2n ESO

Capítol 4: DIVISIBILITAT

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos

Revisors: Sergio Hernández, Milagros Latasa i Nieves Zuasti

Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

1. DIVISIBILITAT

1.1. MÚLTIPLES I DIVISORS D'UN NOMBRE

1.2. CRITERIS DE DIVISIBILITAT

1.3. OBTENCIÓ DE TOTS ELS DIVISORS D'UN NOMBRE

2. NOMBRES PRIMERS

2.1. NOMBRES PRIMERS I COMPOSTOS

2.2. LA GARBELLA D'ERATÒSTENES

2.3. DESCOMPOSICIÓ D'UN NOMBRE EN FACTORS PRIMERS

2.4. MÁXIMO COMÚ DIVISOR DE DIVERSOS NOMBRES

2.5. MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE DE DIVERSOS NOMBRES

2.6. DESCOMPOSICIÓ FACTORIAL

Resum

Jaume, Maria i Raquel visitaran la seua iaia sovint. Jaume va cada 2 dies, Maria cada 4 i Raquel només va un dia a la setmana. Un dia que van coincidir els tres, van comentar que mai havien menjat un pastís tan ric com el que fa la seua iaia. Ella va afirmar: "El pròxim dia que torneu a coincidir, el torne a fer". Quan podran tornar a disfrutar del pastís?

Fotografia: Clarisa Rodrígues

En aquest capítol aprendrem a resoldre problemes semblants a aquest i aprofundirem en la taula de multiplicar mitjançant conceptes com: divisibilitat, factorització o nombres primers.

Descobriràs alguns dels grans secrets dels nombres i mai t'imaginaries que la taula de multiplicar amagara tants misteris ocults...

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1. DIVISIBILITAT

1.1. Múltiples i divisors d’un nombre enter

Múltiples d’un nombre

Recordes molt bé les taules de multiplicar de tots els nombres?

- Escriu al teu quadern la del 3 i la del 6.

Sense donar-te compte, has escrit alguns dels múltiples de 3 i de 6.

Es defineixen els **múltiples** d’un nombre enter ***n*** com els nombres que resulten de multiplicar aqueix nombre ***n*** per tots els nombres enters.

Exemple:

- La taula del 3 que has escrit abans està formada pels valors:

  0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,….

Tots ells són múltiples de 3.

La notació matemàtica d’aquest concepte és: $\dot{3}$

És a dir: $\dot{3} = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...\}$.

Exemple:

- Conta els múltiples de 3 que hagueres pogut escriure abans. És possible fer-ho?

Efectivament, els múltiples que té cada nombre enter són una quantitat infinita.

Activitats proposades

1. Calcula els set primers múltiples d’11 i de 7.

2. Quins dels següents nombres són múltiples de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

3. Troba els múltiples de 12 compresos entre 13 i 90.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d’Imatges d’INTEF

Divisors enters d'un nombre

Un nombre enter ***a*** és **divisor** d'un altre nombre enter ***b*** quan en dividir ***b*** entre ***a***, el residu és 0.

Nota

Tot nombre té sempre com divisor a 1 i a si mateix.

Exemple:

3 és **divisor** de 9 perquè en dividir 9 entre 3, el residu és 0.

10 és **divisor** de 100 perquè en dividir 100 entre 10, el residu és 0.

7 és **divisor** de 49 perquè en dividir 49 entre 7, el residu és 0.

1 és **divisor** de 47 perquè en dividir 47 entre 1, el residu és 0.

47 és **divisor** de 47 perquè en dividir 47 entre 47, el residu és 0

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, doncs també es diu que ***b*** és **divisible** per ***a***.

Exemple:

a) 9 és **divisible** per 3 perquè 3 és divisor de 9, és a dir, en dividir 9 entre 3, el residu és 0.

b) 100 és **divisible** per 10 perquè 10 és divisor de 100, és a dir en dividir 100 entre 10, el residu és 0.

c) 49 és **divisible** per 7 perquè 7 és divisor de 49, és a dir, en dividir 49 entre 7, el residu és 0.

Notes

Com hauràs deduït, les relacions ser ***múltiple*** i ser ***divisor*** són relacions inverses.

No confongues les expressions ser múltiple, ser divisor i ser divisible. Vegem-ho amb un exemple:

Exemple:

- De la igualtat: $3 \cdot 7 = 21$, podem deduir el següent:
  - 3 i 7 són divisors de 21.
  - 21 és múltiple de 3 i de 7.
  - 21 és divisible per 3 i per 7.

Activitats proposades

4. A partir de la igualtat: $5 \cdot 8 = 40$, escriu les relacions que existeixen entre aquests tres nombres.

5. Escriu frases usant les expressions: "*ser múltiple de*", "*ser divisor de*" i "*ser divisible per*" i els nombres 27, 3 i 9.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

1.2. Criteris de divisibilitat

Per a veure si un nombre enter és divisible per un altre nombre enter, només hi ha que dividir-los i veure si el residu és 0. Però quan els nombres són grans, les operacions poden resultar complicades.

