs d'un hexàgon de 5 cm de costat. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura.



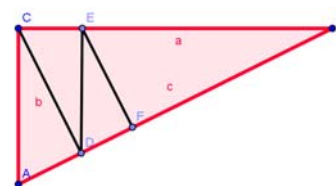
EXERCICIS I PROBLEMES

Llocs geomètrics

1. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costats 2 cm, 3 cm i 4 cm. Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mediatris i bisectrius. Determina el circumcentre i l'incentre. Traça les circumferències inscrites i circumscrites.
2. Dibuixa en el teu quadern un triangle de costat 5 cm i angles adjacents al mateix de 30° i 50° . Traça en ell, utilitzant regla i compàs, les mitjanes i les altures. Determina el seu ortocentre i el seu baricentre.
3. Dibuixa en el teu quadern un triangle amb un angle de 50° comprès entre dos costats de 5 i 8 cm. Obté el seu circumcentre i el seu incentre.
4. Com són les rectes i punts notables d'un triangle rectangle?
5. Com són les rectes i punts notables d'un triangle isòsceles?

Semblança

6. Indica si són semblants els següents parells de triangles:
 - a) Un angle de 70° i un altre de 20° . Un angle de 90° i un altre de 20° .
 - b) Triangle isòsceles amb angle desigual de 80° . Triangle isòsceles amb un angle igual de 50° .
 - c) $A = 40^\circ$, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm. $A' = 40^\circ$, $b' = 4$ cm, $c' = 5$ cm
 - d) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. $a' = 9$ cm, $b' = 12$ cm, $c' = 19$ cm
7. Calcula el valor desconegut perquè els triangles siguin semblants:
 - a) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 4$ cm, $c' = ?$
 - b) $A = 50^\circ$, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm. $A' = 50^\circ$, $b' = 18$ cm, $a' = ?$
8. Les longituds dels costats d'un triangle són 12 cm, 14 cm i 14 cm. Un triangle semblant a ell té un perímetre de 90 cm. Quant mesuren els seus costats?
9. Dibuixa en el teu quadern un pentàgon regular. Traça les seves diagonals. El triangle format d'una banda del pentàgon i les dues diagonals del vèrtex oposat es denomina triangle auri, ja que en dividir el costat major entre el menor s'obté el nombre d'or, quant mesuren els seus angles? Cerca en la figura que has traçat altres triangles auris. Quina és la relació de proporcionalitat?
10. Quant és la suma dels angles interiors d'un rombe?
11. L'ombra d'un edifici mesura 15 m, i la del primer pis 2 m. Sabem que l'altura d'aquest primer pis és de 3 m, quant mesura l'edifici?
12. En el museu de Bagdad es conserva una tauleta en la qual apareix dibuixat un triangle rectangle ABC , de costats $a = 60$, $b = 45$ i $c = 75$, subdividit en 4 triangles rectangles menors ACD , CDE , DEF i EFB , i l'escriba calcula la longitud del costat AD com 27. Ha utilitzat la semblança de triangles? Com es podria calcular? Quines dades necessites? Calcula l'àrea del triangle ABC i del triangle ACD . Determina la longitud dels segments CD , DE i EF .
13. Demuestra que en dos triangles semblants les mitjanes són proporcionals.
14. Un triangle rectangle isòsceles té un catet de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa d'un altre triangle semblant al primer. Quant valen les àrees de tots dos triangles?
15. El mapa a escala 1:3000000 d'un poble té un àrea de 2500 cm², quant mesura la superfície vertadera d'aquest poble?
16. Unint els punts mitjans dels costats d'un triangle s'obté un altre triangle. Com són? Quina relació hi ha entre els seus perímetres? I entre les seves àrees?
17. L'altura i la base d'un triangle rectangle mesuren respectivament 4 i 7 cm; i és semblant a un altre de base 26 cm. Calcula l'altura del nou triangle i les àrees de tots dos.



Angles, longituds i àrees

18. Construeix un triangle coneixent l'altura sobre el costat a , el costat a i el c .
19. Calcula la longitud del costat d'un octògon regular inscrit en una circumferència de radi 5 cm.
20. Calcula l'apotema d'un hexàgon regular costat 7 cm.
21. Calcula l'àrea d'un cercle la circumferència del qual mesura 50 cm.
22. Calcula la longitud d'una circumferència el cercle de la qual té una superfície de mesura 50 cm².
23. La Terra fa una volta cada 24 hores, a quina velocitat es mou un punt de l'Equador?
24. Quina relació hi ha entre les àrees un triangle inscrit en un cercle i la del cercle?
25. Els grecs coneixien les dos següents possibles formes de construir un triangle rectangle amb els seus tres costats de longitud un nombre natural, sense més que donar valors a n . Comprova si es verifiquen per a $n = 1, 2, \dots$
 - a) Catets: $2n$ i $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$.
 - b) Catets: $2n + 1$ i $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.
26. En augmentar en 3 cm el costat d'un quadrat la seva àrea augmenta 32 cm². Quant mesura el costat de dites quadrades?
27. Es vol cobrir un terreny circular de 25 m de diàmetre amb graveta, tirant 10 kg per cada metre quadrat. Quanta graveta es necessita?

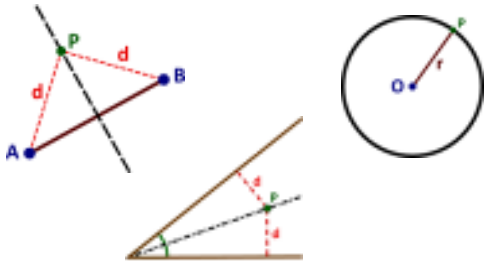
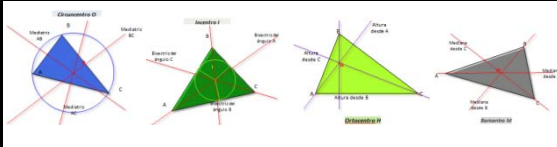
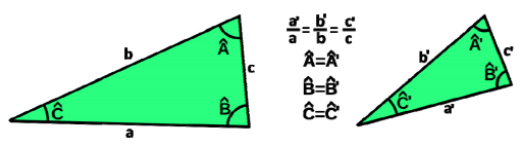
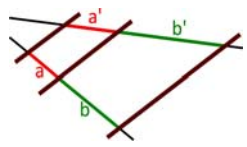
28. Una escala de 4 m de longitud està recolzada sobre una paret. El peu de l'escala dista 1,5 m de la paret. Quina altura aconsegueix l'escala sobre la paret?
29. Calcula l'àrea de la circumferència circumscrita a un rectangle de costats 7 i 9 cm.
30. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 3 cm de costat. Perllonga els costats de l'hexàgon i dibuixa un hexàgon estavellat. Calcula la seva àrea.
31. El senyal de tràfic de STOP té forma d'octògon regular. La seva altura mesura 90 cm, i el seu costat 37 cm, quant mesura la seva superfície?
32. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 10 cm.
33. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de perímetre 60 cm.
34. Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de base menor 5 cm, costat 3 cm i altura 4 cm.
35. Calcula l'àrea d'un trapezi isòsceles de bases 8 i 6 cm i costat 3 cm.
36. Calcula l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costat 4 cm i diagonal 7 cm.
37. Calcula l'àrea i el perímetre d'un quadrat de diagonal 9 cm.
38. Calcula l'àrea i el perímetre d'un triangle isòsceles de base 8 cm i altura 6 cm.
39. Un triangle mesura d'altura π i de base $\pi + 1$. És rectangle?
40. Dibuixa un triangle rectangle isòsceles de catets de longitud 1, quant mesura la hipotenusa? Prenent aquesta hipotenusa com a catet i amb l'altre catet igual a 1 dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 4 vegades, quant mesura l'última hipotenusa?
41. Dibuixa un triangle rectangle de catets de longitud 1 i 2 cm, quant mesura la hipotenusa? Prenent aquesta hipotenusa com a catet i amb l'altre catet de longitud 1 cm dibuixa un nou triangle rectangle. Quant mesura la nova hipotenusa? Continua el procés 3 vegades, quant mesura la darrera hipotenusa?
42. Calcula l'altura d'una piràmide regular quadrangular de costat de la base 10 m i d'aresta 15 m.
43. Calcula la generatriu d'un con de radi de la base 5 m i d'altura 7 m.
44. Dos ascetes hindús viuen a la part alta d'un penya-segat de 10 m d'altura el peu del qual està a 200 metres del poble més proper. Un dels ascetes baixa del penya-segat i va al poble. L'altre, que és mag, ascendeix una distància x i viatja volant en línia recta al poble. Tots dos recorren la mateixa distància. Quant ha ascendit el mag?
45. Quant mesura l'aresta de la base de la piràmide de Kheops si mesura 138 m d'altura i 227 m d'aresta?

AUTOAVALUACIÓ

1. Tots els punts que estan a la mateixa distància de dos punts donats estan en:
 - a) una bisectriu
 - b) una circumferència
 - c) una el·lipse
 - d) una mediatriu
2. Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en el:
 - a) ortocentre
 - b) baricentre
 - c) incentre
 - d) circumcentre
3. El circumcentre és el centre de:
 - a) gravetat del triangle
 - b) la circumferència inscrita
 - c) la circumferència circumscrita
4. Dos triangles són semblants si:
 - a) tenen dos angles iguals
 - b) tenen dos costats proporcionals
 - c) tenen un angle igual
 - d) les seves àrees són semblants
5. Sabem que els triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants. Calcula el valor de a' i c' perquè el siguin, sabent que $a = 10$ cm, $b = 6$ cm, $b' = 3$ cm, $c = 8$ cm:
 - a) $a' = 4$ cm i $c' = 6$ cm
 - b) $a' = 5$ cm i $c' = 6$ cm
 - c) $a' = 4$ cm i $c' = 4$ cm
 - d) $a' = 5$ cm i $c' = 4$ cm
6. Si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 7 cm i un catet mesura 3 cm, llavors l'altre catet mesura aproximadament:
 - a) 6,3 cm
 - b) 5 cm
 - c) 5,8 cm
 - d) 6,9 cm
7. La suma dels angles interiors d'un polígon irregular de deu costats val:
 - a) 1440°
 - b) 1620°
 - c) 1800°
 - d) 1260°
8. L'àrea d'un rombe de costat 5 cm i una diagonal de 8 cm mesura:
 - a) 48 cm²
 - b) $36,7$ cm²
 - c) 24 cm²
 - d) $21,2$ cm²
9. L'angle central de l'inscrit en la circumferència que abasta un angle de 72° mesura:
 - a) 720°
 - b) 108°
 - c) 36°
 - d) 144°
10. La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle de radi 3 cm són respectivament:
 - a) 6π cm i 9π cm²
 - b) 9π cm i 6π cm²
 - c) 3π cm i 3π cm²
 - d) 18 cm i 27 cm²

RESUM



		Exemples
Llocs geomètrics	Circumferència és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten del centre. Mediatriu d'un segment és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels extrems del mateix. Donat un angle delimitat per dues rectes, la bisectriu de l'angle és el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les mateixes.	
Rectes i punts notables d'un triangle	Mediatris i circumcentre Bisectrius i incentre. Altures i ortocentre. Mitjanes i baricentre	
Semblança	Dues figures semblants tenen <i>la mateixa forma</i>. Dos polígons són semblants si els seus costats són proporcionals i els seus angles són iguals.	
Criteris de semblança de triangles	Dos triangles són semblants si: 1) Tenen 2 angles iguals. 2) Tenen els 3 costats proporcionals. 3) Tenen dos costats proporcionals i l'angle que formen és igual	
Teorema de Tales	Estableix una relació entre els segments formats quan dues rectes qualssevol són tallades per diverses rectes paral·leles: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitàgores	En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$	
Suma dels angles d'un polígon	La suma dels angles interiors d'un triangle és 180° La suma dels angles interiors d'un polígon és 180·(n-2).	

CAPÍTOL 8: MOVIMENTS EN EL PLÀNOL I L'ESPAI

ACTIVITATS PROPOSADES

1. TRANSFORMACIONS GEOMÈTRIQUES

- En el teu quadern dibuixa un triangle. Calca-ho i copia la figura calcada de nou en el teu quadern. Mesura tots els costats de les figures homòlogues. Mesuren el mateix? Mesura tots els seus angles. Mesuren el mateix?
- Dibuixa en el teu quadern una lletra **B** i fes un disseny amb ella, traslladant-la, girant-la o dibuixant lletres **B** simètriques.
- En el teu quadern dibuixa una lletra **b** minúscula, i a continuació una altra lletra **b** minúscula el doble de gran. Com són les seves longituds i els seus angles? És una semblança?
- Dibuixa ara una lletra **d** minúscula. És semblant a la lletra **b** anterior?
- En el teu quadern marca una trama formada per quadrats de dos quadradets de costat. En un quadradet fes un gargot, una poligonal, una línia corba... Dibuixa la simètrica prenent com a eix de simetria un costat del quadrat. Dibuixa la figura simètrica del conjunt obtingut prenent com a eixos sempre els costats de la trama inicial. Acoloreix la figura obtinguda. Traslada-la horitzontal i verticalment.

2. TRANSLACIONS

- Dibuixa en el teu quadern els punts de coordenades $A(-5, 2)$, $B(-1, 6)$ i $C(2, -3)$. Troba les coordenades dels vectors fixos **AB**, **AC**, **BC**, **CA** i **CB**. Comprova en el teu dibuix que aquestes són les seves coordenades.
- El vector fix **AB** té de coordenades $(4, 2)$, calcula les coordenades del seu origen A sabent que les coordenades de la seva extrem B són $(-1, 1)$. Representa-ho gràficament.
- Les coordenades de A són $(2, 3)$ i les del vector fix **AB** són $(4, -2)$. Calcula les coordenades del punt B . Representa-ho gràficament.
- Nomena als vectors fixos de la figura i indica quins són representants d'un mateix vector lliure.
- Dibuixa en el teu quadern quatre vectors equipolents al vector fix amb origen en $A(-3, 4)$ i extrem $B(5, 0)$, amb orígens en els punts $C(0, 3)$, $D(5, 2)$, $E(-4, 0)$ i $F(-2, -5)$.
- Dibuixa en el teu quadern els punts $A(-2, 2)$, $B(-3, 0)$, $C(2, 4)$, $D(6, 2)$, $E(2, 0)$, $F(6, -2)$ i $G(2, -4)$. Amb els vectors fixos d'origen i extrem en aquests punts, indica quins d'ells són equipolents.
- Amb els punts de l'exercici anterior, calcula les coordenades dels vectors fixos **DE** i **FG**. Com són? Són dos representants d'un mateix vector lliure?
- Dibuixa en el teu quadern un sistema de referència cartesià i assenyala en ell els punts de coordenades: $A(4, 5)$, $B(-5, 6)$ i $C(2, -5)$.
 - Anomena **u** al vector fix **AB** i indica els seus components.
 - Crida **v** al vector fix **BC** i indica els seus components.
 - Calcula les components del vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
 - Representa en el teu quadern els vectors lliures **u** i **v** amb origen en l'origen de coordenades i representa també al vector suma **w**. Observa que està sobre la diagonal del paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.
- Dibuixa en el teu quadern el punt $A(1, 2)$, dibuixa ara el vector $\mathbf{u} = (2, 3)$ amb origen en A , i el vector $\mathbf{v} = (4, -1)$ també amb origen en A . Calcula les coordenades del vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, i dibuixa-ho amb origen en A . El resultat coincideix amb el que has obtingut gràficament? Observa que el vector suma és la diagonal d'un paral·lelogram construït sobre **u** i **v**.
- Efectua les següents operacions amb vectors:

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$	b) $(5, -9) - [(6, 3) + (-4, -6)]$
c) $5 \cdot [(-1, 0) - (-2, 3)] + (-3) \cdot [(4, -2) - 6 \cdot (4, -5)]$	d) $9 \cdot 3 \cdot (2, 6) + (3 \cdot 7, 5 \cdot 2)$
- Efectua les següents operacions amb els vectors $\mathbf{u} = (-5, 6)$, $\mathbf{v} = (4, -7)$ i $\mathbf{w} = (3, 4)$:

a) $2\mathbf{u} - (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	b) $3\mathbf{w} - 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$	c) $2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - 3\mathbf{w}$
--	---	---
- Dibuixa en el teu quadern una figura i utilitza escaire i cartabó per traslladar-la 5 centímetres cap a la dreta.
- Dibuixa en el teu quadern una figura. (Si no se t'ocorre cap altra, dibuixa la lletra G). Col·loca damunt un paper vegetal i calca-la. Desplaça en línia recta el paper vegetal i torna a calcar la figura. Les dues figures que has obtingut, tenen totes les seves mesures, tant longituds com a angles, iguals? Traça les rectes que uneixen parells de punts corresponents, com són aquestes rectes? Quina trajectòria han seguit els punts en el desplaçament?
- Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una translació una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.

