2n ESO

Capítol 10: Taules i gràfiques
El pla cartesià. Coordenades.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

L'estudi de les relacions entre dues magnituds i la seua representació mitjançant **taules i gràfiques** és de gran utilitat per a descriure, interpretar, predir i explicar fenòmens naturals i quotidians que es relacionen de manera funcional.


René Descartes

Moltes vegades necessitarem que les dades arreplegades en una taula siguen representades gràficament i utilitzarem el **sistema de referència cartesià**.

El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francès ***René Descartes*** que visqué entre els anys 1596 i 1650. *Descartes* volgué fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt *de partida*» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, *Descartes* també començà prenent un "*punt d'origen* " per a poder representar la geometria plana.

En aquest tema aprendrem a utilitzar el llenguatge **gràfic** per a interpretar i descriure situacions del món que ens rodeja. També estudiarem les **funcions** entre dues magnituds variables, en les que una té una relació de dependència de l'altra. *Descartes*, *Newton* i *Leibniz*, ja establiren la idea de funció com a dependència entre dues quantitats variables. Encara que la seua definició i comprensió va ser posterior, a partir de *Fourier* , arribant al segle XX.

Així, els continguts que tractarem ens van a permetre treballar amb les distintes formes de representar algunes situacions funcionals: numèrica, gràfica, verbal o a través d'una expressió algebraica (com les que acabem d'estudiar al capítol anterior) i les distintes formes de traduir una expressió d'un a un altre llenguatge.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1. EL PLA CARTESIÀ. COORDENADES

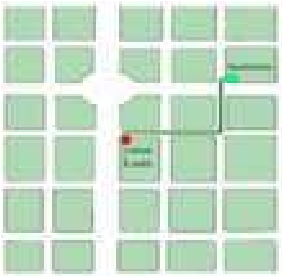
1.1. Sistema de referència cartesià

Ja saps que:

Constantment ens trobem amb situacions en què hem d'indicar la localització d'objectes o llocs respecte d'altres coneguts i, de vegades, les seues posicions en un pla o mapa. Per a entendre'ns és molt important que tinguem una referència comuna.

Si vols indicar a uns amics que no coneixen el teu barri, on es troba una botiga determinada o l'Institut on estudies, bastarà amb que els indiques la seua posició amb les referències que utilitzeu tots.

Exemple 1:



- Lluís viu a la casa marcada en roig al pla adjunt i estudia en un Institut pròxim marcat a verd al pla.

Per a indicar als seus amics francesos on està el seu Institut els dóna les indicacions següents:

"En eixir de ma casa aneu cap a la dreta i creueu dos carrers,
després cap a l'esquerra creueu un carrer i ja heu arribat"

Els referències esquerra i dreta així com la idea de creuar un carrer són comuns a tots nosaltres, a més fixa't que a l'esquema la línia que indica el camí és molt clara

En Matemàtiques, a la majoria de les ocasions, utilitzem sistemes de referència cartesians que també s'utilitzen en Ciències Socials per a treballar els mapes i els plans.

Un **sistema de referència cartesià** consisteix en dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades **eixos**. El punt en què es tallen els eixos és l'origen del sistema, també anomenat **origen de coordenades.**

Normalment el representem amb un eix vertical i l'altre horitzontal. A l'eix horitzontal li denominem **eix d'abscisses** o també eix X i al vertical **eix d'ordenades** o eix Y.

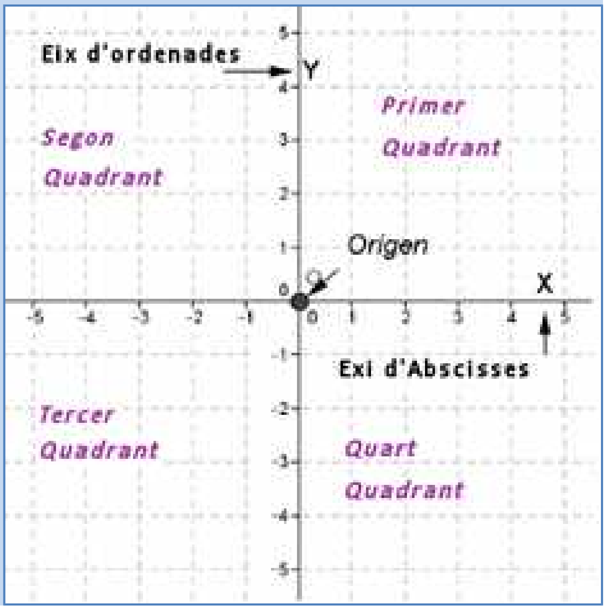
En tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants:

- Primer quadrant: Zona superior dreta

- Segon quadrant: Zona superior esquerra

- Tercer quadrant: Zona inferior esquerra

-Quart quadrant: Zona inferior dreta



Sistema de referència cartesià

Exemple 2:

- "Si estàs situat sobre la X que apareix al mapa, segueix 3 llegües a l'Est i després 2 llegües al Nord. Allí està soterrat el tresor"

Nota: La llegua és una antiga [unitat de longitud] que expressa la distància que una persona pot caminar durant una hora. La llegua castellana es fixà originàriament en 5.000 vares castellanes, és a dir, 4,19 [km]

Les referències Nord, Sud, Aquest i Oest ens defineixen un sistema de referència cartesià on l'Origen és el punt marcat amb la X.

Activitats resoltes

- Marca al pla el punt on es troba el tresor i com s'arribaria a ell des del punt X

Solució:

Activitats proposades

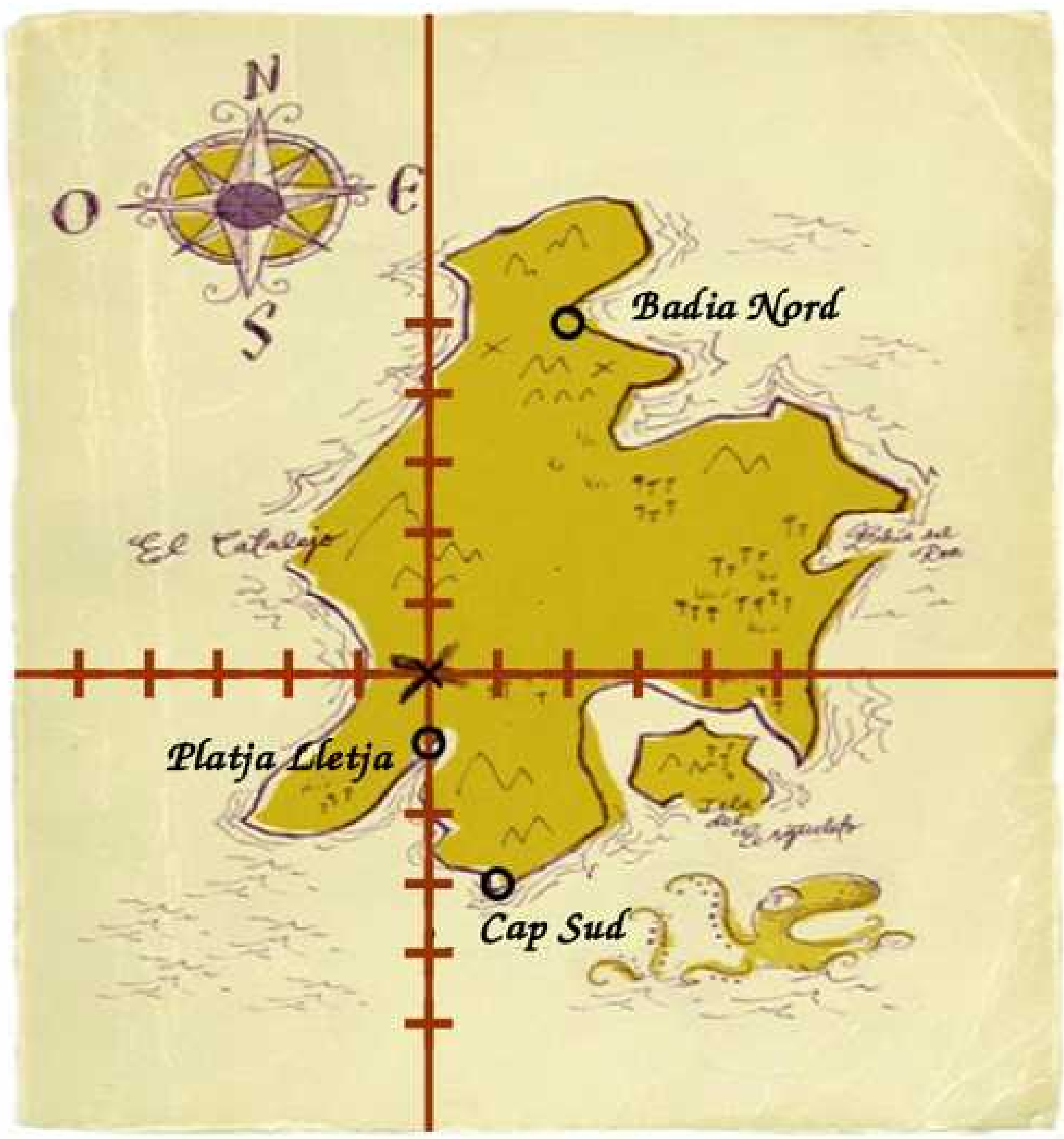
1. Descriu i marca al pla adjunt com arribaries a:

a) Cap Sud

b) Badia Nord

c) Platja Lletja

Material fotocopiable



Illa del Tresor

Font: Banc d'Imatges i sons de l'INTEF.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Col·leccions: Robert Louis Stevenson: L'illa del tresor. L'illa del tresor: El mapa del tresor, Il·lustrador: Loren

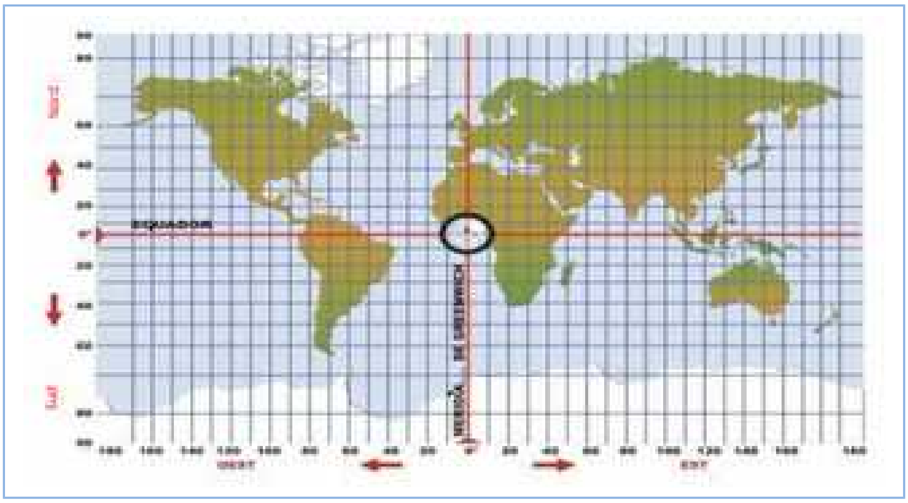
2. Al mapa indica en que quadrant es troben els següents països:

a) Austràlia

b) Espanya

c) Argentina

d) Xina

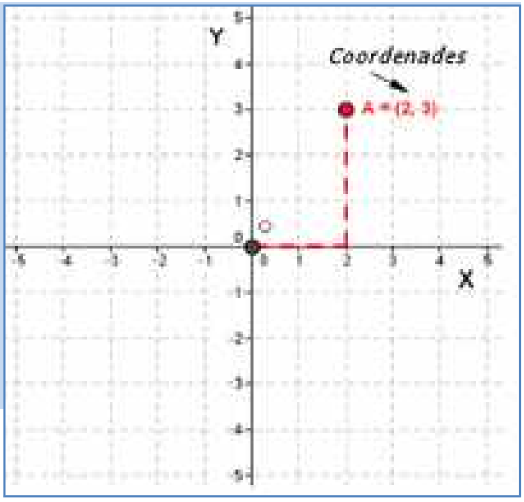


1.2. Coordenades. Representació i identificació de punts

A les activitats anteriors hem descrit com arribaríem a alguns punts a partir d'un sistema de referència. Per a arribar a un punt, partint de l'Origen del sistema de referència, hem recorregut una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt quedarà determinat per un parell de nombres als què anomenarem **coordenades del punt**.