La tasca se simplifica si tenim en compte els anomenats **criteris de divisibilitat** que ens permeten saber si un nombre és divisible per un altre sense necessitat d'efectuar la divisió.

Criteri de divisibilitat per 2

Un nombre enter és divisible per **2** quan la seua última xifra és 0 o xifra parell.

Exemple:

Els nombres: 492, 70, 376, 900, 564, 298 són divisibles per 2, ja que acaben en 2, 0, 6, 0, 4, i 8.

Sabries explicar per què?

Recorda que un nombre qualsevol el podem escriure amb les potències de 10:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en tots els sumands, excepte l'últim, apareix el 10, i 10 = 2 · 5, per tant tots els sumands són múltiples de 2. Si l'últim ho és, el nombre és múltiple de 2, si, com a l'exemple, acaba en 1, encara que la resta dels sumands siga divisible entre 2, l'últim no ho és, per tant el nombre no és divisible entre 2.

Criteri de divisibilitat per 3

Un nombre enter és divisible per **3** quan la suma de les seues xifres és múltiple de 3.

Exemple:

- El nombre 531 és divisible per 3 ja que 5 + 3 + 1 = 9 que és múltiple de 3.
- El nombre 4002 és divisible per 3 ja que 4 + 0 + 0 + 2 = 6 que és múltiple de 3.

Si en sumar les xifres obtens un nombre encara gran i no saps si és o no múltiple de 3, pots tornar a aplicar el mateix sistema, només has de tornar a sumar totes les seues xifres:

- El nombre 99 és divisible per 3 ja que 9 + 9 = 18, i 18 és divisible per 3, perquè 1 + 8 = 9 que és múltiple de 3. Per tant, 9, 18 i 99 són múltiples de 3.
- El nombre 48593778396 és divisible per 3 ja que 4+8+5+9+ 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 =69, i 69 és divisible per 3 perquè 6 + 9 = 15, i 15 ho és perquè 1 + 5 = 6, que és múltiple de 3.

Criteri de divisibilitat per 4

Un nombre enter és divisible per **4** si el nombre format per les dues últimes xifres del nombre considerat és múltiple de 4.

Exemple:

- El nombre 5728 és divisible per 4 ja que acaba en 28, que és múltiple de 4, ja que 7 · 4 = 28.
- El nombre 5718 **no** és divisible per 4 ja que acaba en 18, que no és múltiple de 4, ja que 4· 4 = 16 i 5 · 4 = 20.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Criteri de divisibilitat per 5

Un nombre enter és divisible per **5** quan acaba en 0 o en 5.

Exemple:

Els nombres 3925 i 78216570 són divisibles per 5, perquè acaben en 5 i en 0.

Criteri de divisibilitat per 6

Un nombre enter és divisible per **6** quan ho és al mateix temps per 2 i per 3.

Exemple:

El nombre 5532 és divisible per 6 ja que:

Ho és per 2 perquè acaba en 2.

Ho és per 3, ja que les seues xifres sumen 15 que és múltiple de 3.

El nombre 2456 **no** és divisible per 6 ja que:

Ho és per 2 perquè acaba en 6.

No ho és per 3, ja que les seues xifres sumen 2 + 4 + 5 + 6 = 17, i 1 + 7 = 8 que no és múltiple de 3.

Criteri de divisibilitat per 9

Un nombre enter és divisible per **9** quan la suma de les seues xifres és 9 o múltiple de 9

Exemple:

- El nombre 5022 és divisible per 9 ja que: 5 + 0 + 2 + 2 = 9.
- El nombre 3313 **no és** divisible per 9 ja que: 3 + 3 + 1 + 3 = 10 que no és múltiple de 9.

Criteri de divisibilitat per 10

Un nombre enter és divisible per **10** quan acaba en 0

Exemple:

El nombre 825160 és divisible per 10 perquè acaba en 0.

Nota

Observa que els nombres que són divisibles per 10 ho són per 2 i per 5 i viceversa, si un nombre és divisible per 2 i per 5, ho és per 10.

Criteri de divisibilitat per 11

Un nombre enter és divisible per **11** quan la diferència entre la suma de les xifres que ocupen lloc imparell i la suma de les xifres que ocupen lloc parell dóna 0 o múltiple d'11

Exemple:

- El nombre 71335 és divisible per 11 ja que: (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 15 – 4 = 11.
- El nombre 71345 **no** és divisible per 11 ja que:(7+3+5)–(1+4)=15–5=10, que no és múltiple d'11.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Activitats proposades

6. Digues quals dels següents nombres són múltiples de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500

Els nombres triats, coincideixen amb els divisors de 3? I amb els que són divisibles per 3?

7. Escriu quatre nombres que siguen divisibles per 10 i per 7 al mateix temps.

8. Substitueix *A* per un valor apropiat perquè:

a) 15*A*72 siga múltiple de 3.

b) 2205*A* siga múltiple de 6.

c) 6*A*438 siga múltiple d'11.