20. Observa aquest fris d'un temple de Cambodja. És una figura que es repeteix per translació. Quina direcció té el vector de translació? D'on a on aniria?
21. Utilitza paper quadriculat i dibuixa en el teu quadern una lletra F de 2 quadradets d'alt i 1 quadradet d'ample. A aplica-li una translació de vector $(2, 5)$.
22. Dibuixa en el teu quadern uns eixos cartesianes i el triangle de vèrtexs $A(3, 1)$, $B(3, 3)$ i $C(1, 3)$. A aplica-li la translació de vector $(4, 2)$: 4 unitats a la dreta i 2 unitats cap amunt. Quins són les coordenades dels punts traslladats A' , B' i C' ?
23. Les puntes es dissenyen a partir d'un motiu que s'ha anat traslladant a tot el llarg. Dibuixa en el teu quadern un motiu, una flor, una V, un zig-zag... i trasllada-ho component diverses translacions d'un mateix vector de translació. Has dibuixat un fris.
24. Trasllada una figura (per exemple una lletra L) mitjançant la translació de vector $(-4, 5)$ i repeteix el procés amb la figura traslladada emprant el vector $(3, -6)$. Quin moviment utilitzes per anar de la primera figura a l'última? És una translació? Quin és el seu vector?
25. El mosaic del marge està confeccionat utilitzant un motiu mínim que es desplaça per tot el mosaic. Si utilitzes com a motiu mínim l'estel de sis puntes, sense tenir en compte els canvis de color, determina els vectors de translació de dues translacions, una horitzontal i una altra vertical, que mitjançant composicions et permetin tenir la resta del mosaic. Observa que en sumar la translació horitzontal amb la vertical obtens translacions obliqües. Dibuixa en el teu quadern una figura i trasllada-la de forma similar per tenir un mosaic.
26. En edificació s'utilitzen molt les translacions. Pensa en les finestres d'un edifici i tria una. Pots obtenir una altra diferent mitjançant translació? Fes un dibuix que representi aquesta situació.
27. En la façana d'aquesta torre mudèjar de Terol podem veure diferents translacions. En la part superior hi ha dos conjunts de quatre finestretes. Un és traslladat de l'altre. I cada finestreta forma a les altres quatre mitjançant una translació. Si seguim baixant, els dos arcs es traslladen formant altres dos arcs. Observa, en aquest cas totes les translacions tenen un vector de translació horitzontal. Continua descrivint les translacions que veus en el disseny d'aquesta torre.



Un fris a Cambodja



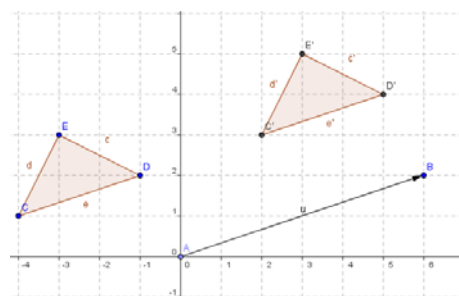
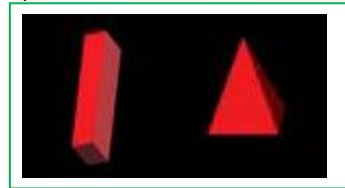
3. GIRS O ROTACIONS

28. Dibuixa en el teu quadern un punt O i un altre punt diferent A . Gira al punt A amb centre en O un angle de 30° en sentit positiu i denomina A' el punt girat.
29. Dibuixa en el teu quadern un punt O i dos segments, un OA que passa per O , i un altre BC que no passa per O . Dibuixa els segments girats OA' i $B'C'$ del gir de centre O i angle 60° .
30. Dibuixa en el teu quadern el triangle de vèrtexs $A(4, 2)$, $B(3, -2)$ i $C(5, 0)$. Dibuixa el triangle que s'obté en girar-ho amb centre en l'origen de coordenades un angle de 90° en sentit positiu. Quines són les coordenades dels vèrtexs A' , B' i C' del triangle girat?
31. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant un gir, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.
32. Dibuixa en el teu quadern dos punts qualssevol P i P' . Troba el seu centre de simetria.
33. Què ocorre en aplicar un gir de 60° a una figura? Hi ha rectes invariants? I en un gir de 180° ? Les rectes que passen pel centre de gir, en quines rectes es transformen? I amb un gir de 0° ? I amb un gir de 360° ?
34. Dibuixa un triangle ABC i el seu simètric $A'B'C'$ respecte un punt O . Com són els seus costats? Són iguals? I els seus angles? Es manté el sentit dels angles? Comprova com és l'angle ABC i l'angle $A'B'C'$. És un moviment directe?
35. Anem a analitzar les lletres majúscules. Indica quines de les següents lletres no tenen simetria central i quines si la tenen, indicant llavors el seu centre de simetria: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, cerques un punt tal que la simetria central de centre en aquest punt deixi invariant a la lletra.
36. Escriu cinc exemples d'objectes de l'espai que girin.
37. Mitjançant un gir en l'espai, en què es transforma un plànel? I una esfera? I un con? I dos plànols paral·lels? I dos plànols ortogonals? Analitza els resultats.

4. SIMETRIES

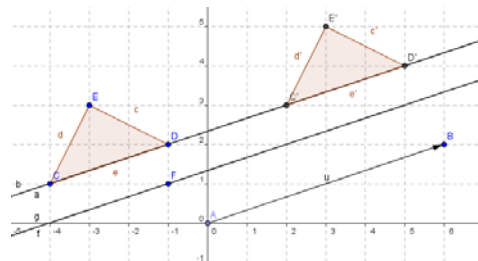
38. Dibuixa en el teu quadern un eix r de simetria oblic, i un punt P . Dibuixa el punt P' simètric respecte de r . Comprova que la recta r és la mediatriu del segment PP' . (Recorda: La mediatriu d'un segment és la perpendicular pel punt mitjà).
39. Dibuixa en el teu quadern dos punts qualssevol P i P' . Dibuixa l'eix de simetria r respecte al que són simètrics.
40. Dibuixa en paper quadriculat una lletra L i un eix de simetria vertical. Dibuixa una L simètrica respecte a aquest eix. Calca una d'elles, i mou el paper de calc per intentar fer-les coincidir. És impossible, perquè la simetria és un moviment invers.

41. Dibuixa en el teu quadern una figura. Dibuixa un eix de simetria oblic i dibuixa la figura simètrica.
42. Troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'eix d'ordenades del triangle $A(3, -4)$, $B(5, 6)$, $C(-4, 5)$. El mateix respecte de l'eix d'abscisses.
43. Indica quines de les següents lletres majúscules són simètriques, i si ho són, indica si els seus eixos de simetria són horitzontals o verticals: A, B, D, F, K, M, N, R, T, O, V, W, Z.
44. Amb ajuda de paper quadriculat, transforma mitjançant una simetria, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza la resposta.
45. Dibuixa un rectangle $ABCD$. Dibuixa l'eix de simetria que transforma AB en CD , i l'eix de simetria que transforma AD en BC .
46. Dibuixa un hexàgon regular i dibuixa els seus eixos de simetria. Quants té? Té 6. Descriu-los.
47. Dibuixa un pentàgon regular i els seus eixos de simetria. Quants té? Descriu-los.
48. Reprodueix en el teu quadern la figura P del marge.
- Dibuixa l'ocell P' simètric respecte a l'eix d'ordenades.
 - Dibuixa l'ocell P'' simètric respecte a l'eix d'abscisses.
 - Existeix alguna simetria axial que transformi P' en P'' ? Existeix alguna simetria central que transformi P' en P'' ?
 - Si el bec de l'ocell P tingués unes coordenades $(-2, 5)$, quines coordenades tindria el bec de l'ocell P' ? I el de l'ocell P'' ?
49. Dibuixa en el teu quadern dos eixos de simetria paral·lels i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a aquesta lletra, comprovant que la composició d'elles és una translació i determina el vector de translació.
50. Dibuixa en el teu quadern dos eixos de simetria secants i una lletra F. Dibuixa la composició d'ambdues simetries a aquesta lletra, comprovant que la composició d'elles és un gir i determina el centre i l'angle de gir.
51. Si apliquem una simetria a una figura, quina transformació hem d'aplicar-li per obtenir la figura inicial?
52. La composició de dues simetries planes d'eixos secants és un gir. Com han de ser els eixos perquè sigui un gir de 180° (o una simetria central)?
53. Escribe cinc objectes que estiguin al teu al voltant que siguin simètrics i indica el seu plànol de simetria. Mira a l'aula i busca simetries. Són simètriques les cadires, el llum, la finestra, les taules...? Quin és el seu plànol de simetria?
54. Defineix els plànols de simetria i els eixos de rotació de les següents figures:
- Un prisma recte de base quadrada. I si és oblic?
 - Una piràmide recta de base quadrada.
 - Si el prisma i la piràmide són rectes, però les seves bases són rectangles, quines simetries es mantenen?
55. Determina els plànols de simetria i els eixos de rotació d'aquestes figures:
- Un prisma recte la base del qual és un triangle equilàter.
 - Una piràmide recta de base un triangle equilàter. I si és obliqua?
 - Si el prisma i la piràmide són rectes però de base un triangle isòsceles, quines simetries es mantenen?
56. Mitjançant una simetria especular, en què es transforma un plànol? I una esfera? I un con? I dos plànols paral·lels? I dos plànols ortogonals? Analitza els resultats.
57. Quins són els punts invariants d'una simetria axial? I les rectes invariants?
58. Utilitza Geogebra per estudiar vectors i translacions.
- En un arxiu de Geogebra **Visualitza** els eixos, la quadrícula i la finestra algebraica.
 - Amb l'eina **Nou Punt** defineix l'origen de coordenades com a A i el punt de coordenades $(6, 2)$ com a B . i amb l'eina **Vector entre dos punts** determina el vector u d'origen A i extrem B que tindrà coordenades $(6, 2)$.
 - Defineix amb **Nou Punt** $C(-4, 1)$, $D(-1, 2)$ i $E(-3, 3)$ i amb **Polígon** dibuixa el triangle que té per vèrtexs aquests punts.
 - Observa que els punts que has dibuixat apareixen en la finestra algebraica com a objectes lliures i el triangle com a objecte dependent.
 - Utilitza l'eina **Translació segons un vector** per traslladar el triangle CDE segons el vector u , s'obté el triangle $C'D'E'$.
- Quin tipus de quadrilàters són els polígons $ACC'B$, $ADD'B$ i $AEE'B$?



59. Comprova en la finestra algebraica que:

- Les coordenades dels punts C' , D' i E' s'obtenen respectivament en sumar a les coordenades dels punts C , D , i E les coordenades del vector u .
 - La longitud de cada costat del triangle és la mateixa que la del seu traslladat i les àrees dels triangle CDE i $C'D'E'$ coincideixen
- Dibuixa amb **Recta que passa per 2 punts**, la recta A que passa pels punts C i D i comprova, amb l'equació de la recta, que C' i D' estan en la mateixa recta.
 - Trasllada ara la recta a segons el vector u , apareix, denominada b , la mateixa recta.
 -  Quina propietat té la recta a perquè romangui invariant mitjançant la translació? Una conjectura és que la recta a és paral·lela al vector u .
 - Per comprovar la conjectura defineix un **Nou Punt** $F(-1, 1)$ i amb **Recta paral·lela** dibuixa una recta f que passi per F i paral·lela al vector u .
 - Trasllada la recta f segons el vector u i veuràs que apareix la recta g que coincideix amb ella. Dibuixa altres rectes paral·leles al vector u i comprova que la translació les deixa invariants.
 - Mou amb el punter el punt B , perquè el vector u tingui diferent adreça i observa com la recta a ja no té la mateixa adreça que el vector u i la seva traslladada, la recta b , és diferent i paral·lela a ella, no obstant això la recta f té la mateixa adreça que el vector u i la seva traslladada g coincideix amb ella.



60. Investiga si algun punt del plànol roman invariant mitjançant translacions segons diferents vectors.

61. Quins són els punts invariants d'una simetria axial? I les rectes invariants?

62. Utilitza l'eina **Rotació al voltant d'un punt**, per estudiar els girs en el plànol. Defineix un punt O com a centre de gir, per exemple, el centre de coordenades. Defineix tres punts per determinar amb **Angle** un de 45° .

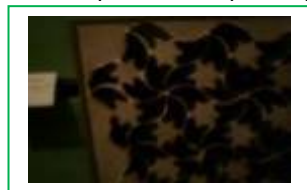
- Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen mitjançant aquest gir.
- Investiga si en realitzar un gir existeixen punts i/o rectes que romanen invariants.

63. Utilitza l'eina **Simetria central** per estudiar la simetria central. Defineix un punt O com a centre de simetria, per exemple, el centre de coordenades.

- Dibuixa rectes i polígons i observa com es transformen per una simetria central.
- Comprova que una simetria central equival a un gir de 180° .
- Investiga si en una simetria central hi ha punts i/o rectes que romanen invariants.

5. MOSAICS, FRISOS I ROSASSES

64. Mira aquest taulell d'un mosaic d'Istanbul. La cel·la unitat és cadascuna de les peces amb la qual es construeix tot el mosaic mitjançant translacions. Indica els vectors de translació. Però pots reduir el motiu mínim. Utilitzant girs? Utilitzant simetries? Mira l'ampliació: Comprova que pots utilitzar com a motiu mínim la vuitena part del taulell.



65. **Anàlisi de mosaics de la Alhambra:** Observa el mosaic del marge. Imagina que és infinit, que completa tot el plànol. Pots prendre com a motiu mínim un parell de fulletes. Per passar d'un parell de fulletes a l'altre parell adjacent, quina transformació has utilitzat? És una simetria? És un gir? Hi ha centres de gir de 60° ? I d' 180° ? I de 30° ?



66. Utilitza una trama de triangles, o dibuixa una en el teu quadern, per dissenyar un mosaic semblat a est. Marca en la trama els centres de girs de 60° , de 180° i de 30° . Dibuixa un motiu mínim senzill, per exemple una poligonal o una fulla, i mou-lo usant aquestes transformacions.

67. [Generació d'un mosaic mitjançant girs i translacions: animació](#). Observa com primer dibuixa una trama de quadrats, dibuixa un motiu mínim format per dos segments, després li aplica isometries a aquest motiu: girs de 90° , amb els quals dibuixa l'estel, que per simetria completa la cel·la unitat a la qual finalment la trasllada per tot el mosaic.

68. També pots veure en la [següent animació](#) com es realitza un estudi del mosaic del marge, buscant la cel·la unitat, el motiu mínim i estudiant els seus girs (de 90° i 180°) i els seus eixos de simetria.

69. Utilitza una trama de quadrats, o dibuixa una en el teu quadern, per dissenyar un mosaic semblant a aquest. Marca en la trama els centres de girs de 90° i de 180° . Marca els eixos de simetria. Dibuixa un motiu mínim senzill, per exemple una poligonal, i mou-lo usant aquestes transformacions. Completa primer la cel·la unitat, i després trasllada-la.



70. Hem format frisos utilitzant les lletres de l'alfabet. Tots ells es formen per translació. Però en ocasions hi ha altres isometries.

L1. LLLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbbpbpb, L7. pqdbpqdbp

a) En quins hi ha una simetria d'eix horitzontal.

b) En quins hi ha girs de 180° .

c) En quins hi ha simetries d'eix vertical?

d) Hi ha simetries amb lliscament?

e) Assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es perllongui fins a l'infinit).

71. Surt al carrer o a casa teva i busca frisos. Fotografia reixes, puntes i greques... i fes un estudi dels diferents frisos que trobis. Dibuixa en el teu quadern el seu disseny i intenta classificar-los segons l'esquema de les lletres del problema anterior, segons les transformacions que utilitzin. Per a això fes-te les següents preguntes:

1) Té girs? Si la resposta és NO, llavors:

2) Té simetria horitzontal? Si la resposta és SI, és un L4, que com el fris format per la lletra C o la lletra D, no té girs i si té simetria d'eix horitzontal. Si la resposta és NO, llavors:

3) Té simetria vertical? Si la resposta és SI, és un L3, com el fris format per la lletra V o la lletra A, que no té ni girs, ni simetria horitzontal i si té simetria vertical. Si la resposta és NO, llavors:

4) Té simetria amb lliscament? Si té és un L6, i si no és un L1. Però si té girs pot tenir també simetria horitzontal i és un L5, o tenir simetria amb lliscament i ser un L7, o només tenir el gir i ser un L2, com el fris format per la lletra N o la lletra S.

72. En els frisos de la dreta assenyala totes les famílies de simetries respecte a un eix, de girs i de translacions per les quals un punt del fris es transforma en un altre punt del mateix (suposat que es perllongui fins a l'infinit).

73. **Anàlisi de tapaboques:** Observa els següents tapaboques. Indica, per a cadascun d'ells, les següents qüestions:

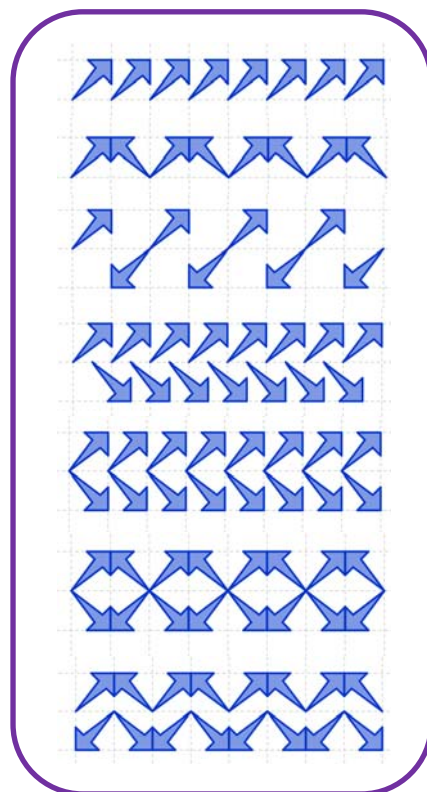


a) Té simetria central.

b) Té eixos de simetria axial. Quants?

c) Té centre de gir, quin és el menor angle de gir que ho deixa invariant?

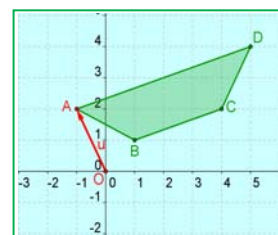
d) Surt al carrer i fotografia o dibuixa els tapaboques que vegis i et semblin interessants. Fes un estudi d'ells.



EXERCICIS I PROBLEMES.

