# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

# Selectividad 2021

# Comunidad autónoma de

# MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

| | |
|---|---|
| | **UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**<br>EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO<br>Curso **2020-2021**<br>**MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II** |

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
**TIEMPO:** 90 minutos.

**A. 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz $A$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales $a$ y $b$ para los que $A = A^{-1}$.
b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de $A$.

**A. 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

**A. 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

**A. 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

**A. 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

**B. 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$:

$$\begin{cases} x + y - z = & -1 \\ x - y + a^2 z = & 3 \\ 2x - y + z = & 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $a$.
b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

**B. 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

**B. 3.**(Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.
b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

**B. 4.** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

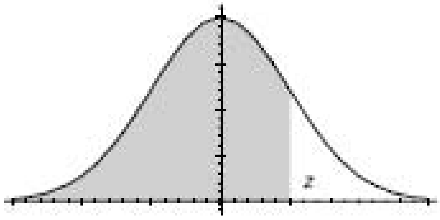
a) Calcule $P(B|\overline{A})$
b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

**B. 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)
El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para $\mu$, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

### ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.




| z | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | ,06 | ,07 | ,08 | ,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| **2,1** | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| **2,2** | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| **2,3** | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| **2,5** | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| **2,6** | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| **3,0** | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

**Ejercicio A1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto........................................0,5 puntos.

Cálculo correcto de las valores de a y b........................0,5 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto........................................0,25puntos.

Determinación correcta de la inversa ............................0,75 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

**Ejercicio A2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación del dominio........................................0,25 puntos.

Determinación de las asíntotas verticales........................0,25 puntos.

Determinación de la asíntota oblicua, excluyendo la existencia de AH: 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la tangente.................0,25 puntos

Obtención correcta de la pendiente de la tangente en el punto… … ……0,5puntos

Ecuación de la tangente..........................................0,25 puntos

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

**Ejercicio A3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio de la continuidad si $x$ no es 1 ..........................0,25 puntos.

Planteamiento de la condición de continuidad en $x=1$ ..............0,25 puntos.

Cálculo de los límites laterales y conclusión......................0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Planteamiento.....................................................0,25 puntos.

Cálculo correcto de la primitiva..................................0,50 puntos.

Cálculo el área (regla de Barrow)..................................0,25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.Obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. Estudia la continuidad en un punto de una función definida a trozos utilizando el concepto de límite.

**Ejercicio A4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Identificación correcta de los sucesos, y sus probabilidades……………0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad...............................0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad.........................0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad...............................0,50 puntos.

# RESPUESTAS OPCIÓN A, CONVOCATORIA JUNIO

**Problema A.1:**

Se considera la matriz $A$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales $a$ y $b$ para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de $A$.

**Solución:**

$a)$ Podríamos calcular la matriz inversa, pero es más sencillo partir de que se verifica que $A = A^{-1}$, y multiplicar por $A$ en los dos términos de la igualdad:

$$A \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

Por tanto, basta imponer que $A^2 = I$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$a = 0\,;\ \ b^2 = 1 \to b = 1, b = -1.$$

$$\boldsymbol{a = 0\,;\ \ b = 1;\ b = -1.}$$

$b)$ Podemos utilizar para calcular la matriz inversa el método de Gauss o la definición de matriz inversa:

Para $a = b = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Por el método de Gauss:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\left\{\begin{matrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \end{matrix}\right\}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\{F_3 \to F_3 - 2F_1\}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \to F_1 - 2F_3\}}{\to}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{F_3 \to -\frac{1}{3}F_3\right\}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

El mismo resultado se obtiene con la definición de matriz inversa:

b) Si $a = b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 6$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = Adj(A^t)$.

$$A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

### *Problema A.2:*

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

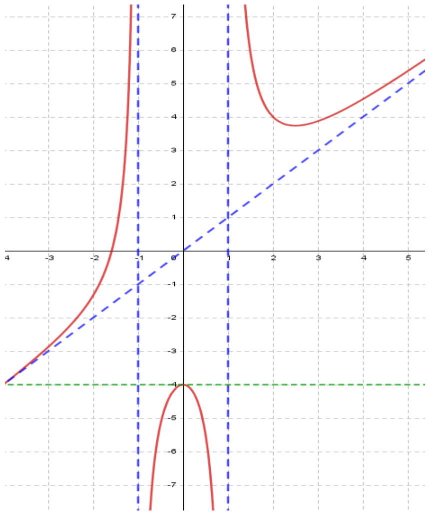
### *Solución:*

La función dada es una función racional, luego está definida siempre que no se anule el denominador, es decir, $x^2-1=0$; $x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}$.

Las asíntotas verticales son, por tanto: $x=-1, x=1$.

Cuando $x$ tiende a infinito la función tiende a infinito, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\pm\infty$, luego no hay asíntota horizontal.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, con $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con $m$ finito y $m\neq 0$.