9. Tots els nombres divisibles per 2 ho són per 4? I al contrari? Raona la resposta.

10. Sabries deduir un criteri de divisibilitat per 15? Posa un exemple.

11. Completa al teu quadern la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	És...?	Verdader/Fals
984486728	Divisible per 2	
984486725	Divisible per 5	
984486720	Divisible per 3	
783376500	Divisible per 6	
984486728	Divisible per 4	
23009845	Divisible per 11	

12. Intenta explicar per què es verifica el criteri de divisibilitat per 5.

13. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 4 observa que 10 no és divisible per 4, però 100 si ho és. Intenta explicar-ho.

14. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 3, observa que 10 = 9 + 1. Pots traure factor comú 9 en tots els sumands en què siga possible, i veure quins són els sumands que ens queden.

15. Per a explicar el criteri de divisibilitat per 11, observa que 10 = 11 – 1. Pots traure factor comú 11 en tots els sumands en què siga possible, i analitzar quins són els sumands que ens queden.

1.3. Obtenció de tots els divisors d'un nombre enter

En principi, per a trobar els divisors naturals d'un nombre enter *N*, l'anem dividint successivament entre 1, 2, 3, 4,..., *N*. D'aquesta manera, els divisors de *N* seran aquells nombres que el dividisquen exactament, és a dir donen de residu 0.

Exemple:

- Si volem trobar els divisors de 54 l'hauríem de dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,...., 54 i veure en quins casos el residu és 0. Pots comprovar que els divisors de 54 són: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 i 54.

El que ocorre és que aquesta forma de calcular els divisors d'un nombre es complica molt quan el nombre és gran. Encara que, si utilitzem els criteris de divisibilitat que hem aprés, només haurem de fer les divisions pels nombres pels quals ***N*** siga divisible.
Si la divisió és exacta, ***N* : *d* = *c*,** llavors el divisor (***d***) i el quocient (***c***) són divisors de ***N***, la qual cosa ens permet acurtar la busca de divisors, perquè de cada divisió exacta obtenim dos divisors.
Acabarem de buscar més divisors quan arribem a una divisió en què el quocient siga menor o igual que el divisor.

Activitats resoltes

- Vegem, com a exemple, el càlcul dels divisors del nombre 48.

Ja sabem que tot nombre té com divisors a la unitat i a ell mateix 1 i 48.
És divisible per 2. (Acaba en xifra parella) → 48 : 2 = 24 → Ja tenim dos divisors: 2 i 24.
És divisible per 3. (4 + 8 = 12, múltiple de 3) → 48 : 3 = 16 → Ja tenim dos divisors: 3 i 16.
És divisible per 4. → 48 : 4 = 12 → Ja tenim dos divisors: 4 i 12.
És divisible per 6. (En ser divisible per 2 i 3) → 48 : 6 = 8 → Ja tenim dos divisors: 6 i 8.
Com 48 : 8 = 6, i el quocient 6 és menor que el divisor 8, ja hem acabat. 8 i 6 (Repetits).
Per tant, els divisors de 48 són: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 i 48.

Activitats proposades

16. Calcula els múltiples de 75 compresos entre 1 i 200.

17. Indica si les següents afirmacions són verdaderes o falses:

a) 50 és múltiple de 10.

b) 2 és divisor de 30.

c) 4 és múltiple de 16.

d) 66 és divisible per 11.

e) 80 és divisor de 8.

f) 3 és divisible per 12.

18. Substitueix *x* i *y* per valors apropiats per al següent nombre siga divisible per 9 i per 10 al mateix temps: 372*x*54*y.*

19. Què únic nombre amb tres xifres iguals és divisible per 2 i per 9 al mateix temps?

20. Calcula tots els divisors dels nombres següents:

a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300

2. NOMBRES PRIMERS

2.1. Nombres primers i compostos

Quins són els divisors del 2? I del 3? I del 5? I del 7? Trobes alguna similitud entre ells? Evidentment sí, els divisors d'aquests números són l'1 i ells mateixos. A aquests números se'ls anomena primers.

Un **nombre primer** és aquell nombre natural que només té dos divisors: l'1 i ell mateix.

S'anomena **nombre compost** a aquell nombre natural que té més de dos divisors, és a dir, a aquell no és primer.

Nota

L'1 es considera que no és primer ni compost, ja que no verifica cap de les dues definicions.

Exemple:

- Els nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 són els deu primers nombres primers.
- Nombres com: 33, 48, 54, 70, 785 o 43215678940 són compostos.

Activitats proposades

21. Continua la llista de nombres primers de l'exemple amb 10 nombres primers més.

22. Quant nombres primers creus que hi ha? Creus que s'acaben en un moment donat o que són infinits?

2.2. La garbella d'Eratòstenes

La **garbella d'Eratòstenes** és un algoritme (és a dir, una seqüència d'instruccions) que permet trobar tots els nombres primers menors que un nombre natural donat.

