Emmy Noether (1882-1935)

María Molero Aparicio, Profesora de Secundaria, Liceo Español de París
Adela Salvador Alcaide, Profesora Titular de Universidad, U. P. Madrid, E. T. S. I. Caminos

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Mediante su primera especialización sobre invariantes algebraicos consiguió demostrar dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía. Su aportación más importante a la investigación matemática fueron sus resultados sobre la axiomatización y el desarrollo de la teoría algebraica de anillos, módulos, ideales, grupos con operadores, etc. En este contexto, que se llamó álgebra moderna, aplicó sus conocimientos sobre invariantes algebraicos dando rigor y generalidad a la geometría algebraica. Sus investigaciones en álgebra no conmutativa destacan, sobre todo, por el carácter unificado y general que dio a los conocimientos acumulados durante décadas. Sus publicaciones serían suficientes para valorar su decisiva contribución a las matemáticas, pero hay que considerar, además, que nunca le interesó mucho publicar y siempre permitió a sus colegas y a sus estudiantes desarrollar resultados interesantes a partir de las sugerencias que ella les hacía

El calificativo noetheriano se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra. Los anillos noetherianos[i] recibieron este nombre en su honor, ya que fue ella la que introdujo la condición de cadena ascendente[ii], pero también se habla de grupos noetherianos, módulos noetherianos, espacios topológicos noetherianos, etc.

Sus investigaciones crearon un cuerpo de principios que unificaron el álgebra, la geometría, la topología y la lógica. En su época su genialidad fue ampliamente reconocida por la comunidad matemática. Conocemos textos[iii] de Hilbert, H. Weyl, Einstein, Alexandroff, Van der Waerden, Jacobson..., alabando su talento, pero no podemos olvidar que durante los casi treinta años que estuvo dedicada a la enseñanza y a la investigación nunca consiguió un salario digno.

Su vida

El 23 de marzo de 1882 nació en Erlangen, Baviera, Emmy Amalie Noether. Su padre, Max Noether (1844-1921), era profesor de matemáticas en la universidad de Erlangen, conocido por sus investigaciones sobre funciones algebraicas, su madre Ida Kaufmann, procedía de una familia de Colonia. Ambos eran de origen judio. Tuvieron tres hijos pero uno murió en la infancia, Emmy era la mayor y Frizt que tenía dos años menos que ella, también fue matemático y se especializó en matemática aplicada.

Hasta los 15 años asistió al Höhere Töchter Schule en Erlangen donde estudió alemán, inglés, francés, aritmética, piano y danza. Después de esta formación básica estudió francés e inglés, para ser profesora de idiomas y en 1900 superó los Exámenes de Estado que la calificaban para enseñar idiomas en cualquier institución educativa femenina. Después de obtener este título, el medio matemático en el que se desarrollaba su vida, entre su padre y los amigos de éste, orientó sus estudios hacia las matemáticas.

El Senado de la Universidad de Erlangen había declarado en 1898 que la admisión de mujeres estudiantes "destrozaría todo orden académico" [16], sin embargo se les autorizaba a asistir a clase con un permiso especial, que no les daba derecho a examinarse. Fue la única alumna entre 984 estudiantes. Después de pasar los exámenes en Nuremberg en 1903, fue a Göttingen donde asistió a cursos impartidos por Hilbert, Klein y Minkowski y en 1904 regresó a Erlangen donde habían cambiado los estatutos de la Universidad y pudo proseguir sus estudios de doctorado, que realizó bajo la influencia de Paul Gordan sobre la teoría de invariantes. En 1907 obtuvo el grado de doctora “cum laude” con la memoria titulada: *Sobre* *los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias*, que fue publicada en 1908.

