Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema A1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema A2:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \ a \in R$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)dx = e - 1$R 1

b) Para a = 1, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Problema A3:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases},$$

a) Indique el dominio de la función f (x) y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Problema A4:

Sean dos sucesos A y B tales que P (A) = 0,55 y P (B) = 0,1. Además se sabe que $P(\bar{B}|$ A) = 0, 89, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:
a) P (A ∩ B).
b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

Problema A5:

La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B1:

Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Problema B2:

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Problema B3:

Se consideran las siguientes funciones reales de variable real: $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x$, $g(x) = 4x$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Problema B4:

El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19, 5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Problema B5:

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

https://youtu.be/G5iO9KbDeC8

a) Se cumple aplicando Sarrus que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-1-0-(-2) = 2 \neq 0$, luego A es invertible.

Tenemos que $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$, por lo que:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Se cumple que $A\,X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -1+0+1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Problema A2:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2, \ a \in R$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)dx = e - 1$

b) Para a = 1, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Solución

https://youtu.be/qEBTrn2_3vE

a) Se cumple que:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \left(6\,x^2 + a\ e^x - 2\right)\ dx = \left[6\ \frac{x^3}{3} + a\ e^x - 2\ x\right]_0^1 = 2 + a\ e - 2 - 0 - a\ e^0 - 0 = a\ e - a =$$

$$= a\ (e-1) = e - 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 1}}.$$

b) La ecuación de la recta tangente es $y = f(0) + f'(0)\ x$, con:

$f(0) = 6\ 0^2 + e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$, $f'(x) = 12\ x + e^x \Rightarrow f'(0) = 0 + e^0 = 1$, por lo que la recta pedida es $y = f(0) + f'(0)\ x = -1 + x$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - y - 1 = 0}}.$$

Problema A3:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases},$$

a) Indique el dominio de la función f (x) y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Solución

https://youtu.be/dvx9sCOyCPs

$a)$ Como quiera que $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in R$ y, para $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0$, la función existe para cualquier valor real de x, excepto para $x = 0$, donde existe, pero la continuidad es dudosa. Se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4}{x^2+1} = 0 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ finito\ para\ x = 0}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ dominio\ es\ el\ conjunto\ de\ los\ números\ reales}}\ .$$

$b)$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^4}{x^2+1} = -\infty.$ $\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x+1} = -\infty.$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

En el apartado anterior se ha comprobado que no se anulan los denominadores, por lo cual: La función $f(x)$ tampoco tiene asíntotas verticales.

Una función tiene asíntotas oblicuas cuando es racional y el numerador tiene un grado una unidad mayor que el del denominador, por lo tanto, la función puede tener asíntota oblicua para $x > 0$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x-1} = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua}: \boldsymbol{y = x + 1}}.$$

Problema A4:

Sean dos sucesos A y B tales que P (A) = 0,55 y P (B) = 0,1. Además se sabe que
P($\overline{B}$ | A) = 0, 89, donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:
a) P (A ∩ B).
b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

Solución

https://youtu.be/4hMEdGNEWSA

$a)$ $\qquad P\left(\overline{B}/A\right) = 0{,}89 = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow$

$0{,}89 \cdot P(A) = P(A) - P(A \cap B);$

$$P(A \cap B) = P(A) - 0{,}89 \cdot P(A) = P(A) \cdot (1 - 0{,}89) = 0{,}11 \cdot P(A) =$$

$$= 0{,}11 \cdot 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0{,}0605}}.$$

$b)$ $\qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}55 + 0{,}1 - 0{,}0605 =$

$= 0{,}65 - 0{,}0605 = 0{,}5895.$

Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}5895 = \underline{0{,}4105}.$$

$$\boldsymbol{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \underline{0{,}4105}}.$$

Problema A5:

La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

https://youtu.be/0bSAHrGawas

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

Datos: $n=20;\;\; \overline{x}=200;\;\; \sigma=10;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\; y\; n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(200-1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{20}};\;200+1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{20}}\right);$$