Les **coordenades d'un punt A** són un parell ordenat de nombres **(*x* , *y*)**, sent ***x*** la primera coordenada que l'anomenem **abscissa** i ens indica la quantitat a què el dit punt es troba de l'eix vertical. La segona coordenada és la ***y*** , anomenada **ordenada** i ens indica la quantitat a la què el dit punt es troba de l'eix horitzontal.

Quan aquesta quantitat siga cap a l'esquerra o cap avall la indicarem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta la indicarem amb un **positiu**, de la mateixa manera que fèiem en representar els nombres a la recta.



Exemple 3:

- Al gràfic el punt A té coordenades (2, 3).

Exemple 4:

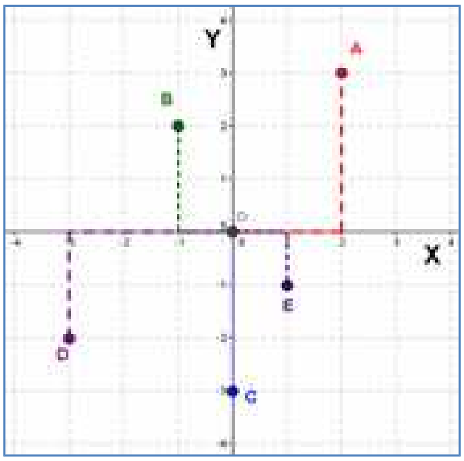
- A l'Activitat resolta 1 el TRESOR es troba al punt de coordenades (3, 2).

En l'Activitat proposada 2 el Cap Sud es troba al punt de coordenades (1, –3), la Badia Nord al punt (2,5) i Platja Lletja al punt (0, –1).

Nota: El cap Sud es troba al quart quadrant i la seua ordenada és una quantitat negativa perquè des de *l'origen ha d'anar cap al Sud, açò és, ha de baixar. I la Platja Lletja es troba a l'eix d'ordenades cap al Sud, per això la seua abscissa és* 0 *i la seua ordenada negativa.*

Activitats resoltes

- Indica quines són les coordenades dels punts marcats al gràfic adjunt:



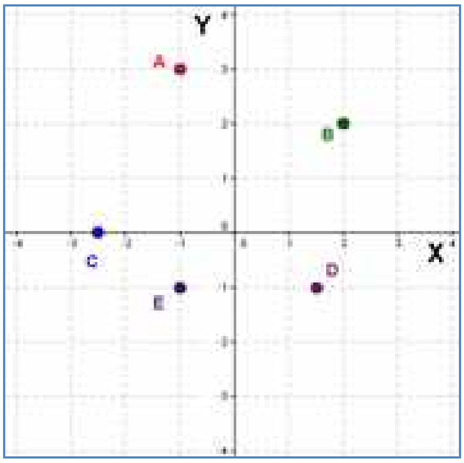
Solució

A = (2, 3); B = (–1, 2); C = (0, –3); D = (–3, –2) i E = (1, –1)

- Dibuixa un sistema de referència cartesià i en ell marca els punts següents:

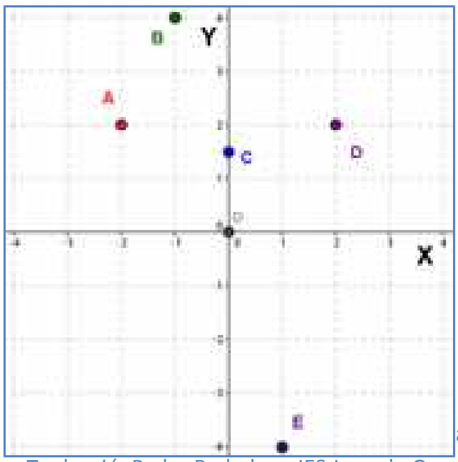
  A = (–1, 3); B = (2, 2); C = (–2’5, 0), D = (1’5, –1) i E = (–1, –1)

Solució



Activitats proposades

3. Indica quines són les coordenades dels punts marcats al gràfic adjunt:



4. Dibuixa un sistema de referencia cartesià i en ell marca els punts següents:

A = (–2, 3); B = (–2, –2); C = (–1’5, 0’5) i D = (0, –1)

2. TAULES I GRÀFIQUES

2.1. Relació entre dues magnituds. Taules de valors

Ja saps que:

Moltes vegades tenim una relació entre dues magnituds que ens ve donada per la correspondència entre les quantitats de cada una d'elles. Aquesta relació pot ser de proporcionalitat, com estudiem al capítol 8, també pot estar donada per una expressió verbal o definida per una fórmula o equació de les que acabem d'estudiar al capítol 9.

D'una relació entre dues magnituds podem obtindre un conjunt de dades, relacionades dos a dos, que si les ordenem en una taula ens facilita la seua interpretació.

Una **taula de valors** és una taula en què situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.

Exemple 5:

- Els 100 metres llisos és una carrera en què s'ha de recórrer 100 metres, lliures de tot obstacle, amb la major rapidesa possible. Es considera, en general, com la competició de carreres de velocitat més important.

Els millors atletes la realitzen en un temps al voltant de 10 segons de duració corrent cada 10 metres en una mitjana d'1 segon.

Longitud (m)	10	20	50	70	90	100
Temps (s)	1	2	5	7	9	10

longitud (m)	temps (s)
10	1
20	2
50	5
70	7
90	9
100	10

Nota: La taula també es pot posar en sentit vertical

En algunes ocasions la relació entre dues magnituds ens la poden indicar directament mitjançant la seua taula de valors

Exemple 6:

- *“La sopa estava molt calenta, així que la deixí refredar durant cinc minuts, la temperatura de la sopa, segons es refredava, la indica la taula següent”*

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Temps (min)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	80	60	50	44	40	39

Exemple 7:

- Les notes de Matemàtiques i Tecnologia, a la segona avaluació, d'un grup de 2n d'E.S.O. van ser les arreplegues a la taula següent:

Matemàtiques	3	5	10	3	5	6	9	7	5	8	3	8	9	1	5	5	4	6	5	9	6	10	6	3	4	1	8	6	9	7
Tecnologia	4	7	7	5	6	8	7	6	4	10	2	8	10	1	5	6	7	10	3	5	8	10	9	3	5	1	6	5	5	8

Altres vegades desconeixem quines són les magnituds amb què estem treballant, tan sols coneixem els valors relacionats, i les solem indicar amb les lletres X i Y

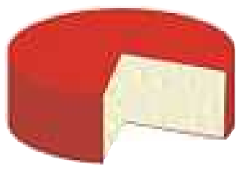
Exemple 8:

- A la taula adjunta tenim la relació entre la magnitud **X** i la magnitud **Y**

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

Activitats resoltes

- El preu d'un quilo de formatge especial de cabra, de la serra de Madrid, és de 18 € i es ven al pes. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que relacione el pes del formatge amb el seu preu.



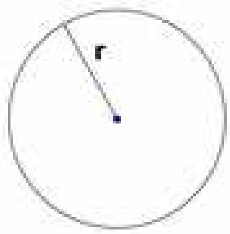
Solució

Com ens demanen sis quantitats diferents triarem algunes que ens pareixen quotidianes fins a un quilo, per exemple, 100 g, 250 g *(quart de quilo),* 500 g *(mig quilo),* 625 g, 750 g *i* 1000 g.

Com el preu i el pes són magnituds proporcionals sabem (capítol 8*) completar la taula.*

Pes (g)	100	250	500	625	750	1000
Preu (€)	1,80	4,50	9	11,25	13,50	18

- Com saps l'àrea d'un cercle es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \pi r^2$, on r és el radi del cercle (utilitzem π = 3,14). Construeix una taula de valors des d'un radi d'1 cm a un de 5 cm, de centímetre en centímetre.



Solució

Ens demanen que elaborem una taula per als valors del radi 1, 2, 3, 4 i 5. Per a això substituïm r *a la fórmula per cada un d'eixos valors i obtenim:*

per a $\boldsymbol{r} = 1 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$; *per a* $\boldsymbol{r} = 2 \rightarrow \boldsymbol{A} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$; …

Radi (cm)	1	2	3	4	5
Àrea (cm²)	3,14	12,56	28,26	50,24	78,50

Activitats proposades

5. Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, que relacione el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum mitjà és de 7 litres cada 100 quilòmetres.

6. Construeix una taula de valors, amb cinc quantitats diferents, en que es relacione el costat d'un quadrat i el seu perímetre.

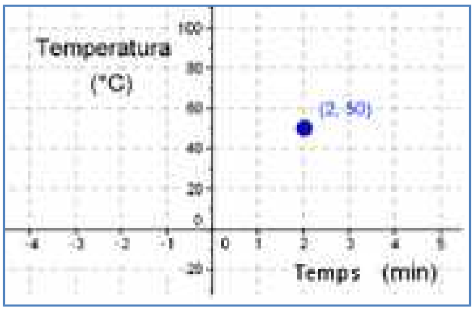
7. Construeix una taula de valors, amb sis quantitats diferents, que represente la situació següent: *"Una companyia de telefonia cobra 6 cèntims d'euro per establiment de telefonada i 3 cèntims per minut parlat"*

2.2. Representant punts. Les gràfiques

Cada parell de dades corresponents d'una relació entre dues magnituds els podem **representar** en un sistema cartesià

Exemple 9:

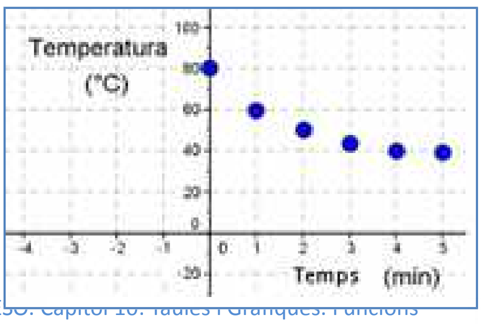
- A la relació de l'exemple de la temperatura de la sopa vèiem que als 2 minuts, la sopa tenia una temperatura de 50 °C.



Aquest parell de nombres són les coordenades d'un punt (2, 50) en un sistema de referència cartesià en què a l'eix d'abscisses representem la magnitud *Temps* mesurada en minuts i a l'eix d'ordenades representem la magnitud *Temperatura* mesurada en graus centígrads.

Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una **gràfica**.

Si representem tots els parells de dades de la taula de valors de l'exemple anterior obtenim la següent gràfica:



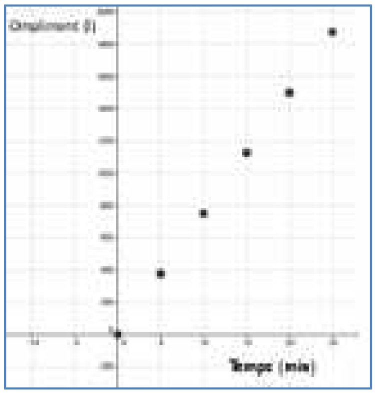
De vegades podríem haver donat moltes més dades en la taula de valors i en representar-los ens quedaria quasi una línia. En aquests casos la **gràfica**, unint **els punts**, estaria constituïda per **una línia** que en moltes situacions seria contínua.

Exemple 10:

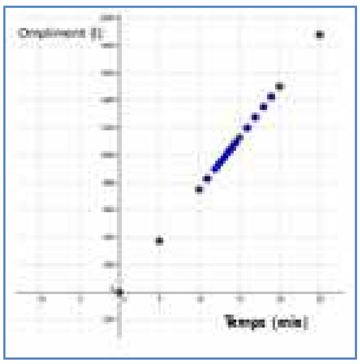
- Si omplim un depòsit d'aigua mitjançant un assortidor que aboca 75 litres d'aigua per minut podem calcular una taula de valors amb la quantitat d'aigua que va tenint el depòsit (ompliment) en relació al temps que ha passat.

temps (min)	0	5	10	15	20	25
ompliment (l)	0	375	750	1125	1500	1875

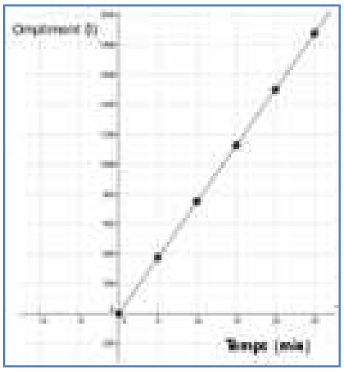
Dibuixem la seua gràfica a partir d'aquesta taula de valors



En aquesta ocasió tindria sentit mesurar la quantitat d'aigua que va tenint el depòsit cada menys temps. Si ho representem podria quedar de la manera següent:



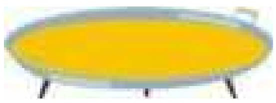
Si representàrem tots els possibles valors ens quedaria la següent gràfica:



Nota: La gràfica comença, al temps 0, en l'instant en què comencem a omplir el depòsit. No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un temps negatiu.