La fama de Emmy creció rápidamente así como sus publicaciones. En 1908 fue elegida miembro del Circolo Matematico de Palermo, y desde 1909 perteneció al Mathematiker Vereinigung Alemán. Ese mismo año fue invitada para dar una conferencia en Salzburgo y en 1913 en Viena. A pesar de este reconocimiento público su trabajo en la Universidad de Erlangen consistía únicamente en ayudar a su padre, lo sustituía cuando estaba enfermo y continuaba con sus investigaciones, pero sin percibir salario alguno. Durante estos años tuvo dos tutores algebristas: Ernst Fischer (1840-1927) y Bernhard Schmidt (1879-1935). Ella declaró que Fischer le había despertado el interés por el álgebra abstracta y que fue precisamente esta influencia la que determinó su trabajo futuro [10]. Abandonó la corriente constructivista que había utilizado en su memoria de doctorado y desarrolló un pensamiento axiomático conceptual.

En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y Félix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en la universidad de Göttingen, que en aquella época era el principal centro matemático de Alemania y probablemente de Europa. En una carta fechada en 1919 decía que había tomado esa decisión respondiendo a una invitación de matemáticos que trabajaban en esa ciudad [10]. Este periodo de la vida de Emmy (1915-1933) estuvo marcado por una intensa producción científica que determinó su aportación a las matemáticas y a la física. En esta época también colaboró en la edición de la revista *Mathematische Annalen.*

El reglamento vigente de la Universidad de Göttingen indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que Noether no pudo presentarse a oposiciones como docente universitario. Hilbert quiso corregir esa injusticia, pero sus esfuerzos no tuvieron éxito, pues ciertos miembros de la facultad, no matemáticos, se opusieron. Se cuenta, como anécdota, que Hilbert dijo en un Consejo de la Universidad de Göttingen, *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"* [6]. Hilbert y Noether encontraron un sistema para que ella pudiera impartir como docente: las clases se anunciaban bajo el nombre de Hilbert y ella figuraba como ayudante. Así pudo probar su competencia y ser mejor conocida.

Finalizada la Primera Guerra Mundial Alemania pasó a ser una república. Por primera vez las mujeres tuvieron derecho a voto y fue derogado el anterior reglamento de oposiciones. En 1919, Emmy presentó como “tesis de habilitación” su trabajo "*Invariante Variationsprobleme*" junto con doce artículos ya publicados y dos manuscritos adicionales, en uno de los cuales había varias ideas importantes que tuvieron un impacto significante en el reciente desarrollo del álgebra abstracta. En 1922 fue nombrada “profesor extraordinario y no oficial”. No tenía derecho a sueldo[iv], pero pudo obtener pequeñas retribuciones, por su grado de experta en álgebra, que en ese momento le eran imprescindibles, ya que la inflación de la posguerra estaba acabando con su pequeña herencia.

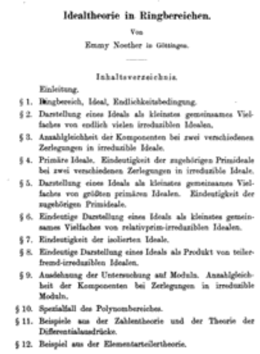
Durante el curso 1928-29 pasó un semestre como profesora visitante en la Universidad de Moscú y fue invitada al Congreso Matemático Internacional en Bolonia. En septiembre de 1932 fue invitada al Congreso Internacional de Matemáticas de Zurich. Emmy presentó una importante comunicación titulada: *“Los sistemas hipergeométricos en su relación con las álgebras no conmutativas”*. Este mismo año recibió con Artin, el Alfred Ackermann-Teubner Memorial, premio para el Avance del Conocimiento Matemático.

A pesar del reconocimiento obtenido por este éxito, los cambios políticos y la llegada de Hitler al poder le obligaron a reorientar su carrera. Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal le obligó a abandonar Alemania. Primero pensó marchar a Rusia y se puso en contacto con su amigo Alexandroff, pero pasó demasiado tiempo antes de que le contestaran ofreciéndole un puesto. En abril de 1933 se le retiró su derecho a ejercer como docente por ser judía y las leyes raciales la empujaron al exilio. A finales de ese año se marchó a los Estados Unidos como profesora invitada durante un año a una universidad femenina, el Bryn Mawr College (Pennsylvania). En febrero de 1934 comenzó a trabajar en Princeton, New Jersey, en el Instituto de Estudios Avanzados, donde también se encontraba Albert Einstein. En verano volvió por última vez a Alemania para ver a su hermano Fritz, visitar viejos amigos y cerrar su casa.