Translació

1. Dibuixa en el teu quadern un paral·lelogram sobre un sistema de referència i una quadrícula. Tens quatre segments orientats. Determina les coordenades dels vectors sobre aquests segments. Quins tenen les mateixes coordenades?
2. Tenim els punts $A(0, 5)$, $B(3, 6)$, $C(4, -2)$ i $D(7, 3)$. Calcula les coordenades dels vectors $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BA}$.
3. Determina el vector de translació que trasllada el punt $A(3, 7)$ al punt $A'(1, 5)$.
4. Per la translació de vector $\mathbf{u} = (2, 8)$ es trasllada el punt $A(9, 4)$ al punt A' . Quins són les coordenades de A' ?
5. Per la translació de vector $\mathbf{u} = (-3, -1)$ es trasllada el punt A al punt $A'(3, 3)$. Quins són les coordenades de A ?
6. Trasl·ladem la circumferència de centre $C(5, 2)$ i radi 3 unitats amb la translació de vector $\mathbf{u} = (-5, -2)$. Determina el centre i el radi de la circumferència traslladada.
7. Dibuixa en el teu quadern uns eixos de coordenades i en ells un quadrat de costat 2 unitats al que anomenes C , li apliques una translació segons el vector $\mathbf{u} = (4, 1)$ i anomenes C' al seu traslladat. Ara apliques a C' una translació segons el vector $\mathbf{v} = (-2, 4)$. La isometria que transforma C en C'' , és una translació? Escriu les coordenades del seu vector. Mitjançant aquesta translació, en quin punt es transforma l'origen de coordenades?
8. El vèrtex inferior esquerre d'un quadrat és $A(3, 1)$ i el vèrtex superior esquerre és $B(1, 3)$. Li apliques una translació de vector $\mathbf{u} = (-2, 4)$, quins són les coordenades dels quatre vèrtexs del quadrat transformat?
9. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al trapezi de la figura la translació de vector $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$. Determina les coordenades dels punts transformats de $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$, $C(4, 2)$ i $D(5, 4)$ per aquesta translació.
10. Aplica la translació de vector $\mathbf{u} = (-3, 4)$ al triangle ABC de vèrtexs $A(3, 1)$, $B(4, 4)$, $C(6, 5)$, i calcula les coordenades del triangle transformat.
11. Dibuixa en el teu quadern un cercle de centre l'origen i radi 2 unitats.
 - a) Trasl·lada-ho amb la translació de vector $\mathbf{u} = (3, 0)$.
 - b) Trasl·lada-ho després mitjançant la translació de vector $\mathbf{v} = (0, 4)$.
 - c) Indica les coordenades del centre del segon cercle traslladat.
 - d) Indica les coordenades del traslladat del punt $(0, 2)$ en aplicar-li cadascuna de les dues translacions.
12. Trasl·ladem el triangle ABC de vèrtexs $A(6, 1)$, $B(-3, 4)$ i $C(0, 8)$, mitjançant la translació de vector $\mathbf{u} = (7, 1)$, i després mitjançant la translació de vector $\mathbf{v} = (2, 8)$. Determina les coordenades del triangle transformat analíticament i gràficament.
13. La composició de dues translacions té per vector $(5, 9)$. Si una d'elles és la translació de vector $\mathbf{u} = (7, 3)$, quins components té l'altre vector de translació?
14.
 - a) Dibuixa en el teu quadern un triangle ABC i trasllada-ho 5 cm a la dreta. Denomina $A'B'C'$ al triangle obtingut.
 - b) Trasl·lada $A'B'C'$ ara 4 cm cap amunt i denomina $A''B''C''$ al nou triangle.
 - c) Dibuixa el vector que permet passar directament del triangle ABC a l' $A''B''C''$ i mesura la seva longitud. Quines són les seves coordenades?
15. Determina el vector de translació de la translació inversa a la de vector $\mathbf{u} = (-2, 5)$.
16.
 - a) Dibuixa en el teu quadern una figura, i repeteix el dibuix traslladant la figura 4 vegades amb la mateixa translació. En fer-ho, dibuixaràs un fris.
 - b) Un fris confeccionat amb lletres L és: L L L L L. Dibuixa un fris confeccionat amb lletres J. Un altre confeccionat amb lletres M. A més de translació, té simetries?
 - c) Busca un fris. Mira les reixes del teu carrer, un brodat o una punta, les greques d'uns taulells... i dibuixa el seu disseny en el teu quadern.
17. Mitjançant una translació en l'espai, en què es transforma un plànot? I una esfera? I un con? I dos plànols paral·lels? I dos plànols ortogonals? Analitza els resultats.

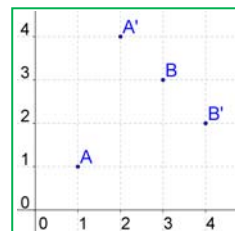
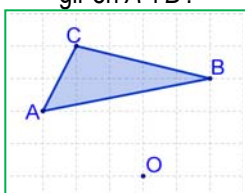


Girs

18. Dibuixa en el teu quadern el punt $A(5, 4)$. Indica les coordenades del punt A' que s'obté en girar 180° i amb centre l'origen el punt A . Indica les coordenades del punt A'' obtingut en girar A' 90° amb el mateix centre de gir.
19. Dibuixa una figura en el teu quadern, calca-la, retalla-la i pega-la inclinada al costat de la inicial. Les dues figures, tenen totes les longituds iguals?, i els seus angles? Determina, amb compàs i transportador, el centre i l'angle de gir.
20. Dibuixa en el teu quadern una lletra F i la lletra F girada 30° amb centre de gir el seu punt més inferior.
21. Dibuixa en el teu quadern un triangle rectangle isòsceles i amb centre en el vèrtex d'un dels angles aguts aplica-li un gir de 45° en sentit positiu. Després aplica-li un altre gir de 45° , i així successivament fins a arribar al triangle inicial. Quins girs has estat fent?
22. Dibuixa en el teu quadern un cercle de centre O , dos diàmetres perpendiculars AB i CD i una corda CB . Sobre el mateix dibuix traça les figures obtingudes fent girar la figura formada pels dos diàmetres i la corda, amb girs de centre O i angles

45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° i 315°. Hauràs fet la composició de girs de 45° diverses vegades.

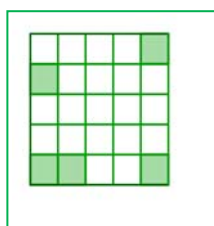
23. La lletra H té centre de simetria? Indica tres objectes quotidians que tinguin simetria central.
24. Sobre uns eixos cartesianes representa els punts $A(2, 6)$, $B(-2, 5)$, $C(5, 3)$ i els seus simètrics respecte a l'origen A' , B' i C' . Quines coordenades tenen A' , B' i C' ?
25. Dibuixa en el teu quadern el triangle de vèrtexs $A(3, 7)$, $B(5, -5)$ i $C(7, 2)$. Dibuixa el triangle que s'obté en girar-lo amb centre en el punt $D(8, 8)$ un angle de 180°. És una simetria central. Quines són les coordenades dels vèrtexs A' , B' i C' del nou triangle?
26. Dibuixa en un sistema de referència un punt P i el seu simètric P' respecte de l'origen. Si les coordenades de P són (x, y) , quines són les de P' ?
27. Donat el triangle $A(3, -4)$, $B(5, 6)$, $C(-4, 5)$, troba les coordenades dels vèrtexs del triangle simètric respecte de l'origen.
28. Dibuixa un triangle equilàter ABC i amb centre en el vèrtex A aplica-li un gir d'angle 60°. El triangle donat i el transformat, quina figura formen? Torna a aplicar al triangle transformat el mateix gir de centre A , quins girs has estat fent? Quants girs has d'aplicar al triangle inicial perquè torni a ocupar la posició inicial?
29. Dibuixa en el teu quadern els quatre punts de la figura. Determina, amb regla, compàs i transportador, el centre i l'angle de gir sabent que els punts A i B s'han transformat mitjançant un gir en A' i B' .



30. Dibuixa la imatge que resulta d'aplicar al triangle de la figura el gir de centre O que transforma el punt A en el punt B .
31. Utilitza un transportador d'angles, regla i compàs, per girar una recta 60° respecte a un punt O exterior a ella (és suficient girar dos punts d'aquesta recta). Mesura els angles que formen les dues rectes, la inicial i la girada. Observes alguna regularitat? Investiga un mètode per girar una recta transformant un sol punt. Quin punt has de triar i per què?

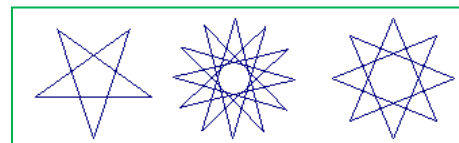
32. **Joc per a dos jugadors:** Forma sobre la taula un polígon regular utilitzant monedes (o fitxes o boletes de paper) com a vèrtexs. Alternativament cada jugador retira o una moneda o dues monedes adjacents. Guanya qui retiri l'última moneda. (**Ajuda:** És un joc d'estratègia guanyadora que pots descobrir utilitzant la simetria central).
33. En el disseny d'aquest mosaic s'han utilitzat girs en el plànol. No ho veiem complet, però podem imaginar que fos infinit. Indica els centres de gir que vegis. En el centre de la figura hi ha un centre de gir claríssim, de quin angle? Hi ha girs de 45°? Quins són els seus centres de gir? Hi ha centres de simetria? Indica'ls.
34. Per a cadascun dels següents polígons indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixen invariants a cadascun d'ells:

a) Pentàgon regular	b) Hexàgon regular	c) Decàgon regular
d) Triangle equilàter	e) Rectangle	f) Quadrat
g) Rombe	h) Paral·lelepípede	i) Octògon regular
35. Indica si el mosaic de l'Alhambra del marge té centre de gir, i determina quin és el menor angle de gir que fa que el mosaic se superposi (sense tenir en compte els canvis de color). Hi ha centres de simetria?

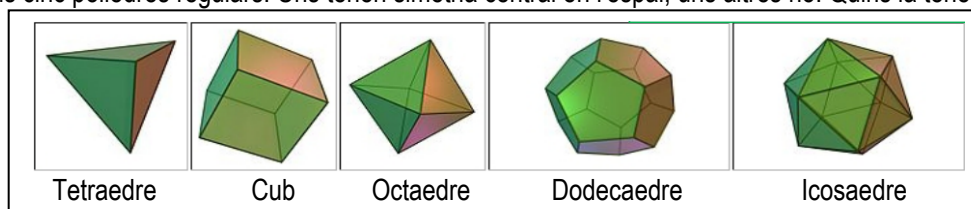


36. Amb ajuda de paper quadriculat transforma mitjançant una simetria central, una recta, una circumferència, un segment, un triangle, dues rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. En què es transformen? Analitza els resultats.
37. Quin nombre mínim de quadrats és necessari pintar de verd perquè el quadrat gran de l'esquerra tingui un centre de simetria?
38. Hem girat el punt $A(3, 5)$ i hem obtingut el punt $A'(7, -2)$. Determina el centre de gir i l'angle utilitzant regla, compàs i transportador d'angles.

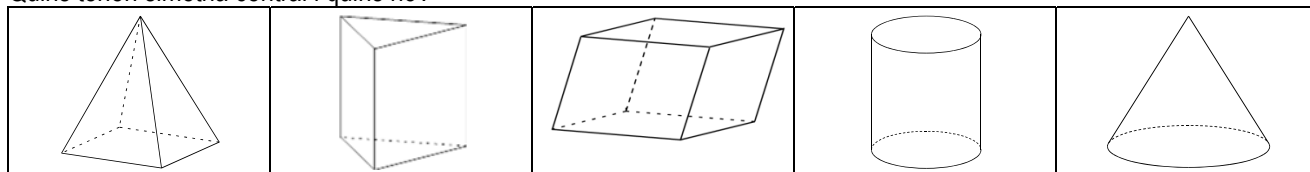
39. Quins dels polígons estrellats de la figura del marge tenen centre de simetria? Indica el centre de gir i el mínim angle de gir que deixa invariants a cadascun d'ells.
40. Determina tres objectes quotidians que tinguin algun eix de gir.
41. En la simetria central de centre $(2, 3)$ hem vist que el simètric del punt $A(8, 1)$ és el punt $A'(-4, 5)$. Calcula els simètrics dels punts $B(12, 7)$, $C(9, 10)$, $D(5, 8)$ i $E(7, 6)$.
42. Observa aquesta torre mudèjar de Terol. Està dissenyada utilitzant girs en l'espai. Quin és el seu eix de gir? I l'angle de gir?



43. Pensa en els cinc poliedres regulars. Uns tenen simetria central en l'espai, uns altres no. Quins la tenen?



44. Pensa ara en els següents cossos geomètrics: Una piràmide quadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboïdal oblic, un cilindre i un con. Quins poden formar-se mitjançant girs en l'espai? Quin és el seu eix de gir? Quins tenen simetria central i quins no?



Simetries

45. Dibuixa en el teu quadern un sistema de referència i una lletra B. Dibuixa la lletra simètrica de B respecte de l'eix d'abscisses i respecte de l'eix d'ordenades.

46. Classifica les lletres majúscules de l'alfabet.

- les que són simètriques respecte d'un eix de simetria horitzontal i un eix de simetria vertical.
- les que només són simètriques respecte d'un eix de simetria vertical,
- les que només ho són respecte de l'eix de simetria horitzontal,
- les que no tenen cap eix de simetria.

e) Comprova que les lletres que tenen dos eixos de simetria tenen centre de simetria. La raó ja la saps: La composició de dues simetries d'eixos secants és un gir.

47. Quines de les següents successions de lletres tenen un únic eix de simetria? Quines tenen dos eixos? Quines cap? Quines tenen centre de simetria?

- ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica els eixos de simetria de les següents figures:

- Quadrat b) Triangle equilàter. c) Trapezi isòsceles. d) Hexàgon.
- Circumferència. f) Rectangle. g) Rombe. h) Pentàgon.

49. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2, 4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos paral·lels, la primera respecte a l'eix r i la segona respecte a l'eix s .

- Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per aquesta composició de simetries.

Si anomenem C al quadrilàter inicial, C' al seu simètric respecte a l'eix r i C'' al simètric de C' respecte a l'eix s :

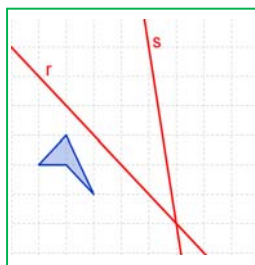
- Quina isometria ens permet transformar directament C en C'' .

- Quins elements la defineixen?

- Què ocorre si apliquem les dues simetries en diferent ordre, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix r ? Quina isometria tenim ara? Quins elements la defineixen?

Quines són ara les coordenades dels vèrtexs de la figura C''' transformada?

50. Considera que els vèrtexs del quadrilàter de la figura tenen de coordenades: (1, 3), (2, 3), (3, 2) i (2, 4). Aplica-li dues simetries axials d'eixos secants, la primera respecte a l'eix r i la segona respecte a l'eix s .



- Indica les coordenades dels vèrtexs de les figures transformades per la composició de simetries.

- Si anomenem C al polígon inicial, C' al simètric respecte a l'eix r i C'' al simètric de C' respecte a l'eix s : Quina isometria ens permet transformar directament C en C'' . Quins elements la defineixen?

- Què ocorre si apliquem les dues simetries en diferent ordre, primer respecte a l'eix s i després respecte a l'eix r ? Quina isometria tenim ara? Quins elements la defineixen?

- Indica les coordenades dels vèrtexs de la figura transformada si primer apliquem la simetria d'eix s i després la d'eix r .

51. Dibuixa en un paper el contorn d'una figura irregular, en almenys cinc posicions. (Si no se t'ocorre cap figura, dibuixa una lletra G).

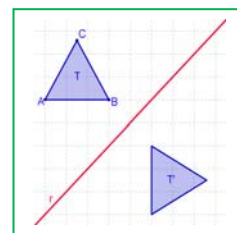
- Són iguals aquestes figures? Explica el teu raonament.

- Com pots passar d'una figura a una altra?

c) Acoloreix amb el mateix color totes les figures que pots aconseguir des de la posició inicial, desplaçant la figura sense aixecar-la. Utilitza un altre color per a les restants.

Es pot passar sempre d'una figura a una altra del mateix color, lliscant la figura sense donar-li la volta? Canvien les dimensions de la figura?

52. El triangle equilàter T de la figura s'ha transformat en el triangle T' mitjançant una simetria axial d'eix r . a) Copia el dibuix en el teu quadern i assenyala en el dibuix a A' , B' i C' , que són els transformats de A , B i C respectivament. b) Troba un gir que transformi T en T' , indicant el centre i l'angle de gir, quins són ara els transformats dels vèrtexs A , B i C ?



53. **Llibre de miralls:** Utilitza un llibre de miralls per obtenir simetries. Pots construir un amb dos rectangles de metacrilat units amb cinta d'embalar. Mira pel llibre de miralls un segment, una circumferència, diferents figures...

Problemes

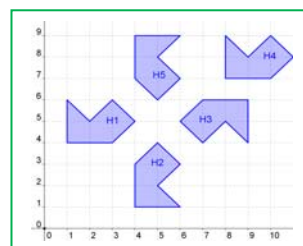
54. Indica els punts invariants i les rectes invariants en cadascun dels següents moviments.

- Una translació segons el vector $(1, 3)$.
- Una simetria axial respecte a l'eix d'ordenades.
- Una simetria central respecte al centre de coordenades.

55. En la figura adjunta l'hexàgon 1, denominat $H1$, ha canviat de posició mitjançant moviments.

- Indica el tipus de moviment: translació, gir o simetria que transforma $H1$ en cadascun dels altres hexàgons.

b) Determina, en cada cas, els elements bàsics que defineixen cada transformació indicant les coordenades de cadascun dels vèrtexs d' $H1$ quines coordenades té en cadascun dels transformats, i si és possible, generalitza.



56. Sabem que les translacions no deixen cap punt invariant, però,

- deixa alguna recta invariant?
- La simetria central deixa un punt invariant, el centre, però, quines rectes deixa invariants una simetria central en el pla? I una simetria central en l'espai?
- Una simetria axial deixa invariants tots els punts del seu eix, que és una recta invariant de punts invariants, però quines altres rectes invariants deixa una simetria axial? I quins altres punts?
- Una simetria especular, en l'espai, deixa un pla invariant de punts invariants, el pla de simetria, quins altres plans deixa invariants? Quines altres rectes? Quins altres punts?

