MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real m:

$a)$ Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el valor $m=\frac{1}{2}$.

2º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

$b)$ Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

$c)$ Calcule la siguiente integral: $I=\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\cdot dx$.

3º) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta $r\equiv\begin{cases} 2x-y=10 \\ x-z=-90 \end{cases}$.

$a)$ Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z=0$.

$b)$ Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

$c)$ Determine el ángulo entre el plano de ecuación $\pi\equiv x+y=2$ y la recta r.

4º) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2.020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros:

$a)$ Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

$b)$ Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

$c)$ Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina?

5º) Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9.450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

6º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

$a)$ Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

$b)$ Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.

$c)$ Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

7º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in R \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

$a)$ Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

$b)$ Halle una ecuación de la recta s contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

$c)$ Calcule una ecuación de la recta r_2 que pase por P y sea paralela a la recta r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas $r_1\ y\ r_2$.

8º) De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

$b)$ Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

$c)$ Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real m:

$a)$ Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el valor $m=\frac{1}{2}$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2-m+2m-2-1+2m^2=2m^2+m-1=0;$$

$m=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-1\pm3}{4} \Rightarrow m_1=-1, m_2=\frac{1}{2}.$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_4\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$Para\ m=\frac{1}{2} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=C_4\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{cases} m=-1 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $m=\frac{1}{2}$ el sistema resulta $\begin{cases} x-y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x-y+z=1 \\ \frac{1}{2}x+2y-z=-1 \end{cases}$. Haciendo $x=2\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} -y+z=1-2\lambda \\ 2y-z=-1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=-3\lambda;\ \ z=1-2\lambda-3\lambda=1-5\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=2\lambda, y=-3\lambda, z=1-5\lambda, \forall\lambda\in R.}}$$

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

$c)$ Calcule la siguiente integral: $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} \cdot dx$.

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{e^{\frac{1}{\infty}}} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R.}}$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (3x^2 + 2)\ si\ x \neq 0 & (*) \\ 0 \quad si \;\; x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \;\Rightarrow f'(0) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x < 0 \\ 0 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R.}}$$

$(*)\;\; f(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + x^3 \cdot \frac{1 \cdot 2x}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} =$

$= 3x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + 2e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (3x^2 + 2).$

$b)\qquad f(x) = \frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}}. \qquad\qquad f(-x) = \frac{(-x)^3}{e^{\frac{1}{(-x)^2}}} = -\frac{x^3}{e^{\frac{1}{x^2}}} = -f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ origen.}}$$

$c)\ I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} \cdot dx = \int_1^2 \frac{x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} \cdot dx = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \cdot dx = \int_1^2 x^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{x^2}=t \\ 2x^{-3}\cdot dx=dt \\ x^{-3}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot dt \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x=2\to t=-\frac{1}{4} \\ x=1\to t=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} e^t\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\left[e^t\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{1}{4}}-e^{-1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}-\frac{1}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I=\int_1^2\frac{f(x)}{x^6}\cdot dx=\frac{\sqrt[4]{e^3}-1}{2e}}.$$

3º) Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

$a)$ Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

$b)$ Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

$c)$ Determine el ángulo entre el plano de ecuación $\pi \equiv x + y = 2$ y la recta r.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,2,1)}$.

La posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$ es el punto Q, intersección de la recta r con el plano $z = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 90 + \lambda = 0; \;\; \lambda = -90.$$

$$\lambda = -90 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -90 \\ y = -10 + 2 \cdot (-90) = -190 \\ z = 90 - 90 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(-90,-190,0)}}.$$

$b)$ El haz de planos, β, perpendiculares a la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$ tiene por expresión general $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 + 1 + D = 0; \; 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0.$

El punto P' buscado es la intersección de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$ y el plano $\gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0$:

