

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2023

Comunidad autónoma de **CASTILLA Y LEÓN**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO



	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2022–2023 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. TIEMPO: 90 minutos.		
PROBLEMAS (A ELEGIR TRES) P1. (Números y álgebra) Comparamos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad. P2. (Números y álgebra) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$ b) Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$ P3. (Análisis) Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo (en horas). a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios? b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima. P4. (Análisis) Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad. b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$, dibujando el recinto correspondiente.		

P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

- Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.
- Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

- ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?
- Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dado el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$
 justifica que es un sistema compatible e indeterminado.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$? Justifica la respuesta.

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

SOLUCIÓN

Sean x, y, z los precios originales de las entradas para el teatro, el partido de baloncesto y para el concierto, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 0,9 \cdot (x + y + z) = 117 \\ z = 2x \\ z - 20 = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 130 \\ 2x - z = 0 \\ y - z = -20 \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 130 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -20 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{20+130}{2+1+2} = \frac{150}{5} = 30.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 130 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -20 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-40-20+260}{5} = \frac{200}{5} = 40.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 130 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 \end{vmatrix}}{5} = \frac{260+40}{5} = \frac{300}{5} = 60.$$

Valor entradas: teatro, 30 euros; baloncesto, 40 euros y concierto, 60 euros

P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$

b) Para $a = 2$ y $b = 4$, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$

SOLUCIÓN

$$a) A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+4a & 2a+2b \\ 3+a & 3a-b+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2+4a = -2 \\ 3+a = 2 \\ 2a+2b = 2 \\ 3a-b+2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ a = -1 \\ a+b = 1 \\ 3a-b = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a = -1; b = 2.}$$

$$b) \quad \text{Para } a = 2 \text{ y } b = 4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X = A \cdot B + 3C &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.}$$

P3. (Análisis)

Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función

$$f(t) = -32t^2 + 352t - 568 \text{ para } 3 \leq t \leq 6, \text{ donde } t \text{ es el tiempo (en horas).}$$

a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} a) \quad f(3) &= -32 \cdot 3^2 + 352 \cdot 3 - 568 = -288 + 1.056 - 568 = 1.056 - 856 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(3) = 200. \end{aligned}$$

Al iniciar la segunda parte de la etapa la potencia fue de 200 vatios.

$$f(t) = 272 \Rightarrow -32t^2 + 352t - 568 = 272; \quad 32t^2 - 352t + 840 = 0;$$

$$4t^2 - 44t + 105 = 0; \quad t = \frac{44 \pm \sqrt{1.936 - 1.680}}{8} = \frac{44 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{44 \pm 16}{8} = \frac{11 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{7}{2} = 3,5; \quad t_2 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de t^2 , los periodos donde la potencia fue menor de 272 vatios fueron los siguientes:

$$\underline{f(t) < 272 \Rightarrow t \in [3, 3,5) \cup (3,5; 6].}$$

b) El punto máximo de la parábola $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ es el siguiente:

$$f'(t) = -64t + 352.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -64t + 352 = 0; \quad -16t + 88 = 0; \quad -2t + 11 = 0; \quad 2t = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{11}{2} = 5,5.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11}{2}\right) &= -32 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 352 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) - 568 = -8 \cdot 121 + 176 \cdot 11 - 568 = \\ &= -968 + 1.936 - 568 = 1.936 - 1.536 = 400. \end{aligned}$$

El punto máximo de la parábola es $V(5,5; 400)$.

La potencia máxima se alcanza a las 5,5 horas y es de 400 vatios.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$, dibujando el recinto correspondiente.

SOLUCIÓN

a) La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

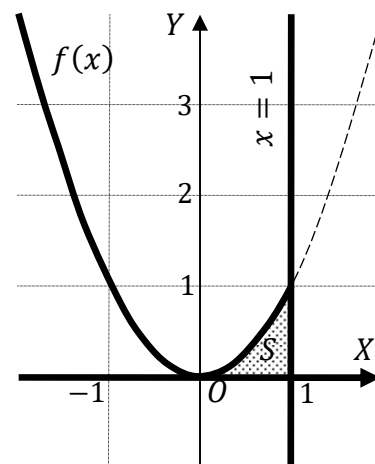
b) En el intervalo $[0, 1]$ la función es la parábola $f(x) = x^2$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

El área pedida se deduce de la observación de la figura; su valor es el siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{3} u^2 \cong 0,33 u^2.}$$