57. Còpia en el teu quadern i completa les següents taules:

Taula I: En el pla	Punts invariants	Rectes invariants	Rectes invariants de punts invariants
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria axial			
Simetria amb lliscament			

Taula II: En l'espai	Punts invariants	Rectes invariants	Plans invariants
Translació			
Simetria central			
Gir			
Simetria especular			
Simetria amb lliscament			

58. Dibuixa el triangle T de vèrtexs $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ i $C(1, 3)$

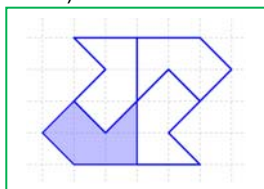
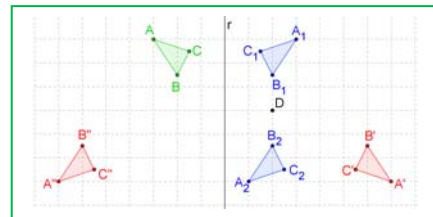
- Aplica a T una translació segons el vector $u = (-3, 2)$, anomena T' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.
- Dibuixa el triangle T'' que resulta d'aplicar a T un gir de 270° respecte a l'origen de coordenades i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

59. Dibuixa el quadrat K de vèrtexs $A(2, 1)$, $B(4, 2)$, $C(1, 3)$ i $D(3, 4)$.

- Aplica a K una translació segons el vector $u = (-3, -1)$, anomena K' al seu transformat i indica les coordenades dels seus vèrtexs.
- Dibuixa el quadrat C'' que resulta d'aplicar a C una simetria central respecte al punt $(3, 0)$ i indica les coordenades dels seus vèrtexs.

Problemes d'ampliació

60. Transforma la lletra L mitjançant dues isometries consecutives. Pots obtenir el resultat final mitjançant una única isometria? Analitza possibles situacions.
61. Plega una tira de paper com un acordió. Fes alguns talls i desplega-la. Hauràs confeccionat un fris. Assenyalat en ell totes les isometries. Assaja altres dissenys de frisos.
62. La composició d'isometries no és commutativa. Observa la figura adjunta:
- Determina la isometria que transforma el triangle ABC en $A_1B_1C_1$ i la que transforma aquest en $A_2B_2C_2$
 - Indica la isometria que transforma el triangle ABC en $A'B'C'$ i la que transforma aquest en $A''B''C''$.
 - Quina conclusió obtens?



63. Indica les isometries que cal aplicar a la figura acolorida en blau per obtenir la figura completa. Determina els elements que defineixen cada isometria. Acoloreix de diferent color cadascun dels quatre polígons i construeix un fris.

64. 1) La lletra A té un eix de simetria vertical. 2) La lletra H té dos eixos de simetria, un de vertical i l'altre horitzontal, a més d'un centre de simetria. 3) La lletra Z té centre de simetria, però cap eix de simetria. 4) La lletra E té un eix de simetria horitzontal. 5) La lletra F no té centre de

simetria ni cap eix de simetria. Classifica les lletres de l'abecedari en aquests grups, en el primer grup estaran les que tenen un eix de simetria vertical, com la lletra A, en el segon les que tenen dos eixos de simetria, un de vertical i l'altre horitzontal, com la lletra H, en el tercer les que només tenen centre de simetria com la lletra Z, i al quart les que com la lletra E tenen un eix de simetria horitzontal. Finalment, en un cinquè grup les que no tenen cap tipus de simetria com la lletra F.

65. **Anàlisi d'un mosaic:** Dibuixa en el teu quadern una trama de triangles, en ella un esquema del mosaic del marge i assenyalat en el teu dibuix tots els eixos de simetria, els centres de gir i els vectors de translacions pels quals el transformat d'un punt del mosaic (suposat que es perllonga fins a l'infinit) és també un punt del mosaic.

- Hi ha girs de 60° ? Si n'hi ha, marca els centres d'aquests girs amb un asterisc *.
- Hi ha girs de 180° ? Si n'hi ha, marca els centres d'aquests girs amb un cercle o.
- Assenyalat els eixos de simetria que trobis amb una línia de punts.
- Dibuixa al marge els vectors de translació, horitzontals i verticals, que hi hagi.
- Dissenya el teu propi mosaic que mantingui els mateixos moviments fent alguna cosa senzill (un arc, una poligonal) que es vagi movent.



66. Analitza aquest altre mosaic. Indica les transformacions que hem d'aplicar a l'element mínim del mosaic adjunt per deixar-lo invariant. Indica també els elements que les caracteritzen.

67. En [l'animació](#) següent observa la forma d'obtenir un mosaic. S'ha pres una cel·la unitat de 4 quadradets, s'ha seleccionat un motiu mínim... Indica quines simetries s'ha utilitzat, quins girs i quines translacions.



68. Determina els eixos i centres de simetria de les gràfiques de les següents funcions. Assenyalat quines són parells i quines imparells. (Dibuixa prèviament la seva gràfica).

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetraedre regular té 6 plànols de simetria, dibuixa'ls en el teu quadern i indica la forma de determinar-los.

70. Un octàedre té 9 plànols de simetria, dibuixa'ls, 6 passen pels punts mitjans d'arestes oposades, saps caracteritzar els altres 3? Intenta trobar plànols de simetria en un dodecaedre, i en un icosaedre.

71. Un ésser humà és més o menys simètric. Els mamífers, ocells i peixos també ho són. Tenen un plànol de simetria. A) I els estels de mar com el de la figura, tenen un plànol de simetria? B) Tenen més? Quants? C) Tenen un eix de gir? De quins angles? D) Té simetria central? E) Dibuixa en el teu quadern un estel de cinc puntes i indica els seus eixos de simetria i el seu centre de gir. (És un grup de Leonardo Dà Vinci)



72. Un prisma recte de base un rectangle, té simetria central? Té plànols de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

73. Una piràmide regular de base un triangle equilàter, té simetria central? Té plànols de simetria? Quants? Descriu-los. Té eixos de gir? Descriu-los. De quins angles?

74. Descriu les **isometries** que deixen invariants als següents cossos geomètrics, analitzant els seus elements:

- Esfera
- Cilindre recte
- Prisma regular de base quadrada
- Con
- Cilindre oblic
- Piràmide recta de base un triangle equilàter

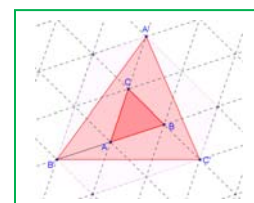
75. Retalla un triangle isòsceles obtusangle. Col·loca-ho en el llibre de miralls de manera que dos costats quedin recolzats en la superfície dels miralls, i l'altre sobre la taula. Mou les pàgines del llibre de manera que vegis diferents piràmides, en les quals la seva base són polígons regulars. Això ens permet estudiar el gir de les piràmides, de quin angle és. (Pots construir-te un llibre de miralls amb dos miralls petits o dues fulles de metacrilat, pegats amb cinta d'embalar adhesiva).
76. Pensa en els poliedres regulars. Copia la següent taula en el teu quadern i completa-la:

POLIEDRE	Té centre de simetria? SI/NO	Té eixos de gir? SI/NO	Quants eixos de gir té? De quins angles?	Té plànols de simetria? SI/NO	Quants plànols de simetria té?
Tetraedre					
Cub					
Octàedre					
Dodecaedre					
Icosàedre					

77. Contesta a les següents preguntes justificant les respostes.

- És possible que una figura tingui dos eixos de simetria paral·lels?
- La intersecció de dos eixos de simetria, és sempre un centre de simetria?
- Per què un mirall canvia la dreta per l'esquerra i no canvia el de dalt pel de baix?
- És cert que dos cercles simètrics respecte a un plànol són sempre talls d'una esfera?

78. A partir d'un triangle qualsevol ABC construïm el triangle $A'B'C'$, en el qual A' és el simètric de A respecte del centre C , B' és el simètric de B respecte del centre A i C' és el simètric de C respecte del centre B . Utilitza la trama de triangles per calcular l'àrea del triangle $A'B'C'$ sabent que el valor de l'àrea del triangle ABC és 1 u^2 .

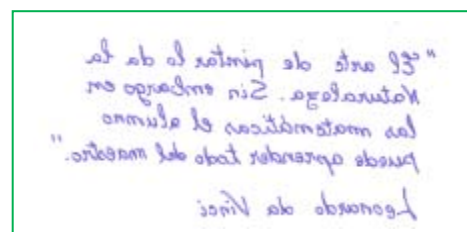


79. **Caleidoscopis dièdrics:** Has mirat alguna vegada per un caleidoscopi? Estan formats per un tub de cartró, dos miralls formant angle i trossets de plàstic o vidres que combinen les seves imatges donant lloc a precioses composicions plenes de simetries. Fabrica'n un, i estudia els girs i simetries que hi observis.

80. Simetries plegant paper:

- Doblega una fulla de paper i retalla una figura. En desplegar hauràs obtingut la figura simètrica.
- Doblega una fulla de paper mitjançant dos plecs perpendiculars. (Hauràs de fer coincidir el plec amb ell mateix). Mantenint el paper doblegat retalla una figura. En desplegar, la figura obtinguda tindrà una doble simetria.
- Amb un altre full de paper, torna a doblegar mitjançant dos plecs perpendiculars. Doblega de nou per la meitat l'angle recte obtingut. Retalla els dissenys que més t'agradin. Estàs construint models de floc de neu. Quants eixos de simetria has obtingut?
- Intenta ara doblegar la fulla de paper per obtenir eixos de simetria que formin angles de 60° i de 30° . Utilitza la teva imaginació per obtenir nous dissenys de flocs de neu.

81. **La simetria en l'escriptura de Leonardo da Vinci:** Sabies que, si mires l'escrit per Leonardo en un mirall pots llegir-ho amb facilitat? És un bon exemple de simetria especular. Llegeix el següent text del Leonardo.



82. Utilitza la propietat de la composició de dues simetries d'eixos secants per demostrar que un angle inscrit en una circumferència és la meitat del central que abasta el mateix arc. *Ajuda:* Traça la circumferència, un angle inscrit i la seva central. Traça dues rectes perpendiculars pel centre de la circumferència als costats de l'angle inscrit.

83. Estudia les isometries que deixen invariant un triangle equilàter. Nomena els seus vèrtexs i els seus eixos de simetria.

- Aplica al triangle un gir de 120° i després una simetria. Pots obtenir el mateix resultat amb una única transformació?
- Repeteix el mateix amb un gir de 240° i una altra simetria.
- Comprova que sempre la composició d'un gir per una simetria és una altra simetria.
- Fes ara un gir de 120° i un altre de 240° , què obtens?
- I amb dos girs de 240° ?
- Comprova que la composició de dos girs del mateix centre és sempre un gir (o la identitat).

84. En passejar per la ciutat, mirar l'aula, en tot el que ens envolta podem veure com la Geometria permet explicar-ho. Mira aquest mosaic. Cerca un motiu mínim, és a dir, un tros de mosaic que et permeti, mitjançant moviments, recompondre-ho. En el disseny d'aquest mosaic, s'han utilitzat simetries?

- Hi ha simetries d'eix vertical?
- Hi ha simetries d'eix horitzontal?
- Hi ha altres eixos de simetria? Quins?
- Hi ha girs de 90° ?
- Hi ha girs de 45° ?



f) Hi ha translacions?

85. Dissenya en el teu quadern un motiu mínim (si no se t'ocorre cap, usa la lletra L), i utilitza les mateixes simetries, girs i translacions que s'usen en aquest mosaic per fer el teu propi disseny de mosaic.

Observa el teu disseny, i respon a les següents preguntes:

- Si compons dues simetries d'eixos paral·lels, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica en el teu disseny de mosaic en quina ocasió has compost dues simetries d'eixos paral·lels i descriu completament el moviment que has obtingut.
 - Si compons dues simetries d'eixos secants, quin moviment obtens? És una altra simetria? És un gir? És una translació? Indica en el teu disseny en quina ocasió has compost dues simetries d'eixos secants i descriu completament el moviment que has obtingut.
86. Mira aquest altre mosaic. És el famós mosaic Nazari dels ossos. No anem a tenir en compte el color. Per dissenyar l'os, dibuixa en el teu quadern un quadrat. Mira la figura. Talla en els costats verticals un trapezi i col·loca-ho sobre els costats horitzontals. Ja tens l'os. És simètric? Té un eix de simetria vertical i un altre horitzontal, per la qual cosa podríem prendre com a motiu mínim la quarta part de l'os.
- Per passar d'un os de color a un os blanc, què transformació s'ha usat?
 - Dibuixa en el teu quadern, en color vermell, eixos de simetria verticals i en color blau, eixos de simetria horitzontals.
 - Assenyala, amb un asterisc, (*), centres de gir de 90° , i amb un cercle, (o), centres de simetria.
 - Utilitzant l'os dibuixa en el teu quadern el mosaic complet.
87. Dibuixa en el teu quadern una lletra F majúscula, i traça també dues rectes m i n que formin un angle de 30° i es tallin en un punt O . Dibuixa el seu transformat per:
- Un gir de centre el punt O i angle 60° .
 - La simetria d'eix n
 - La simetria d'eix m
 - La composició de la simetria d'eix n amb la d'eix m
 - Compara el resultat obtingut en l'apartat a) amb el de l'apartat d). Què observes?



AUTOAVALUACIÓ

- Amb la translació de vector $\mathbf{u} = (-3, 8)$ traslladem el punt $P(5, -4)$ fins al punt P' i les coordenades de P' són:
 - (8, 4)
 - (2, 4)
 - (2, 12)
 - (6, 3)
- En traslladar $A(-1, 8)$ fins a $A'(4, 6)$ s'utilitza el vector $\mathbf{u}$:
 - $\mathbf{u} = (3, 2)$
 - $\mathbf{u} = (3, -2)$
 - $\mathbf{u} = (5, -2)$
 - $\mathbf{u} = (5, 14)$
- La transformació que converteix el punt $A(2, 0)$ en el punt $A'(0, 2)$ **no** pot ser:
 - Un gir de centre l'origen i angle 90°
 - Una translació de vector $\mathbf{u} = (2, 2)$
 - Un gir de centre l'origen i angle 270°
 - Una simetria d'eix $y = x$.
- La transformació identitat també es diu:
 - Simetria central
 - Simetria axial
 - Gir de 180°
 - Translació de vector nul $(0, 0)$
- Com ha de ser un triangle per tenir més de dos eixos de simetria?
 - rectangle
 - isòsceles
 - equilàter
 - rectangle isòsceles
- La simetria central en el pla és un gir de:
 - 360°
 - 180°
 - 90°
 - 0°
- En el pla, la composició de dues simetries d'eixos secants sempre és:
 - una translació
 - un gir
 - una altra simetria
 - la simetria central
- Les coordenades del punt simètric al punt $A(3, 7)$ respecte de l'eix d'ordenades són:
 - $A'(-3, 7)$
 - $A'(3, -7)$
 - $A'(-3, -7)$
 - $A'(7, 3)$
- Indica quina de les següents lletres **no** té simetria central:
 - O
 - H
 - S
 - D
- Sempre s'obté un gir fent successivament:
 - Dos girs de diferent centre
 - Dues simetries d'eixos secants
 - Un gir i una simetria
 - Dues simetries d'eixos paral·lels.

RESUM

Semblança	Transformació geomètrica que conserva els angles i les distàncies són proporcionals.	Un fotocòpia reduïda
Translació	Ve determinada pel seu vector de translació. Són isometries directes. La composició de dues translacions és una translació.	El traslladat del punt $P(1, 2)$ per la translació de vector $\mathbf{v} = (4, 5)$ és $P'(5, 7)$.
Gir o rotació en el plànel Gir en l'espai	Ve determinat pel centre de gir i l'angle de gir. Ve determinat per l'eix de gir i l'angle	El girat del punt $P(1, 2)$ pel gir de centre l'origen i angle 90° és $P'(2, -1)$
Simetria axial Simetria especular	Es coneix pel seu eix de simetria Es coneix pel seu plànel de simetria	El simètric del punt $P(1, 2)$ per la simetria d'eix l'eix d'ordenades és $P'(-1, 2)$
Isometries	Són transformacions geomètriques que conserven les distàncies i els angles.	Translacions, girs i simetries
Composició d'isometries	La composició de dues isometries directes és una isometria directa. La composició de dues isometries inverses és una isometria directa. La composició d'una isometria directa amb una inversa és una isometria inversa.	
Composició d'isometries en el plànel	La composició de dos girs del mateix centre és un gir del mateix centre. La composició de dues simetries és un gir o una translació.	
Elements invariants en el plànel	La translació no deixa cap punt invariant. El gir deixa invariant un punt, el centre de gir. La simetria deixa invariant una recta , l'eix de simetria La identitat deixa invariant tot el plànel.	
Elements invariants en l'espai	La translació no deixa cap punt invariant. La simetria central deixa invariant un únic punt, el centre de simetria. El gir deixa invariant una recta , l'eix de gir. La simetria deixa invariant el plànel de simetria La identitat deixa invariant tot l'espai.	

CAPÍTOL 9: GEOMETRIA EN L'ESPAI. GLOBUS TERRAQUÏ

ACTIVITATS PROPOSADES

1. PERPENDICULARITAT I PARAL·LELISME EN L'ESPAI

1. Cerca a l'habitació en la qual et trobes, exemples de:
 - a. Plànols paral·lels i perpendiculars.
 - b. Rectes paral·leles, rectes perpendiculars i coplanàries, rectes perpendiculars i no coplanàries.
 - c. Recta paral·lela a plànol, recta i plànol secants, recta continguda en plànol.
2. Les fulles d'una porta giratòria formen entre sí 5 angles diedres consecutius i iguals. Quant mesura cadascun d'ells?
3. Des d'un punt interior a una sala de planta hexagonal regular es traça una recta perpendicular a cada paret. Quant mesurarà l'angle que formen dues perpendiculars consecutives?
4. Dos triedres tenen les tres cares iguals, es pot assegurar que són iguals? Raona la resposta.