$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+4}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3-x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2-1}=0.$$

$$Asíntota\ oblicua: y=x$$

$Dominio\ (f)=\boldsymbol{R-\{-1,1\}}$; Asíntotas verticales: $\boldsymbol{x=-1, x=1}$; Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y=x}$.

$b)$ Para calcular la recta tangente debemos calcular: 1) El punto de tangencia. 2) La pendiente en ese punto:

1) Para $x=0$ es $f(0)=\frac{0+4}{0-1}=-4$. El punto de tangencia es $P(0,-4)$.
2) La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-(x^3+4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4-8x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2-8x}{(x^2-1)^2}=\frac{x\cdot(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2}.\ m=f'(0)=\frac{0\cdot(0^3-3\cdot 0-8)}{(0^2-1)^2}=0$$

La recta tangente es: $y=f(0)+f'(0)(x-0)$, que aplicada al punto $P(0,-4)$ con $m=0$ es:

Recta tangente: $\boldsymbol{y+4=0\to y=-4}$


Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

***Problema A.3:***

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

***Solución:***

La función está definida a trozos. Uno es una función polinómica, continua en toda la recta real. El otro es la función logaritmo, que no es continua para $x = 1 < 1$, que no pertenece al intervalo de definición. Por tanto, el único punto dudoso es el de unión de los trozos, en $x = 1$

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(1) = 1^2 - a1 = 1 - a$$

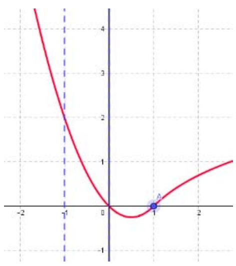
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 - ax) = 1 - a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(Lx) = L1 = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$

La función es continua en toda la recta real si $\boldsymbol{a = 1}$.

$b)$ Para $a = 1$ la función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \;\; si\; x \le 1 \\ \ln(x) \;\; si \;\; x > 1 \end{cases}$, cuya representación gráfica, incluida la superficie a calcular, es la indicada en la figura adjunta.



La superficie es:

$$S = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0}(x^2 - x)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right] == \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{5}{6}\, u^2 \cong 0.83\, u^2}$$


Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

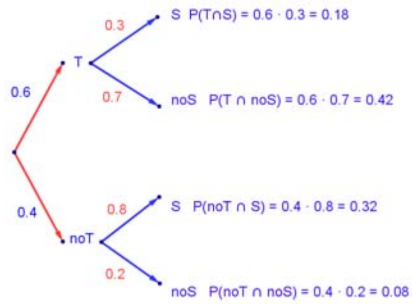
### *Problema A.4:*

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

### *Solución:*

Denominamos $T$ al suceso teletrabajar, y $S$ al suceso tener trastornos de sueño. Hacemos un diagrama de árbol con los datos del enunciado, que completamos sabiendo que en cada nudo la suma es 1:




$a$) Nos piden: $P(T \cap noS)$, miramos en el árbol y vemos que es 0.42.

La probabilidad de que no tenga trastornos del sueño y teletrabaje es de $\mathbf{0.42}$.

$b$) Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(noT/noS)$

De nuevo miramos en el árbol para obtener $P(noT \cap noS) = 0.08$. Y para obtener $P(noS)$ sumamos las dos ramas que acaban en $noS$

$$P(noT/noS) = \frac{P(noT \cap noS)}{P(noS)} = \frac{0.08}{0.42+0.08} = \frac{0.08}{0.50} = 0.16.$$

La probabilidad de que no teletrabaje sabiendo que no tiene trastornos del sueño es de $\mathbf{0.16}$.

### Problema A.5:

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

### Solución:

$a$) Se trata de una distribución binomial.

Para un nivel de confianza del 96 %; calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\alpha = 1 - 0.96 = 0.04 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.02} = 2.055 \rightarrow (1 - 0.02 = 0.9800 \ \rightarrow z = 2.055).$$

Los datos que nos dan son:

$n = 500; \ \ p = \frac{320}{500} = 0.64; \ \ q = 1 - 0.64 = 0.36; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q \ y \ n$, es la siguiente:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$$

$$\left(0.64 - 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}}; \ 0.64 + 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}}\right);$$

$$(0.64 - 2.055 \cdot 0.0215; \ 0.64 + 2.155 \cdot 0.0205) = \ (0.64 - 0.0441; \ 0.64 + 0.0441) = (0.5959; \ 0.6841) \ .$$

El intervalo de confianza pedido es: $(\mathbf{0.5959}; \ \mathbf{0.6841})$

$b$) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96. \ (1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$$

Los datos que nos dan son ahora:

$p = 0.5; \ \ q = 0.5; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \ \ E = 0.05.$

Sabemos que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ y debemos calcular $n$:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 1.96^2 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.05^2} = 3.8416 \cdot \frac{0.25}{0.0025} = \frac{0.8851}{0.0025} = 384.16.$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de **385** menores de 14 años