Nosaltres ho farem per als menors o iguals que 100, és a dir, esbrinarem quins són els nombres primers fins al 100.

L'algoritme consta dels passos següents :

a)Construïm una llista amb els nombres de l'1 al 100, en aquest cas, ordenats de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Primer es ratlla l'1, perquè sabem que no és primer.

c) El primer nombre que quede sense ratllar ha de ser primer. Es marca i es ratllen els seus múltiples.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

d) Es repeteix novament el pas c) fins que s’acaben els nombres.

Per tant:

- Deixem sense ratllar el següent nombre, que és el 2, que per tant és primer, i ratllem tots els múltiples de 2, quedant la llista com segueix:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservem el 3 perquè en ser el primer que apareix sense ratllar, sabem que és primer, però eliminem tots els múltiples de 3, és a dir, ratllem un de cada tres nombres. Ens queda una llista així:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- No necessitem ratllar el 4 perquè ja està ratllat, llavors anem al 5 que és el següent nombre, per tant no el ratllem i eliminem tots els múltiples de 5, alguns dels quals ja estaven ratllats, tots els que acaben en 0.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d’Imatges d’INTEF

- I després seguim de forma anàloga amb el 7 i ratllant tots els múltiples de 7.
- Després el següent nombre no ratllat és l'11 i ratllem els múltiples d'11.
- Fins a quin nombre hem de continuar ratllant? Pensa! Pensa! Observa que 100 és igual a 10·10, per tant en dividir un número menor que 100 per un major que 11 el quocient és menor que 11.

Hem arribat a una llista de la forma:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Els nombres que no queden ratllats en cap pas no són múltiples de cap nombre anterior (assenyalats ací en roig).

En realitat, el que *Eratòstenes* estava fent era construir una espècie de "*filtre*" (garbella) pel qual, en fer passar a tots els nombres, només quedaven els "*primers*".

Per tant, els nombres primers que hi ha entre els primers cent nombres, són:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 i 97.

Activitats proposades

23. Completa la garbella d'Eratòstenes fins al 200.

24. En aquest cas, quin és l'últim nombre primer del que has de ratllar els seus múltiples?

Observa que 13 · 13 = 169 i 17 · 17 = 289.

25. Busca els distints significats de les paraules "garbella" i "algoritme", en què més contextos les pots utilitzar?

2.3. Descomposició d'un nombre natural en factors primers

Sabem que un nombre **primer** només té dos divisors: ell mateix i l'1.

Així que si voldríem expressar un nombre primer com a producte d'altres dos, els únics factors serien l'1 i el propi nombre. Per exemple, si vull expressar 11 com a producte de dos nombres, seria:

11 = 1 · 11 o també 11 = 11 · 1

No obstant això, si el nombre és **compost**, podrà expressar-se com a producte d'altres nombres que no són ni l'1 ni ell mateix.

Aprendrem a descompondre un nombre natural en factors primers, la qual cosa significa expressar un nombre natural com a producte d'altres nombres però han de ser primers.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Descompondre un nombre natural en factors primers és expressar el dit nombre com un producte, on tots els seus factors són nombres primers.

- Per a descompondre el nombre 18 podríem fer: 18 = 9 · 2, però la descomposició en factors primers no seria correcta perquè el 9 no és un nombre primer.

La seua descomposició és 18 = 3 · 3 · 2, que s'expressa com 18 = $3^2 \cdot 2$.

Per a descompondre un nombre compost (perquè, com hem vist, un nombre primer no es pot descompondre, no podem dir 11 = 11 · 1, perquè 1 no és primer) en els seus factors cosins, s'ha de seguir el procediment següent:

a) Dividir el nombre natural donat pel menor primer possible utilitzant per a això els criteris de divisibilitat si és possible, o realitzant la divisió si no hi ha un altre remei.

b) Realitzar la divisió, i si el quocient és divisor del dit nombre primer, realitzar la divisió.

c) Si el quocient no és divisor del dit nombre primer, buscar el menor nombre primer possible que siga divisor, recorrent novament als criteris de divisibilitat o continuar dividint.

d) Seguir amb el procediment fins a obtindre el quocient igual a u.

Notes

1) Per a realitzar les divisions utilitzarem una barra vertical, a la dreta escrivim els divisors primers i a l'esquerra els quocients.

2) Els factors primers a l'expressió del nombre ja factoritzat se solen escriure en orde creixent.

3) Quan ja tinguem pràctica, i amb nombres no massa grans, podem descompondre un nombre en producte de dos i després cada un d'ells en altres productes fins que tots els factors obtinguts siguen primers.

- Per exemple: 80 = 40 · 2. Com 40 = 4 · 10 i 10 = 2 · 5, tenim que: 80 = 2 · 2 · 2 · 2 · 5 i per tant, la seua descomposició és: 80 = $2^4 \cdot 5$.