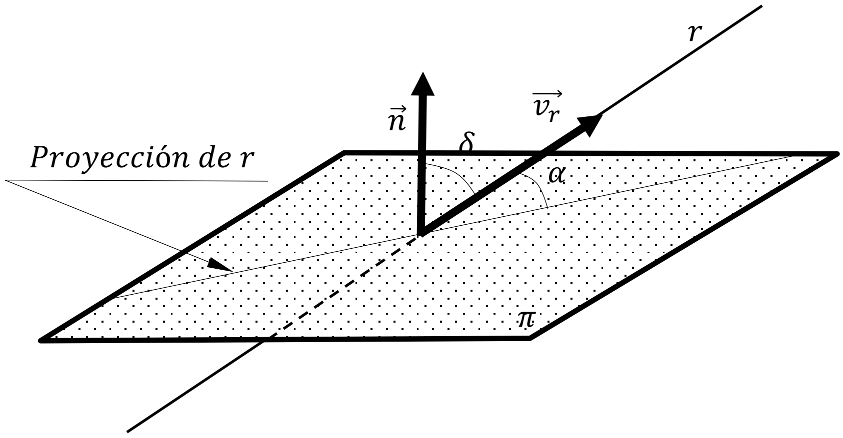
$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv x + 2y + z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot (-10 + 2\lambda) + (90 + \lambda) - 4 = 0;$$

$\lambda - 20 + 4\lambda + 90 + \lambda - 4 = 0; \;\; 6\lambda = -66; \;\; \lambda = -11.$

$$\lambda = -11 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -11 \\ y = -10 - 22 = -32 \\ z = 90 - 11 = 79 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(-11, -32, 79)}}.$$

$c)$



Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y = 2$ es $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\vec{v_r}| \cdot \cos \delta$.

$\cos \delta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \delta$ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v_r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{|(1,1,0) \cdot (1,2,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|1+2+0|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = 0{,}8660 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}8660 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\alpha = 60°}}.$$

4º) Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2.020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros:

a) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = 0{,}277;\ \ q = 1 - 0{,}277 = 0{,}723. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$P = P(5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}277^5 \cdot 0{,}723^5 = \frac{10!}{(10-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}0016 \cdot 0{,}1976 =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5!} \cdot 0{,}000322 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 0{,}000322 = \underline{0{,}0812}.$

b) La probabilidad de que un consejero sea hombre es la unidad menos la probabilidad de que sea mujer: $p = 1 - 0{,}277 = 0{,}723$.

$Datos: n = 10;\ \ p = 0{,}723;\ \ q = 0{,}277.$

La probabilidad de que hubiese al menos un hombre es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no hubiera ningún hombre:

$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}723^0 \cdot 0{,}277^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}000002659 =$

$= 1 - 0{,}000002659 = \underline{0{,}99999734}.$

c) El 35 % de 200 es: $n = 0{,}35 \cdot 200 = 70$.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 200;\ \ p = 0{,}277;\ \ q = 0{,}723.$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 70 \cdot 0{,}277 = 18{,}39 > 5 \\ n \cdot q = 70 \cdot 0{,}723 = 50{,}61 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}277 = 55{,}4.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0{,}277 \cdot 0{,}723} = \sqrt{40{,}05} \cong 6{,}329.$

$X = B(200;\ 0{,}277) \approx N(55{,}4;\ 6{,}329).$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-55{,}4}{6{,}329}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X > 70) = P\left(Z > \frac{69{,}5-55{,}4}{6{,}329}\right) = P\left(Z > \frac{14{,}1}{6{,}329}\right) \cong P(Z > 2{,}23) =$

$= 1 - P(Z \leq 2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = \underline{0{,}0129}.$

5º) Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9.450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:

Sean x, y, z las edades de Pablo, Alejandro y Alicia, respectivamente.