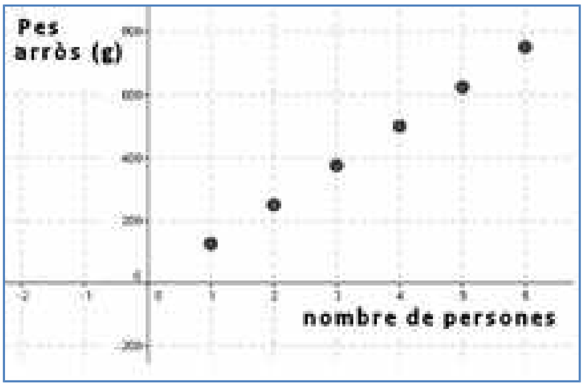
Exemple 11:

- A la situació següent: *"Una paella per a sis persones necessita 750 g d'arròs"* podem construir una taula de valors en què es relacionen el nombre de persones i la quantitat d'arròs que es necessita:



Nombre de persones	1	2	3	4	5	6
Pes arròs (g)	125	250	375	500	625	750

i podem construir una gràfica de punts amb aquests valors:

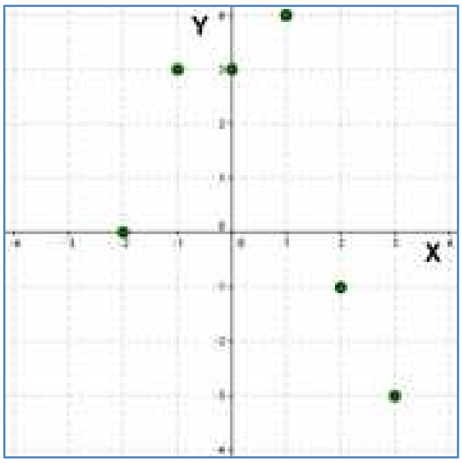


No obstant això no podem calcular valors intermedis (per a dues persones i mitja per exemple), perquè no podem dividir a una persona i, per tant, no té sentit unir els punts de la gràfica.

Exemple 12:

X	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	–1	–3

- També podem representar la relació entre les magnituds **X** i **Y** de l'exemple 8 a partir de la seua taula de valors:

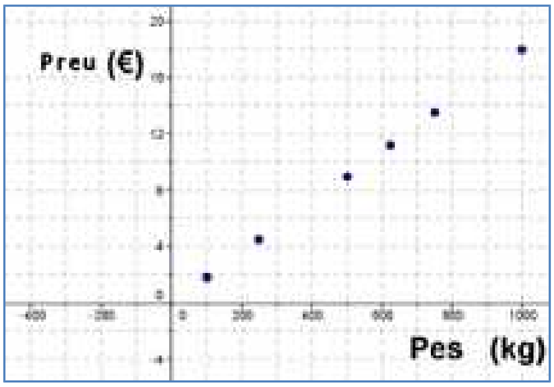


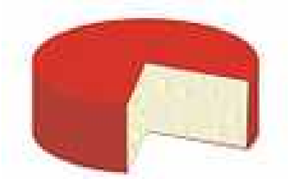
Nota: En aquest cas no podem unir els punts, perquè al no conèixer quines són les magnituds ni quina és la relació entre elles, excepte als punts que vénen determinats per la taula de valors, no podem saber, per exemple, quin valor tindria la magnitud I si la magnitud X valguera 1,5.

Activitats resoltes

- Construeix una gràfica de punts a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta del preu del formatge i, si és possible, uneix els seus punts:

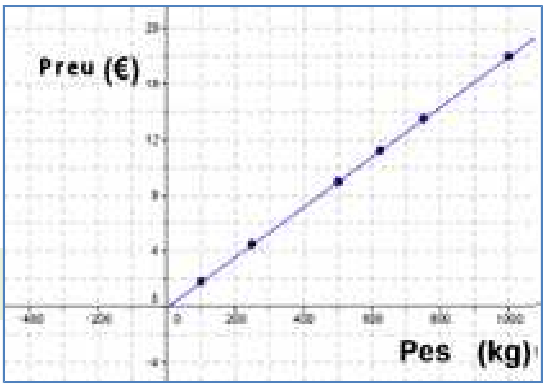
Solució





Sí, en aquest cas és possible perquè podem calcular el preu per a qualsevol pes (és una relació proporcional).

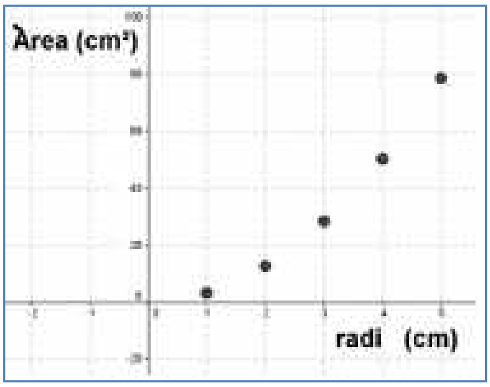
La gràfica quedaria:

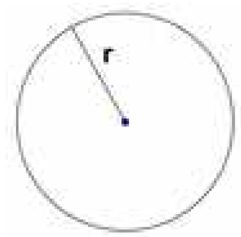


Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un pes negatiu

- Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat resolta de l'àrea del cercle i, si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

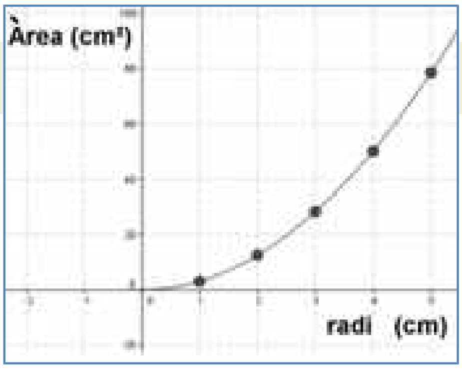
Solució:





Sí, és possible, perquè podem calcular l'àrea per a qualsevol radi.

La gràfica quedaria:



Nota: No hi ha gràfica al tercer quadrant perquè no té sentit un radi negatiu

Activitats proposades

8. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre el consum d'un cotxe i els quilòmetres que recorre sabent que el seu consum és de 7 litres cada 100 quilòmetres. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

9. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada sobre la relació entre el costat d'un quadrat i el seu perímetre. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

10. Construeix una gràfica a partir de les dades de la taula de valors de l'Activitat proposada de la *companyia de telefonia*. Si és possible, construeix una gràfica unint els seus punts.

11. En un rebut del gas de la vivenda de Joan ve la següent distribució de gasto:

Consum de gas: ....0,058 € per kw/h
Impost especial:...........0,002 € per kw/h
Terme fix:.....................4,30 € per mes
Lloguer de comptador.... 2,55 €

La factura era de dos mesos, havia consumit 397 kw/h i el gasto ascendia a 34,97 €. Una altra factura anterior el gasto era de 26,15 € amb un consum de 250 kw/h.

Construeix una gràfica que relacione el consum de gas i el gasto. Té sentit unir els punts?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

2.3. Gràfiques a partir de situacions

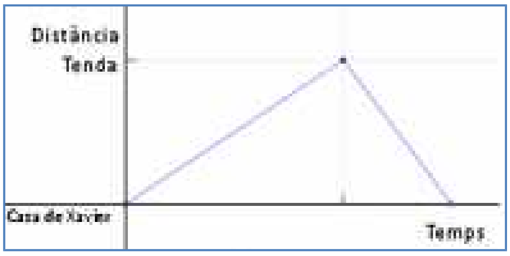
A la majoria de les situacions que hem estudiat fins ara, hem pogut calcular els parells de valors relacionats, perquè es tractaven de relacions de proporcionalitat o de relacions donades per una fórmula que coneixíem.

Açò no sempre ocorre. De vegades ens trobar-nos amb que ens descriuen una situació en què ens donen una informació entre dues magnituds sense aportar-nos a penes quantitats numèriques.

Moltes vegades **una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment** es **pot representar mitjançant una gràfica** de manera directa.

Exemple 13:

- *Xavier ha d'anar a comprar a una botiga un poc allunyada de sa casa, com no té pressa decideix anar fent un passeig. Just quan arriba a la botiga se n’adona de que se li ha oblidat la cartera i no té diners per a comprar. Corrent torna a sa casa a per la cartera.*



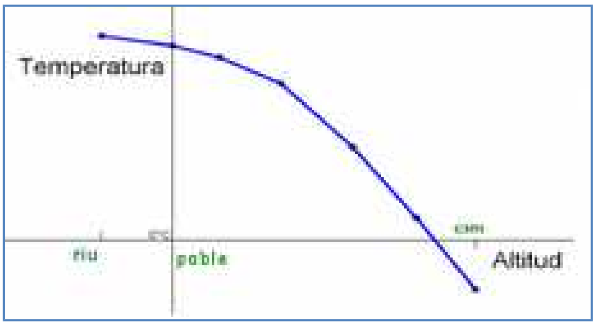
A partir d'aquest enunciat podem elaborar una gràfica com aquesta:

Nota: la distància entre la casa de Xavier i la botiga no la coneixem, però sabem que a la volta ha tardat menys temps que a l'anada.

Exemple 14:

- *La temperatura en una muntanya va descendint segons guanyem en altitud. Al cim arribem a temperatures sota zero.*

Podem representar una situació en què mesurem la temperatura segons pugem des d'un poble al cim d'una muntanya en una gràfica com la següent:



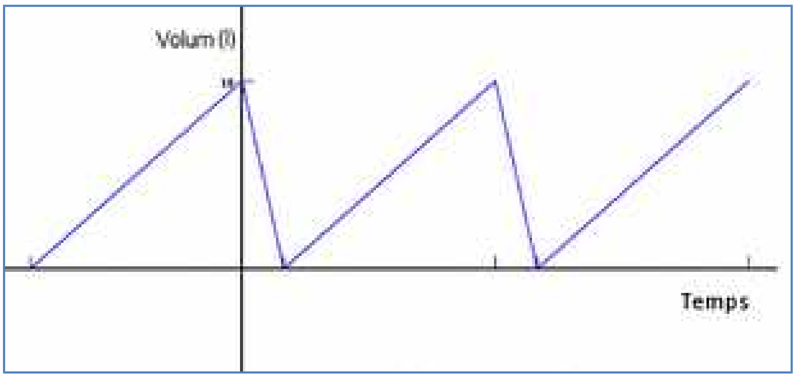
Al sistema de referència cartesià que hem establit, l'origen està al poble i és per això pel que el riu té abscissa negativa, perquè està més davall. Al cim la temperatura és negativa i per això la seua ordenada és negativa.

La temperatura descendeix. La seua gràfica és **decreixent**.

Exemple 15:

- *En un establiment comercial, el depòsit d'aigua dels serveis públics va omplint-se a poc a poc fins a aconseguir els 10 L d'aigua i, en aqueix moment, es buida regularment. Quan està buit es repeteix el procés. A omplir-se tarda el quíntuple de temps que a buidar-se.*

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay



Podem fer una gràfica que reflectisca la variació de la quantitat d'aigua (volum) del depòsit en funció del temps, a partir d'un moment en què el depòsit està ple.

L'origen del nostre sistema de referència cartesià aquesta en un moment amb el depòsit ple, el temps negatiu significa que és anterior a aqueix moment.

En buidar-se el depòsit es té una gràfica **decreixent**. Quan està buit, es té un **mínim**.
En omplir-se, la gràfica és **creixent**, i quan està totalment ple, es té un *màxim*.

Els punts de tall amb els eixos són: Amb l'eix d'ordenades al punt (0, 10), amb l'eix d'abscisses quan el depòsit està buit.

Les **gràfiques** ens donen una visió més clara de la situació que estem estudiant, a més d'elles podem obtindre una **taula de valors** i així fer una **interpretació** més precisa.

