Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

TIEMPO: 90 minutos.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70 000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I. a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & si\ x \leq 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x = 1? (0.5 puntos)

b) Para t = 2, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo (−∞, 1). (0.5 puntos)

c) Para t = 2, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en (−∞, 1). (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, −5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es −12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publican habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y\ C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $1/3\ B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 kg,
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)
c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & si \;\; x \leq -2 \\ t-2 & si \;\; -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & si \;\; x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en x = −2 y en x = 2? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para t = 3. (0.75 puntos)

6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$,
a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

Sección 1 ***Bloque 1***

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$f(x) = \begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

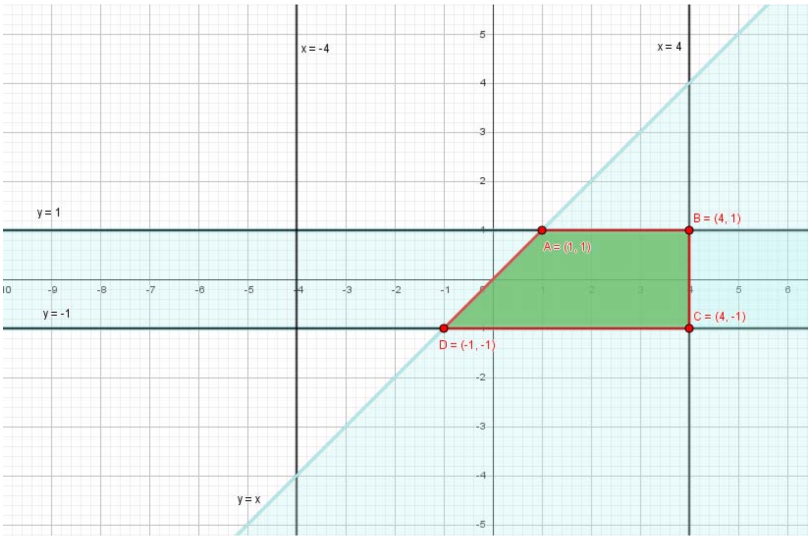
a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

Respuesta:

a)

Representamos las rectas: y = x ; x = -4 ; x = 4; y = -1 ; y = 1 y sombreamos las regiones válidas



Para calcular los vértices, resolvemos los sistemas:

A: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ **A(1, 1)** ; B: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ **B(4, 1)** ; C: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ **C(4, -1)** ; D: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ **D(-1, -1)**

b) $\boldsymbol{f(x,y) = -x - 5y + 10}$

f(A) = – 1 – 5 +10 = 4 ; f(B) = – 4 – 5 + 10 = 1 ; f(C) = – 4 – 5·(-1) +10 = 11 ; f(D) = – (-1) – 5(-1) + 10 = 16

Mínimo en el punto B(4, 1) con el valor 1

Máximo en el punto D(-1, -1) con el valor 16

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70 000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de unidades vendidas del disco I

y = nº de unidades vendidas del disco II

z = nº de unidades vendidas del disco III , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=70000 \\ z=x+y \\ z-y=3(y-x) \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x+y+z=70000 \\ x+y-z=0 \\ 3x-4y+z=0 \end{cases}$ hacemos –E1 + E2 y –3E1+E3, nos queda,

$\begin{cases} x+y+z=70000 \\ -2z=-70000 \\ -7y-2z=-70000 \end{cases}$ ya podemos resolver, z = 35000

$-7y-2(-35000)=-70000$ y = 20000

$x+20000+35000=70000$ x = 15000 ,

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de unidades vendidas del disco I 15.000

nº de unidades vendidas del disco II 20.000

nº de unidades vendidas del disco III 35.000

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & si\ x \leq 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x = 1? (0.5 puntos)

b) Para t = 2, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo (−∞, 1). (0.5 puntos)

c) Para t = 2, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en (−∞, 1). (0.5 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = 1 debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + tx - 1) = t + 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x + t) = 1 + t \ ,$$ t + 1 = 1 + t ;

luego para cualquier valor de t, f es continua en 1.