2. POLIEDRES

5. Investiga si els següents cossos són poliedres i, en cas afirmatiu, si compleixen el teorema de *Euler*. Indica també si són còncaus o convexs



6. És possible demostrar amb un trencaclosques el teorema de Pitàgores en l'espai. Et proposem que ho intentis. Podràs trobar en la revista i entre els recursos per imprimir les peces que t'ajudaran. En la fotografia es mostra el puzzle resolt.
7. És possible construir un prisma còncau triangular? I un prisma còncau regular? Raona les respostes.
8. Entre els poliedres regulars, hi ha algun que sigui prisma? En cas afirmatiu classifica-ho.
9. És suficient que un paral·lelepípede tingui dues cares rectangulars perquè sigui un prisma recte?
10. Dibuixa un prisma pentagonal regular i comprova que compleix la relació de Euler.
11. Una caixa té forma cúbica de 2 dm d'aresta. Quant mesura la seva diagonal?
12. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 10 metres de llarg, 4 metres d'ample i 3 metres d'altura.
13. Classifica els següents poliedres



14. Hi ha alguna piràmide regular que sigui poliedre regular? I piràmides amb cares paral·leles? En cas afirmatiu posa un exemple i en cas negatiu, justifica les teves respostes.
15. Dibuixa una piràmide hexagonal regular i distingeix l'apotema de la piràmide de l'apotema de la base. Dibuixa també el seu desenvolupament.

3. ÀREA LATERAL I TOTAL D'UN POLIEDRE

16. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular regular sabent que les arestes de les bases mesuren 2 cm i cada aresta lateral 8 m.
17. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 63 m^2 i té 7 m d'altura. Calcula el perímetre de la base.
18. El costat de la base d'una piràmide hexagonal regular és de 6 cm i l'altura de la piràmide 10 cm. Calcula l'apotema de la piràmide i la seva àrea total.
19. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seves bases són dos octògons regulars de costats 4 i 7 dm i que l'altura de cada cara lateral és de 8 dm.
20. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2 , calcula l'apotema de la piràmide i la seva altura.



4. COSSOS DE REVOLUCIÓ

21. Una columna cilíndrica té 76 cm de diàmetre i 4 m d'altura. Quina és la seva àrea lateral?
22. El radi de la base d'un cilindre és de 38 cm i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seva àrea total.
23. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seva generatriu mesura 50 dm i el radi de la base 30 dm.
24. La circumferència de la base d'un con mesura 6, 25 m i la seva generatriu 8 m. Calcula l'àrea total.
25. Una esfera té 4 m de ràdio. Calcula: a) la longitud de la circumferència màxima; b) l'àrea de l'esfera.

5. VOLUM D'UN COS GEOMÈTRIC

26. Calcula el volum d'un prisma recte de 12 dm d'altura la base de la qual és un hexàgon de 4 dm de costat.
27. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seva base té 12 cm de diàmetre i que l'aigua aconsegueix 1 dm d'altura.
28. El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 m d'altura i 2 m de diàmetre. Irene ha cridat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit només hi queden 140 litres.
 - a. Quin és, en dm^3 , el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).
 - b. Si el preu del gasoil és de 0,80 € per litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?
29. Comprova que el volum de l'esfera de radi 5 dm sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 10 dm d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 10 dm d'altura i 5 dm de radi de la base.

6. GLOBUS TERRAQUÌ

30. Un avió recorre 20° en direcció Oest al llarg de l'Equador. Si arriba a un punt la longitud del qual és de 170° Est, quines són les coordenades del lloc de partida?
31. Joan surt de la seva casa i recorre 10 Km en direcció sud, 20 Km cap a l'est i 10 Km cap al nord. Si es troba de nou a casa, on està situada la seva casa?
32. En l'esfera terrestre, quin paral·lel mesura més?, quin meridià mesura més? Raona les teves respostes.
33. Busca les coordenades geogràfiques del lloc en el qual vius.



MAPA DE FUSOS HORARIS DE 30 MARÇ 2014 (ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA)

EXERCICIS I PROBLEMES.

Angles poliedres. Paral·lelisme i perpendicularitat. Poliedres: elements i tipus.

1. Si estem en una habitació sense columnes, atenent al sòl i a les seves quatre parets, quants angles diedres es formen?
2. Doblega per la meitat una fulla de paper, construeix un angle diedre i traça el seu rectilini. Podries mesurar l'amplitud de diferents angles diedres mitjançant aquest rectilini?
3. Determina l'amplitud dels angles diedres que formen les cares laterals d'un poliedre que és un prisma recte de base un octògon regular.
4. Dues cares d'un trièdre mesuren 60° i 118° , Entre quins valors pot oscil·lar l'altra?
5. Es pot formar un angle poliedre amb un angle d'un triangle equilàter, dos d'un rectangle i un d'un pentàgon regular?
6. Podrà existir un poliedre regular que les seves cares siguin hexagonals? Raona la resposta.
7. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?
8. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetraedre? I en cadascun dels restants poliedres regulars?
9. Perllonga una parella d'arestes en una piràmide pentagonal, de manera que s'obtinguin rectes no coplanàries.
10. Dibuixa un prisma regular de base quadrada i assenyala: a) dues arestes que siguin paral·leles, b) dues arestes que siguin perpendiculars i coplanàries, c) dues arestes perpendiculars i no coplanàries, d) dues cares paral·leles, e) dues cares perpendiculars.
11. Si un poliedre convex té 16 vèrtexs i 24 arestes, quantes cares té? Podria ser una piràmide? I un prisma?

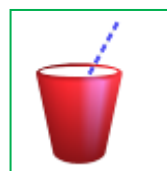
12. Amb 12 varetes de 5 cm de llarg cadascuna, usant totes les varetes quins poliedres regulars es poden construir?
13. D'un prisma sabem que el nombre de vèrtexs és 16 i que el nombre d'arestes és 24, quantes cares té?
14. Classifica els següents cossos geomètrics i indica, quan siguin poliedres, el nombre de vèrtexs, cares i arestes que tenen. Quins compleixen el teorema de Euler?



15. Descriu la diferència entre un prisma recte i un prisma oblic. És suficient que un paral·lelepípede tingui dues cares paral·leles rectangulars perquè sigui un ortoedre?

Teorema de Pitàgores en l'espai

16. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesurin 4 cm, 5 cm i 6 cm que no sigui un ortoedre. Dibuixa també el seu desenvolupament.
17. Si el paral·lelepípede anterior fos un ortoedre, quant mesuraria la seva diagonal?
18. Un tassó de 12 cm d'altura té forma de tronc de con en el qual els radis de les bases són de 5 i 4 cm. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobresurti del tassó almenys 2 cm?
19. És possible guardar en una caixa amb forma de ortoedre d'arestes 4 cm, 3 cm i 12 cm un bolígraf de 13 cm de longitud?
20. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 cm i l'altura del prisma 8 cm.
21. Si un ascensor mesura 1 m d'ample, 1,5 m de llarg i 2,2 m d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 m d'altura?
22. Quin és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 m d'ample, 8 m de llarg i 4 metres d'altura?
23. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seva diagonal mesura 3,46 cm.
24. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases del qual tenen radis 5 cm i 2 cm, i altura 10 cm.



Àrea lateral, total i volum de cossos geomètrics

25. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els següents desenvolupaments:

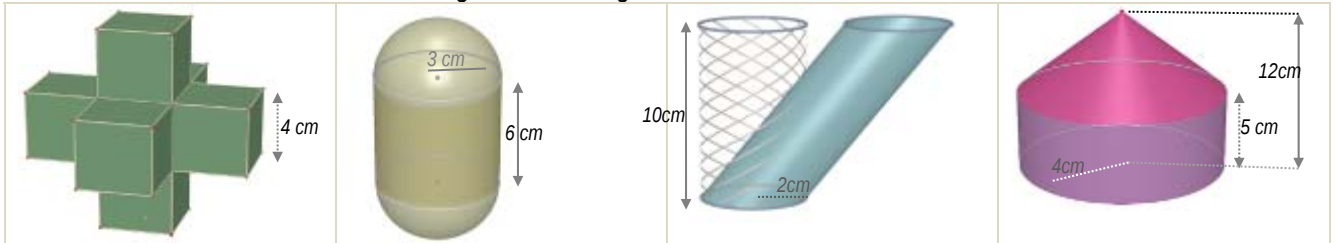


26. Un prisma de 8 dm d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 dm i 4 dm. Calcula les àrees lateral i total del prisma.
27. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tingui 4 cm d'aresta basal i 1 dm d'altura i calcula les àrees de la base i total.
28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm d'altura té una base de 30 cm² d'àrea. Calcula el seu volum.
29. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 3,5 dm, 8,2 dm i 75 cm.
30. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 8 m d'altura i 5 cm de radi de la base.
31. Calcula l'àrea total d'una esfera de 5 cm de radi.
32. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seva àrea lateral és de 120 m² i la seva base és un hexàgon de 5 m de costat.
33. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 32 dm i l'altura de la piràmide és de 4 dm. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.
34. Un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm gira al voltant d'un dels seus catets generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.
35. Tres boles de metall de radis 12 dm, 0,3 m i 4 m es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?
36. Quin és la capacitat d'un pou cilíndric d'1,20 m de diàmetre i 20 metres de profunditat?
37. Quant cartró necessitarem per construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesuri 10 cm i que la seva altura sigui de 25 cm?
38. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 cm de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 cm de costat i 800 cm³ de volum.
39. Quin és l'àrea de la base d'un cilindre d'1,20 m d'alt i 248 dm³ de volum?
40. L'aigua d'una deu es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 12 m de radi de la base i 20 m d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplen

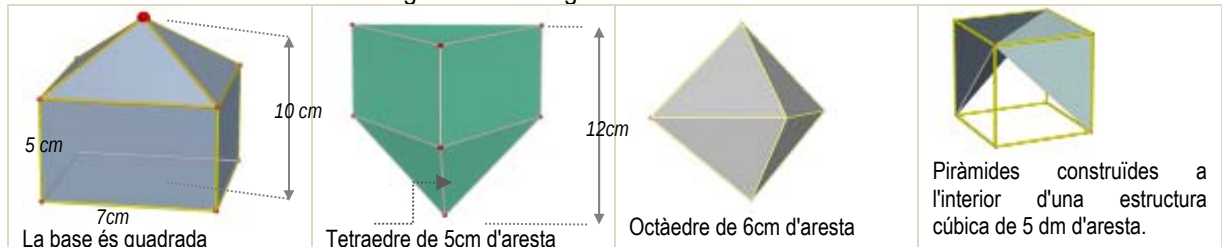


amb cada dipòsit?

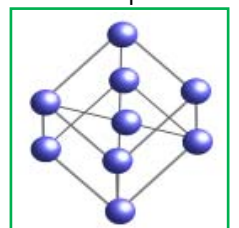
41. Calcula la quantitat de cartolina necessària per construir un anell de 10 tetraedres cadascun dels quals té 2 cm d'aresta.
42. En fer el desenvolupament d'un prisma triangular regular de 8 dm d'altura, va resultar un rectangle d'1 metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.
43. Determina la superfície mínima de paper necessària per embolicar un prisma hexagonal regular d'1 m de costat de la base i 2 m d'altura.
44. L'ajuntament ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior on es diposita la terra, té 80 cm de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 cm. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.
45. Una habitació té forma de ortoedre i les seves dimensions són directament proporcionals als nombres 3, 5 i 7. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 14,5 m.
46. Un ortoedre té 1 dm d'altura i 6 dm² d'àrea total. La seva longitud és el doble de la seva amplària, quin és el seu volum?
47. Si el volum d'un cilindre de 10 cm d'altura és de 314 cm³, calcula el radi de la base del cilindre. (Utilitza 3,14 com a valor de π).
48. Han instal·lat a casa de Juan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m³. (Prendre $\pi=3,14$). b) Quants litres d'aigua caben en el dipòsit?
49. Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 cm de costat. a) Quin és, en cm³, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.
50. Una circumferència de longitud 2,24 cm gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum. (Prendre $\pi=3,14$).
51. Una porta fa 2 m d'alt, 80 cm d'ample i 4 cm d'espessor. El preu d'instal·lació és de 200 € i es cobra 6 € per m² en concepte de vernissat, a més del cost de la fusta, que és de 300 € cada m³.
a) Calcula el volum de fusta d'una porta.
b) El cost de la fusta d'una porta més la seva instal·lació.
c) El cost del vernissat de cada porta, si només es cobra el vernissat de les dues cares principals.
52. L'aigua continguda en un recipient cònic de 18 cm d'altura i 24 cm de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 10 cm de diàmetre. Fins a quina altura arribarà l'aigua?
53. Segons Arquímedes quines dimensions té el cilindre circumscribit a una esfera de 5 cm de radi que té la seva mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.
54. Quin és el volum d'una esfera en la qual una circumferència màxima mesura 31,40 m?
55. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



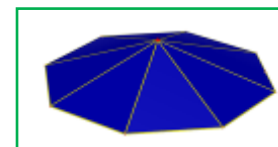
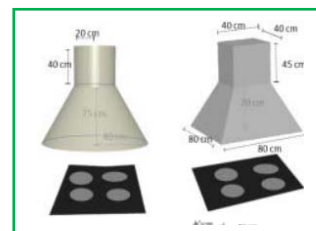
56. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



57. En la construcció d'un globus aerostàtic de radi de 2,5 m s'empra lona que té un cost de 300 €/m². Calcula l'import de la lona necessària per a la seva construcció.
58. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm³ de volum.
59. El Atomium és un monument de Brussel·les que reproduïx una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitem?



60. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2 €/dm², quants diners ha costat en total?
61. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.
- Quants litres d'aigua són necessaris per omplir-la?
 - Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/m²?
62. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?
63. En un recipient cilíndric de 8 dm de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,3 metres el nivell de l'aigua?
64. El preu de les teules és de 14,30 €/m². Quant costarà reteular un habitatge la teulada del qual té forma de prisma quadrangular regular de 4 metres d'altura i 8 metres de costat de la base?
65. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?
66. Cadascun dels cubs de la figura té 2 cm d'aresta. Quants cal afegir per formar un cub de 216 cm³ de volum?
67. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert en la part superior i rematat per una semiesfera en la inferior. Si el radi de la base és d'1,5 cm i l'altura total és de 15 cm, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.
68. El cristall d'un fanal té forma de tronc de con de 50 cm d'altura i bases de radis 20 i 30 cm. Calcula la seva superfície.
69. Un pot cilíndric de 10 cm de radi i 40 cm d'altura té en el seu interior quatre pilotes de radi 3,5 cm. Calcula l'espai lliure que hi ha en el seu interior.
70. Construïm un con amb cartolina retallant un sector circular de 120° i radi 20 cm. Calcula el volum del con resultant.
71. Un embut cònic de 20 cm de diàmetre ha de tenir 2 litres de capacitat, quina serà la seva altura?
72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 25 cm de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després d'un quart d'hora?
73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular d'1 m d'altura i 45 cm de costat de la base. Es fixa un pal en el sòl en el qual s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl d'1,80 m. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quin espai d'ombra determina?
74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'omple amb 56 litres d'aigua. Si té 48 cm de llarg i 36 cm d'ample, quin és la seva profunditat?
75. Si s'enrotlla una cartolina rectangular de costats 30 cm i 25 cm de les dues formes possibles, quin dels dos cilindres resultants té major volum?
76. Un rectangle d'1 m de base i 10 m d'altura gira 360° al voltant d'una recta paral·lela a l'altura, que està situada a 2 m de distància. Calcula la superfície i el volum del cos que resulta.
77. En un gelat de cucurutxo la galeta té 15 cm d'altura i 5 cm diàmetre. Quina és la seva superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobresurt una semiesfera perfecta, quants grams de gelat conté?



Fusos horaris

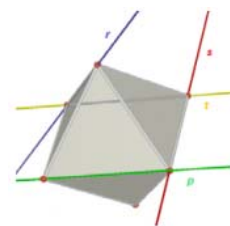
78. Quina diferència de longitud existeix entre dues ciutats si la diferència horària entre ambdues és de 5 hores? Podem saber si existeix diferència entre les seves latituds?
79. Un avió emprèn viatge cap a una imaginària ciutat situada a l'oest de Palma. El viatge dura 10 hores i el seu rumb manté en tot moment la latitud de partida. Si la diferència de longitud entre Palma i la ciutat d'arribada és de 45° i l'avió surt de l'aeroport Son Sant Joan a les 9 del matí. A quina hora local aterrarà a la ciutat de destinació?
80. La distància entre Londres i Pequín és de 8149 Km i la distància entre Londres i Sao Paulo és de 9508 Km, no obstant això a Pequín el rellotge marca 7 hores més que a Londres i en Sao Paulo 3 hores menys que a Londres. Com expliques aquesta diferència?

CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0°	51° 30' latitud N
PEKIN	116° longitud E	40° latitud N
SAO PAULO	46° 30' longitud W	23° 30' latitud S

AUTOAVALUACIÓ

1. Cadascuna de les rectes r , s , t i p passa per dos vèrtexs consecutius d'un octàedre tal com s'observa en la figura. Assenyala quina afirmació de les següents és vertadera:

- Les rectes r i s són coplanàries i assecants.
- Les rectes t i p no són coplanàries.
- Les rectes r i p es creuen.
- r i s contenen arestes d'una mateixa cara de l'octàedre



2. Observa els següents cossos geomètrics i selecciona l'opció vertadera:

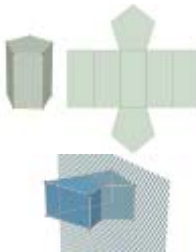
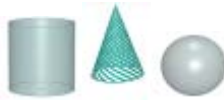
I)	II)	III)	IV)	V)	VI)

- Els cossos I), II), IV) i V) compleixen la relació de Euler.
 - Hi ha dos cossos de revolució III) i VI).
 - Són poliedres regulars II) i IV).
 - Són còncaus I) i V).
3. Si l'altura d'un prisma de base quadrada és 10 cm i el costat de la base és 4 cm, la seva àrea total és:
- 160 cm²
 - 320 cm²
 - 400 cm²
 - 192 cm²
4. Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 m d'altura i costat de la base 1 m. Si només conté les tres quartes parts de la seva capacitat, el nombre aproximat de litres d'aigua que hi ha en ell és:
- 13000 l
 - 9750 l
 - 3750 l
 - 3520 l
5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular d'1,5 m d'altura i 80 cm de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per recobrir la teulada, en total s'utilitzaran:
- 38 teules
 - 76 teules
 - 72 teules
 - 36 teules
6. Una caixa de dimensions 30 x 20 x 15 cm, està plena de cubs d'1 cm d'aresta. Si s'utilitzen tots per construir un prisma recte de base quadrada de 10 cm de costat, l'altura mesurarà:
- 55 cm
 - 65 cm
 - 75 cm
 - 90 cm
7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 dm de radi de la base i 120 cm d'altura és:
- $5\sqrt{3}$ dm
 - $\sqrt[3]{75}$ dm
 - 150 cm
 - $\sqrt[3]{2250}$ cm
8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llaunes cilíndriques de 15 cm d'altura i 3 cm de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:
- 100
 - 10
 - 42
 - 45
9. L'àrea lateral d'un tronc de con que té 20 cm d'altura i bases de radis 30 i 15 cm, és:
- 2250π cm²
 - 900π cm²
 - 1125π cm²
 - 450π cm²
10. A partir de les coordenades geogràfiques de les ciutats A, B, C dedueix quina afirmació és correcta

CIUTAT	LONGITUD	LATITUD
A	15° E	15° N
B	15° W	15° N
C	15° E	15° S

- Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores menys.
- Les ciutats A i B tenen la mateixa hora i la ciutat C dues hores més.
- Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores més.
- Les ciutats A i C tenen la mateixa hora i la ciutat B dues hores menys.