Exemple 16:

- A la situació anterior si considerem que tarda un minut a buidar-se el depòsit, tardarà cinc minuts a omplir-se i podem obtindre la següent taula de valors:

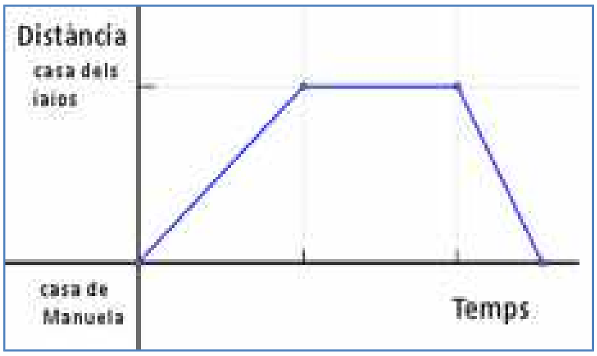
Temps (min)	–5	0	1	6	7	12
Volum (l)	0	10	0	10	0	10

Nota: el valor negatiu del temps vol dir que el depòsit començà a omplir-se amb anterioritat a la situació inicial (origen) en el que el depòsit està ple.

Activitats resoltes

- Manuela va algunes vesprades a casa dels seus iaios on passa una bona estona amb ells. Després torna ràpidament a sa casa per a fer els deures abans de sopar. Construeix una gràfica d'aquesta situació

Solució:



Observa que a la gràfica es té un primer tram que és creixent, el següent és constant i l'últim és decreixent. La gràfica de la funció és contínua (en cap moment és necessari alçar el llapis per dibuixar-la).

- "Aquest estiu Joan va anar amb bicicleta a casa dels seus iaios que vivien en un poble pròxim, a 35 quilòmetres del seu. Als 20 minuts

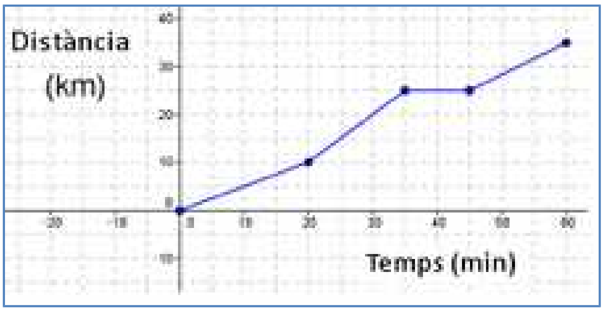
Autors: Concl
Traducció: Pedro P

havia recorregut 10 km; en aqueix moment començà a anar més de pressa i tardà 15 minuts a recórrer els següents 15 km. Parà a descansar durant 10 minuts i, després, emprengué la marxa recorrent els últims 10 km en 15 minuts."

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

Solució

La gràfica seria:



I la taula de valors:

Temps (min)	0	20	35	45	60
Distància (km)	0	10	25	25	35

La gràfica és contínua i sempre creixent.

Activitats proposades

12. *La família de Pere va anar un dia d'excursió al camp amb cotxe; després de passar el dia tornaren i a meitat de camí pararen durant una bona estona a posar gasolina i prendre uns refrescos. Al final arribaren a casa. Construeix una gràfica d'aquesta situació.*

13. *"Maria isqué a donar un passeig, primer va anar a casa de la seua amiga Llúcia, que viu a 200 metres, i tardà 5 minuts a arribar. L'hagué d'esperar altres 5 minuts al seu portal i, després, tardaren 10 minuts a arribar al parc, que estava a 500 m, on berenaren i xarraren durant mitja hora. Finalment Maria tornà a casa ràpidament, perquè li havia cridat sa mare. Només tardà 7 minuts."*

Construeix una gràfica d'aquesta situació i, a partir d'ella, confecciona una taula de valors.

2. 4. Interpretació i lectura de gràfiques

Les gràfiques resumixen de manera eficaç la informació sobre la relació entre dues magnituds, per això se solen emprar molt, tant en situacions de caràcter científic o social, com a la informació que s'empra als mitjans de comunicació. La seua lectura i interpretació són de molta utilitat.

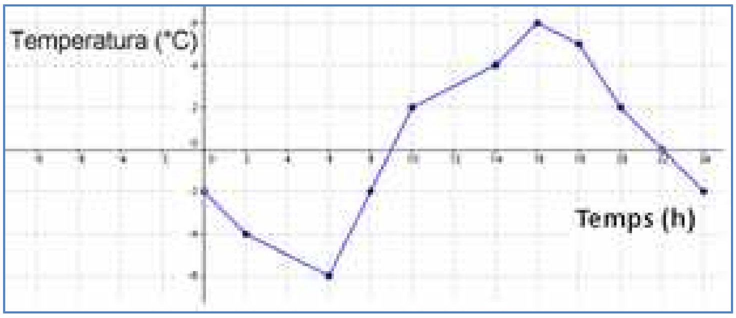
De les coordenades dels punts d'una gràfica podem extraure dades molt interessants per a la comprensió de la situació que ens mostra la gràfica (l'ordenada més alta o més baixa, com es relacionen les magnituds,…)

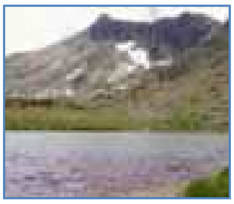
Exemple 17:

- El gràfic adjunt mostra les temperatures al llarg d'un dia d'hivern al pic de Penyalara.

A partir d'aquesta gràfica podem obtindre més informació sobre la situació plantejada.

Així, per exemple podem veure que la temperatura mínima que s'aconseguí aqueix dia va ser de –6 °C a les 6 h del matí, ens ho indica el punt de coordenades (6, –6) que té l'ordenada menor de tots els punts de la gràfica. És un mínim.





- De la mateixa manera podem veure que la temperatura més alta va ser de 6°C, que s'obtingué a les 16 h. El punt de coordenades (16, 6) així ens ho indica. És un màxim.

Podem també afirmar que la temperatura va anar pujant des de les 6 h fins a les 16 h perquè les ordenades dels punts l'abscissa de les quals està entre aqueixes hores van creixent. És creixent.

Així mateix el punt (10, 2) ens indica que a les 10 h del matí feia una temperatura de 2 °C, temperatura que s'aconseguí també a les 20 h, encara que aquesta vegada baixant.

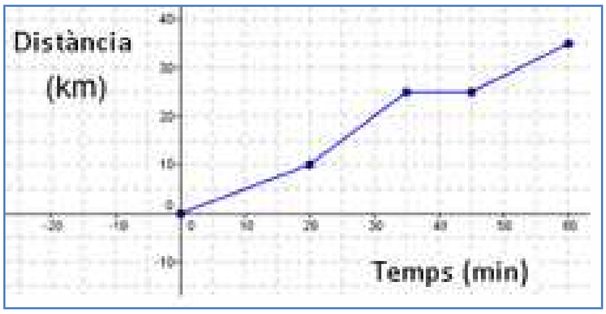
El fet de que de 10 h a 14 h pujara la temperatura menys que en hores anteriors (gràfica menys inclinada) pogué ser degut a causes climatològiques concretes, com que es posara la boira, i després, de 14 a 16 h, hi ha una pujada ràpida (pogué eixir el sol). La gràfica ens indica que una cosa així pogué passar.

A partir de les 16 hores la temperatura baixa, la gràfica és **decreixent**.

La temperatura és de 0 ºC cap a les 9 hores i a les 22 hores. (0, 9) i (0, 22). Són els punts en què la gràfica talla a l'eix d'abscisses. A l'eix d'ordenades el talla en (–2, 0).

Exemple 18:

- L'activitat resolta que ens descriu el recorregut de Joan de camí a casa dels seus iaios. La gràfica que dibuixem i resumeix el viatge era la que figura a la dreta.



viatge de Joan a casa dels seus iaios

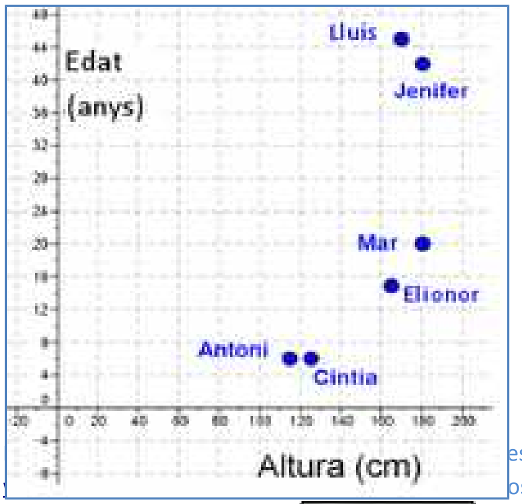
De la gràfica, a més del que ja coneixíem i que ens ajude a dibuixar-la, podem extraure, “d'una simple ullada” més informació.

Per exemple, si mirem a la gràfica podem observar que en el quilòmetre 20 portava 30 minuts pedalejant, o que als 10 minuts havia recorregut 5 quilòmetres, que el tram més ràpid va ser dels 20 als 35 minuts (es veu major inclinació), o que al minut 40 estava parat.

És una gràfica contínua, perquè podem dibuixar-la sense alçar el llapis.

Exemple 19:

- La gràfica següent ens indica la relació entre l'edat i l'estatura dels membres d'una família.



Si observem els punts d'aquesta gràfica veurem que Jenifer i Lluís són els punts (180, 43) i (170, 45) i representen als pares que tenen 43 i 45 anys i mesuren 180 i 170 cm respectivament.

Els xicotets Antoni i Cíntia són bessons de 6 anys i mesuren 115 i 125 centímetres. Mar té 20 anys i mesura 180 cm, representada pel punt (180, 20) i, finalment Elionor mesura 165 i té 15 anys.

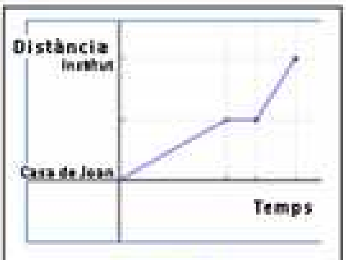
De la gràfica també podem deduir que Mar i sa mare, Jenifer, són els més alts de la família, que Lluís és el de més edat i que Cíntia mesura 10 centímetres més que el seu germà bessó.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

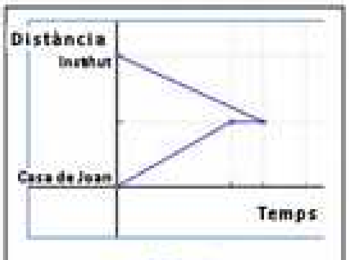
Activitats resoltes

- Observant les gràfiques de davall, determina quin és la que millor s'ajusta a la situació següent:

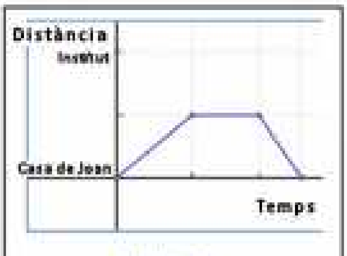
"Antoni va a l'Institut cada matí des de sa casa, un dia es troba amb un amic i es queda xarrant una estoneta. Com se l'ha fet tard ix corrent per a arribar a temps a la primera classe"



gràfica 1



gràfica 2



gràfica 3

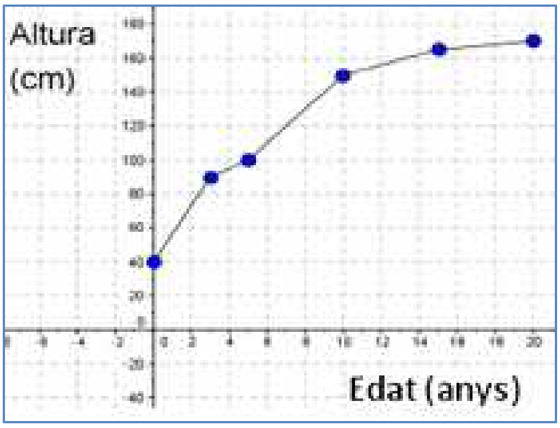
Solució

La gràfica 1 és **la que més s'ajusta** perquè: el segment horitzontal indica que durant un temps xicotet no avançà en distància, açò és que estava parat, i la inclinació del tercer segment és major que la del primer, la qual cosa indica que en menys temps recorregué més distància, açò és, que va ser més ràpid.

La gràfica 2 **no pot ser**, perquè Joan no pot estar en dos llocs distints, al mateix temps, en el mateix moment. Aquesta gràfica indica, per exemple, que en l'instant inicial (temps 0) Joan està en sa casa i a l'institut al mateix temps.

La gràfica 3 **no pot ser**, ja que la gràfica ens indica que Joan torna a sa casa després de xarrar amb el seu amic i no va a l'institut.

- La gràfica següent ens mostra la variació de l'estatura de Laura amb relació a la seua edat.