# RESPUESTAS OPCIÓN B, CONVOCATORIA JUNIO

**Problema B.1:**

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$:

$$\begin{cases} x+y-z = & -1 \\ x-y+a^2z = & 3 \\ 2x-y+z = & 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $a$.
b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

**Solución:**

$a)$ Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+2a^2-2+a^2-1 = 3a^2-3 \to 3a^2-3=0 \to a = \pm 1$$

Para $\boldsymbol{a} \neq \pm\mathbf{1}$ los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada es 3 e igual al número de incógnitas por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $\boldsymbol{a} = \pm\mathbf{1}$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4+1+6-2+3-4 = -10+10 = 0$, por lo que su rango es 2, menor que el número de incógnitas por lo que el sistema es **compatible e indeterminado**

La discusión completa del sistema es:

- Si $a=-1$ o $a=1$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será $SCI$
- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será $SCD$

$b)$ Para $a = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado; sumamos las dos primeras ecuaciones y obtenemos: $x = 1$. Hacemos $y = \lambda$; $z = 2+\lambda$.

$$\boldsymbol{x = 1, y = \lambda, z = 2+\lambda, \forall \lambda \in R}$$

***Problema B.2:***

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

***Solución:***

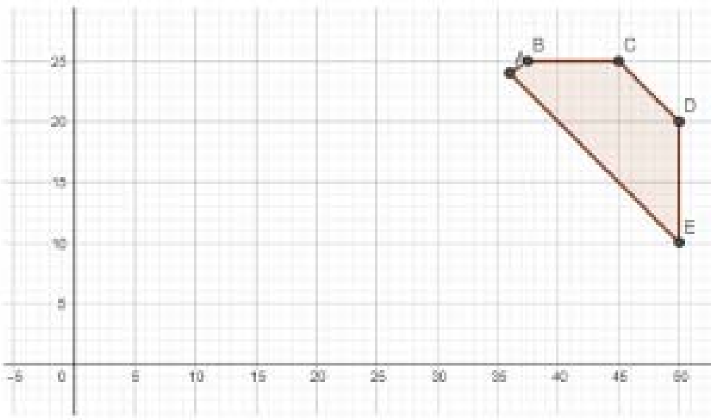
Llamamos $x$ e $y$ al número kilos de almendras y avellanas que vende el almacén, respectivamente.

Las restricciones dadas por el enunciado son:

Las restricciones son:

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x \le 50 \\ 0 \le y \le 25 \\ x \ge 1.5y \\ x + y \ge 60 \\ x + y \le 70 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 0 \le x \le 50 \\ 0 \le y \le 25 \\ 2x - 3y \ge 0 \\ x + y \ge 60 \\ x + y \le 70 \end{aligned}\right\}.$$

La región factible es:




La región factible es cerrada y acotada.

Los vértices son:

$$A: \left.\begin{aligned} x + y = 60 \\ 2x - 3y = 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 3x + 3y = 180 \\ 2x - 3y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5x = 180;\ \ x = 36;\ \ y = 24 \Rightarrow A(36, 24).$$

$$B: \left.\begin{aligned} y = 25 \\ 2x - 3y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x - 75 = 0; x = 75:2 = 37.5 \Rightarrow A(37.5;\ 25).$$

$$C: \left.\begin{aligned} y = 25 \\ x + y = 70 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x + 25 = 70; x = 45 \Rightarrow C(45, 25).$$

$$D: \left.\begin{aligned} x = 50 \\ x + y = 70 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 50 + y = 70;\ \ y = 20 \Rightarrow D(50, 20).$$

$$E: \left.\begin{aligned} x = 50 \\ x + y = 60 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 50 + y = 60;\ \ y = 10 \Rightarrow E(50, 10).$$

La función de objetivos es: $f(x, y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son:

$$f(37.5, 25) = 37.5 + 2 \cdot 25 = 37.5 + 50 = 87.5.$$
$$f(45, 25) = 45 + 2 \cdot 25 = 45 + 50 = 95.$$
$$f(50, 20) = 50 + 2 \cdot 20 = 50 + 40 = 90.$$
$$f(50, 10) = 50 + 2 \cdot 10 = 50 + 20 = 70.$$
$$f(36, 24) = 36 + 2 \cdot 24 = 36 + 48 = 84.$$

El valor máximo se obtiene en el punto $C(45, 25)$.

El máximo beneficio de $\mathbf{95}$ ***euros*** se obtiene mezclando $\mathbf{45}$ $kg$ de almendras y $\mathbf{25}$ kg de avellanas.