P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

a) Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.

b) Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

1,612; 1,739; 1,625; 1,771; 1,642; 1,713; 1,705; 1,654; 1,632; 1,647.

$$\bar{x} = \frac{1.621+1.739+1.625+1.771+1.642+1.713+1.705+1.654+1.632+1.647}{10} = \frac{6.740}{10} = 67,4.$$

$$\text{Datos: } n = 10; \bar{x} = 67,4; \sigma = 0,05; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}$, σ y n , es la siguiente:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$\left(67,4 - 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{10}}; 67,4 + 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{10}} \right);$$

$$(67,4 - 1,96 \cdot 0,0158; 67,4 + 1,96 \cdot 0,0158); (67,4 - 0,030; 67,4 + 0,030).$$

$$\mathbf{I. C. 95 \% = (67,3690; 67,7010)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\text{Datos: } \sigma = 0,05; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575; E = 0,02.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{0,05}{0,02} \right)^2 = (2,575 \cdot 2,5)^2 = 6,4375^2 = 41,44.$$

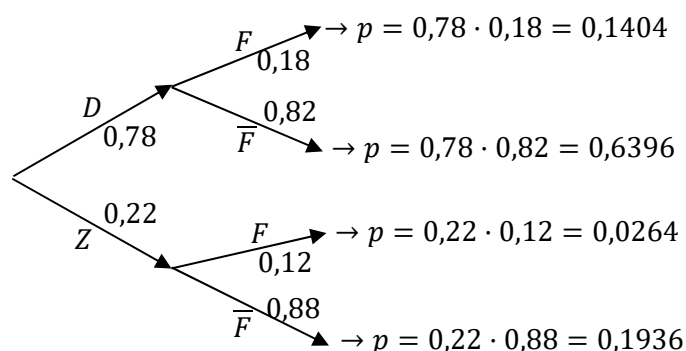
El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 42 estaciones de servicio

P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?

b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

SOLUCIÓN

$$a) \quad P = P(\bar{F}) = P(D \cap \bar{F}) + P(Z \cap \bar{F}) = P(D) \cdot P(\bar{F}/D) + P(Z) \cdot P(\bar{F}/Z) = 0,78 \cdot 0,82 + 0,22 \cdot 0,88 = 0,6396 + 0,1936 = \underline{0,8332}.$$

$$b) \quad P = P(F/Z) = \frac{P(Z \cap F)}{P(Z)} = \frac{P(Z) \cdot P(F/Z)}{1 - P(D)} = \frac{0,22 \cdot 0,12}{1 - 0,8332} = \frac{0,0264}{0,1668} = \underline{0,1583}.$$

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)**C1. (Números y álgebra)**

Dado el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado.

SOLUCIÓN

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es compatible indeterminado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son ambos iguales a dos.

Por tratarse de un sistema homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes. Los sistemas homogéneos siempre tienen solución, al menos la solución trivial: $x = y = z = 0$, que se produce cuando el rango de la matriz de coeficientes es 3, es decir: cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos por tener dos columnas iguales y existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Lo anterior justifica que el sistema es compatible indeterminado.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN

La función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 \geq 0$.

$$x^2 \geq 1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}.$$

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

SOLUCIÓN

La probabilidad de que no coincida el cumpleaños de dos amigas es $P = \frac{364}{365}$, por lo cual, la probabilidad de que coincida el día es: $P = 1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$.

La probabilidad de que no coincida el cumpleaños de la tercera amiga con las dos anteriores es $P = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$, por lo cual, la probabilidad de que coincida el día es:

$$P = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 1 - \frac{364 \cdot 363}{365 \cdot 365} = 1 - \frac{132.132}{133.225} = \frac{133.225 - 132.132}{133.225} = \frac{1.093}{133.225} = \underline{0,0082}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2022–2023 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. TIEMPO: 90 minutos.		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA <i>Problemas.</i> PROBLEMAS (A ELEGIR TRES) P1. (Números y álgebra) Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo? P2. (Números y álgebra) Dado el sistema con el parámetro a: $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a. b) Resolver el sistema para $a = -1$. P3. (Análisis) En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función: $c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$ siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas. a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría. b) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.		

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

- Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Cuestiones.**CUESTIONES (A ELEGIR UNA)****C1. (Números y álgebra)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN

Sean x e y los formatos de los tipos S y L que reparte el centro logístico, respectivamente.