Activitats resoltes

1. Realitzarem la descomposició en factors primers del nombre 231: Com 231 no és múltiple de 2, però sí de 3, el dividim: 231 : 3 = 77. Com 77 és múltiple de 7, que és el menor primer possible pel qual es puga dividir: 77 : 7 = 11. Per tant: 231 = 3 · 7 · 11. Açò se sol realitzar de la manera següent: $\begin{array}{r\|l} 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$	2. Realitzarem una altra factorització per al nombre 5148: $\begin{array}{r\|l} 5148 & 2 \\ 2574 & 2 \\ 1287 & 3 \\ 429 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ Per tant: 5148 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Activitats proposades

26. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

27. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

28. Descompon en factors primers els nombres següents:

a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342

29. Si descomponem en factors primers els nombres: 10, 100, 1000, 10000 i 100000, què és el que observes? Ho podries fer de forma més ràpida sense necessitat d'usar el mètode general?

30. Què ocorre en descompondre en factors primers els nombres 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continua la sèrie amb 7 nombres més.

2.4. Màxim comú divisor de diversos nombres

Exemple:

- Calcularem els divisors dels nombres 60 i 84:

Divisors de 60 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisors de 84 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

Quins són els divisors comuns a ambdós? Els divisors comuns a ambdós són diversos: 1, 2, 3, 4, 6 i 12.

El major dels divisors comuns és 12 i es diu que 12 és el màxim comú divisor de 60 i de 84.

S'anomena **màxim comú divisor** de diversos nombres naturals al major dels divisors comuns a tots ells i s'escriu **M.C.D.**

- A l'exemple anterior, escrivim: M.C.D (60, 84) = 12

En principi, pareix que trobar el M.C.D no és molt complicat, només hem de calcular els divisors dels nombres, considerar els comuns i prendre el major d'ells. Però aquest mètode només té sentit amb pocs nombres i xicotets, ja que amb molts nombres o amb nombres grans, el càlcul es complica molt.

Per això, calcularem el màxim comú divisor utilitzant una sèrie de passos, mitjançant els quals el càlcul se simplifica moltíssim:

Càlcul del M.C.D.

1. Factoritzem els nombres.
2. Prenem els factors comuns a tots els nombres elevats al menor exponent.
3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D

Activitats resoltes

- Calcularem el màxim comú divisor dels nombres: 60, 72 i 84.

1. Factoritzem cada nombre:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Prenem els factors comuns a tots els nombres (2 i 3) elevats al menor exponent: 2^2 i 3.

3. El producte dels factors considerats al pas 2 és el M.C.D. És a dir:

$$\text{M.C.D } (60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos nombres naturals sempre tenen almenys un divisor en comú, l'1. Si aqueix és el M.C.D aleshores diem que aqueixos nombres són **primers entre si**.

Activitats proposades

31. Calcula el M.C.D dels següents parells de nombres:

a) 70 i 45 b) 121 i 55 c) 42 i 66 d) 224 i 80

32. Calcula el M.C.D dels nombres següents:

a) 33, 11 i 22 b) 66, 42 i 120 c) 75, 25 i 200 d) 81, 44 i 16

2.5. Mínim comú múltiple de diversos nombres

El **mínim comú múltiple** de diversos nombres naturals és el menor dels múltiples que tenen en comú, i s'escriu **m.c.m.**

Activitats resoltes

Igual que amb el M.C.D., es pot calcular el mínim comú múltiple aplicant la definició que acabem de veure. El que ocorre és que es tracta d'una forma molt "rudimentària" i que es complica molt per a nombres grans.

- Calcularem m.c.m.(20, 15) aplicant aquesta definició:

Múltiples de 20 $\rightarrow$ 20, 40, 60, 80, 100, 120, …

Múltiples de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …

Com veiem, múltiples comuns a ambdós són: 60, 120, … però el menor d'ells és el 60. Per tant:

$$\text{m.c.m.}(20, 15) = 60.$$

Veurem ara els passos a realitzar per a simplificar aquest càlcul i fer-lo més mecànic:

Càlcul del m.c.m.

1. Factoritzem els nombres
2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent.
3. El producte d'aqueixos factors del pas anterior és el m.c.m.

Activitats resoltes

Vegem com calcular el mínim comú múltiple de 60, 72 i 84 seguint aquests passos:

1. Factoritzem els nombres

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Prenem els factors comuns i no comuns elevats al major exponent. Al nostre cas: 2^3, 3^2, 5 i 7.
3. Multiplicant aquests factors tenim que:

$$\text{m.c.m.}(60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Activitats proposades

33. Calcula el m.c.m. dels següents parells de nombres:

a) 40 i 24 b) 16 i 40 c) 30 i 66 d) 24 i 80

34. Calcula el m.c.m. dels nombres següents:

a) 33, 11 i 22 b) 66, 42 i 120 c) 75, 25 i 200 d) 81, 44 i 16

Problemes

Però, a més, el càlcul del M.C.D. i del m.c.m. es molt útil per a resoldre **problemes reals**. Vegem alguns exemples:

Activitats resoltes

- Una dependenta d'una botiga de regals té un rotllo de cinta roja de 15 m i un blau de 10 m. Com per a embolicar cada regal utilitza sempre trossos d'1 metre, i vol tallar la cinta en trossos de la mateixa longitud per a tindre'l preparat per a empaquetar caixes de manera que no sobre res als rotllos. Quina és la longitud màxima en què pot tallar cada rotllo?