La noticia de su repentina muerte, el 14 de abril de 1935, como consecuencia de una operación, en principio no demasiado seria, sorprendió a todos. Tenía 53 años y estaba en el apogeo de su fuerza creadora.

Sin duda Emmy Noether figurará siempre como una de las personalidades matemáticas más importantes del siglo XX. Muchas personas por todo el mundo continúan su trabajo en álgebra. Sobre ella dijo Jean Dieudonné que era *"la mejor matemática de su tiempo, y uno de los mejores matemáticos (hombre o mujer) del siglo XX"* [5].

Su obra:



Idealtheorie in Ringbereichen.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

En la obra de Emmy Noether se distinguen tres periodos distintos: de 1882 a 1915 en Erlangen, de 1915 a 1933, el periodo más productivo, en Göttingen, y de 1933 a 1935, en Estados Unidos.

En Erlangen después de realizar su tesis doctoral, bajo la influencia de Paul Gordan, comenzó su interés por el álgebra abstracta. Las investigaciones más importante de Emmy, tanto en matemáticas como en física, fueron las que realizó en Göttingen. En su trabajo *Invariante Variationsprobleme* (1918) incluía dos resultados importantes, esenciales en la teoría de la relatividad general y en el estudio de las partículas elementales ya que relacionaban las simetrías con las leyes de conservación de la energía [1]. Por sus investigaciones en matemáticas se convirtió en una especialista en la teoría de invariantes[v]. Desarrolló la teoría general de anillos e ideales bajo una base axiomática, contribuyendo a que el método axiomático fuese un potente instrumento en la investigación. Sus trabajos en álgebra no conmutativa unificaron conceptualmente todos los resultados sobre intuiciones geniales pero bastante confusos introducidos en las décadas anteriores por Kronecker, Dedekind y Kumer. En el corto espacio de tiempo que vivió en Estados Unidos continuó sus investigaciones en este campo.

La tesis doctoral de Emmy siguió el planteamiento constructivista de Gordan. El estilo de este matemático consistía en hojas y hojas de símbolos sin casi una palabra de texto. Emmy calculó los 331 invariantes de las formas bicuadráticas ternarias [15] Ella misma calificaba su tesis de "una jungla de fórmulas" [10] siendo el estilo de sus trabajos posteriores muy diferente, más conceptual y orientado a reflexionar sobre la naturaleza intrínseca de los problemas para profundizar en ellos y generalizarlos.

El artículo de Emmy *Invariante Variationsprobleme* [12] fue presentado el 16 de julio de 1918 en la reunión del Könighche el der de Gesellschaft el zu de Wissenschaften Göttingen por Felix Klein probablemente porque Noether no era un miembro de los Gesellschaft. El trabajo demostró dos teoremas básicos para la teoría general de la relatividad y la física de partículas elementales, que revelaron la conexión general entre las simetrías y las leyes de conservación de la energía [9] y son conocidos por los físicos como *"Teorema de Noether"* [8]. En aquella época David Hilbert, Felix Klein y otros en Göttingen estaban muy interesados en esta nueva teoría. El trabajo de Emmy fue una continuación al descubrimiento de David Hilbert del principio del variacional del que derivaron las ecuaciones de la teoría general de la relatividad. Sin embargo, en este campo, había problemas no resueltos con respecto a la conservación de energía. Emmy los resolvió y su trabajo fue alabado por Einstein (1918), en una carta a Hilbert, donde se refirió a ella como "*pensamiento matemático penetrante*".