La cantidad que corresponde a un año de edad es: $\frac{9.450}{45} = 210$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-3=2z \\ x+y+z=45 \\ x=z+2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y-2z=3 \\ x+y+z=45 \\ x-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=z+2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (z+2)+y-2z=3 \\ (z+2)+y+z=45 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} y-z=1 \\ y+2z=43 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -y+z=-1 \\ y+2z=43 \end{array}\right\} \Rightarrow 3z=42;\;\; z=14;\;\; x=16;\;\; y=z+1=15.$$

$$\underline{\boldsymbol{Pablo\ tiene\ 16\ años;\ Alejandro\ tiene\ 15\ años\ y\ Alicia\ tiene\ 14\ años.}}$$

$Pablo: 16 \cdot 210 = 3.360.$

$Alejandro: 15 \cdot 210 = 3.150.$

$Alicia: 14 \cdot 210 = 2.940.$

$$\underline{\boldsymbol{Reciben: Pablo, 3.360\ euros; Alejandro, 3.150\ euros\ y\ Alicia, 2.940\ euros.}}$$

6º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

a) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en R.

c) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

a) El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x)$ es continua en R por ser $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in R$, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0.$

$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > 0.$

$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ f(x)\ satisface\ el\ teorema\ de\ Bolzano\ en\ [-1, 1].}}$

b) La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot[2\cdot(x^2+1)\cdot 2x]}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x\cdot(x^2+1)-4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^4} =$

$= \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2-3)}{(x^2+1)^4}.$

$f''(-1) = \frac{2(-1)\cdot[(-1)^2-3]}{[(-1)^2+1]^4} = \frac{-2\cdot(-2)}{16} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow Mín.\ relativo\ para\ x = -1.$

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo: A\left(-1, -\frac{1}{2}\right).}}$$

$f''(1) = \frac{2\cdot 1\cdot(1^2-3)}{1^2+1} = \frac{2\cdot(-2)}{2} = -2 < 0 \Rightarrow Máx.\ relativo\ para\ x = 1.$

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo: B\left(1, \frac{1}{2}\right).}}$$

c) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen; que contiene al origen de coordenadas y que $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 + 1 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = 1 \to t = 2 \\ x = 0 \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_1^2 = L2 - L1 = L2 - 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = L2\ u^2}}.$$

7º) Sea el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda \in R \\ z=-1 \end{cases}$ y el punto $P(0,1,0)$.

$a)$ Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

$b)$ Halle una ecuación de la recta s contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

$c)$ Calcule una ecuación de la recta r_2 que pase por P y sea paralela a la recta r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas $r_1\ y\ r_2$.

Solución:

$a)$ Una recta está contenida en un plano cuando lo están dos de sus puntos.

Dos puntos de $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$ son: $A(1,1,-1)\ y\ B(2,0,-1)$.

La recta r_1 está contenida en el plano π si lo están sus puntos A y B:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+z=1 \\ A(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+1-1=1 \Rightarrow Si \Rightarrow A \in \pi.$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+z=1 \\ B(2,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+0-1=1 \Rightarrow Si \Rightarrow B \in \pi.$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+z=1 \\ P(0,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1-0=1 \Rightarrow Si \Rightarrow P \in \pi.$$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ verificado\ que\ r_1\ y\ P\ están\ contenidos\ en\ el\ plano\ \pi.}}$$

$b)$ Un punto genérico de r_1 es $Q(1+\lambda, 1-\lambda, -1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(1+\lambda, 1-\lambda, -1) - (0,1,0)] = (1+\lambda, -\lambda, -1)$.

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)$.

Si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{v_1}$ son perpendiculares, entonces, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es linealmente dependiente del vector director de la recta s pedida.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \Rightarrow (1+\lambda, -\lambda, -1) \cdot (1,-1,0) = 0;\ \ 1+\lambda+\lambda-0=0;$

$2\lambda = -1;\ \ \lambda = -\frac{1}{2}$.

Para $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \approx \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,1,-2)$.