La función es continua en x = 1 para cualquier valor de t.

c) Para t = 2, $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ en el intervalo (−∞, 1) , calculamos la derivada

$f'(x) = 4x + 2$ $\quad 4x + 2 = 0\ ;\quad x = -\frac{1}{2}$ tenemos los intervalos

$(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}\ , 1)$ cogemos valores dentro de los mismos

$f'(-2) = 4(-2) + 2 = -6 < 0$ Decreciente

$f'(0) = 4 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$ Creciente

En $(-\infty, -\frac{1}{2})$, f es decreciente y en $(-\frac{1}{2}\ ,\ 1)$ es creciente.

b) Según el apartado anterior en $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo

También podemos hacer la segunda derivada y sustituir

$f''(x) = 4 \quad , f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$ por tanto, es un mínimo.

Para $t = 2$, en $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo relativo.

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, −5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es −12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Respuesta:

Como pasa por (2, -5) f(2) = - 5 (1)

Pendiente de la recta tangente – 12 f'(2) = -12 (2)

Punto de inflexión f''(2) = 0 (3)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad , \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx \quad , \quad f''(x) = 6ax$

(1) $f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c =$ $8a + 4b + c = -5$

(2) $f'(2) = 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 =$ $12a + 4b = -12$

(3) $f''(2) = 6 \cdot a \cdot 2 =$ $12a = 0$ resolviendo

a = 0, b = -3, c = 7

Sección 2 Bloque 1

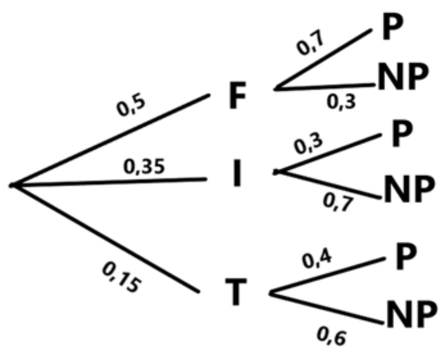
3. En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publica habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

Respuesta:

F….Facebook , I….Instagram , T….TikTok , P….Publica , NP…..No publica



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(NP) = P(F\cap NP) + P(I\cap NP) + P(T\cap NP) = P(F)\cdot P(NP/F) + P(I)\cdot P(NP/I) + P(T)\cdot P(NP/T) =$

$= 0,5\cdot 0,3 + 0,35\cdot 0,7 + 0,15\cdot 0,6 = 0,485$

P(no publicar) = 0,485

b) Por el teorema de Bayes

$$P(I/P) = \frac{P(I\cap P)}{P(P)} = \frac{P(I)\cdot P(P/I)}{1-P(NP)} = \frac{0,35\cdot 0,3}{1-0,485} = \frac{0,105}{0,515} = 0,2039$$

P(preferir Instagram cuando publica) = 0,2039

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$ como la *$\sigma^2 = 100$,* *la $\sigma = 10$*

donde X es la variable "cantidades donadas", X sigue una $N(\mu, 10)$

$$\overline{x} = \frac{60+40+55+35+20+25+50+45+30}{9} = 40 \ euros$$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 10 euros$ $\quad 1-\alpha = 0,97$, $n = 9$, $\overline{x} = 40 euros$

$1-\alpha = 0,97$, $\alpha = 0,03$, $\frac{\alpha}{2} = 0,015$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0,985$, buscamos en la tabla: $Z_{0,985} = 2,17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(40 - 2,17\frac{10}{\sqrt{9}}, \quad 40 + 2,17\frac{10}{\sqrt{9}}\right) = (32,767, \quad 47,233)$$

Intervalo de confianza: (32,767, 47,233)

b) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para $E = 2$,

$$2 = 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \quad ; \quad n = \left(\frac{21,7}{2}\right)^2 = 117,7$$

El tamaño de la muestra ha de ser 118 o mayor

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de entradas para jubilados.

y = nº de entradas para adultos.