En 1920 publicó con W. Schmeidler un trabajo sobre operadores diferenciales en álgebras no conmutativas, que supone según H. Weyl el comienzo en su obra matemática de *"su poder creador tan original e incluso genial"*. [3]

En la década de los años veinte inició una serie de investigaciones que modificaron el Álgebra desde sus fundamentos. Publicó una docena de artículos. Los más importantes fueron dos memorias sobre la teoría de ideales: *Teoría de ideales en anillos* (1921) [13] y *Construcción abstracta de la teoría de ideales en el dominio del cuerpo de los números algebraicos* (1924). Dedekind había introducido los ideales como un conjunto de números enteros en un cuerpo numérico, así como la descomposición de estos ideales como producto de ideales primos. Emmy, en su primera memoria, convirtió los ideales de números enteros en ideales, es decir, subconjuntos definidos axiomáticamente en cualquier conjunto con estructura de anillo y estableció que en un anillo conmutativo que verifique el celebre axioma de la cadena ascendente de ideales, (ahora llamado anillo noetheriano), todo ideal tiene una descomposición minimal finita como intersección de ideales primarios. En la segunda determinó los axiomas para poder establecer, en un anillo, la descomposición de un ideal como producto de ideales primos.

En 1927 colaboró con Helmut Hasse (1898-1972) y Richard Brauer (1901-1977) en trabajos sobre álgebra no conmutativa. A partir de entonces centró su estudio en este campo. Sus investigaciones sobre los sistemas hypercomplejos, la teoría de la representación y, de forma general, el álgebra no conmutativa se caracterizan por la importancia que tienen las nociones de módulo, ideal, automorfismo y por la generalidad de los resultados que son válidos en cualquier cuerpo. Por teorías como la del producto cruzado, desarrolladas por ella o en colaboración con Helmut Hasse y Richard Brauer, Emmy Noeter consiguió unos resultados muy importantes aplicando brillantemente los métodos hipercomplejos a difíciles problemas de la teoría de cuerpos cociente. Uno de sus trabajos más importantes, *Álgebras no conmutativas* [14], publicado en 1933, proporciona una visión global de dicha teoría.

Una serie de discípulos procedentes de todo el mundo y conocidos como de la "Escuela Noether", a través de sus clases y discusiones abiertas hicieron fecundo su trabajo. Entre ellos podemos citar a Krull, Grell, Koethe, Deuring, Fitting, F-K Schmidt, etc. [3]. Formaban una pequeña familia, se mostraba con ellos buena y maternal, interesada por sus asuntos personales, siempre dispuesta a ayudarlos, pero como una juez implacable en lo referente a su trabajo matemático. Uno de ellos, Van Der Waerden, decía que no sólo estaban entusiasmados por el proyecto de Emmy sino también con el tratamiento que ella hacía: *"Era para nosotros una amiga leal y al mismo tiempo un juez severo e incorruptible"*[6]. A través de sus discípulos, la moderna concepción del Álgebra llegó a casi todas las universidades alemanas y a los centros de investigación matemática de Francia, Unión Soviética, Japón y EE.UU. Se le atribuía la capacidad, no usual, de visualizar y aclarar los conceptos más difíciles con la ayuda de ejemplos concretos.

La obra de Emmy no se puede juzgar exclusivamente por sus publicaciones, un poco abandonadas. Se debe considerar que siempre ayudó a sus estudiantes y colegas a desarrollar resultados interesantes a partir de las observaciones, sugerencias, o comentarios que ella les hacía. Un ejemplo es la introducción del concepto de nilradical[vi] por Koethe en 1931. Otro es el caso de Van der Waerden, que en 1924 fue a Göttingen un año para estudiar con Emmy, y al volver a Amsterdam escribió su libro Álgebra Moderna en dos volúmenes. La mayor parte del segundo volumen es el trabajo de Emmy, clarificado y ordenado por él.