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

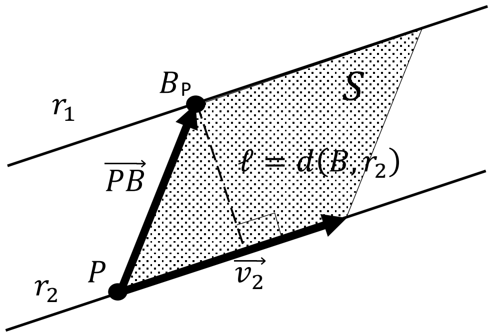
$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}}}.$$

$c)$ La recta r_2, por ser paralela a r_1, tienen vectores directores linealmente dependientes, por lo cual, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$.

$$\underline{\boldsymbol{r_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}}.}$$

El lado del cuadrado ℓ es la distancia del punto $B(1, 1, -1) \in r_1$ a la recta r_2.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.



Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

n punto y un vector director de r_2 son $P(0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_2}\right| \cdot \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right| = \left|\overrightarrow{v_2}\right| \cdot \ell \Rightarrow \ell = d(B, r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}.$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = [(1, 1, -1) - (0, 1, 0)] = (1, 0, -1).$$

$$\ell = d(B, r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{PB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|i + k + j|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|i + j + k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u.\ \ S = \ell^2 = \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{3}{2}\, u^2 = 1,5\, u^2}.}$$

8º) De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

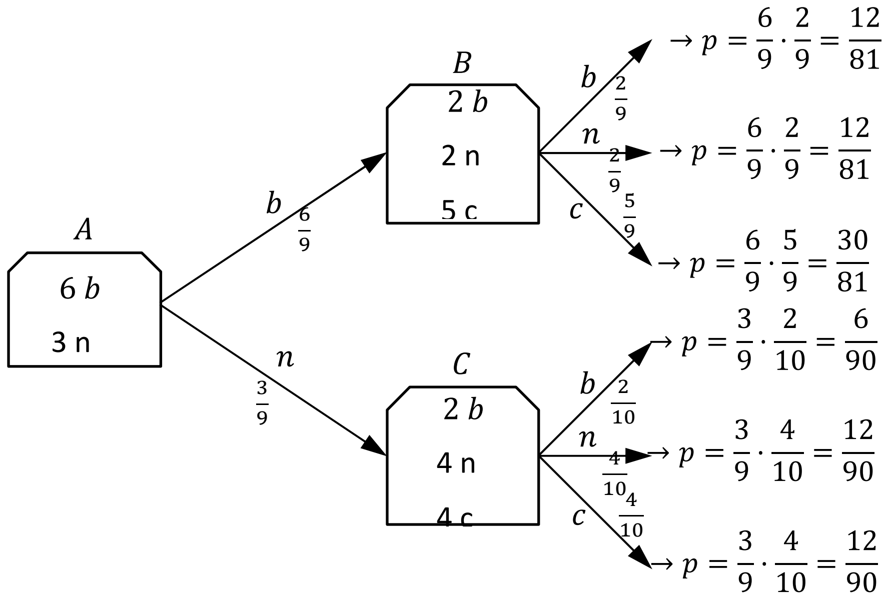
a) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Solución:

Sea A la cesta que contiene 6 sombreros blancos y 3 negros, B el cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros y C el cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 4 con cuadros blancos y negros.



a) $P = P(s_b \cap p_n) + P(s_b \cap p_c) + P(s_n \cap p_b) + P(s_n \cap p_c) =$

$= P(s_b) \cdot P(p_n/s_b) + P(s_b) \cdot P(p_c/s_b) + P(s_n) \cdot P(p_b/s_n) + P(s_n) \cdot P(p_c/s_n) =$

$= \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{10} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{12}{81} + \frac{30}{81} + \frac{6}{90} + \frac{12}{90} = \frac{42}{81} + \frac{18}{90} = \frac{14}{27} + \frac{1}{5} = \frac{70+27}{5\cdot 27} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = \frac{97}{135} = 0,7185.}$$

b) La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que el sombrero y el pañuelo sean blancos:

$$P = 1 - P(s_b \cap p_b) = 1 - \left[P(s_b) \cdot P\left(\frac{p_b}{s_b}\right)\right] = 1 - \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} = 1 - \frac{12}{81} = 1 - \frac{4}{27} =$$