### *Problema B.3:*

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

### *Solución:*

$a)$ La función, producto de una función exponencial y una polinómica, es continua en toda la recta real. Para determinar cuando la función es creciente o decreciente analizamos el signo de su primera derivada. Creciente si es positiva, y decreciente si es negativa.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3).$$

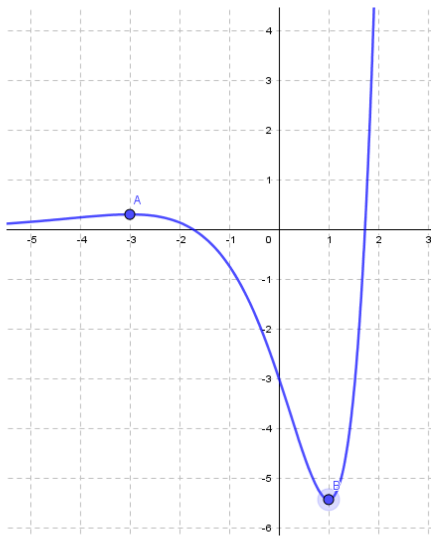
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow \; x^2 + 2x - 3 = 0; \; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = -1 \pm 2 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$$

Por ser $e^x > 0, \forall x \in R$, el signo de la derivada dependerá del signo de la expresión $(x^2 + 2x - 3)$.

Los valores de las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, que son $(-\infty, -3), (-3, 1)$ y $(1, +\infty)$. Estudiamos el signo en esos intervalos. Por ejemplo, para $x = 0 \in (-3, 1)$ $es$ $f'(0) < 0$, luego la función es decreciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (-\infty, -\mathbf{3}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, la función es creciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (-\mathbf{3}, \mathbf{1})$, $f'(x) < 0$, la función es decreciente.



En el punto de abscisa $-3$ la función pasa de ser creciente a decreciente, luego en ese punto se alcanza un máximo relativo. En el punto de abscisa $1$ la función pasa de ser decreciente a creciente, luego en ese punto se alcanza un mínimo relativo.

$$f(-3) = [(-3)^2 - 3] \cdot e^{-3} = (9 - 3) \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{6}{e^3}.$$

$$Máximo\ relativo: \boldsymbol{A}\left(-\mathbf{3}, \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}}\right)$$

$$f(1) = (1^2 - 3) \cdot e^1 = -2e.$$

$$Mínimo\ relativo: \boldsymbol{B}(\mathbf{1}, -\mathbf{2}\boldsymbol{e})$$

También se podría usar el signo de la derivada segunda

$b)$ Nos piden:

$$I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^2 e^{-x} \cdot [(x^2 - 3) \cdot e^x] \cdot dx = \int_1^2 (x^2 - 3) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1\right) = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3}.$$

$$I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$$


Autor: Javier Rodrigo Hitos

***Problema B.4:***

**B. 4.** Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

***Solución:***

$a)$ Nos piden calcular $P(B/\overline{A})$

$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 0.4.$

$P(\overline{B} \cap A) = 0.4 \cdot P(A) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2.$

$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.2 = 0.5 - P(A \cap B) \rightarrow \ P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0.9 = 0.5 + P(B) - 0.3 \rightarrow P(B) = 0.9 - 0.2 = 0.7.$

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.7 - 0.3}{1 - 0.5} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8.$

$$\boldsymbol{P(B/\overline{A}) = 0.8}.$$

$b)$ Sabemos que dos sucesos $A$ $y$ $B$ son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 \neq P(A \cap B) = 0.3.$$

$$Los\ sucesos\ A\ y\ B\ \boldsymbol{no}\ son\ independientes$$



Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

### Problema B.5:

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para $\mu$, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

### Solución:

$a$) Nos dan los datos siguientes:

$\mu = 120;\ \ n = 36;\ \sigma = 20.$

La media muestral sigue una distribución normal de media $\mu = 120$ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{20}{\sqrt{36}}$

$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N\left(120, \frac{10}{3}\right).$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-120}{\frac{10}{3}}$.

$$P = P(\overline{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125-120}{\frac{10}{3}}\right) = P\left(Z < \frac{5\cdot 3}{10}\right) = P(Z < 1.5) = 0.9332.$$

La probabilidad de que la media muestral no supere los 125 gramos es de $\mathbf{0.9332}$.

$b$) Ahora sabemos que: $E = \frac{124.6556-117.3444}{2} = \frac{7.3112}{2} = 3.6556$. Por lo que:

$n = 81;\ \ \sigma = 20;\ \ E = 3.6556.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3.6556\cdot\sqrt{81}}{20} = \frac{3.6556\cdot 9}{20} = \frac{32.9004}{20} = 1.645.$$

Buscamos en la tabla $N(0, 1)$, al valor 1.645 le corresponde el valor. Aproximadamente, 0.9500, por lo tanto:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \to \ \ 2 - \alpha = 1.9 \to \alpha = 0.1.$

$1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9.$

El nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo es del $\mathbf{90}$ %

**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID**
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2020-2021**

**MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
**TIEMPO:** 90 minutos.

**A.1**. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real $a$ para los cuales la matriz $A$ tiene inversa.
b) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz $X$ que satisface $AX = B$.