Las condiciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ y \geq \frac{x+y}{5} \\ x \geq 0; y \leq 40 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ 5y \geq x + y \\ x \geq 0; y \leq 40 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y \leq 70 \\ x - 4y \leq 0 \\ x \geq 0; y \leq 40 \end{array} \right\}.$$

① $\Rightarrow x + y \leq 70 \Rightarrow y \leq 70 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

② $\Rightarrow y \geq \frac{x}{4} \Rightarrow P(30,0) \rightarrow No.$

x	0	70
y	70	0

x	0	40
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 40 \\ x + y = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(30,40).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 70 \\ x - 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 70 \\ -x + 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 70; y = 14; x + 14 = 70;$

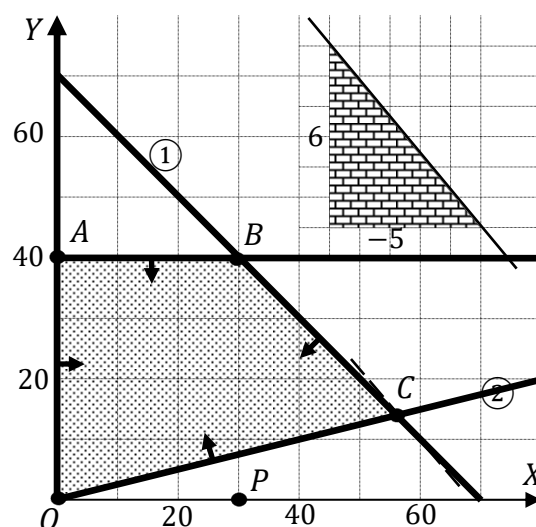
$x = 56 \Rightarrow C(56,14).$

La función de objetivos: $f(x,y) = 3.000x + 2.500y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 3.000 \cdot 0 + 2.500 \cdot 40 = 0 + 100.000 = 100.000.$

$B \Rightarrow f(30,40) = 3.000 \cdot 30 + 2.500 \cdot 40 = 90.000 + 100.000 = 190.000.$



$$C \Rightarrow f(46, 14) = 3.000 \cdot 56 + 2.500 \cdot 14 = 168.000 + 35.000 = 203.000.$$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 3.000x + 2.500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3.000}{2.500}x = -\frac{30}{25}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$$

El beneficio es máximo vendiendo 46 artículos S y 14 artículos L .

El beneficio máximo es de 203.000 euros.

P2

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a :
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a .
b) Resolver el sistema para $a = -1$.

SOLUCIÓN

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 + 1 - 1 = 0; \quad -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

Para $a \neq 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

- b) Para $a = -1$ el sistema resulta
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
, que es compatible determinado.

Sumando, miembro a miembro, las dos últimas ecuaciones: $2x = 0$; $x = 0$.

Solución: $x = 0, y = z = 1$.

P3

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.
- Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

SOLUCIÓN

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(x) = 2 + 0 - \frac{80.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{80.000}{x^2}; \quad 2x^2 = 80.000; \quad x^2 = 40.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = +\sqrt{40.000} \Rightarrow x = 200.$$

$$\text{Crecimiento: } c'(x) > 0 \Rightarrow x > 200 \Rightarrow x \in (200, +\infty).$$

$$\text{Decrecimiento: } c'(x) < 0 \Rightarrow x < 200 \Rightarrow x \in (0, 200).$$

b) Del apartado anterior, teniendo en cuenta que $c(x)$ es continua en su dominio, se deduce que el mínimo se produce para $x = 200$, no obstante, se obtiene a través de la segunda derivada.

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$$c''(x) = 0 + \frac{80.000 \cdot x}{x^4} = \frac{80.000}{x^3}.$$

$$c''(200) = \frac{80.000}{200^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo absoluto para } x = 200.$$

El coste mínimo se produce fabricando 200 toneladas.

$$c(200) = 2 \cdot 200 + 720 + \frac{80.000}{200} = 400 + 720 + 400 = 1.520.$$

El coste mínimo es de 1.520.000 euros.