$= \frac{27-4}{27} \Rightarrow \underline{P = \frac{23}{27} = 0,8519.}$

$c)$ $$P = P(s_n/p_c) = \frac{P(s_n \cap p_c)}{P(p_c)} = \frac{P(s_n) \cdot P(p_c/s_n)}{P(s_b \cap p_c) + P(s_n \cap p_c)} = \frac{P(s_n) \cdot P(p_c/s_n)}{P(s_b) \cdot P(p_c/s_b) + P(s_n) \cdot P(p_c/s_n)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30}{81} + \frac{12}{90}} = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{30 \cdot 90 + 12 \cdot 81}{81 \cdot 90}} = \frac{12 \cdot 81}{30 \cdot 90 + 12 \cdot 81} = \frac{4 \cdot 9}{10 \cdot 10 + 4 \cdot 9} = \frac{36}{136} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = \frac{9}{34} = 0,2647.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarías ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & si \;\; x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad $f(x)$ en R.

$b)$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

$c)$ Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

$d)$ Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

3º) Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π.

$a)$ Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices A, B, C y D que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

$b)$ Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

4º) En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

$b)$ Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

$c)$ Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

5º) Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz $A \cdot B$. Calcule la matriz inversa de $A \cdot B$ para $k = 1$.

$b)$ Calcule $B \cdot A$ y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

$c)$ En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea $B \cdot A$.

6º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ x \cdot Lx & si \quad x > 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

$c)$ Calcule $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

7º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, \lambda \in R. \\ z = t \end{cases}$

$a)$ Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcula la distancia entre ellas.

$b)$ Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

$c)$ Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

8º) Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

$b)$ Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarías ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:

Sean x, y, z el número de ensayos, novelas y biografías que hay en la estantería de la biblioteca, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x=\frac{3}{16}\cdot(x+y+z) \\ z+\frac{x}{3}-2=y \\ \frac{x}{2}+\frac{4y}{5}+z=105 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 16x=3x+3y+3z \\ 3z+x-6=3y \\ 5x+8y+10z=1.050 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 13x-3y-3z=0 \\ x-3y+3z=6 \\ 5x+8y+10z=1.050 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1.050 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix}}=\frac{-144-9.450-9.450+180}{-390-24-45-45-312+30}=\frac{-18.864}{-786}=24.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1.050 & 10 \end{vmatrix}}{-786}=\frac{780-3.150+90-40.950}{-786}=\frac{-43.230}{-786}=55.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 8 & 1.050 \end{vmatrix}}{-786}=\frac{-40.950-90-624+3.150}{-786}=\frac{-38.514}{-786}=49.$$

En la estantería hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & si\ \ x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad $f(x)$ en R.

$b)$ ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

$c)$ Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

$d)$ Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x} = \frac{0+1}{0} = \infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 - 4x + 3) = 3 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ no es continua para $x = 0$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R - \{0\}.}}$$

$b)$ La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$. Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, por ser discontinua para $x = 0$:

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{0\}.}}$$

$c)$ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x} = \frac{-\infty}{-\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ horizontal\ para\ y = 2\ en\ su\ parte\ negativa.}}$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ vertical\ para\ x = 0\ en\ su\ parte\ negativa.}}$$

$d)$ La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

Para $x \in (0, \infty) \Rightarrow f'(x) = 2x - 4.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow \underline{P(2, -1)}.$

Por ser $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{El\ punto\ P(2, -1)\ es\ un\ mínimo\ relativo}}.$$

3º) Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

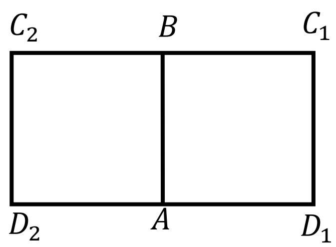
$a)$ Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices A, B, C y D que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