Observant la gràfica contesta a les preguntes següents:

a) A quina edat mesurava 1 metre?
b) Quant mesurava en nàixer?
c) Quant mesurava als 10 anys? I als 20?
d) En quin període cresqué menys?

Solució:

a) Mirant a la gràfica observem que el punt (5, 100) és el que ens demanen perquè l'ordenada és 100 (1 metre), per tant Laura tenia 5 anys.
b) El punt que representa el naixement és el (0, 40) per tant mesurà 40 centímetres
c) De la mateixa manera observem que als 10 anys mesurava 155 centímetres i als 20 anys 170.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

d) A la gràfica observem que el tram menys inclinat és el que va dels 15 als 20 anys, això vol dir que en aqueix tram Laura cresqué menys.

Activitats proposades

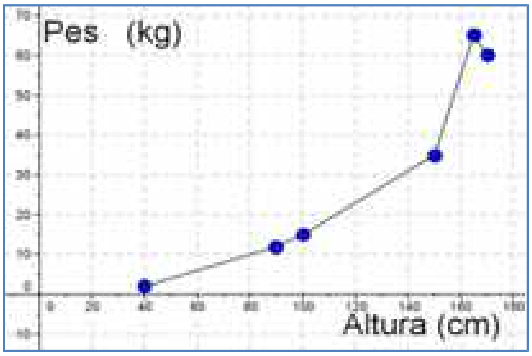
14. La gràfica següent ens mostra la variació del pes de Laura amb relació a la seua estatura al llarg de la seua vida.

Analitza la gràfica, comenta la situació i respon a les preguntes següents:

a) Quant pesava quan mesurava un metre? I quan mesurava 150 cm?

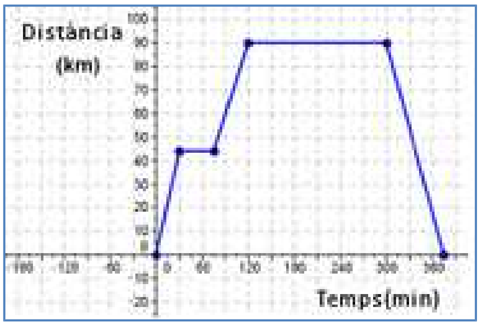
b) Quant mesurava quan pesava 55 kg?

c) A quina altura pesava més? Laura s'aprimà en algun moment?



15. La següent gràfica representa una excursió amb autobús d'un grup de 1r d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez.

Sabent que Toledo està a 90 km de l'Institut i Aranjuez a 45 km:



a) Quant temps pararen en Aranjuez? i a Toledo?

b) Quant temps tardaren a arribar a Toledo? i a tornar a l'Institut?

c) Si isqueren a les 9 h del matí A quina hora tornaren? A les deu i mitja on es trobaven?

d) Fes una descripció verbal del viatge

3. LES FUNCIONS

3.1. La funció com a relació entre dos variables. Variable dependent i variable independent

No és estrany escoltar o llegir a la premsa expressions com: *"el preu està **en funció de** la demanda"*, *"el nombre d'escons obtinguts per un partit polític està **en funció del** nombre de vots obtinguts"*, *"els resultats obtinguts als estudis estan **en funció del** temps dedicat a estudiar"*, o com aquesta: *"l'àrea d'un cercle està **en funció del** radi"*.

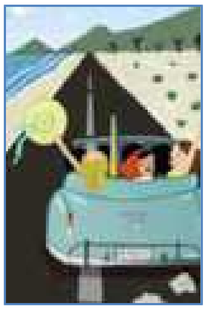
Aquestes expressions indiquen que el preu d'un objecte, el nombre d'escons, els resultats acadèmics o l'àrea del cercle estan relacionats, respectivament, amb la demanda, el nombre de vots rebuts, el temps dedicat a l'estudi o el radi, de tal forma que la primera magnitud esmentada depèn únicament de la segona.

Una magnitud **Y** està **en funció d'una** altra magnitud **X**, si el valor de la magnitud **Y** depèn de **manera única** del valor que tinga la magnitud **X**.

*Nota: la Reial Acadèmia Espanyola, al Diccionari panhispànic de dubtes, diu que **'en funció'** és una locució preposicional que significa **'segons o depenent'***

Exemple 20:

- La temperatura de l'aigua que està en un casset al foc dependrà de la quantitat de calor que reba, així diem que: *la temperatura de l'aigua **T varia en funció de** la calor rebuda* **Q**, o simplement que **T** està en funció de **Q**.



Quan realitzem un viatge amb cotxe podem observar diverses magnituds; estudiarem la relació entre dos d'elles, per exemple la distància recorreguda i el temps transcorregut des de l'eixida.

Segons siga el nostre viatge i el que fem durant el seu recorregut (anar per autopista o per una carretera secundària, parar una estona, tornar,...) la distància recorreguda segons el temps transcorregut serà d'una manera o una altra, però és clar que *la distància està **en funció del** temps*. En cada instant de temps haurem recorregut una distància determinada.

Com hem vist en alguns exemples i activitats anteriors, per exemple en el cas de Joan que veurà els seus iaios, a l'activitat 20, hi ha un període de temps (10 minuts) en el que es deté a descansar i no avança distància, però el temps no es deté. Així ens trobem amb que a diversos valors de la magnitud temps els corresponen el mateix valor de la magnitud distància (els 25 quilòmetres que havia recorregut abans de parar).

No obstant això, a cada valor de la magnitud temps només li correspon un únic valor de la magnitud distància, açò és evident perquè Joan no pot estar en dos llocs distints al mateix instant de temps.

Quan açò ocorre diem que la relació entre les dues magnituds és una funció**.**

Una **funció** és una relació entre dues magnituds numèriques **X** i **Y**, de tal forma que a cada valor de la primera magnitud **X**, li fa correspondre **un únic** valor de la segona magnitud **Y**.

A més ambdues magnituds tenen valors numèrics i varia una en funció de l'altra (la distància varia segons la variació del temps a l'exemple de Joan). Per a abreviar ens anem a referir a elles com a variables.

A les relacions **funcionals,** a les magnituds relacionades les anomenarem **variables.**

Així mateix, al nostre viatge, la distància depèn del temps transcorregut, així que diem que la distància

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

és la variable dependent i el temps és la variable independent.

Nota: Quan tenim una relació funcional entre dos variables en què una és el temps que transcorre, aquesta, normalment, és la variable independent.

Quan tenim dues magnituds, **X** i **Y**, que estan relacionades de tal forma que **Y** és funció de **X**, a la magnitud **Y** l'anomenem **variable dependent**, i a la magnitud **X,** de la que depèn, l'anomenem **variable independent**.

*Nota: Quan tenim una funció entre dos variables que desconeixem, a les magnituds solem anomenar-les **X** i **Y**, sent **X** la independent i **Y** la dependent.*

Exemple 21:

- *"El preu del kg de peres és de 1,80 €."* Aquesta situació ens defineix una relació entre el preu i el pes, de tal manera que el preu que paguem depèn del pes que comprem. La relació és una funció, el pes i el preu són les variables, el pes és la variable independent i el preu la variable dependent.

Exemple 22:

- *La relació entre dos variables ve donada per la funció* ***y = 2x – 1***.

En aquest cas **Y** està en funció de **X**, perquè per a cada valor **x** de la variable **X** hi ha un únic valor **y** de la variable **Y**, sent la variable **X** la variable independent i la variable **Y** la dependent.

*Nota: Quan tenim una funció entre dos variables que desconeixem, solem anomenar-les **X** i **Y**, i als valors que prenen aquestes variables les denominarem **x** i **y** respectivament. Així quan la magnitud **X** pren el valor **x**, la magnitud **Y** val **y**.*

Activitats resoltes

- A les següents relacions digues si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

a) El consum d'un cotxe i la velocitat a la que circula.
b) El perímetre d'un polígon regular i la longitud del seu costat.
c) El nombre d'habitants dels pobles i la temperatura mitjana a l'estiu.
d) L'altura i el nombre de germans dels estudiants de 1r d'E.S.O.

Solució

a) El consum d'un cotxe sí que està en funció de la velocitat a la que circula. En aquest cas el consum és la variable dependent i la velocitat la variable independent.

b) També ací es dóna una relació funcional, el perímetre és funció del costat. El *perímetre és la variable dependent i el costat la independent.*

c) *En aquest cas no hi ha una relació funcional perquè hi ha pobles grans i xicotets i no tenint a veure amb la temperatura mitjana en estiu que faça en ells.*

d) *Tampoc hi ha relació funcional en aquest cas, pots comprovar-ho a la teua classe.*

Activitats proposades

16. En les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

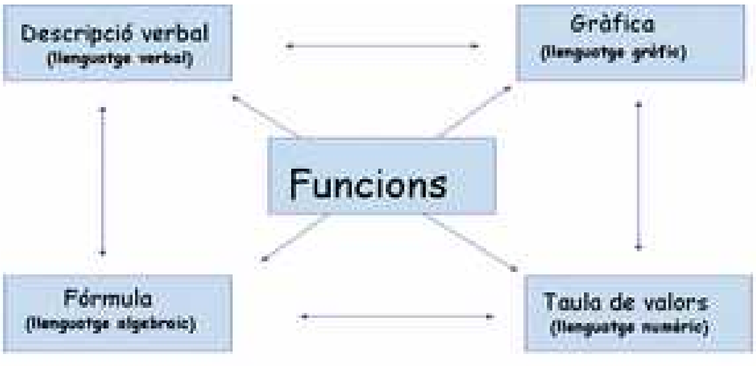
a) El consum d'un cotxe i la distància recorreguda.
b) La velocitat a què circula un cotxe i l'edat del conductor.
c) El nombre d'habitants d'un barri d'una ciutat, o un poble, i el nombre de col·legis públics que hi ha allí.
d) La temperatura d'un lloc i l'hora del dia.
e) El nombre de costats d'un polígon i el nombre de diagonals que té.

17. Proposa tres exemples, diferents de tots els que has estudiat fins ara, de relacions entre dues magnituds en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

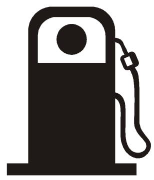
3.2. La funció: taula de valors, gràfica, expressió verbal i expressió algebraica

La gran majoria de les situacions que hem estudiat fins a aquest moment són relacions funcionals en què hi ha dos variables, i una depèn de l'altra de manera única; açò és, són ***funcions.***

A més hem vist que les ***funcions*** es poden representar de diverses maneres; com una ***descripció verbal*** que descriu una situació, com una ***taula de valors*** que ens indica els valors corresponents de la relació, com una ***gràfica*** que ens visualitza la situació i com una ***expressió algebraica*** (fórmula) que ens relaciona les dues magnituds.



Exemple 23:



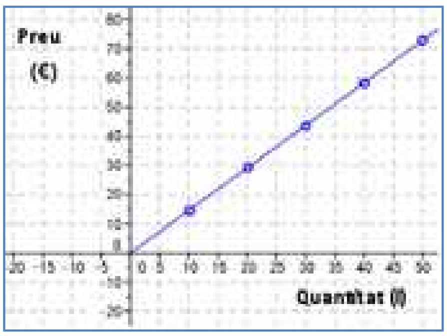
- Si observem el preu de la gasolina en un dia concret en omplir el depòsit d'un cotxe podem estudiar la relació entre el nombre de litres de gasolina i el que paguem.

El preu que paguem és funció de la quantitat de gasolina que posem i pot vindre donada de les maneres següents:

- Descripció verbal: *"El litre de gasolina se situà a la primera setmana d'agost en 1,46 €".*
- Expressió algebraica (fórmula): $p = 1{,}46 \cdot l$ (on p és el preu i l és la quantitat de gasolina)
- Taula de valors:

Quantitat (l)	10	20	30	40	50
Preu (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gràfica:



Exemple 24:

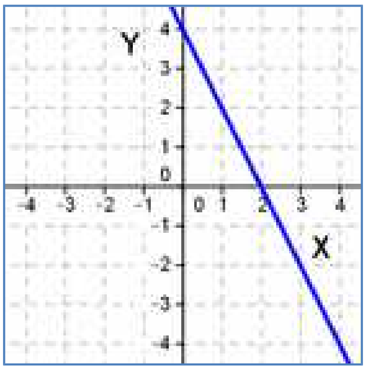
- Quan tenim una funció que relaciona dues magnituds que desconeixem, que les anomenem **X** i **Y**, la podem tindre definida per una fórmula (expressió algebraica).