**A 2.** (Calificación máxima: 2 puntos).
Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a $0,5$ euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

**A 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real $a$ para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de $a$ es $f(x)$ derivable?
b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

**A 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

**A 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media $\mu$ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de $20$ huevos, obteniéndose una media muestral de $60$ gramos. Determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para $\mu$.
b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de $10$ huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre $57$ y $61$ gramos.

**B 1.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real $a$:

$$\left.\begin{array}{rl} x+2ay+z & =0 \\ -x-ay & =1 \\ -y-z & =-a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real $a$.
b) Resuelva el sistema para $a=3$.

**B 2.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**B 3.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x)=3x^2+8x$$

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1)=11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

**B 4.** (Calificación máxima: 2 puntos)
Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de $0,02$, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de $0,06$. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

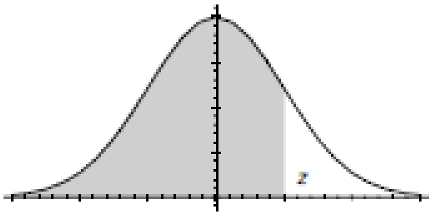
**B 5.** (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ minutos y desviación típica $\sigma=3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del $95\,\%$.
b) Suponga que $\mu=32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n=16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que $30,5$ minutos.

## Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

### ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.




| z | ,00 | ,01 | ,02 | ,03 | ,04 | ,05 | ,06 | ,07 | ,08 | ,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7703 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| **2,1** | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| **2,2** | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| **2,3** | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| **2,4** | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| **2,5** | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| **2,6** | 0,9953 | 0,9954 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| **2,7** | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| **2,8** | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| **2,9** | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| **3,0** | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

## CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

**Ejercicio A1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresar correctamente la condición de existencia de inversa..............0,25 puntos.
Planteamiento correcto ..........................................................................0,50 puntos.
Determinación correcta del valor del parámetro…………………….....0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto ...........................................................................0,50 puntos.
Determinación correcta de la matriz X…………………………………..0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

**Ejercicio A2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)..................................................

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible...........................................0,50 puntos.
Cálculo correcto de los vértices ..................................................................0,5o puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la función objetivo..................................................0,25 puntos.
Cálculo correcto de las cantidades pedidas………………………………0,75 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.

**Ejercicio A3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio de la continuidad si $x$ no es 3 ......................................................0,25 puntos.
Estudio correcto de la continuidad en $x$=3 ..............................................0,25 puntos.
Determinación correcta de $f'(x)$ (donde exista)..........................................0,25 puntos.
Estudio correcto de la derivabilidad de la función……………………0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Expresión correcta de la ecuación de la tangente.......................................0,25 puntos.
Elección correcta de la expresión de f(x) para el punto pedido ...............0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la derivada………………………..0, 25 puntos.
Ecuación correcta de la tangente ………………………………………0,25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Aplica los conceptos de límite y derivadas. Estudia la continuidad en un punto de una función definida a trozos utilizando el concepto de límite. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Obtiene la expresión algebraica la tangente de a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales.

**Ejercicio A4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de independencia.........................0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad de la intersección..............................0,50 puntos.
Conclusión……………………………………………………………….0,25 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ................................................0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad...........................................................0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

**Ejercicio A5.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .......... 0,25 puntos.
- Planteamiento correcto .......... 0,25 puntos.
- Obtención correcta del intervalo .......... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión correcta de la distribución de la media .......... 0,25 puntos.
- Tipificación correcta de la variable .......... 0,25 puntos.
- Obtención correcta de la probabilidad .......... 0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

**Ejercicio B1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Obtención correcta de los valores críticos .......... 0,50 puntos.
- Discusión correcta del sistema .......... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Solución correcta del sistema .......... 1,00 punto.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Manipula el sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas y lo resuelve en los casos en que sea posible. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. El sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.

**Ejercicio B2.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Determinación del dominio .......... 0,25 puntos.
- Determinación de la asíntota vertical .......... 0,25 puntos.
- Determinación de la asíntota oblicua, excluyendo la existencia de AH: 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

- Cálculo correcto de la derivada .......... 0,50 puntos.
- Determinación correcta de los intervalos .......... 0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

**Ejercicio B3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto .......... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la primitiva .......... 0,50 puntos.
- Determinación correcta de la constante de integración .......... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto .......... 0,25 puntos.
- Determinación correcta de los puntos críticos .......... 0,25 puntos.
- Clasificación correcta de los puntos críticos .......... 0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Obtiene la expresión algebraica la función a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales.

**Ejercicio B4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .................................... 0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.................................................. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .................................... 0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.................................................. 0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

**Ejercicio B5.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ........................................................ 0,25 puntos.

Expresión correcta del error.............................................................. 0,25 puntos.

Determinación correcta del tamaño de la muestra ........................ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la distribución de la media.......................... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable.................................................. 0,25 puntos.