$b)$ Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

Solución:

$a)$

Los puntos del plano $\pi \equiv x - z = 0$ son de la forma $P(a,b,a)$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (0,-1,0)] = (0,2,0).$

$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(a,b,a) - (0,1,0)] = (a, b-1, a).$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (0,2,0) \cdot (a, b-1, a) = 0;\ \ 2b - 2 = 0;\ \ b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1.$

El vector $\overrightarrow{BC_1}$ resulta ser de la forma: $\overrightarrow{BC_1} = (a,1,a).$

Por tratarse de un cuadrado: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC_1}| \Rightarrow \sqrt{2^2} = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{2a^2};$

$$4 = 2a^2;\ \ a^2 = 2 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C_1\left(\sqrt{2},1,\sqrt{2}\right)\ y\ C_2\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}\right)}}.$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1}$ y siendo $D_1(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{BC_1} = \left[\left(\sqrt{2},1,\sqrt{2}\right) - (0,1,0)\right] = \left(\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{AD_1} = [(x,y,z) - (0,-1,0)] = (x, y+1, z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ y + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \\ z = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D_1\left(\sqrt{2},-1,\sqrt{2}\right)}}.$$

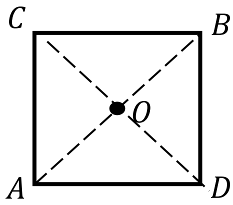
Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{AD_2}$ y siendo $D_2(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{AD_2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{BC_2} = \left[\left(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2}\right) - (0,1,0)\right] = \left(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{AD_1} = [(x,y,z) - (0,-1,0)] = (x, y+1, z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ y + 1 = 0 \rightarrow y = -1 \\ z = -\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D_2\left(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{2}\right)}}.$$

$b)$



El punto medio de $A(0,-1,0)\ y\ B(0,1,0)$ es $O(0,0,0)$.

Siendo $C(x,y,x) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (x,y,x)$. $\overrightarrow{OA} = (0,-1,0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OA}$ son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow (x,y,x) \cdot (0,-1,0) = 0;\ -y = 0 \Rightarrow y = 0$.

El punto C es de la forma $C(x,0,x)$ y $\overrightarrow{OC} = (x,0,x)$.

$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| \Rightarrow \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{(-1)^2} = 1;\ \ 2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nótese que los puntos C y D son simétricos con respecto al origen, por lo cual, las soluciones son:

$\underline{\boldsymbol{C_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ y\ D_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$ **o bien:** $\underline{\boldsymbol{C_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ y\ D_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$.

4º) En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 6;\ \ p = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$P = P(4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 0{,}0207 =$

$= 15 \cdot 0{,}0207 = \underline{0{,}3110}.$

b) La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^6 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0041 = \underline{0{,}9959}.$

c) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 120;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 0{,}4.$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 120 \cdot 0{,}6 = 72 > 5 \\ n \cdot q = 120 \cdot 0{,}4 = 48 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 120 \cdot 0{,}6 = 72.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{120 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{28{,}8} \cong 5{,}367.$

$X = B(120;\ 5{,}367) \approx N(72;\ 5{,}367).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-72}{5{,}367}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60{,}5-72}{5{,}367}\right) = P\left(Z > \frac{-11{,}5}{5{,}367}\right) \cong P(Z > -2{,}14) =$

$= P(Z \leq 2{,}14) = \underline{0{,}9838}.$

5º) Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz $A \cdot B$. Calcule la matriz inversa de $A \cdot B$ para $k = 1$.

$b)$ Calcule $B \cdot A$ y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

$c)$ En el caso de $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea $B \cdot A$.