Se debe también a Emmy, en colaboración con el filósofo francés Jean Cavaillès, una edición que apareció en 1937 de la correspondencia entre Georg Cantor y Richard Dedekind, entre abril de 1872 y agosto de 1899. Estas cartas permitieron seguir la génesis de la teoría de conjuntos.

En la Sociedad Matemática de Moscú, su amigo Pavel Sergeevich Aleksandrov (1896-1982) la recordaba con este tributo: *«Emmy Noether fue la más grande de las mujeres matemáticas, una gran científica, magnífica profesora y una inolvidable persona»* [7]

Bibliografía

[1] BYERS, N. (1999): *E Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws*, Israel Mathematical Conference Proceedings 12, http://www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.asg/noether.html

[2] DICK, A. (1981): *Emmy Noether, 1882-1935*. Birkhauser, Boston.

[3] DUBREIL-JACOTIN, M. L. (1948): *Figures de Mathématiciennes, "Les grands courants de la pensée mathématique"*, F. Le Lionnais (ed.). Cahiers du sud, Paris, 266-269.

[4] EINSTEIN, A. (1935): *Un tributo a Emmy Noether*, "The New York Times" (5 de mayo).

[5] EYCHENNE, E. (1993): *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres.* Brochure de l'IREM de Besançon, 46-48.

[6] FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. (1998): *Género y Matemáticas*. Editorial Síntesis, Madrid, 170-182.

[7] FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. (1998): *El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*. Proyecto Sur de Ediciones, S. L, Granada,129-145.

[8] HILL, C. T. y LEDERMAN L. M.: *Symmetry in Physics: Proving Noether's Theorem*, http://www.emmynoether.com/math.htm

[9] HILL, C. T. y LEDERMAN L. M.: *Symmetries of the Laws of Physics and Noether's Theorem*, http://www.emmynoether.com/noeth.htm

[10] LAFORTUNE, L. (1986): *Femmes et mathématiques*. Les éditions du remue-ménage, Montréal, 82-95.

[11] NOETHER, E. (1983): *Collected Papers*. Springer - Verlag, New York.

[12] NOETHER, E. (1918): Invariante Variationsprobleme, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257.

[13] NOETHER, E (1921): *Idealtheories in Ringbereichen*, "Mathematische Annalen", 83, 24-66, http://134.76.163.65/agora_docs/29099TABLE_OF_CONTENTS.html

[14] NOETHER, E (1933): *Nichtkommutative Algebra*. "Mathematische Zeitschrift", 37, 514-541, http://134.76.163.65/agora_docs/8487BIBLIOGRAPHIC_DESCRIPTION.html

[15] NOETHER, E. (1908): *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*, Reimer. Berlin.**http://134.76.163.65/agora_docs/39727BIBLIOGRAPHIC_DESCRIPTION.html**

[16] SMITH, S.(1996): *Agnesi to Zeno: Over 100 Vignettes from the History of Math*. Key Curriculum Press. Berkeley, 165-166.

[17] VAN DER WAERDEN, B. L. (1935): *Nachruf auf Emmy Noether*, "Mathematische Annalen" 111, 469-476, http://134.76.163.65/agora_docs/37932TABLE_OF_CONTENTS.html

[18] WEYL, H. (1935): *Emmy Noether*, "Scripta Mathematica III", 3, 201-220.

Más en la web:

[19] BYERS, N. (1996): *Emmy Noether 1882 - 1935* http://www.physics.ucla.edu/~cwp/Phase2/Noether,_Amalie_Emmy@861234567.html

[20] KIMBERLING, C. (1982) *Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician* "Mathematics Teacher", 84, 3, 246-249. 10.1 del menú en: http://www.matharticles.com

[21] MCGIRR, K. (1998): *Biographies of Mathematicians - Emmy Amalie Noether* http://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/bionoeth.htm

[22] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (1997): *Emmy Amalie Noether,* http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Noether_Emmy.html

[23] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2002): *Fotografías* de *Emmy Noether,* http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Noether_Emmy.html

[24] STRETCH, D. (2003): *Emmy Amalie Noether,* http://www.pass.maths.org.uk/issue12/features/noether/index.html

[25] TAYLOR, M. (1998): *Emmy Noether,* http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/noether.htm

[i] Un anillo conmutativo y unitario es noetheriano si toda sucesión creciente de ideales es finita, lo que equivale a decir que todo ideal está finitamente generado.

ii Un conjunto ordenado verifica la condición de cadena ascendente si toda sucesión creciente de elementos es finita.