RESUM

		Exemples
Poliedre. Elements d'un poliedre. Tipus de poliedres	Un poliedre és una regió tancada de l'espai limitada per polígons. Els seus principals elements són: cares, arestes, vèrtexs, angles diedres i poliedres, així com les diagonals. Els poliedres poden ser còncaus i convexs depenent que alguna de les seves cares sigui un polígon còncau o cap ho sigui. Entre els poliedres destaquen poliedres regulars, prismes i piràmides.	
Teorema de Euler	En tot poliedre convex el nombre de cares més el nombre de vèrtexs coincideix amb el nombre d'arestes més 2.	$C + V = A + 2$
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre que compleix que totes les seves cares són polígons regulars iguals i que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetraedre, octàedre, icosaèdre, galleda i dodecaedre	
Prismes	Un prisma és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases. Poden ser còncaus o convexs; rectes o oblics, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonal... Destaquen els paral·lelepípedes que són prismes amb totes les seves cares paral·lelograms i dins d'aquests els ortoedres que són paral·lelepípedes amb totes les seves cares rectangulars	
Teorema de Pitàgores en l'espai	La diagonal d'un ortoedre és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats de les seves arestes	
Piràmides	Una piràmide és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú, com a costats té la base. Poden ser còncaves o convexes; rectes o obliqües, regulars o irregulars; triangulars, quadrangulars, pentagonal...	
Tronc de piràmide	Un tronc de piràmide és el poliedre resultant en tallar una piràmide per un plànol paral·lel a la base. Les bases són polígons semblants i les cares laterals són trapezis.	
Cossos de revolució	Els cossos de revolució són cossos geomètrics que s'obtenen en fer girar una línia al voltant d'una recta fixa denominada eix. La línia que gira es diu <i>generatriu</i>. Entre els cossos de revolució destaquen cilindres, cons i esferes.	
Àrees lateral i total d'un prisma	$A_{\text{Lateral}} = \text{Perímetre}_{\text{Base}} \cdot \text{Altura}$ $A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + 2\text{Àrea}_{\text{Base}}$	
Àrees lateral i total d'una piràmide regular	$A_{\text{Lateral}} = \frac{\text{Perímetre}_{\text{Base}} \cdot \text{Apotema}_{\text{piràmide}}}{2}$ $A_{\text{total}} = \text{Àrea}_{\text{Lateral}} + \text{Àrea}_{\text{Base}}$	

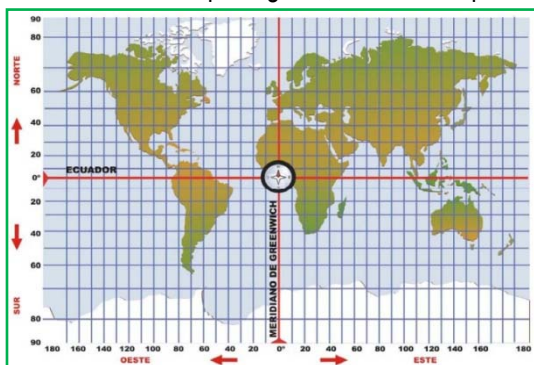
Àrees lateral i total d'un tronc de piràmide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{tronc}}{2}$ $A_{total} = Àrea_{Lateral} + Àrea_{Base 1} + Àrea_{Base 2}$	
Àrees lateral i total d'un cilindre	$A_{Lateral} = 2\pi RH$ $A_{total} = 2\pi RH + 2\pi R^2$	
Àrees lateral i total d'un con	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Àrees lateral i total d'un tronc de con	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r) G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Àrea i volum d'una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2; Volum = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Volum d'un prisma i d'un cilindre	$Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Volum d'una piràmide i d'un con	$Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$	
Coordenades geogràfiques	Latitud: Distància del punt geogràfic a l'Equador mesurada sobre el meridià que passa pel punt. Longitud: Distància del punt geogràfic al meridià zero o de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel punt.	
Fusos horaris	Cada fus horari és una zona del globus terraqüi compresa entre dos meridians que es diferencien en 15° de longitud.	

CAPÍTOL 10: FUNCIONS I GRÀFIQUES

ACTIVITATS PROPOSADES

1. SISTEMES DE REPRESENTACIÓ EN EL PLÀNOL.

1. Fixa't en el mapa següent, localitza els països o ciutats que es demanen i indica en el teu quadern:

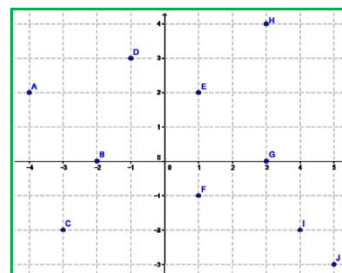


- a) Els quadrants on es troben els següents països:
- | | | |
|------------|-------------|-----------------|
| Mèxic: | Madagascar: | Índia: |
| Xile: | Espanya: | Argentina: |
| Austràlia: | Japó: | Aràbia Saudita: |
| Alemanya: | EUA: | Marroc: |
- b) Les coordenades (aproximades) de les següents ciutats:
- | | | |
|-----------------|---------|------------------|
| Ciutat del Cap: | Pequín: | Londres: |
| Nova York: | Rabat: | Còrdova (Mèxic): |
| Rio de Janeiro: | Sidney: | Oviedo: |
| Alacant | | |

2. Còpia en el teu quadern i indica les coordenades de tots els punts que estan assenyalats en el plànol:

3. Representa gràficament en el teu quadern els següents punts del plànol:

A(0,-2) B(-2,0) C(4,0) D(-6,0) E(0,6) F(1,7) G(7,1) H(-4,8) I(-1,-4) J(-4,-1)
K(5,-3) L(9,6) M(-2,1) N(7,-4) Ñ(-3,-3) O(0,0) P(-2,-1) Q(2,1) R(2,-1) S(-1,1)



2. FUNCIONS

4. De les següents relacions entre dues variables, raona quines són funcionals i quines no:

- Edat – altura de la persona al llarg de la seva vida
- Altura – edat de la persona
- Preu de la gasolina – dia del mes
- Dia del mes – preu de la gasolina
- Un nombre i la seva cinquena part
- Un nombre i el seu quadrat
- Un nombre i la seva arrel quadrada

5. Si el canvi € a \$ està 1 € = 1,37 \$, completa en el teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

€	2	5	10	27	60
\$					

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdues monedes. Es pot expressar de forma única aquesta relació? És una funció? Si realitzes el canvi en una oficina, et cobren una petita comissió fixa per realitzar l'operació d'1,5 €. Com quedarien les fórmules en aquest cas?

6. El pont Golden Gate permet la comunicació entre els dos costats de la badia de Sant Francisco. Les seves torres, de 746 peus d'altura, estan separades per una distància d'uns 4200 peus. La calçada, que té una amplada de 90 peus i es troba a una altura de 220 peus sobre el nivell de l'aigua, està subjecta a les torres mitjançant dos cables, de 3 peus de diàmetre, que tenen forma de paràbola i que toquen la calçada en el centre del pont.

- Realitza un dibuix on quedin reflectits les dades més significatives del problema.
- Determina la relació que existeix entre l'altura a la qual es troba un punt del cable i la distància de la seva projecció vertical al centre del pont.
- Aplica aquesta fórmula per calcular l'altura d'un punt del cable que la seva vertical està a 1000 peus del centre del pont.



7. Realitza en el teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que correspongui a una funció i l'altra no. Identifica cadascú i explica el perquè d'aquesta correspondència.

8. Realitza en el teu quadern una taula amb 10 valors de la funció $e(t) = 5t + 20$, representa'ls gràficament i indica la figura que determinen. Si aquesta funció representa l'espai (en quilòmetres) que recorre una persona que porta caminats 20 km i camina a una velocitat de 5 km/h, en funció del temps que triga a recórrer-ho (en hores), indica quins serien els valors que no tindria sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això en la gràfica.

9. Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	-13	-7	10	-13	24
f(x)	-15	0	14	3	0

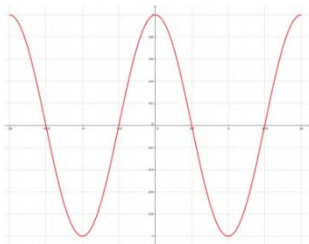
10. En una fulla de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadrat. Quina és la seva àrea? Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5... i calcula les seves àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seva gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Busca una fórmula per a aquesta funció.
11. Per aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. Representa una gràfica de la funció la variable independent de la qual sigui el temps i la variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.
12. Un fabricant vol construir tassons cilíndrics mesuradors de volums, que tinguin de radi de la base 4 cm i d'altura total del tassó 24 cm. Escriu una fórmula que indiqui com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeti obtenir l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per tenir un decilitre?
13. Escriu tres funcions que les seves gràfiques siguin tres rectes que passin per l'origen de coordenades i els seus pendents siguin 3, -2, i 1/2 respectivament.
14. Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta $y = x$? I la recta $y = -x$?
15. Un metre de certa tela costa 1,35 €, quant costen 5 metres? I 10 m? I 12,5 m? Quant costen "x" metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.
16. Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:
 - a) El seu pendent és 2 i la seva ordenada en l'origen és 3.
 - b) Passa pels punts A(1, 3) i B(0, 4).
 - c) La seva ordenada en l'origen és 0 i el seu pendent és 0.
 - d) Passa pels punts C(-1, 3) i D(-2, 5).
 - e) Passa pel punt (a, b) i té de pendent m.
 Com són entre si dues rectes d'igual pendent i diferent ordenada en l'origen?
17. Dibuixa en el teu quadern, sense trobar la seva equació, les rectes següents:
 - a) De pendent 3 i ordenada en l'origen 0.
 - b) Passa pels punts A(2, 3) i B(4, 1).
 - c) El seu pendent és 2 i Passa pel punt (4, 5).
18. Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern: $y = 3x + 3$
19. Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern: $y = \frac{-x}{2}$
20. Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern: $y = -3x^2 + 6x - 4$
21. Fes una taula de valors i representa gràficament en el teu quadern: $y = 2x^2 - 8$
22. Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2$.
 - a) Per a això fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.
 - b) Prenent valors d'abscissa negativa.
 - c) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?
 - d) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.
 - e) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.
 - f) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.
23. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$; és simètrica (cap avall) de $y = x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y = x^2 + q$.
24. Prenent la mateixa unitat que en el problema anterior dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 3)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 2)^2$. Així, en general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - p)^2$.
25. Escriu l'equació d'una paràbola d'igual forma que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 3 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

26. Dibuixa en el teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles:
 a) $y = x^2$; b) $y = 2x^2$; c) $y = 1/3x^2$; d) $y = -x^2$; e) $y = -1/2x^2$; f) $y = -3x^2$.
 Observa que ara ja no et serveix la plantilla emprada. Ara les paràboles s'estrenyen o s'eixamplen.
27. Completa aquest resum al teu quadern. La gràfica de $y = ax^2$ s'obté de la de $y = x^2$:
 a) Si $a > 1$ llavors ??
 b) Si $0 < a < 1$ llavors ??
 c) Si $a < -1$ llavors ??
 d) Si $-1 < a < 0$ llavors ??
28. Tornem a usar la plantilla.
 a) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (4, 2). Escriu la seva equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seva gràfica.
 b) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (-3, -1). Escriu la seva equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seva gràfica.
29. Dibuixa en els mateixos eixos de coordenades les rectes que passen pels següents punts:
 i) (0,0) i (1,-2) ii) (1,1) i (0,3) iii) (-2,0) i (0,-4)
 a) Com són les rectes?
 b) Calcula l'equació de les tres rectes de l'apartat anterior. Què tenen en comú les equacions de les rectes?
 En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i dibuixa altres rectes paral·leles per comprovar-la.
30. Dibuixa en els mateixos eixos de coordenades les rectes que passen pels punts:
 i) (0,3) i (1,1) ii) (1,4) i (-1,2) iii) (-2,4) i (2,2) iv) (-2,-1) i (-1,1)
 a) Calcula les equacions de les quatre rectes.
 b) Què tenen en comú les equacions de les rectes que has calculat?
31. Quin és el valor de l'ordenada en l'origen de les quatre rectes que has dibuixat en l'exercici anterior?
 En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i comprova-la dibuixant altres rectes que passin pel mateix punt.
32. Observa les equacions de les quatre rectes que has dibuixat, dues d'elles tenen pendent positiu a i d i les altres dues, b i c tenen pendent negatiu. Relaciona el signe del pendent de la recta amb el creixement o decreixement de la funció que representen.
33. Calcula dos punts de les rectes d'equacions: $y = 2x + 2$ i $y = -\frac{x}{2} + 2$, per dibuixar-les amb Geogebra. Indica dues propietats comunes d'ambdues gràfiques.
34. Representa, també, les rectes d'equacions: $y = -3x + 1$ i $y = \frac{x}{3} - 3$.
35. Quina condició han de verificar els pendents de dues rectes perquè siguin perpendiculars?

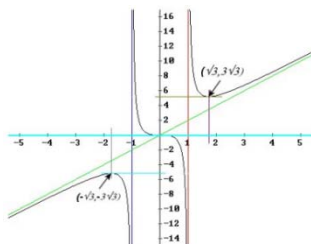
3. CARACTERÍSTIQUES D'UNA FUNCIÓ

36. Assenyala totes les característiques que puguis de les funcions representades mitjançant les seves gràfiques: domini i rang, simetria, punts d'intersecció amb els eixos de coordenades, continuïtat, creixement i decreixement, màxims i mínims, periodicitat.

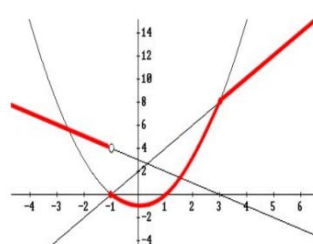
GRÀFICA 1



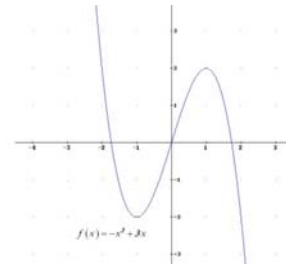
GRÀFICA 2



GRÀFICA 3



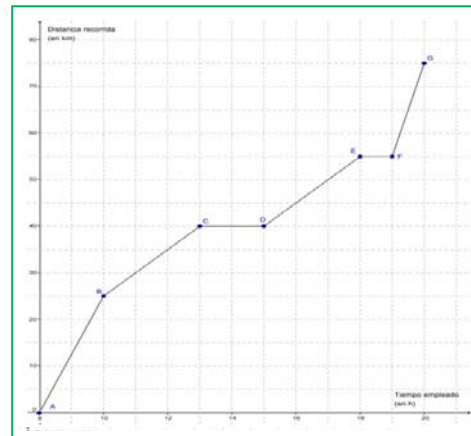
GRÀFICA 4



EXERCICIS I PROBLEMES

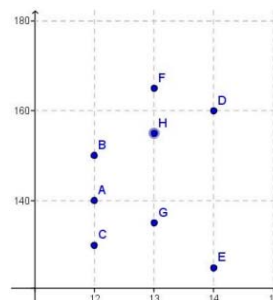
Sistemes de representació

1. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents, triant una escala en els eixos que permeti dibuixar-los tots de forma còmoda: $A(5,4)$; $B(0,2)$; $C(-2,0)$; $D(3,-1,3)$; $E(1'5,0)$; $F(0,0)$; $G(-1,-2/3)$. Assenyalas en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si escau, en quin eix està.
2. Escribe les coordenades de tres punts situats en el tercer quadrant.
3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents: $A(0, 4)$; $B(0, 2'3)$; $C(0, -2)$; $D(0, -1)$. Què tenen en comú tots ells?
4. Escribe les coordenades i representa tres punts de l'eix d'ordenades. Què tenen en comú?
5. Dibuixa en el teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l'angle recte en l'origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.
6. La següent gràfica resumeix l'excursió que hem realitzat per la serra de Tramuntana:
 - a) Quant temps va durar l'excursió?
 - b) Quant temps es va descansar? A quines hores?
 - c) Quants quilòmetres es van recórrer?
 - d) En quins intervals de temps es va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?
 - e) Fes una breu descripció del desenvolupament de l'excursió.
 - f) Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats en la gràfica.
 - g) Si en l'eix d'ordenades representéssim la variable "distància al punt de partida", seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?

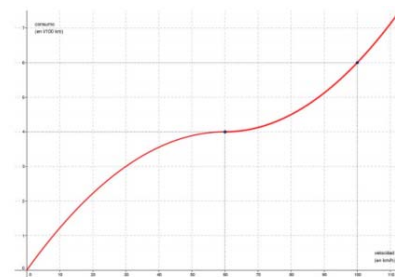


Funcions i tipus de funcions.