Obtención correcta de la probabilidad............................................. 0,50 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluables:** Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

**NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados**

# RESPUESTAS OPCIÓN A, CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

***Problema A.1:***

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real $a$ para los cuales la matriz $A$ tiene inversa.
b) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz $X$ que satisface $AX = B$.

***Solución:***

$a)$ Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 = -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1.$$

La matriz es invertible $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{-1}\}$

$b)$ Cuando $a = 2$ entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Despejamos $X$ de la ecuación dada

$$A \cdot X = B \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Calculamos $A^{-1}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 1 = -3. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{-3} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}..$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

### *Problema A.2:*

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

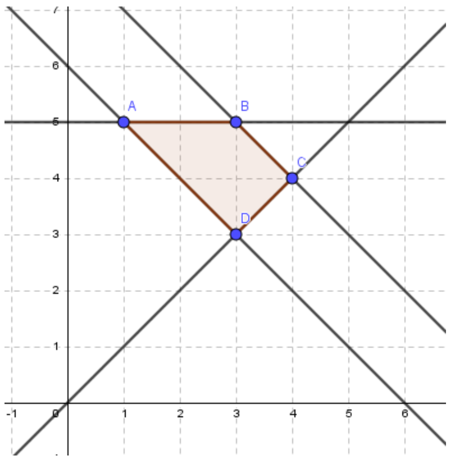
a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

### *Solución:*

Sean $x$ e $y$ el número de cables de fibra óptica de los tipos A2020 y B2020 que se producen, respectivamente. Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ y\leq 5.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ y\geq x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ x-y\leq 0 \\ y\leq 5.000 \end{array}\right\}.$$

Buscamos los vértices determinados por la intersección de las rectas:



$A$: $\left.\begin{array}{r} y=5\,000 \\ x+y=6\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1\,000, 5\,000).$

$B$: $\left.\begin{array}{r} y=5\,000 \\ x+y=8\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3\,000, 5\,000).$

$C$: $\left.\begin{array}{l} x+y=8\,000 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y;\ \ 2x=8\,000;\ \ x=4\,000 \Rightarrow$ $C(4\,000, 4\,000).$

$D$: $\left.\begin{array}{l} x+y=6\,000 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y;\ \ 2x=6\,000;\ \ x=3\,000 \Rightarrow$ $D(3\,000, 3\,000).$

La región factible es el polígono $ABCD$.

$b$) La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=2x+0.5y$.

Calculamos la función de objetivos en cada vértice:

$A$: $f(1\,000, 5\,000)=2\cdot 1\,000+0.5\cdot 5\,000=2\,000+2\,500=4\,500.$

$B$: $f(3\,000, 5\,000)=2\cdot 3\,000+0.5\cdot 5\,000=6\,000+2\,500=8\,500.$

$C$: $f(4\,000, 4\,000)=2\cdot 4\,000+0.5\cdot 4\,000=8\,000+2\,000=10\,000.$

$D$: $f(3\,000, 3\,000)=2\cdot 3\,000+0.5\cdot 3\,000=6\,000+1\,500=7\,500.$

El coste mínimo se produce en el punto $A(1\,000, 5\,000)$.

El coste mínimo, de **4 500 euros** se obtiene cuando se producen **1 000 metros** de A2020 y **5 000 metros** de B2020.

***Problema A.3:***

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real $a$ para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de $a$ es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

***Solución:***

Es una función definida a trozos, el primer trozo es una función polinómica, continua en toda la recta real. La función $f(x) = \frac{3a}{x}$, únicamente no es continua en $x = 0 < 3$, que no pertenece a su dominio. Por tanto, el único punto de dudosa continuidad es el de unión de ambos trozos. Determinamos los valores de $a$ para imponer que lo sea.

Imponemos que sus límites por la izquierda y por la derecha existan y sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Cuando $x = 3 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} (x^2 - x - 1) = 9 - 3 - 1 = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3a}{x} = \frac{3a}{3} = a \end{cases} \rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = a = f(3) = 5 \rightarrow a = 5$. La función resulta: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si\ x \leq 3 \\ \frac{15}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$.

$$a = 5$$

Estudio de la derivabilidad:

Las dos ramas de la función $f(x)$ son derivables, siendo de nuevo el único punto dudoso para $x = 3$:

Sabemos que una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x < 3 \\ -\frac{15}{x^2} & si \quad x > 3 \end{cases} \rightarrow \ f'(3^-) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq f'(3^+) = -\frac{15}{3^2} = -\frac{5}{3}$

Para ese valor de $a = 5$ que hace continua a la función, esta no es derivable en $x = 3$

$b)$ Para $x = 1 < 3$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1$, por lo que función $f(x)$ para $x = 1$ no depende del valor de $a$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1;\ P(1, -1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $f'(x) = 2x - 1 \rightarrow m = f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 \rightarrow m = 1$.

La expresión de una recta tangente es: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = -1 + 1 \cdot (x - 1) = x - 2$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = x - 2}$

### Problema A.4:

Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

### Solución:

$a)$ Datos que nos dan: $P(A) = 0.5$; $P(\overline{B}) = 0.8$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$

Sabemos que la probabilidad de un suceso más de su contrario es igual a 1. Con lo que deducimos que:

$P(\overline{A}) = 0.2$; $P(B) = 0.5$; $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.1$

Dos sucesos $A$ y $B$ son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = 0.1 = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

Los sucesos $A$ y $B$ son independientes.

$b)$ Nos piden calcular: $P(\overline{A}/\overline{B})$ que es una probabilidad condicionada que vale: $\frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

Como hemos comprobado que los sucesos son independientes:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$

$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2} = 0.5.$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.5$$


Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

***Problema A.5:***

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media $\mu$ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para $\mu$.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

***Solución:***

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 %, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es:

$1 - \alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Los datos del enunciado: $n = 20;\ \ \overline{x} = 60;\ \ \sigma = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La expresión que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(60 - 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}, 60 + 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right) = (60 - 1.96 \cdot 1.7889, 60 + 1.96 \cdot 1.7889) = (60 - 3.5062;\ 60 + 3.5062) =$$
$$(56.4938, 63.5062)$$

El intervalo de confianza de la media poblacional con un nivel de confianza dl 95 % es
$(\mathbf{56.4938}, \mathbf{63.5062})$

$b)$ Nos dicen ahora que $\ \mu = 59;\ \ \sigma = 8;\ \ n = 10.$

La distribución es normal:

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(59,\ \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(59, 2.53).$

Tipificamos: $Z = \frac{X-59}{2.53}$.

$P(57 < X < 61) = P\left(\frac{57-59}{2.53} < Z < \frac{61-59}{2.53}\right) = P\left(\frac{-2}{2.53} < Z < \frac{2}{2.53}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) =$
$P(Z \leq 0.79) - [1 - P(Z \leq 0.79)] = 2 \cdot P(Z \leq 0.79) - 1 = 2 \cdot 0.7852 - 1 = 1.5704 - 1 = 0.5704.$

$$P(57 < X < 61) = \mathbf{0.5704}.$$

# RESPUESTAS OPCIÓN B, CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

### *Problema B.1:*

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real $a$:

$$\left.\begin{array}{rl} x+2ay+z & =0 \\ -x-ay & =1 \\ -y-z & =-a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real $a$.
b) Resuelva el sistema para $a=3$.

### *Solución:*

$a$) Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a-1+2a= \ a-1=0\Rightarrow a=1.$$

Si $a\neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

$$\text{Si } a=1: M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \{F_3=F_2+F_1\}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, por lo que:

Si $a=1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado.

$b$) Sabemos que para $a=3$ el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+6y+z=0 \\ -x-3y=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

De la segunda ecuación obtenemos $x$ en función de $y$, y de la tercera, $z$, que sustituimos en la primera:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1-3y \\ z=3-y \end{array}\right\}\rightarrow(-1-3y)+6y+(3-y)=0=2y+2=0\rightarrow$$

$y=-1;\ \ x=-1+3=2;\ \ z=3+1=4.$

$$\boldsymbol{x=2,\qquad y=-1,\qquad z=4}$$

***Problema B.2:***

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

***Solución:***

Es una función racional por lo está definida salvo en los valores que anulen el denominador.

$$(x-1)^2 = 0;\ \ x - 1 = 0;\ x = 1.$$

$$D(f) = R - \{1\}$$

Asíntota vertical: $x = 1$

Para estudiar el comportamiento en el infinito calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x$$

No hay asíntotas horizontales y si, una asíntota oblicua paralela a $y = x$. Es de la forma $y = x + n$

Calculamos $n$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1} = 0 \to y = x.$$

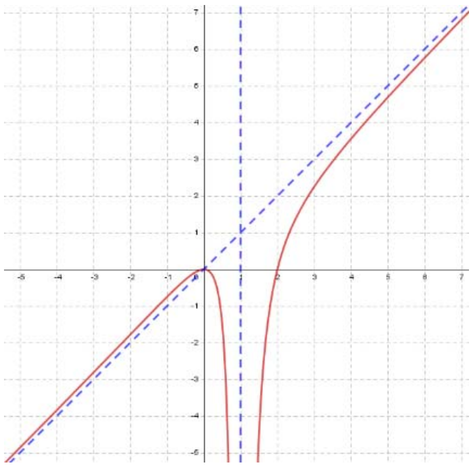
Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 1}$; Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = x}$.

$b)$ Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)(x-1)^2 - (x^3-2x^2)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(3x^2-4x)(x-1) - 2\cdot(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} \to$$

$$f'(x) = 0 = \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} \to\ \ x\cdot(x^2-3x+4) = 0 \to$$

$$x_1 = 0;\ \ x^2 - 3x + 4 = 0;\ \ x = \frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} \to x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x \in R.$$



La única solución: $x = 0$.

Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)\ \Rightarrow \text{La función es creciente}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow\ x \in (0, 1) \Rightarrow \text{La función es decreciente}$$

### *Problema B.3:*

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

### *Solución:*

$a$) Nos dan una primitiva de la función. Por tanto:

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 + 8x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = x^3 + 4x^2 + C.$

Como nos dicen que:

$f(1) = 11 = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + C = \ 1 + 4 + C \Rightarrow C = 6.$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6}$$

$b$) Como la función es continua y derivable en toda la recta real los posibles máximos y mínimos están en los puntos en que se anula la derivada. Como ya conocemos la derivada, igualamos a cero:

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 8x = 0 = \ x(3x + 8) \Rightarrow x = 0, x = -\frac{8}{3} \rightarrow \ f(0) = 6; f\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{418}{27}$

Para determinar si son máximos o mínimos analizamos el signo de la derivada segunda:

$f''(x) = 6x + 8.\ f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow A(0, 6)$ es un mínimo relativo

$f''\left(-\frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)$ es un máximo relativo

O bien consideramos los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ y estudiamos el signo de la derivada primera dada: Por ejemplo:

$f'(-5) = 3(-5)^2 + 8(-5) > 0$, la función es creciente

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) < 0$, la función es decreciente

$f'(1) = 3(1)^2 + 8(1) > 0$, la función es creciente

Por tanto, en $x = -\frac{8}{3}$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente luego es un máximo, y en $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego es un mínimo.

$\boldsymbol{A(0, 6)}$ es un mínimo relativo; $\boldsymbol{B\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)}$ es un máximo relativo.

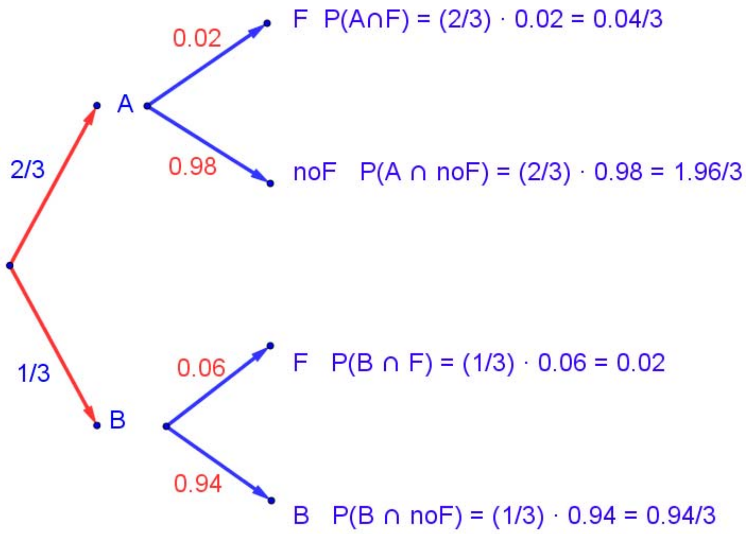
### *Problema B.4:*

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de $0,02$, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de $0,06$. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

### *Solución:*

Llamamos $A$ al suceso vivir en el municipio A, y $B$ a vivir en B. Llamamos $F$ al suceso fracaso escolar, y $noF = \overline{F}$ al no fracaso. Hacemos un diagrama en árbol con los datos que nos dan:




$a$) Para calcular la probabilidad de no fracaso sumamos las dos ramas que llevan al no fracaso:

$$P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F}) = \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = \frac{1.96}{3} + \frac{0.94}{3} = \frac{2.90}{3} = 0.9667.$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar no sufra fracaso escolar es de $\mathbf{0.9667}$.

$b$) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(A/F) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0.02}{1-0.9667} = 0.404.$$

Si se sabe que ha sufrido fracaso escolar, la probabilidad de que sea del municipio A es de $\mathbf{0.404}$.


Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

**_Problema B.5:_**

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que $30,5$ minutos.

**_Solución:_**

$a)$ Nos dicen un nivel de confianza del 95 % por lo que $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$1-\alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.(1-0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Los datos son entonces: $\sigma = 3; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \ \ E = 1.$

Sabemos que:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = (1.96 \cdot 3)^2 = 5.88^2 = 34.5744.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de $\mathbf{35}$ pruebas

$b)$ Los datos ahora son: $\mu = 32; \ \ n = 16; \ \ \sigma = 3.$

Es una distribución normal: $X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(32, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32, 0.75).$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-32}{0.75}.$

Nos piden:

$P(X < 30.5) = P\left(Z < \frac{30.5-32}{0.75}\right) = P\left(Z < \frac{-1.5}{0.75}\right) = P(Z < -2) = [1 - P(Z \le 2)] = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

La probabilidad de que el tiempo empleado sea menor que 30.5 es de $\mathbf{0.0228}$.