Per exemple $y = 4 - 2 \cdot x$

De la que podem elaborar una taula de valors com la següent:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	–2	–4

i, a partir d'ella, dibuixar una gràfica:



En aquest cas sí que podem unir els punts, perquè mitjançant la seua fórmula per a qualsevol valor ***x*** de la variable **X** podem calcular el valor **y** de la variable **Y**.

Podríem donar, també, una descripció verbal que definisca la relació entre aquestes variables, per exemple: "*A cada nombre li corresponen quatre unitats menys el doble del nombre*"

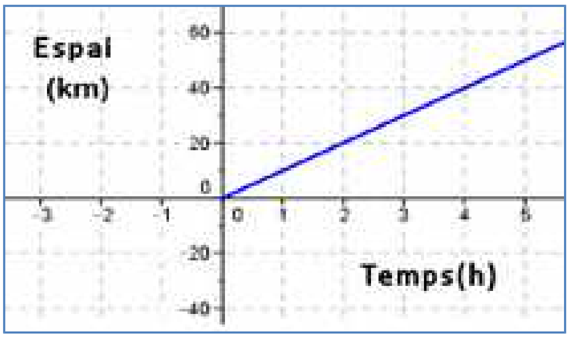
Nota: Moltes vegades no és possible, al nostre nivell, trobar la fórmula que defineix una funció donada com una taula de valors, la seua descripció verbal o la seua gràfica.

Activitats proposades

18. Expressa de forma gràfica i verbal la funció definida per la següent taula de valors:

Edat (anys)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177

19. Donada la funció definida a la gràfica del costat, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica.



20. Expressa de forma gràfica i mitjançant una taula de valors la funció definida per la fórmula següent: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$

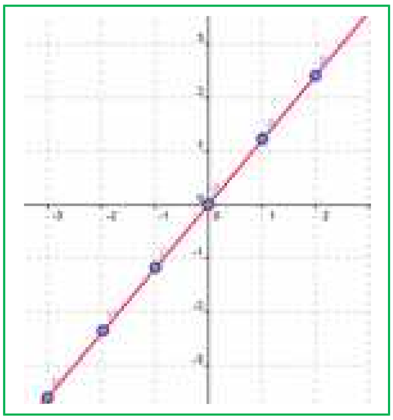
3.3. Una funció important. La funció lineal o de proporcionalitat directa

Recorda que:

Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:



- *Representa gràficament la relació de proporcionalitat donada a la taula següent:*

Magnitud A (*x*)	–3	–2	0	1	2
Magnitud B (*y*)	–3'6	–2'4	0	1'2	2'4

En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k = \frac{-3'6}{-3} = \frac{-2'4}{-2} = \frac{1'2}{1} = \frac{2'4}{2} = 1'2$$

La relació es defineix així: $y = 1'2x$.

La representació gràfica al pla cartesià de dues **magnituds directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

Una **funció lineal** és la que té la fórmula $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

Una funció lineal correspon a una relació de proporcionalitat directa.

Per tant, la relació de proporcionalitat directa és una funció **lineal** de la forma $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

Activitats proposades

21. Maria vol comprar una cinta que val a 0'7 euros el metre. Representa gràficament el que haurà de pagar segons els metres de cinta que compre.

22. Representa gràficament les funcions:

a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = -2x$, *e)* $y = -3'2x$, *f)* $y = -1'2x$

23. Indica a les funcions anteriors quines són creixents i quines són decreixents. Raona la resposta.

24. Joan camina molt de pressa, recorre 5 km a l'hora. Representa gràficament el passeig diari de Joan relacionant temps amb espai recorregut. Escriu la fórmula de la dita funció. És una recta? És una funció lineal?

25. En una urbanització es consumix generalment al dia tres mil litres d'aigua. Representa gràficament el consum d'aigua al llarg d'una setmana. Escriu la fórmula de la dita funció. És una recta? És una funció lineal?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

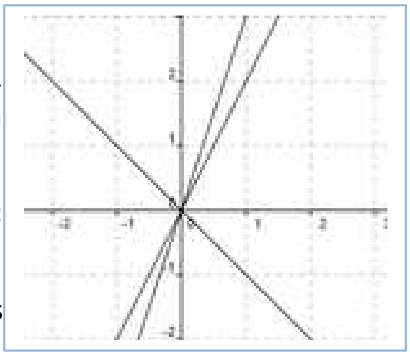
3.4. Utilització de *Geogebra* per a la interpretació del pendent d'una funció lineal

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa **Geogebra** per a representar funcions lineals les gràfiques de les quals són rectes.

Es representen rectes amb el mateix pendent per a observar la relació que existeix entre elles i determinar la propietat que les caracteritza.

Activitats resoltes

Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb diferents pendents.



- Obri el programa Geogebra i en **Visualitza** activa **Quadrícula** perquè siga més fàcil analitzar les funcions.
- A la finestra de davall de la pantalla, en **Entrada**, escriu: y = 2*x*. Immediatament apareix dibuixada aqueixa funció a la finestra gràfica.
- Escriu novament en **Entrada** altres rectes amb diferents pendents: $y = 3x$, $y = –x$...
- Dibuixa totes les funcions lineals que vulgues i respon a les següents preguntes.
  - Quan el pendent és positiu, què ocorre en créixer el pendent? I en disminuir?
  - Quan el pendent és negatiu, què ocorre en créixer el pendent en valor absolut? I en disminuir?
- Totes les funcions de la forma $y = mx$ són rectes. Són funcions lineals. Totes elles passen per l'origen (0, 0).
  - Quan l'abscissa val 1, quant val l'ordenada?

Activitats proposades

26. Utilitza *Geogebra* per a novament representar gràficament les funcions:
a) $y = 5x$, *b)* $y = 1'5x$, *c)* $y = 0'5x$, *d)* $y = –2x$, *e)* $y = –3'2x$, *f)* $y = –1'2x$

27. Indica a les funcions anteriors les seues característiques: a) quines són creixents i quines són decreixents. b) Són contínues? c) Busca els punts de tall amb els eixos de coordenades. d) Hi ha màxims o mínims? Raona les respostes.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

CURIOSITATS. REVISTA

Descartes i el sistema de referència cartesià

El sistema de referència cartesià s'anomena així en honor al filòsof, científic i matemàtic francés ***René Descartes*** *que visqué entre els anys 1596 i 1650. Descartes volgué fonamentar el seu pensament filosòfic en la necessitat de prendre un «punt de partida» sobre el qual edificar tot el coneixement. En Geometria, Descartes també començà prenent un "punt d'origen" per a poder representar la geometria plana.*

Principi del colomar o Principi de Dirichlet

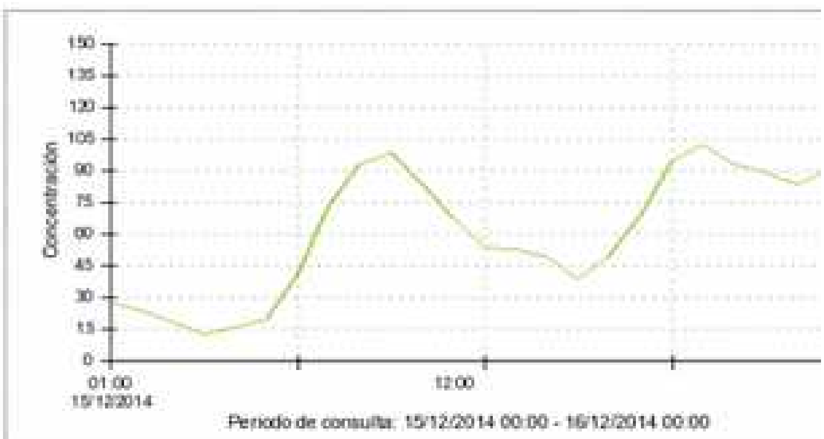
"Si una bandada de 21 coloms es fica per 20 forats d'un colomer, és segur que al menys dos coloms s'han ficat al mateix forat"

Estàs d'acord?

Aquest principi tan senzill permet resoldre altres problemes, com per exemple:

Es pot assegurar que ara mateix hi ha a Madrid al menys 20 persones amb el mateix nombre de pèls al cap?

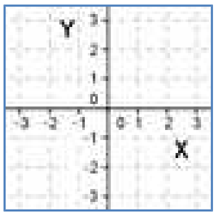
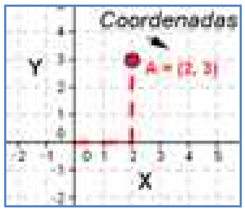
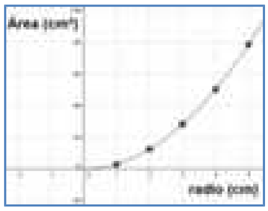
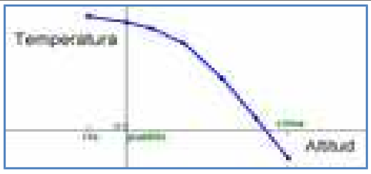
Per raonar la resposta considera que ningú té més de 200 mil pèls al cap i que a Madrid hi ha uns 4 milions de persones.



La gràfica indica l'evolució del NO_2 a l'estació de qualitat de l'aire de Quatre Camins de Madrid al llarg d'un dia, el 16 de desembre de 2014. Observa com puja a les 9 del matí a la entrada del treball i torna a pujar a l'eixida, al voltant de les 6 de la vesprada.

A la pàgina de la Comunitat de Madrid pots conèixer com està la qualitat de l'aire en cada moment, i saber quins són els valors llindars que no es deuríem sobrepassar.

RESUM

		Exemples
Sistema de referència cartesià	Dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades **Eixos**, que es tallen en un punt anomenat **Origen**. L'eix horitzontal es denomina **eix d'abscisses**, i a l'eix vertical, **eix d'ordenades**.	
Coordenades	Es un parell ordenat de nombres (*x*, *y*), que ens indica on es troba el punt respecte al sistema de referència cartesià que estem utilitzant.	
Taula de valors	Taula a la que situem ordenadament les quantitats corresponents de dues magnituds relacionades.	Temps (min): 0, 30, 80, 100 Distància (km): 0, 10, 20, 30
Gràfica	Si representem en un sistema de referència cartesià tots els parells de dades d'una taula de valors obtenim una gràfica.	
Gràfiques a partir de situacions	Una situació quotidiana o relacionada amb fenòmens naturals descrita verbalment es pot representar mitjançant una gràfica	
Funció	Una magnitud **Y** està en funció d'una altra magnitud **X**, si el valor de **Y** depèn de manera única del valor que tinga **X**.	La temperatura de l'aigua **T** varia en funció de la calor rebuda **Q**
Variables	A les relacions funcionals, a les magnituds variables relacionades les anomenem només variables	*"El preu del kg de peres és 1,80 €."* el pes i el preu són les variables
Variable dependent i independent	Quan tenim dues magnituds variables que estan relacionades de tal forma que **Y** és funció de **X**, a la magnitud **Y** se la denomina variable dependent, i a la magnitud **X** se la denomina variable independent.	*El consum d'un cotxe i la velocitat a què circula.* El consum és la variable dependent i la velocitat la variable independent
Variables i valors	Quan tenim una funció entre dos variables **X** i **Y**, als	Quan la magnitud **X** pren el

	valors que prenen aquestes variables els denominem ***x*** i ***y*** respectivament.	valor ***x***, la magnitud **Y** val ***y.***

EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO

El pla cartesià. Coordenades

1. Representa els següents parells ordenats en un pla cartesià:

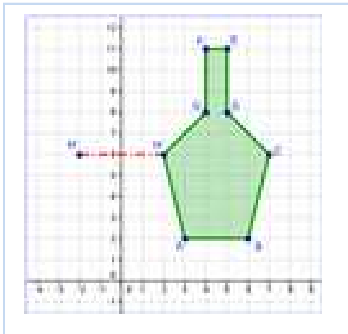
$I = \left(\frac{3}{2}, -3\right)$ $J = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $K = (6, 3'5)$ $L = \left(-\frac{3}{4}, -0'5\right)$

2. Sense representar els següents punts, digues en quin quadrant estan:

$M = \left(4, -\frac{5}{2}\right)$ $N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $P = \left(-6, -\frac{9}{5}\right)$ $Q = \left(-\frac{7}{2}, 5\right)$

$R = (2, 0)$ $S = (-7, 0)$ $T = \left(0, -\frac{7}{2}\right)$ $U = (0, 7)$ $O = (0, 0)$

3. Observa l'atuell següent:



a) Indica les coordenades cartesianes de cada punt marcat de l'atuell.

b) Imagina que l'eix I és un espill i el punt H' és el reflectit del punt H per aquest espill. Dibuixa cada punt reflectit de l'atuell i dibuixa l'atuell reflectit.