Solución:

$a)$ $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - k - 2k = 0;\ \ k^2 - 3k = 0;\ \ k(k-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 3.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A \cdot B\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{0, 3\}.}}$$

Para $k = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$|A \cdot B| = -2;\ \ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}}$$

$b)$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B \cdot A = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.}}$$

$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} =$

$= -2k(1+k) + (k-1)^2 + 2(k-1) + (k+1)^2 =$

$= -2k - 2k^2 + k^2 - 2k + 1 + 2k - 2 + k^2 + 2k + 1 = 0.$

De lo anterior se deduce que $Rang\ (B \cdot A) \leq 2$.

Todos los menores que se pueden formar tienen el factor $(1 + k)$, por lo cual:

$1+k=0 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow Para\ k \neq -1 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A)=2.$

Para el valor $k=-1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ (B \cdot A)=2.$

$$\underline{\boldsymbol{Rang\ (B \cdot A)=2, \forall k \in R.}}$$

$c)$ Para $k=1 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Se trata de encontrar una matriz ampliada cuyo rango sea 3.

Por ejemplo: $(B \cdot A)' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ (B \cdot A)' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a \neq 0, \forall a \in R, a \neq 0.$

El sistema puede ser, por ejemplo, para $a=1$:

$$\underline{\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x=1} \\ \boldsymbol{y-z=0} \\ \boldsymbol{x-y+z=0} \end{array}\right\}.}$$

6º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\leq 0 \\ x\cdot Lx & si \quad x>0 \end{cases}$:

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c) Calcule $I=\int_1^2 f(x)\cdot dx$.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot Lx)=0=f(0) \quad (*) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ es\ contnua\ para\ x=0.}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot Lx)=0\cdot(-\infty)\Rightarrow Ind.\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow L'Hopital\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0} x=-0=0.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & si\ x<0 \\ Lx+1 & si\ \ x\geq 0 \quad (*) \end{cases}\Rightarrow x=0\ \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} 1 & si\ \ x<0 \\ -\infty & si\ \ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=0.}}$$

(*) $g(x)=x\cdot Lx\Rightarrow g'(x)=1\cdot Lx+x\cdot\frac{1}{x}=Lx+1.$

b) Para $x<0$ la función es $f(x)=x$, que es monótona creciente.

Para $x\geq 0$ la función es $f(x)=x\cdot Lx$, cuya derivada es $f'(x)=Lx+1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=0\Rightarrow Lx+1=0;\ \ Lx=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y de lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(0, \frac{1}{e}\right).}$$

La función tiene un mínimo relativo para $x = \frac{1}{e}$, como se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento; no obstante, se justifica a través de la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo, como se quería justificar.

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = \frac{1}{e} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Mín.}: \ A\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right).}$$

$c)\ I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (x \cdot Lx) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$

$= \left[\frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1)\right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{4} \cdot (2L2 - 1)\right] - \left[\frac{1^2}{4} \cdot (2 \cdot L1 - 1)\right] = 2L2 - 1 - \frac{1}{4} \cdot (-1) =$

$$= 2L2 - 1 + \frac{1}{4} = 2L2 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = L4 - \frac{3}{4}}.}$$

7º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t, \lambda \in R. \\ z=t \end{cases}$

$a)$ Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcula la distancia entre ellas.

$b)$ Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

$c)$ Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda;\;\; y=-1+2\lambda;\;\; x=-2-y=-2+1-2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1-2\lambda \;\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(2,-2,-1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2,5,0)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,-2,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente dependientes por ser proporcionales (iguales) sus componentes; esto implica que las rectas r y s son paralelas o coincidentes.

Para diferenciar el caso hacemos comprobamos si el punto $B(2,5,0) \in s$ pertenece también a r: $\left.\begin{cases} 2=-1-2\lambda \\ 5=-1+2\lambda \\ 0=\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda \Rightarrow B \notin r.$

Las rectas r y s son paralelas.