$(200-1{,}96\cdot 2{,}2361;\;200+1{,}96\cdot 2{,}3361);\;\;(200-4{,}3827;\;200+4{,}3827).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(195{,}6173;\;204{,}3827).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha=0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$$

$$(1-0{,}05=0{,}9500 \;\rightarrow z=1{,}645).$$

$Datos:\;\sigma=10;\;E=0{,}5;\;z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{10}{0{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 20)^2=32{,}9^2=1.082{,}41.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1.083\ botes\ de\ champú.}}$$

Problema B1:

Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Solución

https://youtu.be/maXpHh59Apk

Sean x, y, z el número de buñuelos de chocolate, nata y crema que tiene la pastelería, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=220 \\ y=2z \\ 2z+3x=2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=220 \\ y-2z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 220 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{220\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{2-6-3-4}=\frac{220\cdot(2-4)}{-11}=\frac{-220\cdot 2}{-11}=20\cdot 2=40.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 220 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-11}=\frac{-220\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-11}=20\cdot(0+6)=120.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-11}=\frac{220\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-11}=-20\cdot(0-3)=60.$$

La pastelería tiene 40 buñuelos de chocolate, 120 de nata y 60 de crema.

Problema B2:

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Solución

video

https://youtu.be/93jDNF8lg8c

Sean x e y el número de litros de pinturas verde1 y verde2 que se fabrican, respectivamente.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 1 \cdot x + 1{,}2y$.

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}3x + 0{,}5y \le 20 \\ 0{,}7x + 0{,}5y \le 28 \\ 0 \le x \le 30;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 5y \le 200 \\ 7x + 5y \le 280 \\ 0 \le x \le 30;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

x	0	20
y	40	28

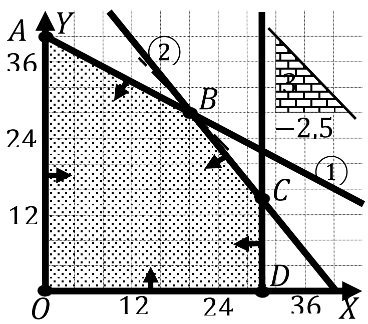
$① \Rightarrow 3x + 5y \le 200 \Rightarrow y \le \frac{200-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x			20	40
y			28	0

$② \Rightarrow 7x + 5y \le 280 \Rightarrow y \le \frac{280-7x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 200 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 200 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x - 5y = -200 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 80;\ \ x = 20;\ \ 140 + 4y = 280;\ \ 5y = 140;\ \ y = 28 \Rightarrow B(20,28).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 30 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \Rightarrow 210 + 5y = 280;\ 5y = 70;\ \ y = 14 \Rightarrow C(30,14).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 30 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(30,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 1 \cdot 0 + 1{,}2 \cdot 40 = 0 + 48 = 48.$

$B \Rightarrow f(20,28) = 1 \cdot 20 + 1{,}2 \cdot 28 = 20 + 33{,}6 = 53{,}6.$

$C \Rightarrow f(30,14) = 1 \cdot 30 + 1{,}2 \cdot 14 = 30 + 16{,}8 = 46{,}8.$

$D \Rightarrow f(30,0) = 1 \cdot 30 + 1{,}2 \cdot 0 = 30 + 0 = 30.$

El máximo se consigue en el punto $B(20,28)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 1 \cdot x + 1{,}2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1{,}2}x = -\frac{10}{12}x \Rightarrow m = -\frac{2{,}5}{3}.$

$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}ximo\ beneficio\ fabricando\ 20\ litros\ de\ verde1\ y\ 28\ litros\ de\ verde2.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ m\acute{a}ximo\ es\ de\ 53{,}6\ euros.}}$

Problema B3:

Se consideran las siguientes funciones reales de variable real: f(x) = $-x^3 + 2x^2 + 4x$, g(x) = 4x

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x).