z = nº de entradas para niños. El sistema sería:

$$\begin{cases} x + y + z = 660 \\ x = \frac{1}{4}y \\ z = 0{,}1(x + y) \end{cases}$$

b) Operamos

$$\begin{cases} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ z = 0{,}1x + 0{,}1y \end{cases} \quad \text{ordenamos, multiplicamos por 10 la E3,} \quad \begin{cases} x + y + z = 660 \\ 4x - y = 0 \\ x + y - 10z = 0 \end{cases}$$

-4E1 + E2, -E1 + E3 : $\begin{cases} x + y + z = 660 \\ -5y - 4z = -2640 \\ -11z = -660 \end{cases}$, ya podemos resolver, z = 60 ,

$-5y - 4 \cdot 60 = -2640$, y = 480 ; $x + 480 + 60 = 660$ x = 120 .

nº de entradas para jubilados ………… 120

nº de entradas para adultos ……….. 480

nº de entradas para niños ………… 60

Autor: LUIS CARLOS VIDAL DEL CAMPO
www.apuntesmareaverde.org.es

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula 1/3 $B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular *(A − B) − C* y *B · C* (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Respuesta:

a) $A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b) $\frac{1}{3}B^2 - I = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}B^2 - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

c) (A – B) – C no se puede calcular pues A y B son de 3x3 y C es de 1x3

B·C no se puede calcular pues sería (3x3) · (1x3)

Sección 3 Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

Respuesta:

M = mujeres, 50 ; H = hombres, 30 ; Total = 80

a) **P(3 mujeres)** = $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1) \cdot P(M_2/M_1) \cdot P(M_3/ M_1 \cap M_2) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \mathbf{0,239}$

b) **P(mismo sexo)** = $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} =$

$= 0{,}239 + 0{,}049 = \mathbf{0,288}$

c) **P(al menos 2 hombres)** =

$P(M_1 \cap H_2 \cap H_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap M_3) + P(H_1 \cap M_2 \cap H_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$

$= \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{50}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \mathbf{0,314}$

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "peso de los motores", X sigue una $N(\mu, 30)$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 30\ kg}$ $\boldsymbol{1-\alpha = 0.95}$, $n = 81$, $\boldsymbol{\overline{x} = 153\ kg}$

$\boldsymbol{1-\alpha = 0.95}$, $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$, $\boldsymbol{\frac{\alpha}{2} = 0.025}$, $\boldsymbol{1-\frac{\alpha}{2} = 0.975}$, buscamos en la tabla: $\boldsymbol{Z_{0.975} = 1.96}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\mathbf{153 - 1.96\frac{30}{\sqrt{81}},\quad 153 + 1.96\frac{30}{\sqrt{81}}}\right) = (\ \mathbf{146.47, 159.53}\ )$$

Intervalo de confianza: $(\ \mathbf{146.47, 159.53}\ )$

b) El error máximo admisible viene dado por: $\boldsymbol{E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Por tanto, para $n = 100$,

$$\mathbf{1-\alpha = 0.9312}, \quad \mathbf{\alpha = 0.0688}, \quad \mathbf{\frac{\alpha}{2} = 0.0344}, \quad \mathbf{1-\frac{\alpha}{2} = 0.9656},$$

buscamos en la tabla: $\boldsymbol{Z_{0.9656} = 1.82}$. Sustituyendo en la fórmula

$$E = 1.82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 1.82 \cdot 3 = 5.46$$

El error máximo admisible es de 5.46 kg

c) El peso medio de 145 kg no está en el intervalo calculado, con un nivel de confianza del 95%, por lo que no se puede admitir que esa sea la media poblacional con un nivel de confianza del 92%, pues al disminuir el nivel de confianza el IC va a disminuir su amplitud.