7. Indica quines de les següents correspondències són funcions:
 - a) A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.
 - b) A cada circumferència del plànol se li associa el seu centre.
8. L'altura i l'edat dels components d'un equip de bàsquet estan relacionats segons mostra la següent gràfica:
 - a) Si Juan té 14 anys, quin pot ser la seva altura?
 - b) Si María mesura 165 cm, quin pot ser la seva edat?
 - c) La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components de l'equip, és una relació funcional? Per què?
 - d) I la relació entre l'edat i l'altura? Realitza una gràfica similar a l'anterior per representar aquesta situació.
9. La distància, d , recorreguda per un tren depèn del nombre de voltes, n , que dona cada roda de la locomotora.
 - a) Escribe la fórmula que permet obtenir d conegut n , sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.
 - b) Dibuixa la gràfica.
 - c) Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda hagi donat mil voltes? (pren com a valor de π el número 3,14).
 - d) Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?
10. Un globus sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per mesurar la temperatura a diferents altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Cert dia la temperatura en la superfície és de 9°C . Determina:
 - a) Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?
 - b) A quina altura hi haurà una temperatura de -30°C ?
 - c) Escribe una fórmula que permeti calcular la temperatura T coneixent l'altura A . Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?
 - d) Si la temperatura en la superfície és de 12°C , quina és llavors la fórmula? Quin tipus de funció és?
11. Dibuixa la gràfica de la funció part entera: $y = E(x)$.
12. Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena x a la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dona l'àrea en funció de x . Dibuixa la seva gràfica. Quin tipus de funció és?
13. Una caixa quadrada té una altura de 20 cm. Com depèn el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.
14. Amb una fulla de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d'ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cadascuna de les cantonades, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x ? Escribe la fórmula i dibuixa la gràfica.

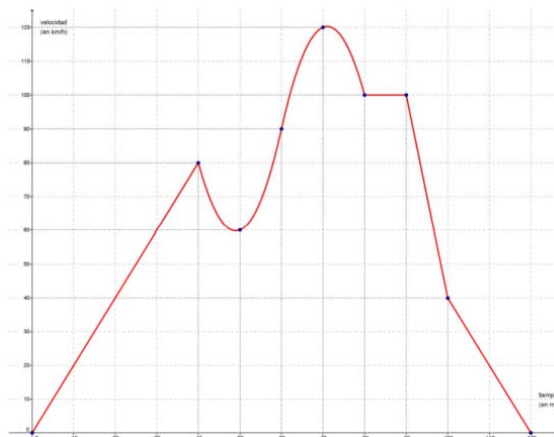


15. ESCRIU l'equació de la recta paral·lela a $y = 4x + 2$ d'ordenada en l'origen 6.
16. Sense representar-los gràficament, digues si estan alineats els punts A(3, 4), B(7, 9) i C(13, 15).
17. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: Lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: Lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cadascuna de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per saber la fórmula més beneficiosa. ESCRIU les fórmules d'ambdues situacions i dibuixes les seves gràfiques. Raona, a partir d'aquestes gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.
18. Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l'altura "a" dels cons. Si volem una boia per assenyalar l'entrada de patinets n'hi ha prou amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors es necessita una altura d'1,5 m: quin volum tindrà? ESCRIU l'expressió de la funció que calcula el volum en funció de l'altura. Dibuixa la seva gràfica.
19. Calcula el vèrtex, l'eix de simetria i els punts d'intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seves gràfiques.
 a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$
20. Dibuixa la gràfica de $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per dibuixar la seva gràfica:
 a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$
 Ajuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vèrtex (-2, -10)
21. El consum de gasolina d'un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica.



Característiques de les funcions.

22. Joaquín ha arribat a un acord amb el seu pare per rebre la seva paga. Cobrarà 20 € al mes el primer any, i 5 € més per cada any que passi. Quant li correspondrà dins de 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seva gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeti calcular la paga quan hagin passat n anys.
23. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic... La següent gràfica reflecteix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.
- a) És funcional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?
- b) Quina és la variable independent? I la dependent?
- c) A quina velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40 km/h?
- d) Indica els intervals en els quals la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha estat constant en algun moment? Quan? Durant quant de temps?
- e) Quina ha estat la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I durant la primera hora del mateix?
- f) Quina ha estat la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la primera mitja hora i l'hora i mitja?
24. En entrar en l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20 € i les dues primeres hores són gratis per als clients amb targeta de compra del centre. Fes una taula que relacioni el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) en els casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:
- a) Quins valors pren la variable dependent? I la independent?
- b) Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?
- c) Existeixen punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyala'ls i explica el seu significat.
25. En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, en els 15 dies



següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajusti a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

- Durant els primers 30 dies: altura = $4 \times \text{temps}$
- En els 15 dies següents: altura = $90 + \text{temps}$
- A partir del dia 45: altura = 135.

26. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval de temps, ve donat de la següent forma:

- Durant les dues primeres hores, la distància " d " (en quilòmetres) al punt de partida és $2 \cdot t + 1$, on " t " és el temps (en hores) de durada del trajecte.
- Entre la 2a i 3a hora, aquesta distància ve donada per $-t + 7$.
- Entre la 3a i 4a hora, ambdues inclusivament, $d = 4$.
- Des de la 4a i fins a la 6a (inclusivament), la distància s'ajusta a $3 \cdot t - 8$.

- Realitza una taula i una gràfica que reculli aquest viatge de la forma més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps en els instants 0, 2, 3, 4 i 6).
- Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps trigat a recórrer-la és funcional.
- La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?
- En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?
- Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?
- Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.
- Troba els punts on la funció aconsegueix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el significat que puguin tenir.

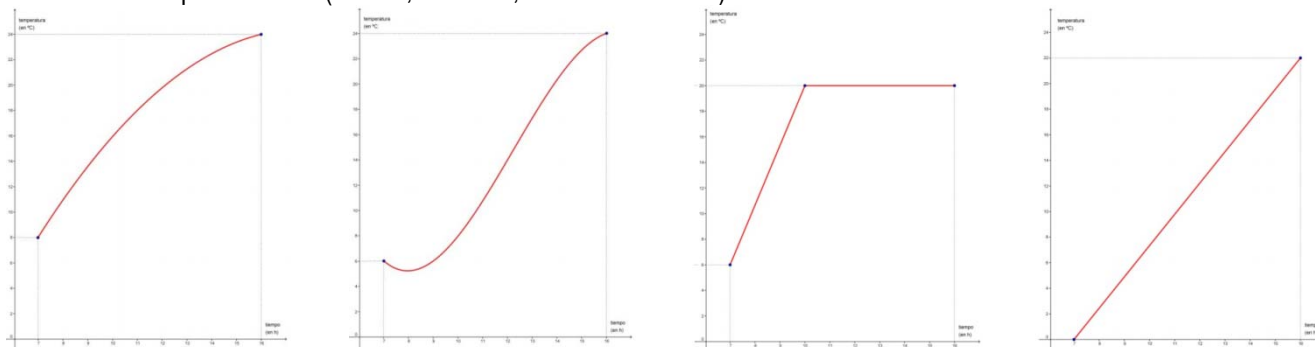
27. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat en el tema: monotonia, extrems, simetria i periodicitat.

a) Valor absolut d'un nombre: $f(x) = |x|$.

b) Oposat i invers d'un nombre: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

c) Mantissa (a cada nombre li correspon la diferència entre aquest nombre i la seva part entera): $M(x) = x - E(x)$.

28. Les gràfiques següents mostren l'evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la tarda en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):



- Estudia la monotonia de totes les gràfiques.
- En alguna ciutat la temperatura s'ha mantingut constant durant tot l'interval? I en part d'ell?
- Quina ciutat creïx que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?
- Tenint en compte que a Madrid l'increment de la temperatura ha estat sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s'ha aconseguit després de les 7 h i a Valladolid a partir del mig dia la temperatura va baixar, indica quina gràfica correspon a cadascuna de les ciutats i explica quins han estat les temperatures màximes i mínimes en cadascuna d'elles.

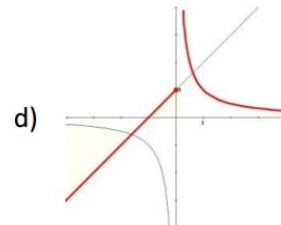
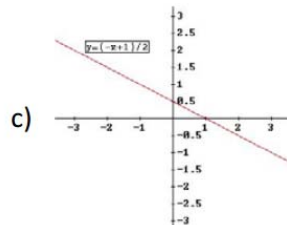
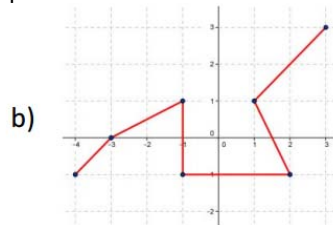
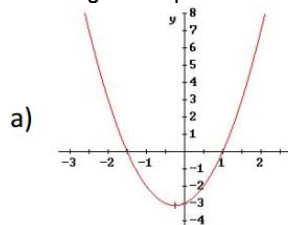
AUTOAVALUACIÓ

1. Les coordenades del punt assenyalat són:

- a) $(-1, 2)$
 b) $(-2, -1)$
 c) $(1, 2)$
 d) $(1, -2)$



2. L'única gràfica que no correspon a una funció és:



3. L'única taula que no pot ser d'una relació funcional és:

a)

x	i
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	i
-1	-3
0	-3
1	-3
2	-3

c)

x	i
-3	9
-1	1
0	0
2	4

d)

x	i
0	2
1	3
4	6
0	3

4. L'única funció afí que, a més, és lineal és:

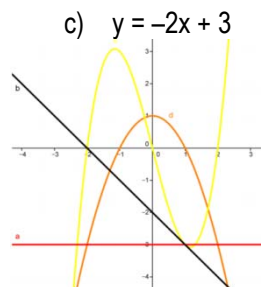
- a) $y = -4x$ b) $y = 3x + 1$

c) $y = -2x + 3$

d) $y = -x - 1$

5. L'única gràfica d'una funció afí no constant és:

- a)
b)
c)
d)



6. L'única funció quadràtica és:

- a) $y = -2x$ b) $y = 3x + 1$

c) $y = -2x^2 + 3x$

d) $y = -x^3 - 1$

7. La funció quadràtica que té el seu vèrtex en el punt $(3, 4)$ és:

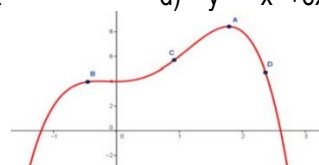
- a) $y = -2x^2$ b) $y = 3x^2 - x + 1$

c) $y = -2x^2 + 3x$

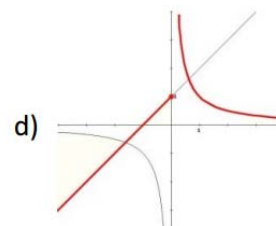
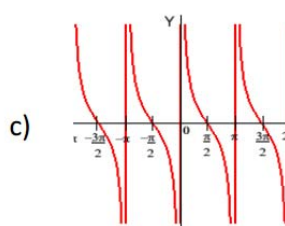
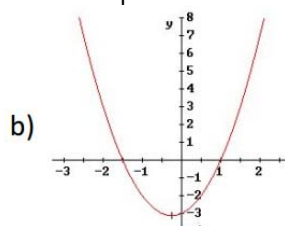
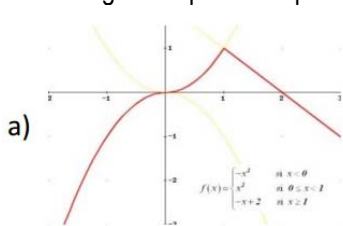
d) $y = -x^2 + 6x - 5$

8. El màxim absolut de la funció s'aconsegueix en el punt:

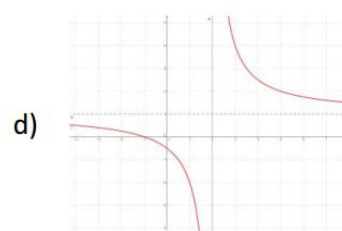
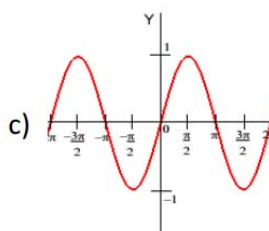
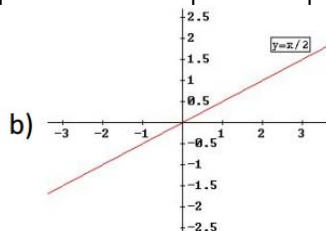
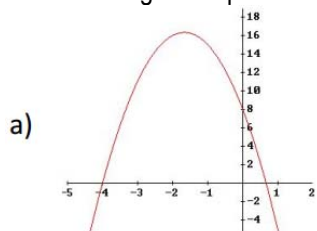
- a) A b) B c) C d) D



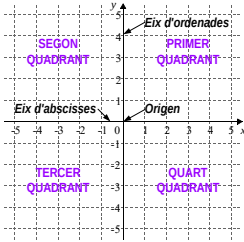
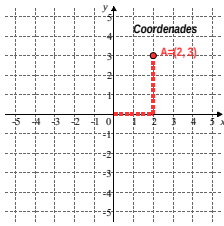
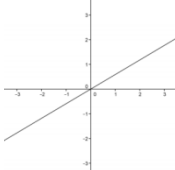
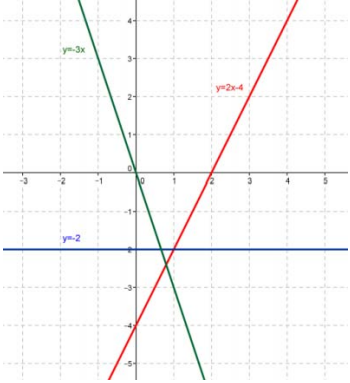
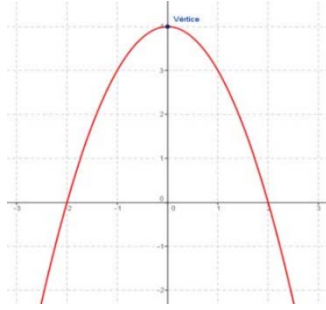
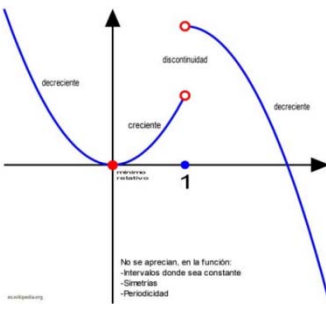
9. L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és:



10. L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent fins a $x = -2$ és:



RESUM

Eixos cartesianes i coordenades d'un punt en el plànol		
Funció	Una funció és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (variable independent) li fem correspondre, com a molt, un únic valor de l'altra (variable dependent).	$y = f(x) = 0,59 \cdot x$ $f(2) = 0,59 \cdot 2 = 1,18$ $f(5) = 0,59 \cdot 5 = 2,95$
Gràfica d'una funció	La gràfica d'una funció és la representació en el plànol cartesià de tots els parells ordenats en els quals el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon al que s'obté en transformar-ho mitjançant la funció: $\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0,59x$ Gràfica: 
Funció afí, funció lineal i funció constant	Una funció afí és aquella funció en la qual la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a 1: $y = f(x) = mx + n$. La representació gràfica és una recta. “m” rep el nom de pendent i “n” ordenada en l'origen. Una funció lineal o de proporcionalitat directa és una funció afí amb ordenada en l'origen nul·la: $y = mx$ (passa per l'origen). Una funció constant és una funció afí amb pendent nul: $y = n$ (sempre pren el mateix valor i la seva gràfica és una recta horitzontal).	
Funció quadràtica	Una funció quadràtica és aquella funció en la qual la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau dos: $y = f(x) = ax^2 + bx + c.$ La gràfica d'aquest tipus de funcions es diu paràbola. El punt més significatiu de la paràbola és el vèrtex i es calcula donant-li a la variable independent el valor $x = -b/2a$. Si el coeficient de x^2 és positiu, el vèrtex és un mínim i, si és negatiu, un màxim.	
Continuïtat Monotonia Extrems Simetria Periodicitat	Una funció pot ser: - contínua en un interval si la seva gràfica no sofreix “ruptures” (anomenades discontinuitats) - creixent (decreixent) si el seu valor augmenta (disminueix) quan ho fa la variable independent - constant quan sempre pren el mateix valor - parell si la imatge de la variable independent coincideix amb el del seu oposat, imparell quan el valor de la funció per a l'oposat de la variable independent també és l'oposat - periòdica si les imatges dels valors obtinguts en sumar una quantitat fixa (període) a la variable independent coincideixen.	 No se aprecien, en la funció: - Interval·ls donde sea constante - Simetria - Periodicidad

CAPÍTOL 11: ESTADÍSTICA I PROBABILITAT

ACTIVITATS PROPOSADES

1. LA PRESA DE DADES

- Volem fer un estudi de la quantitat de monedes que porten en la butxaca els estudiants de la teva classe. Però per no preguntar a tots tria 10 companys a l'atzar i anota en el teu quadern quantes monedes porta cadascun.
 - Quina és la població objecte de l'estudi?
 - Quina és la mostra triada?
 - Especifica 5 individus que pertanyin a la població i no a la mostra.
- En un estudi estadístic es pot demanar coses tan diverses com
 - Quines fruites menges al llarg d'una setmana?
 - Quantes peces de fruita menges al dia?
 - Quantes monedes portes en la butxaca?
 - Quin és la teva altura?
 - Quantes marques de xocolata recordes?
 - Quins són les marques de xocolata que recordes?
 - Quants germans tens?
 - Quin és el teu color favorit per a un cotxe?
 - Quant temps passes al dia veient la televisió?
 - Quants seguidors tens en twitter?