Estem buscant un nombre natural que siga divisor de 15 i de 10 al mateix temps. dels nombres que complisquen açò, triarem el major.

Açò és, precisament, el M.C.D:

$$\text{M.C.D. } (15, 10) = 5.$$

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Per tant, la longitud de cada tros de cinta en què tallarà ambdós rotllos serà de 5 m.

- Jaume, Maria i Raquel visitaran la seua iaia sovint. Jaume va cada 2 dies, Maria cada 4 i Raquel només va un dia a la setmana. Un dia que van coincidir els tres, van comentar que mai havien menjat un pastís tan ric com el que fa la seua iaia. Ella va afirmar: "*El pròxim dia que torneu a coincidir, el torne a fer*". Quan podran tornar a disfrutar del pastís?

Fotografia: Clarisa Rodrígues

Estem buscant un nombre de dies que serà múltiple de 2, 4 i 7 al mateix temps. De tots els nombres que ho complisquen, ens interessa el més xicotet. És a dir, hem de calcular:

$$\text{m.c.m.}(2, 4, 7) = 28$$

Per tant, d'ací a 28 dies tornaran a coincidir i la iaia els farà el pastís.

Activitats proposades

35. Mireia i Neus tenen 30 comptes blanques, 10 comptes blaus i 90 comptes roges. Volen fer el nombre més gran de collars iguals sense que sobre cap compte.

a) Quants collars iguals poden fer?

b) Quin nombre de comptes de cada color tindrà cada collar?

36. La iaia pren moltes pastilles. Només despertar-se, a les 9 del matí, pren una per al colesterol que ha de prendre cada 8 hores, una altra per a la tensió que ha de prendre cada 12 hores i una tercera per a la circulació que ha de prendre cada 4 hores. Dins de quantes hores tornarà a prendre els 3 medicaments al mateix temps? A quina hora?

37. Joan compra en una floristeria 24 roses i 36 clavells. Quants rams iguals pot elaborar si col·loca la màxima quantitat de flors de cada tipus perquè no li sobre cap? Quantes roses i clavells ha de col·locar en cada ram?

38. Raül té diversos avisos al seu mòbil: un que dóna un senyal cada 30 minuts, un altre que dóna un senyal cada 60 minuts i un tercer que dóna un senyal cada 120 minuts. Si a les 10 del matí les 3 senyals d'avís han coincidit.

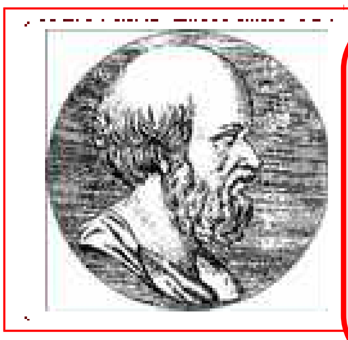
a) Quantes hores com a mínim han de passar perquè tornen a coincidir els tres avisos?

b) A quina hora ocorrerà?

39. Quina serà la menor quantitat de pastissos que s'han de comprar perquè es puguen repartir en parts iguals entre grups de 10, 20 i 30 xiquets? Determina en cada cas quants caramels la toca a cada xiquet.

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

CURIOSITATS. REVISTA



Qui era Eratòstenes el de la famosa garbella que hem estudiat abans?

Eratòstenes va nàixer a Cyrene (ara Líbia), al nord d'Africa. Va viure entre els anys 275 a. C. i 195 a. de C.

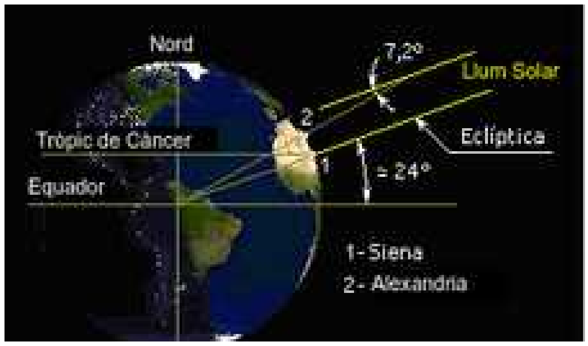
Per diverses dècades, va ser el director de la famosa Biblioteca d'Alexandria. Va ser amic d'Arquímedes.