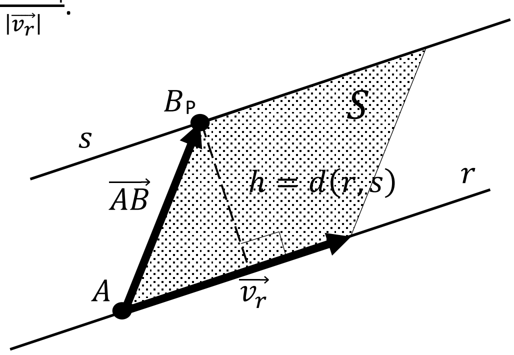
La distancia entre las restas r y s es la misma que la del punto $B(2,5,0) \in s$ a la recta r. La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

$$\left.\begin{array}{l} S=\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| \\ S=\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \;\Rightarrow h=d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}.$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(2,5,0)-(-1,-1,0)]=(3,6,0).$$

Aplicando la fórmula al punto $B(2,5,0)$ y a la recta r:



$$d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{|-3j+12k+6k+6i|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|6i-3j+18k|}{\sqrt{9}}=$$

$$=\frac{|6i-3j+18k|}{3}=|2i-j+6k|=\sqrt{2^2+(-1)^2+6^2}=\sqrt{4+1+36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{d(r,s)=\sqrt{41}\ u.}}$$

b) El plano π pedido contiene a un punto de una de las rectas, por ejemplo, $B(2,5,0) \in s$ y tiene como vectores directores al vector director de las rectas $r\ y\ s$ y el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(2,5,0)-(-1,-1,0)]=(3,6,0)$. Su ecuación general es la siguiente:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$-3(y-5)+12z+6z+6(x-2)=0;\ \ 2(x-2)-(y-5)+6z=0;$$

$$2x-4-y+5+6z=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 2x-y+6z+1=0.}}$$

c) $r \equiv \left.\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \begin{matrix} z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow P(-1,-1,0).$

$s \equiv \left.\begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \\ z=t \end{cases} \begin{matrix} z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t=0 \Rightarrow Q(2,5,0).$

Sea φ la recta que pasa por los puntos P y Q.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(2,5,0)-(-1,-1,0)]=(3,6,0) \Rightarrow \overrightarrow{v_\varphi}=(1,2,0).$

La expresión de φ por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

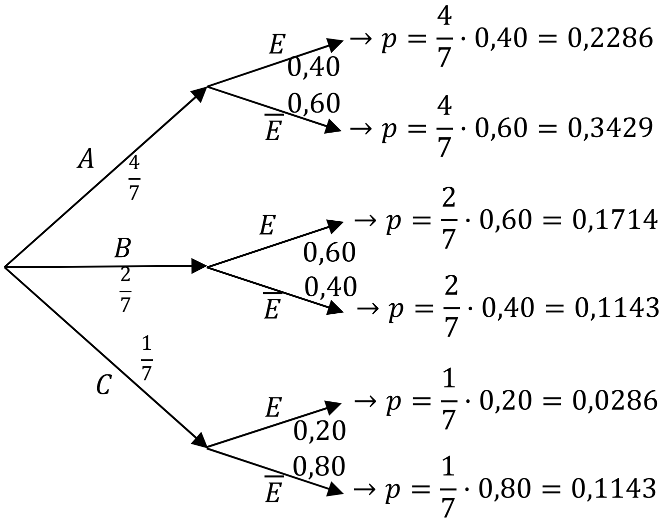
$$\underline{\boldsymbol{\varphi \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{0}.}}$$

8º) Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

Solución:



a) $\quad P = P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) =$

$= P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) =$

$= \frac{4}{7} \cdot 0{,}40 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}60 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}20 = 0{,}2286 + 0{,}1714 + 0{,}0286 = \underline{0{,}4286}.$

b) $\quad P = P(C/E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C) \cdot P(E/C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 0{,}20}{0{,}4286} = \frac{0{,}0286}{0{,}4286} = \underline{0{,}0667}.$