Classifica en variables qualitatives i quantitatives les que apareixen en el primer exemple d'aquesta secció. Per a les quantitatives indica si són contínues o discretes.
- Assenyala en quin cas és més convenient estudiar la població o una mostra:
 - El diàmetre dels cargols que fabrica una màquina diàriament.
 - L'altura d'un grup de sis amics.
- Es pot llegir el següent titular en el periòdic que publica el teu institut: "*La nota mitjana dels alumnes de 3r ESO és de 7,9*". Com s'ha arribat a aquesta conclusió? S'ha estudiat a tota la població? Si haguessin seleccionat per al seu càlcul sol a les nines, seria representatiu el seu valor?
- En una sèrie de televisió tenen dubtes sobre què fer amb la protagonista, si que tingui un accident o si ha de casar-se. Van a fer una consulta. A tota la població o seleccionat una mostra representativa? Raona la resposta.

2. REPRESENTACIÓ DE LA INFORMACIÓ

- Reuneix a 10 amics. Compta quantes monedes de cada valor (1 cèntim, 2 cèntims, 5 cèntims, ...) teniu entre tots. Representa mitjançant un gràfic adequat el nombre de monedes de cada classe que hi ha. Hi ha algun altre diagrama que et permeti veure quin tipus de monedes són més abundants en la mostra que has pres?
- En la classe d'Educació Física el professor ha mesurat el temps que triga cada alumne a recórrer 100 metres. Els resultats estan en aquesta taula:

14'92	13'01	12'22	16'72	12'06	10'11	10'58	18'58	20'07	13'15	20'10	12'43	17'51	11'59	11'79
16'94	16'45	10'94	16'56	14'87	17'59	13'74	19'71	18'63	19'87	11'12	12'09	14'20	18'30	17'64

Agrupar aquests resultats per classes començant en 10 segons i fent intervals de longitud 1 segon. Realitza una taula de freqüències i representa adequadament aquestes dades.

3. PARÀMETRES ESTADÍSTICS

- En una excursió de muntanya participen 25 persones amb les següents edats:

8	10	10	11	12	36	37	37	38	40	42	43	43
44	45	47	48	50	52	53	55	58	61	63	67	

 - Fes una taula de freqüències classificant les edats en 6 intervals que comencen en 7,5 i acaben en 67,5. Troba, a partir de la taula, els paràmetres $\bar{x}$, σ i CV.
 - Calcula $\bar{x}$, σ i CV introduint els 25 dades en la calculadora, és a dir, sense agrupar-los en intervals.
 - Prescindint dels 5 nins, obtenim un col·lectiu de 20 persones. Calcula de nou els seus paràmetres $\bar{x}$, σ i CV, i compara amb els obtinguts en el grup inicial.
 - Troba els paràmetres de posició Q_1 , Q_3 i Me, de la distribució original, i construeix el diagrama de caixa i bigotis corresponent.

9. Per a cadascun dels exemples següents indica 3 successos diferents que no siguin successos individuals.

- a) Traiem una carta a l'atzar d'una baralla espanyola i mirem el pal.
 - b) Llançem una moneda d'1 € i una de 2 €.
 - c) Llançem dues monedes d'1 €.
 - d) Llançem una moneda d'1 €, anotem el resultat i la llançem de nou.
 - e) Llançem dos daus i sumem els resultats.
- 10.** En una borsa tenim 10 boles vermelles numerades de l'1 al 10. Es fan els dos experiments següents:
EXPERIMENT A: Es treu una bola de la borsa i es mira el seu color.
EXPERIMENTO B: Es treu una bola de la borsa i es mira el seu nombre.
Quin d'aquests experiments no és un experiment aleatori? Per què?
Per a l'experiment que sí és un experiment aleatori indica el seu espai mostral.
- 11.** Una baralla francesa té 52 cartes, distribuïdes en 13 cartes de piques, 13 de cors, 13 de trèvols i 13 de diamants. Les piques i els trèvols són cartes negres mentre que els cors i els diamants són cartes vermelles. Es barreja la baralla, es talla i es fa el següent experiment: agafar les dues cartes que han quedat a dalt del tot i observar de quin color són. Descriu l'espai mostral.
- 12.** En alguns llocs d'Espanya se segueix jugant a la taba. La taba és un os de be que no és regular. Pot caure en quatre posicions diferents. Podem pensar en ella com si fos un dau "rar". Considera l'experiment "llançar la taba a l'aire i veure el que marca la seva cara superior: clot, panza, rei i botxi". Aproxima la probabilitat de cadascun dels casos d'aquest experiment aleatori.
- 13.** La teva calculadora probablement tindrà una funció que serveix per generar nombres aleatoris. Normalment dóna un nombre comprès entre 0 i 1. Realitza l'experiment aleatori "genera un nombre aleatori i apunta el seu segon decimal". Fes 40 repeticions d'aquest experiment. Dibuixa un histograma de freqüències.
- 14.** La probabilitat no és un concepte intuïtiu. Per a això anem a fer una prova. Considerarem l'experiment aleatori *llançar una moneda*. Copia la taula en el teu quadern
-

[illegible]

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla el que tú creas que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y completa la tabla. Como tú quieras (inventalo, pero “con sentido”).
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

Què observes en tots dos casos? Alguna pauta? Para esment a aquestes qüestions per a cadascuna de les files de la taula.

Hi ha més o menys 15 cares i 15 creus?

Apareixen grups sequits de cares o de creus?

Quin és el major nombre de cares que han sortit seguides? I de creus?

EXERCICIS I PROBLEMES.

Estadística

1. S'han recollit les dades sobre el nombre de fills que tenen 20 matrimonis. Com és la variable utilitzada? Escriu una taula de freqüències de les dades recollides i representa les dades en un diagrama de sectors:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Amb les dades del problema anterior calcula la mitjana, la mediana, la moda i els quartils.
3. Amb les dades del problema anterior calcula el rang, la desviació mitjana, la variància, la desviació típica i l'interval interquartílic.
4. Representa aquestes dades en un diagrama de caixes.
5. La següent taula expressa les alçades, en metres, de 1000 soldats:

Talla	1,50 – 1,56	1,56 – 1,62	1,62 – 1,68	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nº de soldats	10	140	210	340	210	90

- Representa les dades en un histograma.
- Calcula la mitjana i la desviació típica.
- Determina l'interval on es troba la mediana.

6. Es demana a un grup de persones pel nombre de televisors que hi ha en la seva llar i els resultats són:

Nombre de televisors	0	1	2	3	4	5
Nombre de llars	2	27	15	4	2	1

Quin tipus de variable és? Representa les dades en la representació que et sembli més adequada.

Calcula la mitjana i la desviació típica-

7. Amb les dades del problema anterior calcula la mitjana i l'interval interquartílic.
 8. En un centre escolar s'ha recollit informació sobre el nombre d'ordinadors a les cases de 100 famílies i s'han obtingut els següents resultats:

Nombre ordinadors	0	1	2	3	4
Nombre de famílies:	24	60	14	1	1

Representa les dades en un diagrama de barres i calcula la mitjana, la mediana i la moda.

9. Amb les dades del problema anterior calcula el rang, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica. Fes un diagrama de caixes.
 10. Es demana a un grup de persones pel nombre de vegades que han visitat al dentista en l'últim any. Les respostes obtingudes es recullen en la següent taula:

Nombre de visites:	1	2	3	4	5
Nombre de persones:	13	18	7	5	7

Representa les dades en un diagrama de sectors i calcula la mitjana, la mediana i la moda.

11. Es demana a un grup de persones pel nombre de vegades que han visitat al dentista en l'últim any. Les respostes obtingudes es recullen en la següent taula:

Nombre de visites:	1	2	3	4	5
Nombre de persones:	13	18	7	5	7

Calcula el rang, la desviació mitjana, la variància i la desviació típica.

12. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents escons per grup parlamentari (DM: demòcrata – cristians; S: socialistes; L: Liberals; V: verds; C: conservadors; I: esquerra unitària; LD: Llibertat i democràcia; NI: No inscrits; Uns altres):

Partits	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Uns altres	Total
Escons	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

Quina representació de les dades et sembla més adequada? Pots calcular la mitjana o el rang? Quin tipus de variables és la de la taula?

13. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents escons per algun dels estats membre:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Polònia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Uns altres	Total
Escons	96	54	74	73	51	73	21	21		751

Quina representació de les dades et sembla més adequada? Pots calcular la mitjana o el rang? Quin tipus de variables és la de la taula? Determina el nombre d'escons dels altres països membres de la Unió Europea.

14. En les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Quina representació de les dades et sembla més adequada? Pots calcular la mitjana o el rang? Quin tipus de variables és la de la taula? Ordena als països de major a menys percentatge de votants en les eleccions de 2014.

15. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004' 2009' 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Representa en un polígon de freqüències els percentatges de participació del total dels estats membres.

16. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Separa els Estats Membres en dos grups, els que van tenir un percentatge superior al percentatge mitjà i els que ho van tenir menor en 2004. Fes el mateix per 2014. Són els mateixos? Analitza el resultat.

17. Amb les dades del problema anterior sobre les eleccions de 2004, 2009, 2014 al Parlament Europeu es van obtenir els següents percentatges de vots per alguns dels estats membres:

Estat	Alemanya	Espanya	França	Itàlia	Regne Unit	Portugal	Grècia	Bèlgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Calcula el percentatge de participació mitjà per a Alemanya en aquestes tres convocatòries i la desviació típica. El mateix per a Espanya, per a Bèlgica i per a Portugal.

18. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu els resultats d'Espanya han estat:

Cens	Total de votants	Abstenció	Vots nuls	Vots en blanc
35.379.097	15.920.815	19.458.282	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectors aquestes dades. Fes una taula de percentatges: el cens és el 100 %. Determina els altres percentatges. Consideres que ha guanyat l'abstenció?

19. En les eleccions de 2014 al Parlament Europeu els resultats d'Espanya han estat:

PP	PSOE	Esquerra plural	Podemos	UPyD	Uns altres	Total de votants
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el nombre de vots dels altres partits. Representa en un diagrama de barres aquestes dades. Fes una taula de percentatges per a cada partit. Has de distribuir 54 escons, com els distribuïries per partits?

Probabilitat

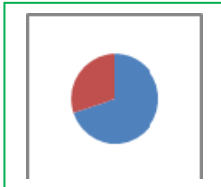
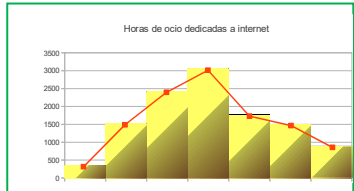
20. Es considera l'experiment aleatori de tirar un dau dues vegades. Calcula les probabilitats següents:
 - a) Treure algun 1.
 - b) La suma dels dígit és 8.
 - c) No treure cap 2.
 - d) Treure algun 1 o bé no treure cap 2.
21. Es considera l'experiment aleatori treure dues cartes de la baralla espanyola. Calcula la probabilitat de:
 - a) Treure algun rei.
 - b) Obtenir almenys un basto.
 - c) No obtenir cap basto.
 - d) No obtenir el rei de bastos.
 - e) Treure alguna figura: sota, cavall, rei o as.
 - f) No treure cap figura.
22. Es considera l'experiment aleatori de tirar una moneda tres vegades. Calcula les probabilitats següents:
 - a) Treure cara en el primer tiratge.
 - b) Treure cara en el segon tiratge.
 - c) Treure cara en el tercer tiratge.
 - d) Treure alguna cara.
 - e) No treure cap cara.
 - f) Treure tres cares.
23. Amb una baralla espanyola es fa l'experiment de treure tres cartes, amb reemplaçament, quina és la probabilitat de treure tres reis? I si l'experiment es fa sense reemplaçament, quin és ara la probabilitat de tenir 3 reis?
24. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es treuen dues boles amb reemplaçament. Determina la probabilitat que:
 - a) Les dues siguin negres.
 - b) Hi hagi almenys una negra.
 - c) Cap sigui negra.
25. En una urna hi ha 6 boles blanques i 14 boles negres. Es treuen dues boles sense reemplaçament. Determina la probabilitat que:
 - a) Les dues siguin negres.
 - b) Hi hagi almenys una negra.
 - c) Cap sigui negra.
 - d) Compara els resultats amb els de l'activitat anterior.
26. En llançar quatre monedes a l'aire,
 - a) Quina és la probabilitat que les quatre siguin cares?
 - b) Quina és la probabilitat d'obtenir com a màxim tres cares?
 - c) Quina és la probabilitat de tenir exactament 3 cares?
27. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja conegudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,7 i el segon de 0,5. Es llança un plat i tots dos desapareixen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i les diferents possibilitats:
 - a) Quina probabilitat hi ha que un dels tiradors doni en el plat?
 - b) Calcula la probabilitat que cap encerti.
 - c) Calcula la probabilitat que els dos encertin.
28. Es llança una moneda fins que aparegui cara dues vegades seguides.
 - a) Calcula la probabilitat que l'experiment acabi en el segon llançament.
 - b) Calcula la probabilitat que acabi en el tercer llançament.
29. En el llançament de naus espacials s'han instal·lat tres dispositius de seguretat A, B i C. Si falla A se posa automàticament en marxa el dispositiu B, i si falla aquest, s'engega C. Se sap que la probabilitat que falli A és 0,1, la probabilitat que B funcioni és 0,98 i la probabilitat que falli C és 0,05. Calcula la probabilitat que tot funcioni bé.
30. Es fa un estudi sobre els incendis forestals d'una zona i es comprova que el 40 % són intencionats, el 50 % es deuen a negligències i el 10 % a causes naturals. S'han produït tres incendis,
 - a) Quina és la probabilitat que almenys un hagi estat intencionat?
 - b) Probabilitat que els tres incendis es deguin a causes naturals.
 - c) Probabilitat que cap incendi sigui per negligències.
31. Es llança dues vegades un dau equilibrat amb sis cares. Trobar la probabilitat que la suma dels valors que apareixen en la cara superior sigui múltiple de tres.

32. Se sap que s'han eliminat diverses cartes d'una baralla espanyola que té quaranta. La probabilitat d'extreure un as entre les que queden és 0,12, la probabilitat que surti una copa és 0,08 i la probabilitat que no sigui ni as ni copa és 0,84. Calcular la probabilitat que la carta sigui l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?
33. Una persona despistada té vuit mitjons negres, sis blaus i quatre vermells, tots ells solts. Un dia amb molta pressa, tria dos mitjons a l'atzar. Trobar la probabilitat de:
- que els mitjons siguin negres.
 - que els dos mitjons siguin del mateix color.
 - que almenys un d'ells sigui vermell.
 - que un sigui negre i l'altre no.
34. Tres persones viatgen en un cotxe. Si se suposa que la probabilitat de néixer en un dia qualsevol de l'any és la mateixa i sabem que cap d'elles ha nascut en un any de traspàs,
- trobar la probabilitat que només una d'elles celebri el seu aniversari aquest dia.
 - calcular la probabilitat que almenys dues compleixin anys aquest dia.

AUTOAVALUACIÓ

1. Es fa un estudi sobre el color que prefereixen els habitants d'un país per a un cotxe. La variable utilitzada és:
 a) quantitativa b) qualitativa c) quantitativa discreta d) quantitativa contínua
2. En un histograma de freqüències relatives l'àrea de cada rectangle és:
 a) proporcional a l'àrea b) igual a la freqüència absoluta
 c) proporcional a la freqüència relativa d) proporcional a la freqüència acumulada
3. Ana ha obtingut en Matemàtiques les següents notes: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 i 7. La seva nota mitjana és de:
 a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9
4. En les notes anteriors d'Ana la mediana és:
 a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5
5. En les notes anteriors d'Ana la moda és:
 a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 i 10
6. L'espai mostral de successos elementals equiprobables de l'experiment "tirar dues monedes i comptar el nombre de cares" és:
 a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}
7. Tirem dos daus i sumem els punts de les cares superiors. La probabilitat que la suma sigui 7 és:
 a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36
8. En treure una carta d'una baralla espanyola (de 40 cartes), la probabilitat que sigui un or o bé un rei és:
 a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40
9. En una borsa hi ha 7 boles vermelles, 2 negres i 1 bola blanca. Es treuen 2 boles. La probabilitat que les dues siguin vermelles és:
 a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15
10. Tirem tres monedes a l'aire. La probabilitat que les tres en caure siguin cares és:
 a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

RESUM

		Exemples
Població	Col·lectiu sobre el qual es fa l'estudi	Estudiants de totes les Balears
Mostra	Subconjunt de la població que permeti obtenir característiques de la població completi.	Alumnes es 3r d'ESO seleccionats
Individu	Cadascun dels elements de la població o mostra	Joan Font
Variables estadística	Quantitativa discreta Quantitativa contínua Qualitativa	Nombre de peu que calça Alçada Esport que practica
Gràfics estadístics	Diagrama de barres Histograma de freqüències Polígon de freqüències Diagrama de sectors 	
Mitjana	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$	Amb les dades: 8, 2, 5, 10 i 10 $Mitjana = 35/5 = 7$
Moda	És el valor més freqüent	$Mo = 10$
Mediana	Deixa per sota la meitat	$4 < 6 < 8 < 10 = 10$. $Me = 8$.
Rang o recorregut	És la diferència entre la dada major i la dada menor.	$10 - 2 = 8$
Desviació mitjana	És la mitjana de les distàncies de les dades a la mitjana de les dades dels quals disposem.	$\frac{ 8-7 + 2-7 + 5-7 + 10-7 + 10-7 }{5} = \frac{1+5+2+3+3}{5} = \frac{14}{5}$
Variància	És la mitjana dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitjana: $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - m^2$	$Var = \frac{1+25+4+9+9}{5} = \frac{47}{5} = 9,4$
Desviació típica	És l'arrel quadrada de la variància: $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - m^2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{47}{5}} = 3,06$
Probabilitat	Valor entre 0 i 1 que ens dóna una mesura del factible que sigui que es verifiqui un determinat succés.	$P(3) = 1/6$ en tirar un dau
Espai mostral	El conjunt de tots els casos possibles	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	Treure parell: $\{2, 4, 6\}$
Llei de Laplace	$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al succés } S}{\text{número de casos possibles}}$	$P(\text{parell}) = 3/6 = 1/2$.