Encara que, Eratòstenes es va fer famós per tres descobriments:

- Per la **medició increïblement precisa que va fer del diàmetre de la Terra**

-Per haver fabricat una **garbella**, o un filtre, per a descobrir tots els nombres primers.

-La invenció de l'esfera armil·lar.



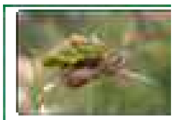
QUINA RELACIÓ TENEN L'ESPIONATGE AMB L'EVOLUCIÓ D'ALGUNS INSECTES?

La relació entre ambdós són els **nombres primers**.

La teoria dels nombres primers té aplicació a la **criptografia**, ciència que estudia formes de xifrar missatges secrets que només puguen ser desxifrats pel receptor, però per ningú més. El procés de cifraje requereix l'ús d'una clau secreta i per a desxifrar el missatge, normalment, al receptor només li fa falta aplicar la clau al revés.

Però l'ideal seria tindre una clau per a un cifraje fàcil i desxifrat difícil. Açò s'aconsegueix utilitzant nombres primers molt grans, de 80 xifres o més.

Hui en dia la criptografia té gran ir per a les comunicacions entre els governs, compres per Internet o telefonades per telèfon mòbil.



En 1996 centenars de milers de **xitxarres** van nàixer als EUA. Es van reproduir i van morir un mes després d'haver escampat els seus ous. Hui, 17 anys després, ho estan fent novament.

Aquesta espècie de xitxarra apareix només cada 13 o 17 anys. Els seus ous romanen baix terra durant tot aquest temps. En breu desapareixeran fins a la seua pròxima visita l'any 2030.

13 i 17 anys? Tindrà alguna cosa a veure que siguen nombres primers?

Si les xitxarres tingueren un cicle de, per exemple 12 anys, un depredador podria tindre cicles d'1, 2, 3, 4, 6 o 12 anys per a coincidir amb elles. Amb un cicle de 17, les seues opcions es redueixen a 17 i a 1. Sabrà l'evolució de nombres primers?

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

RESUM

Concepte	*Definició*	*Exemples*
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiple**	- *a* és **divisor** de *b* quan en dividir *b* entre *a* el residu és 0. - *a* és **múltiple** de *b* o *a* és **divisible** per *b* quan en dividir *a* entre *b* el residu és 0.	• 2 i 5 són divisors de 10. • 10 és múltiple de 2 i de 5. • 10 és divisible per 2 i per 5.
Criteris de divisibilitat	**2:** Acaba en 0 o xifra parell. **3:** La suma de les seues xifres és múltiple de 3. **5:** Acaba en 0 o 5. **11:** La diferència entre la suma de les xifres que ocupen lloc imparell i la suma de les xifres que ocupen lloc parell dóna 0 o múltiple d'11.	• 7892 és divisible per 2. • 4510 és divisible per 2 i per 5. • 2957 és divisible per 3. • 2057 és múltiple d'11.
Nombre primer	Té únicament dos divisors: l'1 i ell mateix.	23 i 29 són nombres primers.
Nombre compost	Té més de dos divisors, és a dir, no és primer.	25 i 32 son nombres compostos.
Garbella d'Eratòstenes	És un algoritme que permet calcular tots els nombres primers menor que un donat.	Els primers menors que 20 són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descompondre un nombre en factors primers	És expressar-lo com a producte de nombres primers.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Mínim comú múltiple de diversos nombres	És el menor dels múltiples que tenen en comú.	m.c.m.(18, 12)= 36
Màxim comú divisor de diversos nombres	És el major dels divisors comuns a tots ells.	M.C.D.(18, 12) = 4

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES. Matemàtiques 2n d’ESO

Divisibilitat

1. Escriu quatre nombres de tres xifres que siguen divisibles per 11 i per 2 al mateix temps.
2. Escriu els deu primers múltiples de 4 i els deu primers múltiples de 6. Quins són comuns a ambdós?
3. Substitueix *A* per un valor apropiat perquè:

   a) 24*A*75 siga múltiple de 5.

   b) 1107*A* siga múltiple de 3.

   c) 5*A*439 siga múltiple de 6.
4. Indica quins dels següents nombres són múltiples de 3:

   1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150
5. Busca tots els divisors de 210.
6. Completa al teu quadern la següent taula escrivint verdader o fals:

Nombre	És…?	Verdader/Fals
30087	Divisible per 3	
78344	Divisible per 6	
87300	Múltiple de 11	
2985644	Múltiple de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

Nombres primers

7. Calcula el m.c.m. i M.C.D. de *m* i *n* sense esbrinar el valor numèric de cada un:

   a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

   b) $m = 3 \cdot 5$ $\quad n = 2 \cdot 7$

   c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $\quad n = 22 \cdot 32$

   d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $\quad n = 2 \cdot 52 \cdot 7$
8. Escriu al teu quadern i completa les afirmacions següents:

   a) Com dos nombres primers entre si no tenen factors primers comuns, el mínim comú múltiple d’ambdós és ………

   b) Com dos nombres primers entre si no tenen factors primers comuns, el màxim comú divisor d’ambdós és ………