No se puede admitir que con un nivel de confianza del 92 % que 145 kg sea el peso medio de los motores

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2+2 & si\ \ x \le -2 \\ t-2 & si\ \ -2 < x \le 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & si\ \ x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en x = −2 y en x = 2? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para t = 3. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = -2 y en x = 2, ha de existir el límite en cada uno de los puntos, el valor ya existe, y para ello es necesario que existan los límites laterales y sean iguales, los calculamos e igualamos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}[-(x+t)^2+2] = (-t^2+4t-2) \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+}(t-2) = t-2 \end{cases}$$

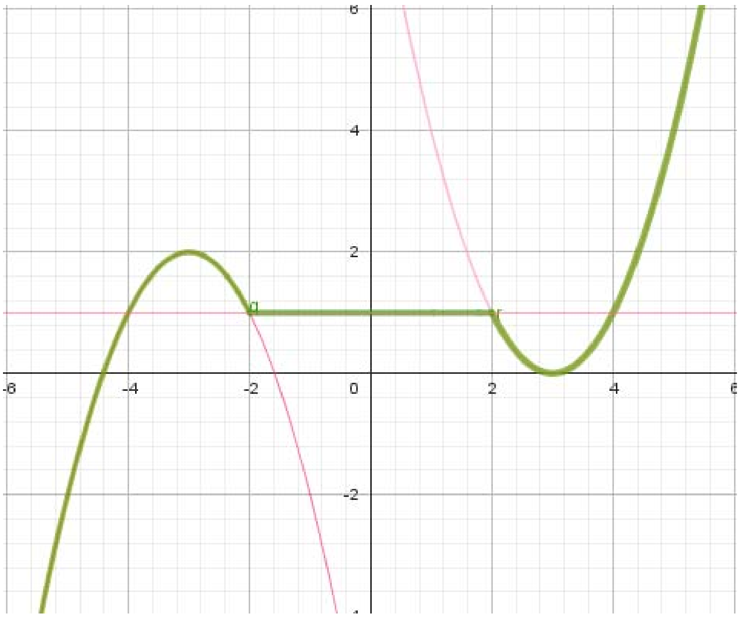
$(-t^2+4t-2) = t-2$; $t^2-3t=0$; t = 0 , t = 3

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(t-2) = t-2 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}[x^2-(t+3)x+9] = -2t+7 \end{cases}$$

t – 2 = - 2t +7, 3t = 9 , **t = 3.** Por tanto,

para t = 3 f es continua en x = - 2 y x = 2.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2-6x-7 & si\ \ x \le -2 \\ 1 & si\ \ -2 < x \le 2 \\ x^2-6x+9 & si\ \ x > 2 \end{cases}$



6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0 \le x \le 10$,

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

Respuesta:

$\boldsymbol{H(x) = 20x - 2x^2}$ con x = tiempo en segundos y $\boldsymbol{0 \le x \le 10}$

a) $H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 48$

A los 3 segundos alcanza 48 metros

b) $32 = 20x - 2x^2$; $20x - 2x^2 - 32 = 0$ x = 2 y x = 8

A los 2 segundos y a los 8 segundos se encuentra a 32 metros

c) $H'(x) = 20 - 4x$; $20 - 4x = 0$; $x = 5$

$$H''(x) = -4 \quad ; \quad H''(5) = -4 < 0 \quad , máximo$$

$$H(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 50$$

Alcanza la altura máxima, 50 metros, a los 5 segundos.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \le 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1,25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0,25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería.(0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & si\ x \le 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0,5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0,5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0,5puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1,5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0,75puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0,75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 51 calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochoscon un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y el 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0,75puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso?(0,75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza σ^2 = 81 metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0,5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95,96 %? (0,5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \le c \\ 6x+3 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0,75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0,75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0 \le x \le 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función *f* (*x, y*) = 4*x* + 5*y* – *3* sujeta alas siguientes restricciones:

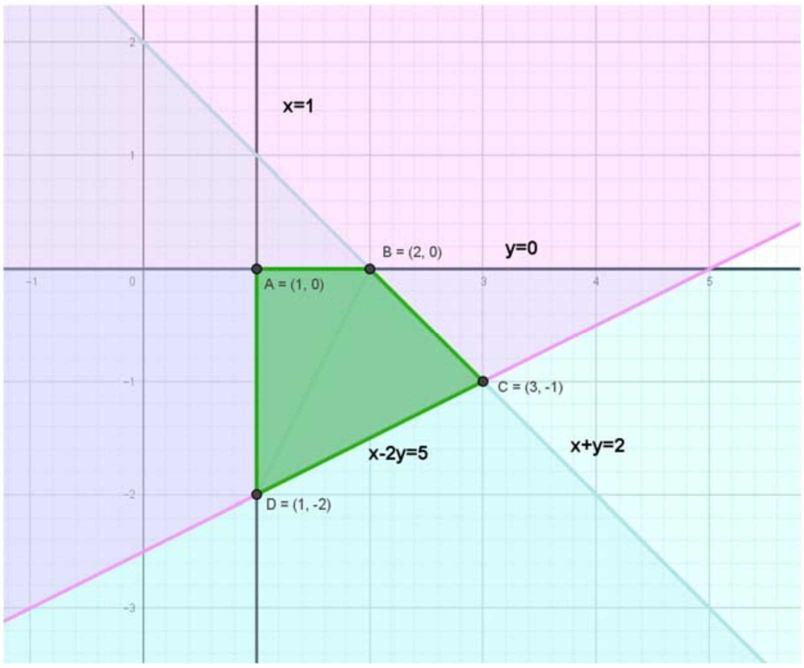
$$\begin{cases} x+y\le 2 \\ x-2y\le 5 \\ y\le 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1,25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0,25 puntos)

Respuesta:

a)



Para calcular los vértices, resolvemos los sistemas:

A: $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$ **A(1, 0)** ; B: $\begin{cases} x+y=2 \\ y=0 \end{cases}$ **B(2, 0)** ; C: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=5 \end{cases}$ **C(3, -1)** ; D: $\begin{cases} x-2y=5 \\ x=1 \end{cases}$ **D(1, -2)**

b) $\boldsymbol{f(x,y)=4x+5y-3}$

f(A) = 4 + 0 – 3 = 1 ; f(B) = 8 + 0 – 3 = 5 ; f(C) = 12 – 5 – 3 = 4 ; f(D) = 4 – 10 – 3 = –9

Mínimo en el punto D(1, -2) con el valor -9

Máximo en el punto B(2, 0) con el valor 5

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería.(0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de cuadros de arte urbano

y = nº de cuadros de arte abstracto

z = nº de grafiti , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 0,4(x+y)=28 \\ 2y=3z \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x+y+z \;\; =110 \\ 0,4x+0,4y \quad =28 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$ hacemos −0,4·E1 + E2 nos queda,

$\begin{cases} x+y+z \;\; =110 \\ -0,4z \;=-16 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$ ya podemos resolver, z = 40

$2y-3\cdot 40=0$ y = 60

$x+60+40=110$ x = 10 ,

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de cuadros de arte urbano ………… 10

nº de cuadros de arte abstracto ………… 60

nº de grafiti …………………………………… 40

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x+1|+t & si\ x\le 0 \\ -x^3+2x^2+(t+2)x+3 & si\ x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0,5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0,5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0,5puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = 0, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(|x+1|+t) = t+1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[-x^3+2x^2+(t+2)x+3] = 3 \ , \qquad t+1=3\ ;\ t=2$$

luego para el valor de $t = 2$, f es continua en 1.

La función es continua en $x = 0$ para el valor de $t = 2$.

c) Para t = 2, $f(x) = -x^3+2x^2+4x+3$ en el intervalo (o, ∞) , calculamos la derivada

$f'(x) = -3x^2+4x+4$; $-3x^2+4x+4 = 0$; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 2$ tenemos los intervalos

$(0, 2)$ y $(2, \infty)$ cogemos valores dentro de los mismos; $(-\frac{2}{3}$, está fuera del intervalo)

$f'(1) = -3\cdot 1^2+4\cdot 1+4 = 5 > 0$ Creciente

$f'(10) = -3\cdot 10^2+4\cdot 10+4 = -256 < 0$ Decreciente

En $(0, 2)$, f es creciente y en $(2, \infty)$ es decreciente.

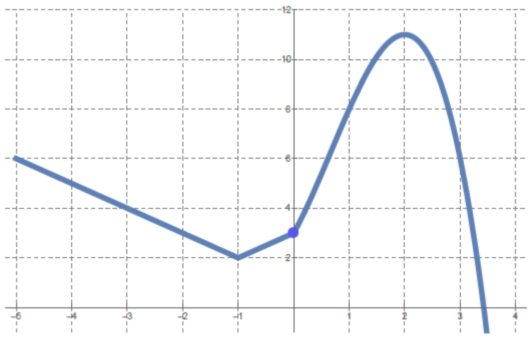
b) Según el apartado anterior en $x = 2$ hay un máximo

También podemos hacer la segunda derivada y sustituir

$f''(x) = -6x+4$, $f''(2) = -8 < 0$ por tanto, es un máximo.

$$f(2) = -2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2+3 = 11$$

Para $t = 2$, en $x = 2$, punto (2, 11), hay un máximo relativo.



2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función f (x) = ax^2 + bx – 20, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1,5 puntos)

Respuesta:

Como pasa por (6, 16) f(6) = 16 (1)

Como tiene un máximo en (6, 16) f'(6) = 0 (2)

$f(x) = ax^2 + bx - 20$, $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$

(1) $f(6) = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 - 20 = 16$ $36a + 6b = 36$

(2) $f'(6) = 2 \cdot a \cdot 6 + b = 0$ $12a + b = 0$ resolviendo

nos queda a = -1 y b = 12 , de donde, $f(x) = -x^2 + 12x - 20$

a = -1, b = 12

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

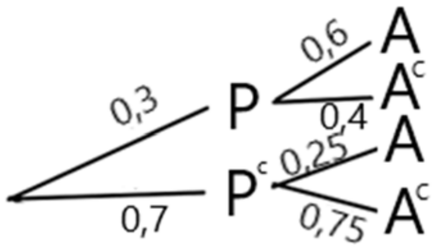
3. En Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0,75puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de quele guste la piña? (0,75 puntos)

Respuesta:

Sea P=le gusta la piña, P^c=no le gusta la piña, A=le gusta la anchoa, A^c=no le gusta la anchoa



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(A) = P(P \cap A) + P(P^C \cap A) = P(P) \cdot P(A/P) + P(P^C) \cdot P(A/P^C) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}25 = 0{,}355$

P(le guste la anchoa en la pizza) = 0,355

b) Por el teorema de Bayes

$$P(P/A^C) = \frac{P(P \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(P) \cdot P(A^C/P)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}355} = \frac{0{,}12}{0{,}645} = 0{,}186$$

P(le guste la piña sabiendo no le gusta la anchoa) = 0,186

Autor: LUIS CARLOS VIDAL DEL CAMPO
www.apuntesmareaverde.org.es

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=51 calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \qquad \bar{x} = 223 \text{ calorías} \qquad \sigma = 51$$

donde X es la variable "contenido calórico", X sigue una N(μ, 51)

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 51} \quad \boldsymbol{1-\alpha = 0,95}$, n = 36, $\boldsymbol{\bar{x} = 223}$

$\boldsymbol{1-\alpha = 0,95}$, $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, $\boldsymbol{\frac{\alpha}{2} = 0,025}$, $\boldsymbol{1-\frac{\alpha}{2} = 0,975}$, buscamos en la tabla: $\boldsymbol{Z_{0,975} = 1,96}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\boldsymbol{223 - 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}}}, \quad \boldsymbol{223 + 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}}}\right) = (206{,}34 \, , \, 239{,}66)$$

Intervalo de confianza: (206,34, 239,66)

b) El error máximo admisible viene dado por: $\boldsymbol{E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Por tanto, para $\mathrm{E} = 10$, y

$1-\alpha = 0{,}9464$, $\alpha = 0{,}0536$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}0268$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}9732$, buscamos en la tabla: $\mathrm{Z}_{0,9732} = 1{,}93$

$$10 = 1{,}93 \cdot \frac{51}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad n = \left(\frac{1{,}93 \cdot 51}{10}\right)^2 = 9{,}843^2 = 96{,}885$$

El tamaño de la muestra ha de ser 97 bizcochos o mayor

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de botellas de blanco

y = nº de botellas de rosado

z = nº de botellas de tinto , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 2x=y+1 \\ 2x=5z \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x+y+z & =50 \\ 2x-y & =1 \\ 2x \quad -5z & =0 \end{cases}$ hacemos −2·E1 + E2 y -2·E1+E3 nos queda,

$$\begin{cases} x+y+z & =50 \\ -3y-2z & =-99 \\ -2y-7z & =-100 \end{cases} \quad \text{-2·E2+3·E3} \quad \begin{cases} x+y+z & =50 \\ -3y-2z & =-99 \\ -17z & =-102 \end{cases}$$

ya podemos resolver, z = 6

$-3y-2\cdot 6=-99$ y = 29

$x+29+6=50$ x = 15 ,

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de botellas de vino blanco …………. 15

nº de botellas de vino rosado …………… 29

nº de botellas de vino tinto ……..……… 6

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I lamatriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)

Respuesta:

a) $\mathbf{M \cdot N = N \cdot M}$; $\mathbf{M \cdot N} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$

$\mathbf{N \cdot M} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **Conmutan y son inversas.**

b) $M \cdot P \cdot X = N^T - M$; $P \cdot X = M^{-1} \cdot (N^T - M)$; $X = P^{-1} \cdot M^{-1} \cdot (N^T - M)$

P^{-1} ; $\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 1/6·F1 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 3F1+F2 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$

-2·F2 ; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ ½·F2+F1 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ $M^{-1} = N$ de donde,

$X = P^{-1} \cdot M^{-1} \cdot (N^T - M) = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 84 & -38 \\ -38 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-10/3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

c) Como al sumar con $(N + I)^2$ debe dar la matriz nula, calculamos $(N + I)^2$ y le cambiamos el signo a todos los elementos, (la opuesta)

$(N + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right]^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-36} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{18} \end{pmatrix}$

Luego la matriz pedida es $\begin{pmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{36} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-18} \end{pmatrix}$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y el 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0,75puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso?(0,75 puntos)

Respuesta:

Sea R=llega con retraso, P(R) = 0,09; D=llega defectuoso P(D) = 0,14 ; P(R∪D) = 0,19

a) P(R∪D) = P(R) + P(D) – P(R∩D) ; 0,19 = 0,09 + 0,14 – P(R∩D) ; P(R∩D) = 0,04

P(R∩D) = 0,04; el 4% llega con retraso y defectuoso

b) P(D/R) = $\frac{P(D\cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}04}{0{,}09} = \mathbf{0{,}444}$

P(D/R) = 0,444; el 44,4% llega defectuoso si se sabe llega con retraso

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismoinfantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0,5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95,96 %? (0,5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

como la $\sigma^2 = 81$, la $\sigma = 9$

donde X es la variable "distancia alcanzada", X sigue una $N(\mu, 9)$

$$\overline{x} = \frac{16 + 21 + 15 + 17 + 16 + 19 + 14 + 14 + 19}{9} = 16{,}778$$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 9\ metros$ $1 - \alpha = 0{,}97$, n = 9, $\overline{x} = 16{,}778\ metros$

$1 - \alpha = 0{,}97$, $\alpha = 0{,}03$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}015$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}985$, buscamos en la tabla: $Z_{0{,}985} = 2{,}17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(16{,}778 - 2{,}17\frac{9}{\sqrt{9}},\quad 16{,}778 + 2{,}17\frac{9}{\sqrt{9}}\right) = (\,10{,}268,\quad 23{,}288\,)$$

Intervalo de confianza: (10,268, 23,288)

b) Si mantenemos el nivel de confianza, para obtener un intervalo de mayor amplitud deberíamos disminuir el tamaño de la muestra, así $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ sería mayor.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para n = 49 y $1 - \alpha = 0{,}9596$

$$1 - \alpha = 0{,}9596, \quad \alpha = 0{,}0404\ , \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}0202, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9798,$$

buscamos en la tabla: $Z_{0{,}9798} = 2{,}05$. $E = 2{,}05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = 2{,}6357$

El error máximo admisible será de 2,6357

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \le c \\ 6x+3 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0,75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = c, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

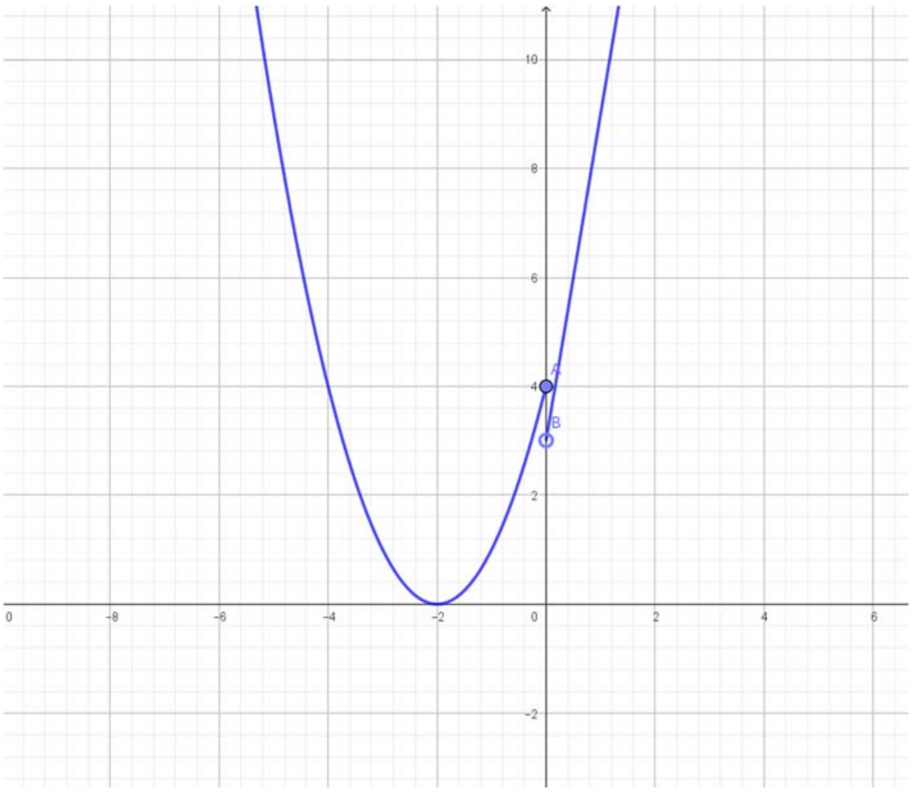
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} (x+2)^2 = (c+2)^2$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} (6x+3) = 6c+3, \quad (c+2)^2 = 6c+3 \quad , \quad c^2 - 2c + 1 = 0 \qquad c = 1$$

luego para el valor de $c = 1$, f es continua en c.

La función es continua en $x = c$ para el valor de $c = 1$.

b) $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{(x+2)^2} & \mathbf{si\ x \le 0} \\ \mathbf{6x+3} & \mathbf{si\ x > 0} \end{cases}$



6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0 \le x \le 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

Respuesta:

$$\boldsymbol{C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x} \text{ con x = tiempo en horas y } \boldsymbol{0 \le x \le 6}$$

a) $C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \quad ; \quad 3x^2 - 24x + 45 = 0 \quad ; \quad x = 3 \ , \quad x = 5$

$$C''(x) = 6x - 24 \quad ; \quad C''(3) = -6 < 0 \quad , máximo \ , \quad C''(5) = 6 > 0 \ , \ mínimo$$

$$\mathrm{C}(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 = 54$$

Alcanza el consumo máximo, 54 dm^3, a las 3 horas.

b) Consideramos los intervalos (0, 3) (3, 5) y (5, 6) tomamos valores del interior y vemos el signo en la derivada al sustituirlos

$$\mathbf{C'(1) = 3 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 45 = 24 > 0 \ , \ creciente}$$

$$\mathbf{C'(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -23 < 0 \ , \ decreciente}$$

$$\mathbf{C'(5,5) = 3 \cdot (5,5)^2 - 24 \cdot 5,5 + 45 = 3,75 > 0 \ , \ creciente}$$

En el intervalo (3, 5) disminuye el consumo de agua.