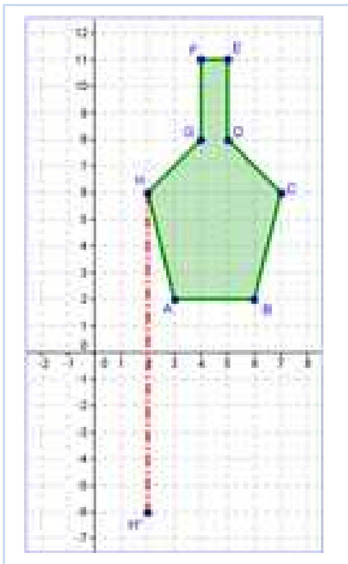
c) Anomena cada vèrtex del nou atuell. És un polígon? En cas afirmatiu, Quin tipus de polígon? Com s'anomenaria?

d) En quin quadrant t'ha quedat el nou atuell?

En aquest cas, els dos atuells són simètrics entre si, respecte a l'eix d'ordenades (eix Y).

e) Indica les coordenades cartesianes de cada punt de l'atuell reflectit.

Observa les coordenades dels punts reflectits dels dos atuells i indica la relació que hi ha entre ells.



4. Continuem amb l'atuell de l'exercici anterior.

a. Imagina que l'eix X és ara un altre espill, i el punt H'' és el reflectit de H per aquest nou espill.

b. Dibuixa al teu quadern el nou atuell reflectit i anomena cada un dels seus vèrtexs.

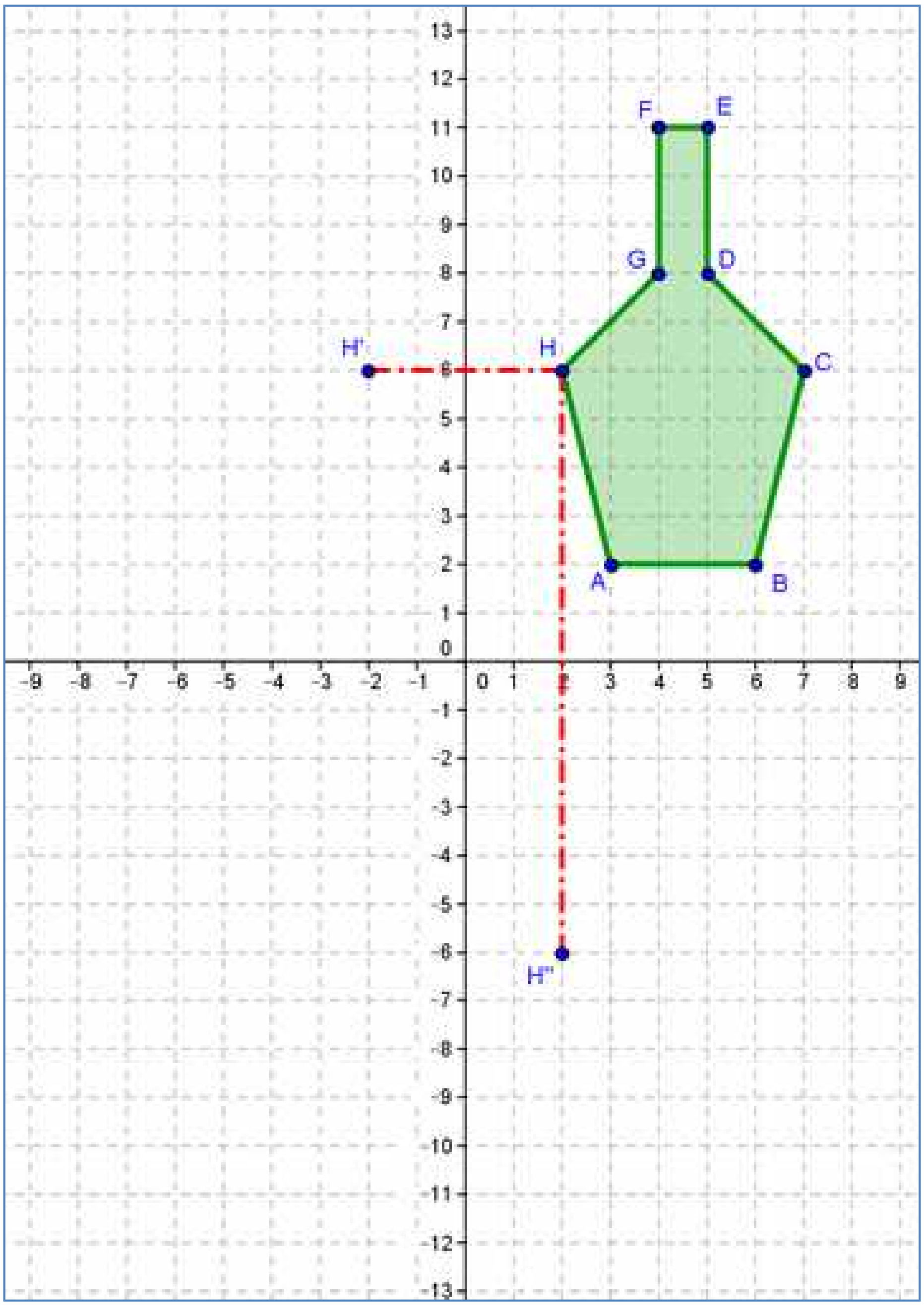
c. En quin quadrant t'ha quedat el nou atuell?.

En aquest cas, els dos atuells són simètrics entre si, respecte a l'eix d'abscisses (eix X).

d. Indica les coordenades cartesianes de cada punt de l'atuell reflectit.

e. Observa les coordenades dels punts reflectits dels dos atuells i indica quina relació hi ha entre ells.

Material fotocopiable



Atuell

5. Ajudant-te de regla, esquadra i cartabó dibuixa en un foli en blanc un sistema de referència cartesià i els eixos amb divisions d'1 centímetre.

a) Representa els punts $M = (3, 4)$ $N = (–1, 1)$ i $R = (2, –4)$

b) Dibuixa un altre sistema de referència cartesià, amb els eixos paral·lels als anteriors i que es tallen al punt (1, –1) del sistema anterior.

c) Escriu les coordenades dels punts M, N i R respecte al nou sistema cartesià.

d) Han canviat els punts? Descriu amb paraules el que ha passat.

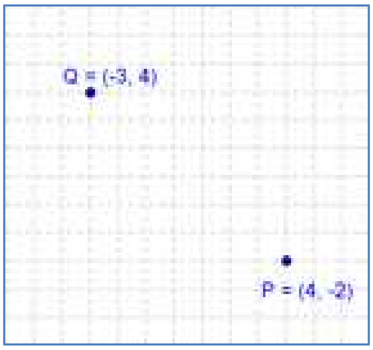
6. Dibuixa un sistema de referència cartesià en un paper mil·limetrat.

a) Representa un punt la distància del qual a l'eix d'abscisses siga de 3,3 cm, i la distància a l'eix d'ordenades siga de 1,9 cm.

b) Existeix més d'una solució? En aquest cas, representa tots els punts que complisquen aquesta condició i indica les seues coordenades cartesianes.

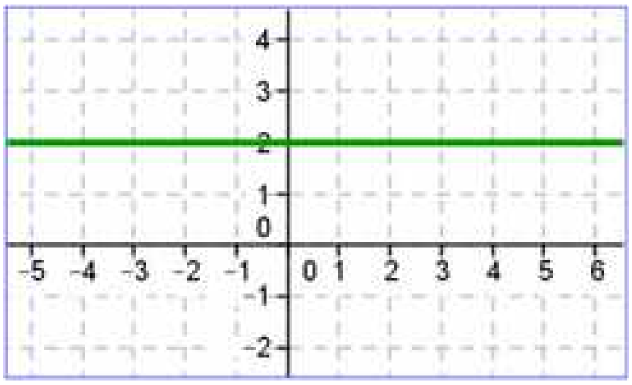
c) Com són aquests punts entre si dos a dos?

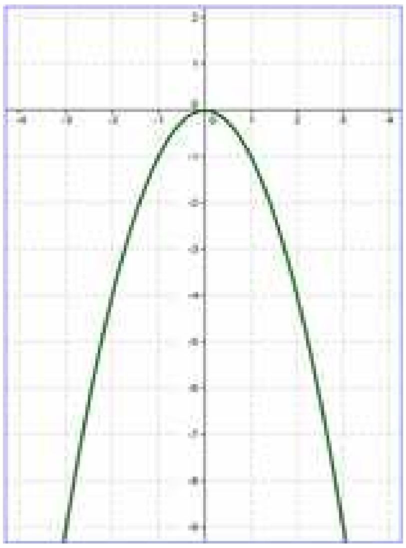
7. Representa al teu quadern un sistema de referència cartesià perquè els punts P i Q tinguen les coordenades que s'indiquen.

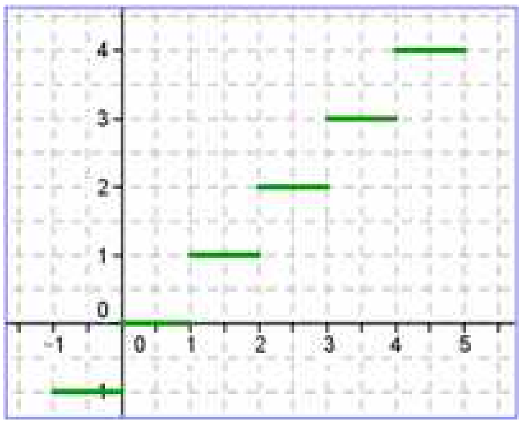


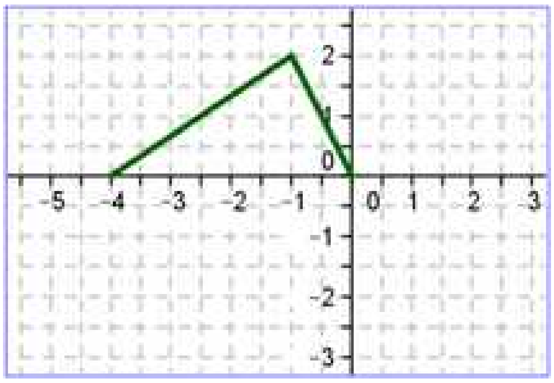
Taules i Gràfiques

8. Construeix taules de valors, amb cinc quantitats diferents, corresponents a les quatre gràfiques següents:

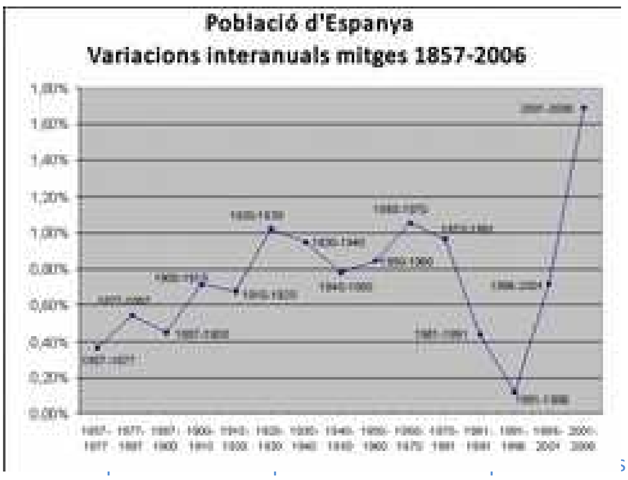








9. L'Institut Nacional d'Estadística ha publicat el següent balanç de l'evolució demogràfica de la població espanyola, mitjançant la gràfica següent:



Variacions interanuals mitges de la població espanyola entre 1857 i 2006.

a) Entre 1970 i 1991 la població creix o decreix?
b) Entre 1920 i 1940 la població creix o decreix?
c) I entre 1991 i 2001?
Raona sobre el significat d'aquesta gràfica.