P4

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.
- Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

SOLUCIÓN

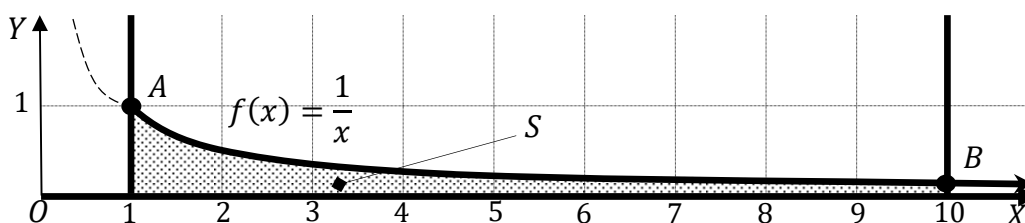
a) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (6x - 1) = -1 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \end{cases} & \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$ (salto infinito).

b) En el intervalo $[1, 10]$ la función es la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas de expresión $f(x) = \frac{1}{x}$.



La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$$S = \int_1^{10} f(x) \cdot dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} \cdot dx = [Lx]_1^{10} = L10 - L1 = L10 - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S = L10 u^2 \cong 2,30 u^2}.$$

P5

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

- Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.
- ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ ?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\text{Datos: } n = 100; \bar{x} = 1.248; \sigma = 328; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\bar{x}$, σ y n , es la siguiente:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$\left(1.248 - 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}; 1.248 + 2,575 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}} \right);$$

$$(1.248 - 2,575 \cdot 32,8; 1.248 + 2,575 \cdot 32,8); (1.248 - 84,46; 1.248 + 84,46).$$

$$\underline{I. C. 99\% = (1.163,54; 1.332,46)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } \sigma = 328; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96; E = 127.$$

$$\begin{aligned} \text{Siendo } E &= z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{328}{127} \right)^2 = \\ &= (1,96 \cdot 2,5827)^2 = 5,0620^2 = 25,62. \end{aligned}$$

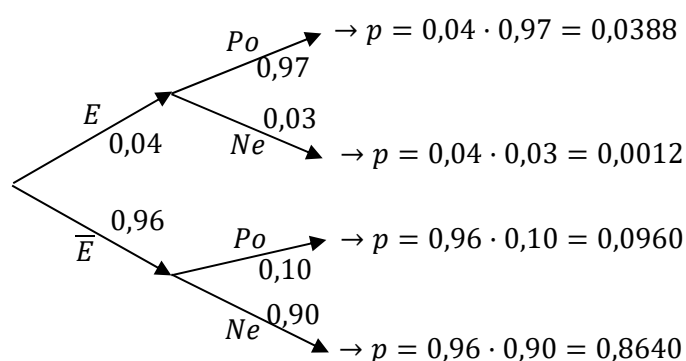
El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 26 tiendas

P6

P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

- Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.
- Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 a) \quad P &= P(Po) = P(E \cap Po) + P(\bar{E} \cap Po) = \\
 &= P(E) \cdot P(Po/E) + P(\bar{E}) \cdot P(Po/\bar{E}) = 0,04 \cdot 0,97 + 0,96 \cdot 0,10 = \\
 &= 0,0388 + 0,0960 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\underline{P(Po) = 0,1348.}$$

$$b) \quad P = P(E/Po) = \frac{P(E \cap Po)}{P(Po)} = \frac{P(E) \cdot P(Po/E)}{P(Po)} = \frac{0,04 \cdot 0,97}{0,1348} = \frac{0,0388}{0,1348} = \underline{0,2878.}$$

$$\underline{P(E/Po) = 0,2878.}$$

Cuestiones.**CUESTIONES (A ELEGIR UNA)****C1. (Números y álgebra)**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a , b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

SOLUCIÓN**C1**

Para que el rango de la matriz A sea 1 es necesario que sean nulos todos los determinantes 2×2 que puedan formarse con los elementos de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c - 32 = 0 \Rightarrow \underline{c = 32}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 16}.$$

$$\begin{vmatrix} a & 4 \\ -2 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16a + 8 = 0; \quad 2a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{2}}.$$

C2

Sabiendo que el dominio de las funciones logarítmicas es $(0, +\infty)$:

$$x^2 - 4 > 0; \quad x^2 > 4; \quad |x| > 2 \Rightarrow$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)}.$$

C3

$$\text{Datos: } P(A) = 0,7; \quad P(\overline{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,4; \quad P(\overline{B}) = 0,6.$$

$$P = P(AB) + P(\overline{A}\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = \\ = 0,28 + 0,42 + 0,12 = \underline{0,82}.$$

También puede resolverse la cuestión por el suceso contrario.

La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no lleguen puntuales ninguno de los equipos:

$$P = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - 0,3 \cdot 0,6 = 1 - 0,18 = \underline{0,82}.$$