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x) en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Solución

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2.$$

Sabiendo que $f(x)$ es continua en R por ser polinómica y teniendo en cuenta que la función $f'(x) = -3x^2 + 4x + 4$ es una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\frac{2}{3}, 2\right).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty).}$$

b) Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 4x = 4x;\ -x^3 + 2x^2 = 0;\ -x^2(x-2) = 0 \Rightarrow$

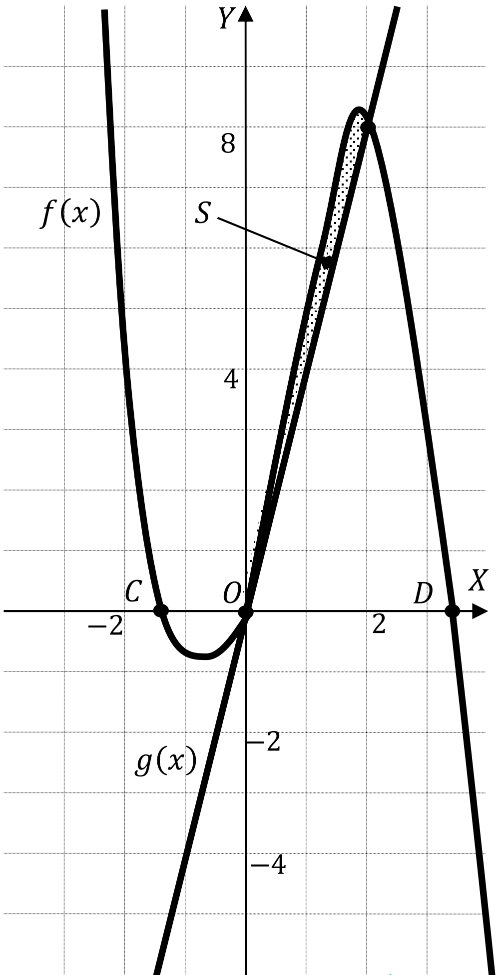
$\Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0);\ \ x_2 = 2 \Rightarrow g(2) = 8 \rightarrow B(2,8).$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de $f(x)$ son los siguientes:

$-x^3 + 2x^2 + 4x = 0;\ -x(x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0).$

$x^2 - 2x - 4 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{5} \sim -1{,}24 \rightarrow C(-1'24, 0) \\ x_2 = 1 + \sqrt{5} \sim 3{,}24 \rightarrow D(3'24, 0) \end{cases}.$$



Teniendo en cuenta los puntos de corte con el eje de abscisas de $f(x)$, que la función $g(x) = 4x$ es una recta que contiene a los puntos $O(0,0)$ y $B(1,4)$ y que $f(1) > 4$, la representación gráfica de la situación es, de forma aproximada, la que indica la figura adjunta.

$$S=\int_0^2 [f(x)-g(x)]\cdot dx$$

$$=\int_0^2 [(-x^3+2x^2+4x)-4x]\cdot dx=$$

$$=\int_0^2 (-x^3+2x^2)\cdot dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=\left(-\frac{1\cdot 2^4}{4}+\frac{2\cdot 2^3}{3}\right)-0=-\frac{16}{4}+\frac{16}{3}=$$

$$=-4+\frac{16}{3}=\frac{-12+16}{3}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\frac{4}{3}\,u^2.}}$$

Problema B4:

El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19, 5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

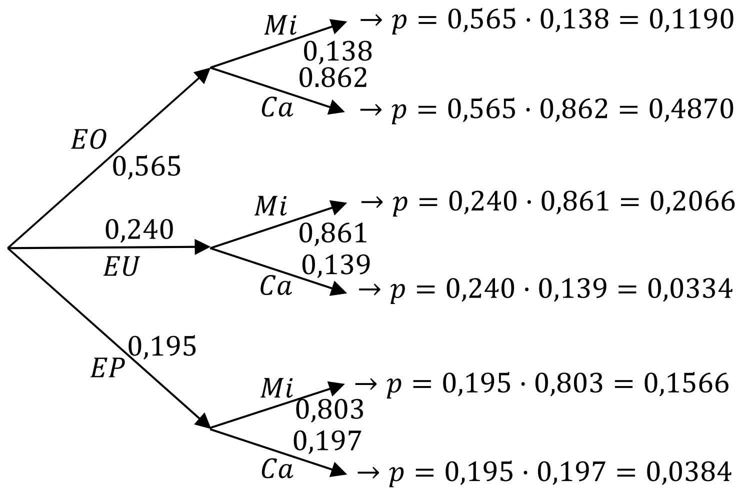
a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Solución

$EO \rightarrow Enseñanza\ obligaroria. \quad EU \rightarrow Enseñanza\ universitaria.$

$EP \rightarrow Enseñanza\ postobligaroria\ no\ universitaria.$



$a)\qquad P = P(Mi) = P(EO \cap Mi) + P(EU \cap Mi) + P(EP \cap Mi) =$

$= P(EO) \cdot P(Mi/EO) + P(EU) \cdot P(Mi/EU) + P(EP) \cdot P(Mi/EP) =$

$= 0{,}565 \cdot 0{,}138 + 0{,}240 \cdot 0{,}861 + 0{,}195 \cdot 0{,}803 = 0{,}0780 + 0{,}2066 + 0{,}1566 =$

$= \underline{0{,}4412}.$

$b)\qquad P = P(EO/Mi) = \frac{P(EO \cap Mi)}{P(Mi)} = \frac{P(EO) \cdot P(Mi/EO)}{P(Mi)} = \frac{0{,}565 \cdot 0{,}138}{0{,}4822} = \frac{0{,}0780}{0{,}4412} = \underline{0{,}1768}.$

Problema B5:

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

Solución

$$Datos: p = 0{,}3; \;\; q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7; \;\; n = 120.$$

$a)$ Se trata de la distribución binomial. Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 120 \cdot 0{,}3 = 36 > 5 \\ n \cdot q = 120 \cdot 0{,}7 = 84 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = p = 0{,}3. \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{120}} = \sqrt{\frac{0{,}21}{120}} \cong 0{,}042.$$

$$\underline{\boldsymbol{X = N(0,3;\; 0,042)}}.$$

$b)$ Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-0{,}3}{0{,}042}$.

$$P = P(X > 0{,}35) = P\left(Z > \frac{0{,}35-0{,}3}{0{,}042}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}05}{0{,}042}\right) \cong P(Z > 1{,}19) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}19) = 1 - 0{,}8830 = \underline{0{,}1170}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine A^3 y A^{2023}.

$b)$ Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Problema 2:

2º) Considere la función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x^2$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$b)$ Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Problema 3:

3º) Considere la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 \ \ si \ \ x < 2 \\ e^x \ \ si \ \ x \geq 2 \end{cases}$:

$a)$ Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

$b)$ Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Problema 4:

4º) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos de 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

$a)$ Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

$b)$ No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Problema 5:

5º) Para estudiar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

$a)$ Sabiendo que la proporción poblacional es $p = 0{,}55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

$b)$ Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Problema 6:

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ dependientes del parámetro real a.

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Problema 7:

7º) Un entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Problema 8:

8º) Considere la función real de variable real $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

Problema 9:

9º) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2.021 se presentaron 2.159 solicitudes en la modalidad general y 1.316 en la modalidad de jóvenes doctores.

El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigados ha sido seleccionado.

Problema 10:

10º) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 km, con un nivel de confianza del 90 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine A^3 y A^{2023}.

$b)$ Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución

$$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^3 = I}.$$

$$A^{2023} = A^{2022} \cdot A = A^{674 \cdot 3} \cdot A = (A^3)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{2.023} = A}}.$$

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to 2F_2 \\ F_3 \to 3F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{6}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2:

2º) Considere la función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x^2$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$b)$ Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Solución

$a)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^3 + 4x$.

$Para\ x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 = 3 + 4 \Rightarrow m = 7$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 3 \Rightarrow P(1, 3)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 3)$:

$y - 3 = 7 \cdot (x - 1) = 7x - 7$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 7x - y - 4 = 0}}.$$

$b)$ La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3}$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = 6x + 4$.

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo\ relativo: O(0, 0)}}.$$

$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{4}{3}$.

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} = \frac{-64+96}{27} = \frac{32}{27} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Máximo\ relativo: B\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)}}.$$

Problema 3:

3º) Considere la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & si \ \ x < 2 \\ e^x & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$:

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (ax^2 + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2 = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4a + 3 = e^2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = \frac{e^2 - 3}{4}}}.$$

b) En el intervalo $[2, 2)$ la función es $f(x) = e^x$, que es mayor que cero para cualquier valor real de x, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 e^x \cdot dx = [e^x]_2^3 = e^3 - e^2 = e^2(e - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = e^2(e - 1)\ u^2}}.$$

Problema 4:

4º) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos de 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

$a)$ Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

$b)$ No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Solución

Sea A el suceso de practicar alguna actividad física durante al menos de 150 minutos y B el de consumir de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

$Datos: P(A) = 0{,}274;\;\; P(B) = 0{,}651;\;\; P(A \cup B) = 0{,}763.$

$a)$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

$P = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}274 + 0{,}651 - 0{,}763 =$

$= 0{,}925 - 0{,}763 = \underline{0{,}162 = 16{,}2\ \%}.$

$b)$ $\quad P = P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A \cup B)}{1-P(B)} = \frac{1-0{,}763}{1-0{,}651} = \frac{0{,}237}{0{,}349} = \underline{0{,}6791}.$

Problema 5:

5º) Para estudiar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $p = 0{,}55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 99,01 %:

$$1 - \alpha = 0{,}9901 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0098 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}049} = 2{,}58.$$

$$(1 - 0{,}0049 = 0{,}9951 \;\rightarrow z = 2{,}58).$$

Datos: $p = 0{,}55;\;\; q = 1 - 0{,}55 = 0{,}45;\;\; E = 0{,}1;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\;\; E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 2{,}58^2 \cdot \frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{0{,}1^2} =$$

$$= 6{,}6564 \cdot \frac{0{,}2475}{0{,}01} = 6{,}6564 \cdot 24{,}75 = 164{,}75.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 165\ empresas}}.$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$$

$Datos:\; n = 100;\;\; p = 0{,}7;\;\; q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}7 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}};\; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}}\right);$$

$(0{,}7 - 1{,}96 \cdot 0{,}0458;\; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot 0{,}0458);\;\; (0{,}7 - 0{,}0898;\; 0{,}7 + 0{,}0898).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (0{,}6102;\;\; 0{,}7898)}}.$$

Problema 6:

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ dependientes del parámetro real a.

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 + 4 + 2 - 2a - 4a - a = 0;$$

$a^3 - 7a + 6 = 0.$

Resolviendo por Ruffini: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$.

	1	0	−7	6
1		1	1	−6
	1	1	−6	0
2		2	6	
	1	3	0	

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow\ Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{8}F_1\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 5F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a = 2 \\ a = -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$ Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Se resuelve por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-4}{4+2} = -\frac{1}{3}. \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2+2}{6} = \frac{2}{3}. \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}.}$$

Problema 7:

7º) Un entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución

Sean x e y los minutos que dedica la entrenadora a los ejercicios de fuerza y cardiovasculares, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} 45 \le x+y \le 60 \\ x \le y \\ x \ge 20;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y \le 60 \\ x+y \ge 45 \\ x-y \le 0 \\ x \ge 20;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y \le 60 \Rightarrow y \le 60-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	60
y	60	0

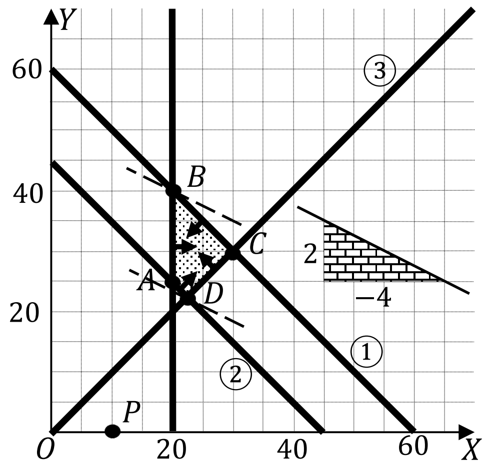
② $\Rightarrow x+y \ge 45 \Rightarrow y \ge 45-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	45
y	45	0

③ $\Rightarrow x-y \le 0 \Rightarrow y \ge x \Rightarrow P(10,0) \rightarrow No.$

x	0	60
y	0	60

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=20 \\ x+y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20,25).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=20 \\ x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=60;\ \ x=y=30 \Rightarrow C(30,30).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ x+y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=45;\ \ x=y=22{,}5 \Rightarrow D(22{,}5;22{,}5).$

La función de objetivos es $f(x,y)=x+2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,25)=20+2\cdot 25=20+50=70.$

$B \Rightarrow f(20,40)=20+2\cdot 40=20+80=100.$

Autores: Antonio Mengiano y Javier Rodrigo Hitos

$C \Rightarrow f(30,30) = 30 + 2 \cdot 30 = 30 + 60 = 90.$

$D \Rightarrow f(22{,}5; 22{,}5) = 22{,}5 + 2 \cdot 22{,}5 = 22{,}5 + 45 = 67{,}5.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,40)$ y el mínimo se produce en el punto $D(22{,}5; 22{,}5)$.

También se hubieras obtenido los punto B y D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$

$\underline{\boldsymbol{Sesión\ más\ beneficiosa\ con\ 20\ minutos\ de\ fuerza\ y\ 40\ cardiovaculares.}}$

$\underline{\boldsymbol{Sesión\ menos\ beneficiosa\ con\ 22,5\ minutos\ de\ cada\ ejercicio.}}$

Problema 8:

8º) Considere la función real de variable real $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

$a)$ Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

$b)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

Solución

$a)$ La función también puede expresarse de la forma: $f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x}$.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador:

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{1\}.}}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x = 0 \ \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (Eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical.}}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}}$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2+2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2} = 0;\ \ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, que la función es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$ y que $f'(1) = \frac{1^2-2}{1^2} = -1 < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right).}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right).}}$$

Problema 9:

9º) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2.021 se presentaron 2.159 solicitudes en la modalidad general y 1.316 en la modalidad de jóvenes doctores.

El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

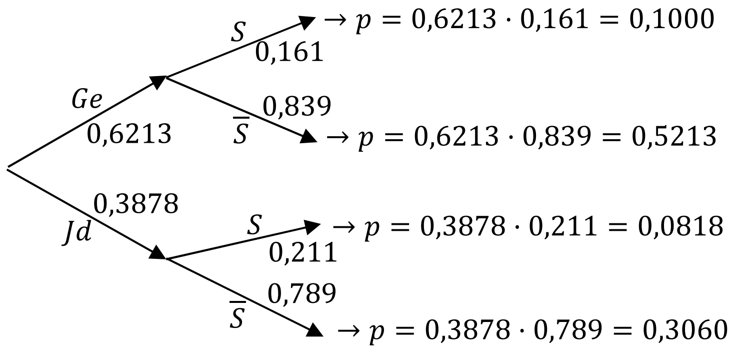
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigados ha sido seleccionado.

Solución

$General \rightarrow Ge.\ Jóvenes\ doctores \rightarrow Jd.$

$Total\ de\ solicitudes: 2.159 + 1.316 = 3.475.$

$P(Ge) = \frac{2.159}{3.475} = 0{,}6213. \qquad P(Jd) = \frac{1.316}{3.475} = 0{,}3878.$



a) $\quad P = P(S) = P(Ge \cap S) + P(Jd \cap S) = P(Ge) \cdot P(S/Ge) + P(Jd) \cdot P(S/Jd) =$

$= 0{,}6213 \cdot 0{,}161 + 0{,}3878 \cdot 0{,}211 = 0{,}1000 + 0{,}0818 = \underline{0{,}1818}.$

b) $\quad P = P(Ge/S) = \frac{P(Ge \cap S)}{P(S)} = \frac{P(Ge) \cdot P(S/Ge)}{P(S)} = \frac{0{,}6213 \cdot 0{,}161}{0{,}1818} = \frac{0{,}1000}{0{,}1818} = \underline{0{,}5501}.$

Problema 10:

10º) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 km, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1-\alpha=0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}565.$$

$$(1-0{,}005=0{,}9950 \;\rightarrow z=2{,}565).$$

Datos: $n=20;\; \overline{x}=50;\; \sigma=2;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}565.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(50-2{,}565\cdot\frac{2}{\sqrt{20}};\; 50+2{,}565\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right);$$

$$(50-2{,}565\cdot 0{,}4472;\; 50+2{,}565\cdot 0{,}4472);\;\; (50-1{,}1471;\; 50+1{,}1471).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{99\,\%}=(48{,}8529;\; 51{,}1471).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha=0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$$

$$(1-0{,}05=0{,}9500 \;\rightarrow z=1{,}645).$$

Datos: $\sigma=2;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\; E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 2)^2=3{,}29^2=10{,}82.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ autobuses.}}$$