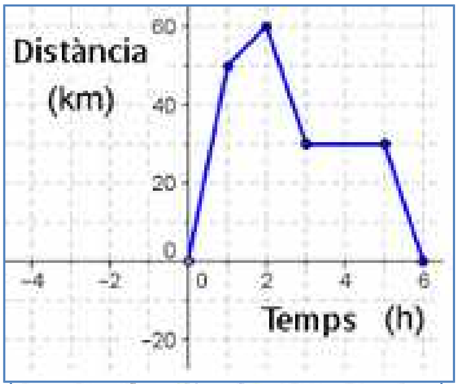
a) Els percentatges a l'eix d'ordenades, què signifiquen?

b) En algun moment la població ha deixat de créixer, o simplement creix més lentament?

c) Indica possibles motius que expliquen aquesta gràfica

10. Joan ix de sa casa amb bicicleta i fa el recorregut que mostra la gràfica:

a. A quina distància de sa casa arriba?
b. Quant temps està parat?
c. Quant tarda a tornar?
d. A les dues hores a quina distància està de sa casa?
e. Quant temps tardà a recórrer 50 km?
f. Quan va més de pressa? I Quan més lentament?



11. La gràfica ens mostra una relació entre dues magnituds.

A. Inventa una situació que puga ser representada per aquesta gràfica.

B. Assenyala quals són les magnituds i en quines unitats es mesuren.

C. Indica, als eixos, els nombres adequats.

D. Descriu, a partir de les teues dades, la situació que has inventat.

12. El fenomen dels incendis forestals s'ha convertit en un dels majors problemes ecològics que pateixen les nostres muntanyes degut a l'elevada freqüència i intensitat que ha adquirit a les últimes dècades. Els que han ocorregut a Madrid i el nombre d'hectàrees cremades ens ho dóna la taula següent:

Hectàrees cremades (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Any	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Fes una gràfica amb aquests resultats.

13. Construeix taules de valors, amb quatre quantitats diferents, que ens expressen les relacions següents:

a) El pes i el preu de la mel de L'Hiruela (Madrid), sabent que el quilo val 7 €

b) Un nombre i la meitat del mateix nombre.

c) El perímetre d'un triangle equilàter i la mesura del seu costat.

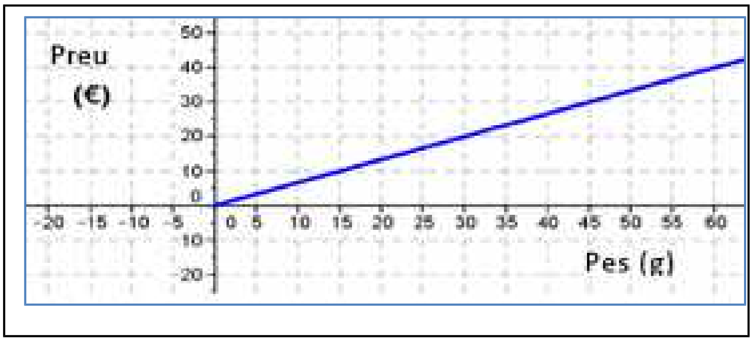
Les funcions

14. A les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quines són les variables dependents i independents.

a) La temperatura del puré a llarg del temps.
b) El preu d'una camiseta i el seu color.
c) L'àrea d'un quadrat i el seu costat.
d) El preu de les taronges que hem comprat i el seu pes.
e) El volum d'una esfera i el seu radi.

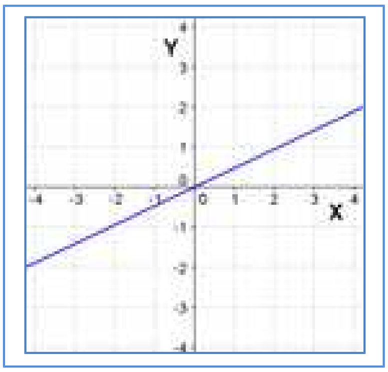
15. Proposa dues situacions diferents de totes les que has estudiat fins ara, de relacions entre dos variables en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

16. Donada la funció definida en la gràfica de baix, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica.



Quina és la variable dependent? I la independent?

Té sentit prolongar la gràfica pel tercer quadrant?

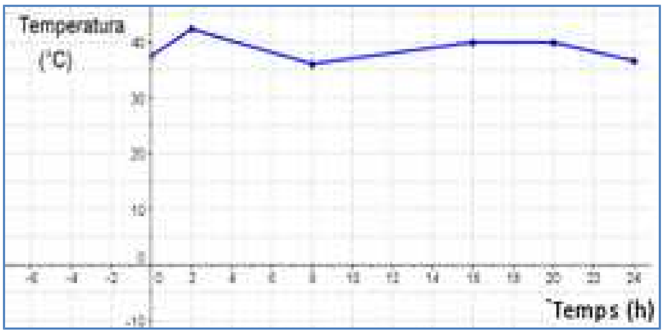


17. Expressa de forma gràfica, mitjançant una taula de valors i mitjançant una descripció verbal, la funció definida per la fórmula següent: $d=100 \cdot t$ Quina és la variable dependent?, i la variable independent?

18. Donada la funció definida en la gràfica del costat, expressa-la com a taula de valors, mitjançant una descripció verbal i de forma algebraica. Quina és la variable dependent?, i la independent?

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

19. La següent gràfica descriu l'evolució de la temperatura d'un malalt durant un dia.



Mirant la gràfica indica:

a) Quina temperatura tenia a les quatre del matí? I a les dotze de la nit?
b) A quines hores tenia quaranta graus de febra?
c) A quina hora tingué més temperatura? De quant era?
d) A quina hora tingué menys temperatura? De quant era?
e) Descriu amb paraules aquesta situació.

20. Una banyera de 500 litres es buida mitjançant un engolidor que desaigua 25 litres cada minut. Fes una taula de valors amb els deu primers minuts de buidatge. Representa gràficament la funció que relaciona la quantitat d'aigua que hi ha en la banyera amb el temps transcorregut des que comença a buidar-se. Indica quina és la variable dependent i quina la independent.

21. En les següents relacions assenyala si són o no funcions i, en cas de ser-ho, indica quals són les variables dependents i independents.

a) La temperatura d'un malalt a llarg del temps.
b) El preu d'un cotxe i el seu color.
c) El volum d'un líquid i el seu pes.
d) La distància a l'Institut i el temps emprat.
e) La longitud d'un moll i el pes penjat en ell.

22. Proposa dues situacions diferents de totes els que has estudiat fins ara, de relacions entre dos variables en què una siga funció de l'altra. Indica a més en cada cas quina és la variable dependent i quina la independent.

23. En una papereria 10 llapis costen 2,5 €, fes una taula de valors, dibuixa la seua gràfica i escriu la seua expressió algebraica. Quina és la variable dependent? i la variable independent?

24. Joan, un altre dia, fa un passeig amb la seua amiga Lluna. Ixen de casa de Lluna per un camí pla durant un temps, descansen durant una estona i, després tornen a casa de Lluna pel mateix camí però més lentament. Fes una gràfica (temps, distància) que descriga aquesta situació.

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

1) El punt de coordenades A = (–5, –6) està situat al:

a) primer quadrant b) segon quadrant c) tercer quadrant d) quart quadrant.

2) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'eix d'abscisses és l'eix OY
b) L'eix d'ordenades és vertical
c) L'eix d'abscisses és perpendicular a l'eix d'ordenades
d) L'eix d'ordenades és l'eix OY

3) Els punts de coordenades A = (0, –5), B = (0, 4), C = (0, –7), D = (0, 8) estan tots ells al:

a) eix d'ordenades b) primer quadrant c) eix d'abscisses d) segon quadrant

4) Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

Persones	1	4	8	
Kg de menjar	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

5) La següent taula de valors pot correspondre a:

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

a) una proporcionalitat directa. b) una proporcionalitat inversa

c) la relació entre el costat d'un quadrat i la seua àrea. d) la relació entre el radi del cercle i la seua àrea

6) Indica en els casos següents aquell que NO és una funció:

a) La temperatura d'un malalt al llarg del temps. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud d'una circumferència com a funció del radi. d) L'àrea d'un cercle i el seu color.

7) Indica quina afirmació és falsa:

a) L'origen de coordenades és la intersecció entre l'eix d'abscisses i el d'ordenades

b) En una funció a cada valor de la variable independent li correspon un únic valor de la variable dependent

c) En una funció a cada valor de la variable dependent li correspon un únic valor de la variable independent

8) Escriu una taula de valors de la funció y = 2x – 3.

x	1	2	3	4
y				

a) –1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) –1, –7, –9, –11. d) –1, 0, 3, 6.

9) Dibuixa la gràfica de la funció: Àrea del quadrat = Costat al quadrat.

PER AL PROFESSORAT

El concepte de funció és un dels conceptes bàsics en Matemàtiques i, al mateix temps, un dels més difícils d'adquirir pels estudiants de secundària. Açò no és estrany si analitzem com ha evolucionat el dit concepte al llarg de la història.

A la història de les Matemàtiques comença a plantejar-se el concepte de funció cap al segle XIV i ha sigut un de què ha presentat una més dificultat, sent al segle XX un dels eixos de la investigació matemàtica. Inclús per als matemàtics del segle XVIII no estava molt clar el concepte de funció. Per exemple, en un article de *Jean Bernoulli* publicat en 1718 es troba aquesta primera definició: *"Una funció d'una variable és definida ací com una quantitat composta d'alguna manera per una variable i constants"*. Els matemàtics estaven disposats a acceptar dos tipus de funcions, les que venien donades per una fórmula o les que es traçaven arbitràriament dibuixant la seua gràfica. La idea abstracta de funció com a correspondència tardà un temps a aparèixer. Va ser *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768 – 1830) *a* la seua obra *"La teoria analítica de la calor"* el motor per a l'aprofundiment del concepte de funció. Recordem que quan Fourier exposà el seu desenvolupament d'una funció en sèrie trigonomètrica, començà a discutir-se sobre què era una funció, quines podien ajustar-se a aqueix desenvolupament, i aquest fet va ser un catalitzador en la història de les Matemàtiques que, entre moltes altres coses, portà a formalitzar aquest concepte. La noció moderna de funció és molt recent, podem datar-la en l'obra de *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805-1859) de 1837, on apareix la noció de funció com a correspondència, independent d'una representació analítica o geomètrica.

Al llarg de la història, aquest concepte s'ha anat desenvolupant a partir de l'estudi de fenòmens del món que ens rodeja i ha sigut expressat en distints llenguatges —verbal, gràfic, algebraic i numèric—. Per tant, per a poder aconseguir una aproximació significativa al sentit de les funcions, és necessari estudiar aquest concepte des de distints aspectes, utilitzant diferents llenguatges i treballant en distintes situacions.

Ja que les relacions funcionals es troben ben sovint al nostre entorn, l'estudi de funcions, pels estudiants de 1r d'E.S.O., ha de començar amb el tractament d'aquelles situacions que existeixen al seu entorn, sense oblidar les relacionades amb altres àrees de coneixement (les Ciències de la Naturalesa, les Ciències Socials, etc.).

Des del primer curs de l'E.S.O. els estudiants poden anar aproximant-se al concepte de funció interpretant els significats de les distintes expressions de les funcions. Aquests procediments s'han de treballar al llarg de tota l'etapa, i es van adquirint a mesura que augmenta la maduresa cognitiva i el camp d'experiència de l'estudiant.

La dificultat de visualització de la representació gràfica d'una funció pot salvar-se amb la utilització de programes informàtics específics com el Geogebra, o per aplicacions elaborades ja per alguns professors i que estan a disposició de tots, com les elaborades dins del Projecte Gauss (Institut Nacional de Tecnologies Educatives i de Formació del Professorat) o en pàgines personals d'aquests.

Bé utilitzant un sol ordinador a l'aula —amb la PDi o mitjançant la projecció de la pantalla—, o bé amb l'ús dels ordinadors pels estudiants a l'aula d'informàtica, aquests poden familiaritzar-se amb la forma de les gràfiques i la interpretació dels seus punts i és un suport inestimable per a acostar-se a la representació de funcions i al concepte de funció.

Autors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Finalment cal indicar que la tercera part d'aquest capítol pretén una primera formalització al concepte de funció i, encara que s'ha tractat de seleccionar activitats en què les relacions funcionals són essencialment proporcionals, pot ser de més dificultat.

D'aquesta manera, trobar l'expressió algebraica a partir de la representació gràfica d'una funció senzilla és una de les ampliacions que es poden proposar als estudiants més avantatjats i pot servir per a l'estudi i comprensió major del significat de les funcions.

Per tot això, i depenent del temps que es desitge o es puga emprar per al desenvolupament d'aquest capítol, aquesta tercera part es pot suprimir sense que hi haja cap activitat, de les parts anteriors, que quede sense acabar de desenvolupar.