[iii] **Albert Einstein, en un tributo a Emmy Noether [4]:**

En el reino del álgebra, en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que han probado su enorme importancia... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales necesarias para conseguir una penetración más profunda en las leyes de naturaleza.

Nathan Jacobson escribió [11]:

El álgebra abstracta puede fecharse desde la publicación de dos trabajos de Noether, el primero el que publicó junto con Schmeidler y sobre todo un trabajo verdaderamente monumental Idealtheorie in Ringbereichen que pertenece a una de las corrientes principales del álgebra abstracta, la teoría de anillos conmutativos, y puede considerarse como el primer trabajo en este inmenso campo.

Hermann Weyl escribió sobre su trabajo [18]:

Su importancia para el álgebra no puede valorarse leyendo únicamente sus publicaciones, pues ella tenía un gran poder para estimular por lo que muchas de sus sugerencias tomaron forma en los trabajos de sus alumnos y colegas. ...

La teoría de álgebras no-conmutativas y sus representaciones fue elaborada por Emmy Noether que unificó, de modo puramente conceptual, todos los resultados que se habían acumulado durante décadas por los ingeniosos trabajos de Frobenius, Dickson, Wedderburn y otros.

P. S. Alexandrov escribió [2]:

Era ella quién nos enseñó a pensar en términos de conceptos algebraicos simples y generales, homomorfismos, aplicaciones, grupos y anillos con operadores, ideales, teoremas tales como los teoremas de homomorfismo e isomorfismo, conceptos como las condiciones de cadena ascendente y descendente para subgrupos e ideales, o la noción de grupos con operadores que fue introducida por Emmy Noether y ha entrado en la práctica diaria de una amplia gama de disciplinas matemáticas ... sólo hay que mirar el trabajo de Pontryagin en grupos continuos, el de Kolmogorov en topología combinatoria, el de Hopf en aplicaciones continuas, el de.Van der Waerden en geometría algebraica... para darse cuenta de la influencia de las ideas de Emmy Noether. Esta influencia también se siente agudamente en el libro de H. Weyl, Gruppentheories und Quantenmechanik.

Van der Waerden la describió así [17]:

Para Emmy Noether las relaciones entre los números, las funciones y las operaciones se vuelven transparentes, generalizables y productivas únicamente después de que hayan sido disociadas de todo objeto particular y que hayan sido reducidas a relaciones conceptuales generales.

[iv] Herman Weyl escribió en 1935 en Scripta Mathematica [18]:

"Cuando, en 1930, obtuve un puesto de profesor en Göttingen, intenté conseguir para Emmy un puesto mejor, ya que me avergonzaba ocupar una posición por encima de ella, sabiendo que como matemática era superior a mí en muchos aspectos. No tuve éxito. Tradición, prejuicios, consideraciones externas pesaron en contra de sus méritos y grandeza científica, que por entonces nadie ponía en duda. En mis años en Göttingen (1930-1933), ella fue sin

duda el centro de actividad matemática más poderoso, tanto por la importancia de sus investigaciones como por su influencia sobre un amplio número de discípulos".

[v] Se considera que son invariantes de las leyes matemáticas de un sistema aquellas transformaciones, como por ejemplo las isometrías, que conservan las propiedades propias del sistema.

[vi] El **nilradical** de un anillo es la intersección de todos los ideales primos del anillo. Este concepto fue mejorado posteriormente por Jacobson que introdujo el concepto de **Radical de Jacobson** que es la intersección de todos los ideales maximales del anillo.