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d’Imatges d’INTEF

9. Calcula mentalment el m.c.m. i M.C.D. dels nombres següents:

a) 4 i 8	d) 7 i 10	g) 10 i 15	j) 2 i 2	m) 2, 3 i 4
b) 2 i 3	e) 6 i 12	h) 2 i 5	k) 4 i 1	n) 3,6, i 12
c) 3 i 12	f) 6 i 9	i) 4 i 6	l) 3 i 7	o) 3, 4 i 6

10. Calcula:

a) m.c.m.(8, 40)   M.C.D.(8, 40)

b) m.c.m.(15, 35)   M.C.D.(15, 35)

c) m.c.m.(84, 360)   M.C.D.(84, 360)

11. En un tram de vorera hi ha tres fanals. Un s'encén cada 12 segons. Un altre cada 18 i un altre cada 60. A les 18:30 de la vesprada les 3 coincideixen encesos. Esbrina quantes vegades coincidiran als 5 minuts següents

12. Tres autobusos ixen de la mateixa estació en tres direccions distintes. El primer tarda 1 hora i 45 minuts a tornar al punt de partida, i roman un quart d'hora a l'estació. El segon tarda 1 hora i 5 minuts i roman 7 minuts a l'estació. El tercer tarda 1 hora i 18 minuts i roman 12 minuts a l'estació. Se sap que la primera eixida ha tingut lloc a les 6 del matí. Calcula:

a) A quina hora tornaran a eixir junts de l'estació.

b) El nombre de viatges efectuats per cada u.

13. Un artesà té 32 pedres de coral, 88 de turquesa, 56 perles i 66 d'atzabeja. Amb totes elles desitja elaborar el nombre més gran possible de collars iguals. Quants pot fer?

14. L'ordinador de Llúcia escaneja amb l'antivirus cada 180 minuts i fa actualitzacions cada 240 minuts, cada quants minuts fa les dues coses al mateix temps?

15. Al llarg d'una carretera hi ha un telèfon d'emergència cada 10 km, un pou d'aigua cada 15 km i una gasolinera cada 20 km. Cada quant coincideixen un telèfon, un pou i una gasolinera?

16. Per a celebrar el seu aniversari, Sònia compra 12 gorrets de paper, 6 collars, 18 anells i 36 caramels. Si vol fer bosses de regal amb la mateixa quantitat d'obsequis de cada tipus, per a quants amics li abasta? Què haurà de posar a cada bossa?

17. Una màquina ompli una caixa de 256 botelles en un minut i una altra màquina ompli la mateixa quantitat de botelles en un minut i mig. Si ambdues van començar a embotellar líquids a les 9:00 am. A quina hora acaben ambdues d'omplir una caixa? Quantes botelles hauran omplit ambdues maquines durant aqueix període?

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

AUTOAVALUACIÓ DE 2º D'AIXÒ

1. Quina de les següents afirmacions és verdadera?

a) Si dos nombres són primers, el seu màxim comú divisor és 1.

b) Si dos nombres són primers, el seu mínim comú múltiple és 1.

c) El mínim comú múltiple de dos nombres sempre és major que el producte d'ambdós.

d) El màxim comú divisor de dos nombres sempre és major que el producte d'ambdós.

2. Quina de les solucions és la correcta per al conjunt dels divisors de 63?

a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63}   c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}

b) D(63) = {1, 2, 9,21,63}   d) D(63) = {0, 1,3, 7, 9, 21, 63}

3. La descomposició de 81000 en factors primers és:

a) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ b)$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ d) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

4. Dels nombres:183, 143 i 1973,

a) Tots son primers   b) Cap és primer   c) 143 és primer   d) 1973 és primer

5. Quina de les següents afirmacions és verdadera ?

a) Si un nombre és múltiple de 2, també ho és de 4.

b) 11 és múltiple de 121.

c) 33 és divisor d'11.

d) Si un nombre és múltiple de 2 i de 3, també ho és de 6.

6. La propietat que s'il·lustra a la següent igualtat 2· (3+4)=2·3+2·4 és:

a) La propietat commutativa.
b) La propietat distributiva.
c) La propietat associativa.
d) Aqueixa igualtat no és certa.

7. El M.C.D.(650, 700) és:

a) 10   b) 30   c) 20   d) 50

8. Un operari revisa l'excavadora de la seua empresa cada 28 dies i la grua cada 35. Si va revisar les dos l'1 de maig, quan tornaran a coincidir?

a) El 17 de setembre b) L'1 de setembre c) El 17 d'agost d) Aqueix any no tornen a coincidir

9. Volem entaulellar una paret de 615x225 centímetres, amb taulellets quadrats de costat el major possible i no tallar cap taulellet. Quants taulellets són necessaris?

a) 615   b) 15   c) 225   d) No és possible

Autora: Fernanda Ramos
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay
Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF