

Le sorprende que yo esté trabajando simultáneamente en literatura y matemáticas. Muchas personas que no han tenido nunca la oportunidad de aprender que son las matemáticas, las confunden con la aritmética y la consideran una ciencia árida y fría. El hecho es que es la ciencia que más imaginación necesita. Uno de los más grandes matemáticos de nuestro siglo dice muy acertadamente que es imposible ser matemático sin ser un poeta de espíritu. A mí me parece que el poeta debe ser capaz de ver lo que los demás no ven, debe ver más profundamente que otras personas. Y el matemático debe hacer lo mismo.

Sonya Kovalevskaya

ANÁLISIS MATEMÁTICO

MARÍA MOLERO APARICIO

ADELA SALVADOR ALCAIDE

TRINIDAD MENARGUEZ PALANCA

LUIS GARMENDIA SALVADOR

CONTENIDO

| | |
|--|-----------|
| CONTENIDO | I |
| PRÓLOGO | XI |
| VARIABLE COMPLEJA | 1 |
| HISTORIA DE LA VARIABLE COMPLEJA | 2 |
| Los números complejos | 2 |
| Funciones de variable compleja | 5 |
| La función logaritmo | 6 |
| Integración | 8 |
| Cauchy y la variable compleja | 9 |
| Riemann y la variable compleja | 12 |
| Weierstrass y la variable compleja | 13 |
| | |
| CAPÍTULO 1. Los números complejos | 17 |
| 1.1. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS | 18 |
| 1.1.1. Números complejos en forma binómica | 19 |
| 1.1.2. Operaciones en forma binómica | 20 |
| 1.1.3. Propiedades algebraicas | 21 |
| Ejemplos resueltos | 23 |
| Ejercicios | 23 |
| 1.2. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. DIAGRAMA DE ARGAND | 25 |
| Ejemplos resueltos | 27 |
| Ejercicios | 29 |
| 1.3. FORMA POLAR | 30 |
| 1.3.1. Módulo | 30 |
| 1.3.2. Argumento | 31 |
| 1.3.3. Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo | 32 |
| 1.3.4. Forma polar | 33 |
| Ejemplos resueltos | 34 |
| Ejercicios | 35 |
| 1.4. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO | 37 |
| 1.4.1. Operaciones entre números complejos en forma exponencial | 37 |
| 1.4.2. Fórmula de Moivre | 40 |
| Ejemplos resueltos | 40 |
| Ejercicios | 41 |
| 1.5. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO | 43 |
| Ejemplos resueltos | 47 |
| Ejercicios | 47 |
| 1.6. LA ESFERA DE RIEMANN. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA. | 48 |
| Ejercicios | 51 |
| 1.7. EJERCICIOS | 52 |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 2. Funciones complejas | 57 |
| 2.1. DEFINICIÓN. FUNCIONES ELEMENTALES | 59 |
| 2.1.1. Definición de función compleja | 59 |
| 2.1.2. Funciones Elementales | 60 |
| 2.1.2.1. Polinomios | 60 |
| 2.1.2.2. Funciones racionales | 61 |
| 2.1.2.3. Función exponencial | 61 |
| 2.1.2.4. Funciones trigonométricas | 63 |
| 2.1.2.5. Funciones hiperbólicas | 65 |
| 2.1.2.6. Función logaritmo | 66 |
| 2.1.2.7. Funciones definidas como potencias | 68 |
| Ejemplos resueltos | 70 |
| Ejercicios | 74 |
| 2.2. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD. | 76 |
| 2.2.1. Límites de funciones | 76 |
| 2.2.2. Límites en el infinito. Límites infinitos | 76 |
| 2.2.3. Continuidad. | 77 |
| Ejemplos resueltos | 79 |
| Ejercicios | 81 |
| 2.3. DERIVADA COMPLEJA | 82 |
| 2.3.1. Definición de derivada | 82 |
| 2.3.2. Propiedades | 85 |
| 2.3.3. Condiciones de Cauchy Riemann. | 86 |
| 2.3.4. Estudio de la derivada de distintas funciones | 89 |
| Ejemplos resueltos | 91 |
| Ejercicios | 93 |
| 2.4. FUNCIONES HOLOMORFAS | 94 |
| 2.4.1. Funciones holomorfas. Definiciones | 95 |
| 2.4.2. Estudio de la holomorfía de las distintas funciones | 95 |
| 2.4.3. Propiedades de las funciones holomorfas | 96 |
| Ejemplos resueltos | 97 |
| Ejercicios | 98 |
| 2.5. FUNCIONES ARMÓNICAS | 99 |
| 2.5.1. Funciones armónicas. Definición | 99 |
| 2.5.2. Propiedades de las funciones armónicas. | 101 |
| Ejemplos resueltos | 102 |
| Ejercicios | 103 |
| 2.6. EJERCICIOS | 104 |
| | |
| CAPÍTULO 3. Series complejas | 111 |
| 3.1. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS | 113 |
| Ejemplos resueltos | 117 |
| Ejercicios | 119 |
| 3.2. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS | 120 |
| 3.2.1. Sucesiones de funciones complejas | 120 |
| 3.2.2. Series de funciones complejas. Definición y convergencia | 122 |
| 3.2.3. Series de funciones complejas. Continuidad y derivabilidad | 125 |
| Ejemplos resueltos | 127 |
| Ejercicios | 128 |

| | |
|---|------------|
| 3.3. SERIES DE POTENCIAS | 129 |
| 3.3.1. Definición. Convergencia de una serie de potencias | 129 |
| Ejemplos resueltos | 135 |
| 3.3.2. Funciones definidas por series de potencias | 136 |
| Ejemplos resueltos | 141 |
| Ejercicios | 144 |
| 3.4. FUNCIONES ANALÍTICAS | 145 |
| 3.4.1. Definición y propiedades | 145 |
| 3.4.2. Desarrollos en serie de funciones | 147 |
| 3.4.3. Prolongación analítica | 148 |
| Ejemplos resueltos | 152 |
| Ejercicios | 153 |
| 3.5. SERIES DE LAURENT | 154 |
| 3.5.1. Series de Laurent. Definición y convergencia | 154 |
| 3.5.2. Representación de funciones en series de Laurent | 158 |
| Ejercicios | 163 |
| 3.6. EJERCICIOS | 163 |
| | |
| <i>CAPÍTULO 4. Integración en el plano complejo</i> | 169 |
| 4.1. CURVAS EN EL CAMPO COMPLEJO. | 170 |
| Ejemplos resueltos | 175 |
| Ejercicios | 178 |
| 4.2. INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS. | 179 |
| 4.2.1. Integral de una función sobre un camino | 180 |
| 4.2.2. Relación de la integral compleja con la integral curvilínea real | 181 |
| 4.2.3. Propiedades elementales | 182 |
| Ejemplos resueltos | 184 |
| Ejercicios | 188 |
| 4.3. ÍNDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CURVA. | 190 |
| 4.3.1. Definición de índice | 190 |
| 4.3.2. Índice y homotopía | 192 |
| 4.3.3. Índice y conexión | 193 |
| Ejemplos resueltos | 193 |
| Ejercicios | 195 |
| 4.4. TEOREMA DE CAUCHY. | 196 |
| 4.4.1. Primitivas | 196 |
| 4.4.2. Distintos enunciados del teorema de Cauchy. | 199 |
| Versión primera del Teorema de Cauchy | 200 |
| Lema de Goursat | 201 |
| Teorema de Cauchy para un disco | 205 |
| Teorema de Cauchy para caminos homótopos | 206 |
| Teorema de Cauchy en dominios simplemente conexos | 207 |
| Teorema de Cauchy-Goursat | 208 |
| Ejemplos resueltos | 208 |
| Ejercicios | 209 |
| 4.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL COMPLEJA | 211 |
| 4.5.1. Trabajo y flujo | 211 |
| 4.5.2. Teorema de la divergencia | 213 |

| | |
|---|------------|
| 4.6. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY. | 214 |
| 4.6.1. Fórmula integral de Cauchy. | 217 |
| Ejemplos resueltos | 219 |
| Ejercicios | 220 |
| 4.7. CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY. | 221 |
| 4.7.1. Aplicación al cálculo de integrales reales | 223 |
| 4.7.2. Desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa | 223 |
| 4.7.3. Derivadas de orden superior | 225 |
| 4.7.4. Desigualdad de Cauchy | 228 |
| 4.7.5. Teorema de Liouville | 229 |
| 4.7.6. Teorema fundamental del Álgebra | 229 |
| 4.7.7. Teorema de Morera | 230 |
| 4.7.8. Principio del módulo máximo | 232 |
| 4.7.9. Otras consecuencias | 233 |
| Principio de prolongación analítica | 234 |
| Ceros de funciones holomorfas | 234 |
| Regla de L'Hôpital | 235 |
| Ejemplos resueltos | 236 |
| Ejercicios | 237 |
| 4.8. EJERCICIOS | 238 |
| | |
| <i>CAPÍTULO 5. Singularidades y residuos</i> | 245 |
| 5.1. SINGULARIDADES | 245 |
| Ejemplos resueltos | 246 |
| Ejercicios | 247 |
| 5.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS | 248 |
| 5.2.1. Singularidades evitables | 249 |
| 5.2.2. Polos | 249 |
| 5.2.3. Singularidad esencial | 251 |
| 5.2.4. Ceros de una función analítica | 253 |
| Ejemplos resueltos | 254 |
| Ejercicios | 256 |
| 5.3. SERIES DE LAURENT | 257 |
| 5.3.1. Expresión integral de los coeficientes de la serie de Laurent | 258 |
| 5.3.2. Relación entre el tipo de singularidad y los coeficientes de la serie de Laurent | 260 |
| Ejemplos resueltos | 260 |
| Ejercicios | 261 |
| 5.4. RESIDUOS | 262 |
| 5.4.1. Teorema del residuo | 263 |
| 5.4.2. Cálculo de residuos. Residuos en los polos | 264 |
| 5.4.3. Residuo en el infinito | 267 |
| Ejemplos resueltos | 271 |
| Ejercicios | 275 |
| 5.5. FUNCIONES MEROMORFAS, ANALÍTICAS Y ENTERAS | 278 |
| 5.5.1. Funciones meromorfas | 278 |
| 5.5.2. El principio del argumento y sus consecuencias | 279 |
| 5.5.3. Teorema de Rouché | 282 |
| 5.5.4. Teorema fundamental del Álgebra | 282 |

| | |
|---|------------|
| 5.5.5 Teorema de Hurwitz | 283 |
| 5.5.6. Teorema de la aplicación abierta | 284 |
| 5.5.7. Teorema del módulo máximo | 285 |
| 5.5.8. Teorema de los tres círculos de Hadamard | 286 |
| 5.5.9. Problema de Dirichlet | 286 |
| 5.5.10. Teorema de Phragmen-Lindelöf | 287 |
| 5.5.11. Lema de Schwarz. | 289 |
| 5.5.12. Principio de Lindelöf o principio de subordinación | 289 |
| 5.5.13. Clasificación de las funciones enteras | 291 |
| 5.5.14. Orden de una función entera | 293 |
| 5.6. EJERCICIOS | 296 |
| | |
| CAPÍTULO 6. Geometría de las transformaciones complejas | 307 |
| 6.1. TRANSFORMACIONES CONFORMES | 308 |
| Observaciones | 310 |
| Ortogonalidad | 311 |
| Equivalencia conforme | 312 |
| 6.1.1. Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación de Riemann. | 313 |
| Teorema de la aplicación abierta | 313 |
| Teorema de la aplicación de Riemann | 314 |
| Ejemplos resueltos y ejercicios | 316 |
| 6.2. ALGUNAS TRANSFORMACIONES SENCILLAS | 317 |
| 6.2.1. La aplicación lineal: $f(z) = az + b$ | 317 |
| 6.2.2. La función $f(z) = z^2$ | 319 |
| 6.2.3. La función $f(z) = z^n$ | 320 |
| 6.2.4. La función exponencial $w = \exp(z) = e^z$ | 320 |
| 6.2.5. La función $w = \cos(z)$ | 321 |
| 6.2.6. La función $w = \bar{z}$ | 321 |
| 6.2.7. La función $w = 1/z$ | 321 |
| 6.2.8. Otras transformaciones | 323 |
| Ejemplos resueltos y ejercicios | 324 |
| 6.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL O DE MÖBIUS | 327 |
| 6.3.1. Propiedades básicas | 328 |
| 6.3.2. Tipos particulares de transformaciones bilineales | 331 |
| 6.3.3. Razón doble | 334 |
| 6.3.4. Principio de simetría y principio de orientación | 338 |
| Circunferencia de Apolonio | 341 |
| Ejemplos resueltos y ejercicios | 344 |
| 6.4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES | 349 |
| 6.4.1. Transformaciones de funciones armónicas | 349 |
| 6.4.2. Ecuación de Laplace con condiciones de contorno | 349 |
| 6.4.3. Aplicaciones a la hidrodinámica | 351 |
| 6.4.4. Aplicaciones a la teoría del calor | 352 |
| 6.4.5. Aplicaciones a la electrostática | 352 |
| 6.4.6. La transformación de Schwarz-Christoffel | 353 |
| 6.5. EJERCICIOS | 354 |

| | |
|---|------------|
| ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS | 365 |
| HISTORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES | 369 |
| CAPÍTULO 7. Ecuaciones diferenciales en el mundo físico. Integración elemental | 407 |
| 7.1. NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES | 409 |
| 7.1.1. Primeras definiciones | 409 |
| 7.1.2. Soluciones | 410 |
| 7.1.3. Campos de direcciones. Curvas integrales. Isoclinas | 412 |
| Ejemplos resueltos | 413 |
| Ejercicios | 415 |
| 7.2. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS | 417 |
| 7.2.1. Crecimiento, desintegración y reacciones químicas | 417 |
| 7.2.2. Cuerpos en caída libre y con resistencia | 418 |
| 7.2.3. Movimiento pendular | 420 |
| 7.2.4. La cicloide. La curva braquistócrona | 423 |
| 7.2.5. Circuitos eléctricos simples. Oscilaciones en resortes. | 426 |
| 7.2.6. Dinámica de poblaciones. | 428 |
| 7.2.7. La catenaria. | 429 |
| 7.2.8. Ecuación diferencial de una familia de curvas | 430 |
| Ejemplos resueltos | 431 |
| Ejercicios | 432 |
| 7.3. INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN | 433 |
| 7.3.1 Ecuaciones diferenciales con variables separadas | 434 |
| Ecuaciones diferenciales reducibles a este tipo | 434 |
| Ejemplos resueltos | 434 |
| Ejercicios | 435 |
| 7.3.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas | 436 |
| Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas | 437 |
| Ejemplos resueltos | 438 |
| Ejercicios | 440 |
| 7.3.3. Ecuaciones diferenciales exactas | 440 |
| Ejemplos resueltos | 442 |
| Ejercicios | 444 |
| 7.3.4. Factores integrantes | 445 |
| Factores integrantes que dependen exclusivamente de la variable x o de y . | 446 |
| Ejemplos resueltos | 447 |
| Ejercicios | 448 |
| 7.3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden | 449 |
| Métodos de resolución | 450 |
| Método 1º: Factor integrante | 450 |
| Método 2º: Cambio de variable | 450 |

| | |
|--|------------|
| Método 3º: Variación de las constantes | 451 |
| Ejemplos resueltos | 453 |
| Ejercicios | 455 |
| 7.3.6. Algunas ecuaciones diferenciales especiales | 456 |
| Ecuación de Bernoulli | 456 |
| Ecuación de Ricatti | 457 |
| Ecuación de Lagrange | 459 |
| Ecuación de Clairaut | 459 |
| Ejemplos resueltos | 460 |
| Ejercicios: | 462 |
| 7.3.7. Trayectorias ortogonales | 462 |
| Ejemplos resueltos | 464 |
| Ejercicios | 465 |
| 7.3.8. Envolvente de un haz de curvas | 466 |
| Ejemplos resueltos | 469 |
| Ejercicios | 469 |
| 7.3.9. Soluciones singulares | 470 |
| Ejemplos resueltos | 470 |
| Ejercicios | 472 |
| 7.3.10. Aplicaciones | 473 |
| Circuitos eléctricos | 473 |
| La curva tractriz | 474 |
| Ejemplos resueltos y ejercicios | 475 |
| 7.6. EJERCICIOS | 477 |
| | |
| <i>CAPÍTULO 8. Existencia y unicidad de soluciones</i> | 481 |
| 8.1. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMAS PREVIOS | 482 |
| 8.1.1. Problema de Cauchy | 482 |
| 8.1.2. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo. | 485 |
| 8.1.3. Funciones equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà | 487 |
| 8.1.4. Condición de Lipschitz. | 489 |
| Ejemplos resueltos | 493 |
| Ejercicios | 496 |
| 8.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN. SOLUCIÓN GLOBAL | 497 |
| 8.2.1. Teorema de existencia global. Teorema de Cauchy-Peano | 498 |
| 8.2.2. Teorema de existencia y unicidad global. Teorema de Picard-Lindelöf | 501 |
| 8.2.3. Iterantes de Picard | 504 |
| Ejemplos resueltos | 506 |
| Ejercicios | 511 |
| 8.3. PROBLEMA DE CAUCHY. SOLUCIÓN LOCAL | 513 |
| 8.3.1. Teorema de existencia y unicidad local de soluciones | 513 |
| 8.3.2. Teorema de existencia local de soluciones | 518 |
| 8.3.3. Prolongación de soluciones | 518 |
| Ejemplos resueltos y ejercicios | 520 |
| 8.4. EJERCICIOS | 532 |

| | |
|---|------------|
| CAPÍTULO 9. Ecuaciones diferenciales de orden superior. Transformada de Laplace | 535 |
| 9.1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES | 537 |
| 9.1.1. Ejemplos | 537 |
| 9.1.2. Conceptos previos | 541 |
| 9.1.3. Reducción de ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones | 543 |
| Ejemplos resueltos | 545 |
| Ejercicios | 547 |
| 9.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES | 547 |
| 9.2.1. Teoremas de existencia y unicidad para sistemas | 547 |
| 9.2.2. Teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de orden n | 549 |
| Ejemplos resueltos | 550 |
| Ejercicios | 551 |
| 9.3. MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN EN CASOS PARTICULARES | 551 |
| 9.3.1. Ecuaciones en las que falta la función incógnita | 551 |
| La catenaria | 552 |
| 9.3.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente. | 553 |
| El movimiento armónico simple | 553 |
| Movimiento de un cohete. Velocidad de escape | 555 |
| Ecuación de Van der Pol | 555 |
| 9.3.3. Reducción de orden en sistemas autónomos. | 556 |
| Ecuaciones de rapaz y presa de Lotka-Volterra | 557 |
| La barca en el río | 557 |
| Ejemplos resueltos | 558 |
| Ejercicios. | 559 |
| 9.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE | 559 |
| 9.4.1. Definición, condiciones de existencia y primeras propiedades | 560 |
| Primeras propiedades: | 564 |
| Transformada de Laplace de algunas funciones | 564 |
| Ejemplos resueltos | 565 |
| Ejercicios | 567 |
| 9.4.2. La función de Heaviside y la delta de Dirac | 568 |
| Ejemplos resueltos | 570 |
| Ejercicios | 571 |
| 9.4.3. Teoremas de traslación y transformada de una función periódica | 572 |
| Teoremas de traslación | 572 |
| Transformada de una función periódica | 573 |
| Ejemplos resueltos | 574 |
| Ejercicios | 575 |
| 9.4.4. Transformadas de derivadas e integrales | 576 |
| Transformada de una derivada | 576 |
| Transformada de una integral | 578 |
| Ejemplos resueltos | 581 |
| Ejercicios | 582 |

| | | |
|-------------|---|------------|
| 9.4.5. | La convolución | 583 |
| | Propiedades de la convolución | 583 |
| | Ejemplos resueltos | 585 |
| | Ejercicios | 586 |
| 9.4.6. | La transformada inversa | 586 |
| | Transformadas inversas de funciones racionales | 587 |
| | Ejemplos resueltos | 591 |
| | Ejercicios | 593 |
| 9.4.7. | Aplicaciones | 593 |
| | 1. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales | 593 |
| | 2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales | 595 |
| | 3. Resolución de ecuaciones integrales | 595 |
| | 4. La curva tautócrona | 596 |
| | Ejemplos resueltos | 598 |
| | Ejercicios | 602 |
| 9.5. | EJERCICIOS | 603 |

CAPÍTULO 10. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior **607**

10.1. CONCEPTOS PREVIOS. **609**

| | | |
|---------|---|-----|
| 10.1.1. | El operador diferencial D | 610 |
| 10.1.2. | El operador lineal L | 611 |
| 10.1.3. | Operadores con coeficientes constantes. | 613 |
| 10.1.4. | Teorema de existencia y unicidad | 614 |
| | Ejemplos resueltos | 615 |
| | Ejercicios | 616 |

10.2. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR **617**

| | | |
|---------|---|-----|
| 10.2.1. | Dependencia e independencia lineal. Wronskiano | 617 |
| 10.2.2. | Estructura de las soluciones de la ecuación homogénea | 619 |
| 10.2.3. | Estructura de las soluciones de la ecuación completa | 627 |
| | Ejemplos resueltos | 629 |
| | Ejercicios | 631 |

10.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES **632**

| | | |
|---------|--------------------------------------|-----|
| 10.3.1. | Ecuación característica. Autovalores | 632 |
| 10.3.2. | Discusión de las soluciones | 633 |
| | Ejemplos resueltos | 636 |
| | Ejercicios | 638 |

10.4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES **639**

| | | |
|---------|---|-----|
| 10.4.1. | Reducción de orden de una ecuación diferencial lineal homogénea. Método de D'Alembert | 639 |
| 10.4.2. | Método de variación de las constantes | 640 |
| | Ejemplos resueltos | 643 |
| | Ejercicios | 645 |

| | |
|--|------------|
| 10.4.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes | 646 |
| Método del anulador | 647 |
| Método de los coeficientes indeterminados | 648 |
| Ejemplos resueltos | 650 |
| Ejercicios | 654 |
| 10.4.4. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes | 655 |
| Ecuación de Euler-Cauchy | 655 |
| Cambios de variable | 658 |
| Ejemplos resueltos | 658 |
| Ejercicios | 661 |
| 10.5. DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS | 661 |
| 10.5.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios | 662 |
| 10.5.2. Soluciones en torno a puntos singulares | 666 |
| Ejemplos resueltos | 672 |
| Ejercicios | 676 |
| 10.6. APLICACIONES | 677 |
| 10.6.1. Movimiento oscilatorio armónico | 677 |
| Vibraciones armónicas simples no amortiguadas | 677 |
| Vibraciones amortiguadas | 678 |
| Vibraciones forzadas | 680 |
| Vibraciones libres forzadas. Resonancia. | 681 |
| 10.6.2. Circuitos eléctricos | 682 |
| 10.6.3. Las leyes de Kepler | 684 |
| Ejemplos resueltos | 689 |
| Ejercicios | 690 |
| 10.7. EJERCICIOS | 691 |
| | |
| <i>CAPÍTULO 11. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden</i> | 695 |
| | |
| 11.1. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES. | 696 |
| 11.1.1. Conceptos previos | 697 |
| 11.1.2. Teoremas de existencia y unicidad. | 701 |
| Ejemplos resueltos | 702 |
| Ejercicios | 704 |
| 11.2. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN | 705 |
| 11.2.1. Dependencia e independencia lineal. | 705 |
| 11.2.2. Estructura de las soluciones del sistema homogéneo | 707 |
| 11.2.3. Matriz fundamental | 714 |
| Propiedades de la matriz fundamental | 715 |
| 11.2.4. Estructura de las soluciones del sistema no homogéneo | 716 |
| Ejemplos resueltos | 719 |
| Ejercicios | 721 |

| | |
|---|------------|
| 11.3. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES | 722 |
| 11.3.1. Resolución por eliminación mediante el operador diferencial D | 723 |
| Ejemplos resueltos | 725 |
| 11.3.2. Resolución buscando soluciones exponenciales. Método de Euler | 727 |
| Ejemplos resueltos | 730 |
| 11.3.3. Ecuación característica. Autovalores y autovectores | 733 |
| Ejemplos resueltos | 745 |
| Ejercicios | 747 |
| 11.4. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ | 748 |
| 11.4.1. Propiedades de la exponencial de una matriz | 750 |
| 11.4.2. Cálculo de la función matricial e^{Ax} | 751 |
| 11.4.3. Estudio del caso general | 753 |
| Ejemplos resueltos | 754 |
| Ejercicios | 757 |
| 11.5. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS | 758 |
| 11.5.1. Método de variación de las constantes | 758 |
| 11.5.2. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes | 759 |
| Reducción a una ecuación diferencial mediante el operador diferencial D | 760 |
| Método de coeficientes indeterminados | 761 |
| Ejemplos resueltos | 762 |
| Ejercicios | 768 |
| 11.6. EJERCICIOS | 769 |
| | |
| CAPÍTULO 12 | 775 |
| | |
| <i>Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales</i> | 705 |
| 12.1. CONCEPTOS PREVIOS: GENERALIDADES | 778 |
| 12.1.1. Soluciones y trayectorias en un sistema de ecuaciones diferenciales | 778 |
| 12.1.2. Diagrama de fases | 781 |
| 12.1.3. Puntos críticos | 784 |
| 12.1.4. Órbitas cíclicas | 787 |
| 12.1.5. Estabilidad de Liapunov y estabilidad orbital | 790 |
| 12.1.6. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 1$. | 794 |
| 12.1.7. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 2$. | 795 |
| Ejemplos resueltos | 800 |
| Ejercicios | 802 |

| | |
|---|------------|
| 12.2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO | 805 |
| 12.2.1. Comportamiento dinámico de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden superior | 809 |
| Ejemplos resueltos | 810 |
| Ejercicios | 812 |
| 12.3. SISTEMAS CASI-LINEALES | 814 |
| Ejemplos resueltos | 818 |
| Ejercicios | 821 |
| 12.4. SISTEMAS BIDIMENSIONALES AUTÓNOMOS | 823 |
| 12.4.1. Teorema de Poincaré - Bendixson | 823 |
| 12.4.2. Dinámica del péndulo | 825 |
| 12.4.3. Dinámica de poblaciones: sistemas de Lotka-Volterra | 831 |
| Ejemplos resueltos | 834 |
| Ejercicios | 837 |
| 12.5. ESTABILIDAD EN SISTEMAS HAMILTONIANOS O CONSERVATIVOS, EN SISTEMAS DISIPATIVOS Y EN SISTEMAS GRADIENTE. | 838 |
| 12.5.1. Sistemas conservativos y funciones de Hamilton | 838 |
| 12.5.2. Sistemas disipativos y funciones de Lyapunov | 842 |
| 12.5.3. Sistemas gradiente | 843 |
| Ejemplos resueltos | 845 |
| Ejercicios | 848 |
| 12.6. DINÁMICAS CAÓTICAS | 848 |
| 12.6.1. El sistema de Lorenz | 848 |
| Ejercicios | 855 |
| 12.7. EJERCICIOS | 856 |

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES **869**

HISTORIA DE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. **875**

Solución numérica antes de los ordenadores **876**

Solución numérica después de los ordenadores **881**

CAPÍTULO 13. Métodos numéricos de un paso **883**

13.1. EL MÉTODO DE EULER **886**

Ejemplos resueltos 890

Ejercicios 895

13.2. ESTUDIO GENERAL DE LOS MÉTODOS DE UN PASO **896**

13.2.1. Control del error: error de redondeo, error de truncamiento, error local y error global 897

Cálculo del orden del error de truncamiento para el método de Euler: 900

13.2.2. Convergencia, consistencia y estabilidad de los métodos de un paso 903

Ejemplos resueltos 905

Ejercicios 910

13.3. MÉTODOS DE TAYLOR **912**

Ejemplos resueltos 914

Ejercicios 918

13.4. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA **920**

13.4.1. Métodos de Runge-Kutta de dos etapas o métodos de Euler modificados 924

13.4.2. Métodos de Runge-Kutta de tres etapas 928

13.4.3. Métodos de Runge-Kutta cuatro 930

Ejemplos resueltos 935

Ejercicios 937

13.5. ESTIMACIÓN DEL ERROR EN CADA PASO **938**

La extrapolación de Richardson 939

Pares encajados de Runge-Kutta 942

Ejemplos resueltos 948

Ejercicios 949

13.6. ESTABILIDAD ABSOLUTA EN LOS MÉTODOS DE UN PASO **950**

Ejemplos resueltos 955

Ejercicios 960

13.7. APÉNDICE: ECUACIONES EN DIFERENCIAS **961**

Ejemplos resueltos 966

Ejercicios 969

13.7. EJERCICIOS **971**

| | |
|---|-------------|
| CAPÍTULO 14. Métodos numéricos lineales multipaso | 983 |
| 14.1. DEFINICIÓN | 984 |
| Ejemplos resueltos | 986 |
| Ejercicios | 987 |
| 14.2. MÉTODOS DE ADAMS | 987 |
| 14.2.1. Métodos de Adams-Bashforth | 991 |
| 14.2.2. Métodos de Adams-Moulton | 996 |
| Ejemplos resueltos | 1004 |
| Ejercicios | 1011 |
| 14.3. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD | 1015 |
| 14.3.1. Definición de convergencia | 1015 |
| Ejemplos resueltos | 1017 |
| 14.3.2. Orden de consistencia y error de truncamiento | 1018 |
| 14.3.3. Constante de error | 1020 |
| Ejemplos resueltos | 1025 |
| 14.3.4. Polinomios de estabilidad | 1027 |
| 14.3.5. Estabilidad. Condiciones de raíz | 1029 |
| 14.3.6. Condición de raíz fuerte | 1033 |
| Ejemplos resueltos | 1035 |
| 14.3.7. Relaciones entre convergencia, consistencia y estabilidad | 1039 |
| 14.3.8. Orden máximo de convergencia: Primera barrera de Dahlquist | 1041 |
| Ejemplos resueltos | 1042 |
| 14.3.9. Métodos multipaso vectoriales | 1046 |
| Ejemplos resueltos | 1047 |
| Ejercicios | 1048 |
| 14.4. ESTABILIDAD ABSOLUTA Y ESTABILIDAD RELATIVA | 1050 |
| 14.4.1. Estabilidad absoluta | 1052 |
| 14.4.2. Estabilidad relativa | 1059 |
| 14.4.3. Estabilidad absoluta de los métodos lineales multipaso en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias | 1061 |
| Ejemplos resueltos | 1063 |
| Ejercicios | 1070 |
| 14.5. OTROS MÉTODOS DE K PASOS | 1071 |
| 14.5.1. Nyström y Milne-Simpson | 1071 |
| 14.5.2. Método predictor-corrector | 1072 |
| 14.5.3. Métodos multipaso de tamaño de paso variable | 1078 |
| 14.5.4. Problemas "stiff" | 1080 |
| Ejemplos resueltos | 1081 |
| Ejercicios | 1088 |
| 14.6. EJERCICIOS | 1089 |
| BIBLIOGRAFÍA | 1097 |
| BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA RECOMENDADA | 1097 |
| Bibliografía de variable compleja | 1097 |
| Bibliografía de ecuaciones diferenciales | 1098 |
| Bibliografía de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias | 1099 |
| REFERENCIAS | 1100 |

Prólogo

En este libro los autores y autoras hemos pretendido desarrollar los contenidos de un curso clásico de Análisis Matemático: Variable Compleja, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Métodos Numéricos para las ecuaciones diferenciales. Está dirigido de manera especial a estudiantes de ingeniería y por tanto los contenidos se han seleccionado teniendo muy presentes las posibles aplicaciones. Nuestro deseo es que esta obra sea de utilidad tanto para estudiantes de escuelas técnicas como para el profesorado que imparte las correspondientes asignaturas.

Se ha procurado que el texto tenga una estructura clara y sencilla. Por esta razón se han eliminado las demostraciones de algunos resultados que, quizás, por su excesiva abstracción o sus dificultades técnicas, pudieran complicar la comprensión, en lugar de ayudar a mejorarla.

Se ha intentado mantener un orden coherente en la presentación y desarrollo de los distintos conceptos que se van introduciendo, incorporando al final de cada apartado algunos ejemplos totalmente resueltos que pueden contribuir en gran medida a su comprensión y asimilación. Al final de cada apartado y de cada capítulo se adjuntan ejercicios y problemas, y en las ocasiones que se ha considerado adecuado, se han añadido las soluciones.

El equipo formado por los autores y las autoras del libro lleva numerosos años explicando los contenidos del texto a alumnado de distintas ramas de ingeniería: caminos, informática, telecomunicaciones... A partir de la propia

experiencia se observó que existen magníficos textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que sin embargo proporcionan un tratamiento demasiado elemental, en opinión de los autores, al estudio de los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Igualmente, existen estupendos textos de métodos numéricos, pero que no abordan el estudio general de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y de forma similar sucede con la teoría de las funciones complejas, donde se encuentran espléndidos textos de variable compleja, pero que no tratan ni las ecuaciones diferenciales ordinarias, ni los métodos para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque existía bastante bibliografía de consulta, no conocíamos ninguna obra en el mercado que reuniera todos los aspectos que necesitábamos que tuviese el libro de texto. Desde un punto de vista docente es muy importante que una materia de este tipo se encuentre recogida en un único texto, de forma que el profesorado pueda utilizarlo como guía y recomendarlo a los alumnos. En este libro se ha pretendido recopilar los contenidos básicos de las materias anteriores de manera que su estructura reúna con el nivel de rigor requerido, ni demasiado riguroso, más adecuado para el alumnado de matemáticas, ni carente de rigor, de manera que los estudiantes de ingeniería, a los que va especialmente dirigido, encuentren lo necesario para servirles de guía y les permita comprender y asimilar la materia desarrollada.

El texto se puede considerar formado por tres secciones diferenciadas, que abordan, en este orden, el estudio de las funciones de variable compleja, el estudio general de la teoría de ecuaciones diferenciales y el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales. En cada una de ellos se ha añadido

una introducción histórica, con el fin de introducir en las distintas materias que se van a estudiar a través de un recorrido por el tiempo, en el que se muestra su origen, evolución y desarrollo posterior. Pensamos que conocer la evolución histórica de las matemáticas, la forma de trabajar del matemático profesional y la contribución de éste, así como las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido los conceptos y las ideas, mejora el aprendizaje.

La primera sección aborda el estudio de la teoría de funciones de una variable compleja. Se ha dividido en seis capítulos, que van precedidos por una introducción histórica. En ella se ha pretendido presentar de forma resumida la aparición de los números complejos, su utilización en los comienzos como solución de distintos problemas planteados, pero pensando en los números complejos como entes extraños e imaginarios, y su sucesiva formalización hasta llegar a su aceptación por parte de la comunidad científica como disciplina dotada de una base sólida y coherente, eliminando definitivamente el carácter misterioso que tenían en un principio dichos números.

El primer capítulo es esencialmente una revisión de los números complejos, concepto y propiedades, ya conocidos de cursos anteriores, tanto por las asignaturas de primer curso de ingeniería como en el bachillerato: se introducen los números complejos, sus operaciones, propiedades y estructura. Quizás se añada a lo que usualmente conocen, la notación exponencial. Se define el plano complejo, se representan conjuntos en él, se concretan algunas definiciones topológicas y se define la esfera de Riemann, que permite introducir el punto de infinito en el plano complejo, insistiendo en la diferencia

en el concepto de infinito en la recta real, que es un conjunto totalmente ordenado con $-\infty$ y $+\infty$, y el concepto de infinito en el plano complejo.

En el segundo capítulo se definen las funciones complejas. Se extienden al plano complejo las funciones reales ya conocidas, y se define la derivada de una función compleja, de importancia fundamental dentro de la teoría, poniendo especial atención en presentar las diferencias existentes entre la derivada de las funciones de \mathfrak{R} en \mathfrak{R} , las funciones de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ en \mathfrak{R} y la derivada compleja. Se introduce el concepto de holomorfía. Se podría haber definido función holomorfa en un punto como función derivable en dicho punto, pero entonces se perderían muchas de sus buenas propiedades, por lo que la experiencia en su docencia, nos ha llevado a definir que una función es holomorfa en un punto z_0 si es una función derivable en todos los puntos de un entorno de z_0 . Este hecho supone que dichas funciones adquieran propiedades muy diferentes a las de las funciones derivables en el cuerpo de los números reales o las definidas en el plano real.

Se apunta ya el interés en señalar de manera especial a las funciones holomorfas, pues como se demostrará en capítulos posteriores las funciones holomorfas van a tener muy buenas propiedades. Por el hecho de ser una función holomorfa en un abierto, va a ser analítica, es decir desarrollable en serie de potencias en los puntos de ese abierto; va a ser infinitamente derivable en su dominio de holomorfía; y va a ser integrable, y las integrales a lo largo de curvas cerradas en recintos donde la función sea holomorfa, valen cero, y si la curva no es cerrada, la integral no depende del camino. Se puede decir que derivación, series, integración... se entretrejen para construir estas funciones, cuyas propiedades se desarrollan en los siguientes capítulos. El capítulo

termina con la introducción de las funciones de dos variables reales armónicas, estudiando su relación con las funciones holomorfas.

El tercer capítulo está dedicado al desarrollo en serie de las funciones complejas. Además de tratar con el desarrollo en serie de potencias, se estudian las series de Laurent. Se podría haber dejado el tratamiento de las series de Laurent para cuando se conocen los valores de sus coeficientes mediante fórmulas integrales, pero la experiencia en impartir esta enseñanza nos ha llevado a considerar que presentarlas en este momento simplifica su comprensión. Se introducen las funciones analíticas en un punto z_0 como funciones desarrollables en series de potencias en un entorno de z_0 , y se estudian sus propiedades, como por ejemplo, el hecho de que una función analítica es indefinidamente derivable. Finalmente se introducen las series dobles o series de Laurent, que permiten desarrollar funciones que presenten algún tipo de singularidad en series de potencias positivas y negativas.

En los capítulos cuarto y quinto se estudia la integral de una función compleja a lo largo de una curva situada en el plano complejo y se prueban sus propiedades. Se presenta el teorema de Cauchy y sus consecuencias, remarcando de manera especial la fórmula integral de Cauchy, que permite expresar el valor de una función en el interior de un recinto cerrado a través de los valores que toma la función en la frontera del recinto, y que autoriza a asegurar que toda función holomorfa es desarrollable en serie de potencias, es decir, es analítica, y por tanto infinitamente derivable. Se tiene demostrado entonces que los conceptos de holomorfía y analiticidad son equivalentes.

Se considera a continuación la situación en la que la función que se quiere integrar tenga singularidades aisladas. Se estudian los distintos tipos de

singularidades que puede presentar una función a través de los correspondientes desarrollos de Laurent. Se introduce el concepto de residuo de una función en un punto, y se muestra la forma de obtener el valor de la integral de la función a través del teorema de los residuos, que se aplica también para la obtención de integrales de funciones reales y de integrales impropias.

En el sexto capítulo se consideran las funciones complejas como transformaciones geométricas, pues una función compleja transforma un subconjunto del plano complejo en otro subconjunto del plano complejo que es precisamente la imagen a través de la función del conjunto inicial. Se dedica una especial atención al tratamiento de las transformaciones de Möbius por sus especiales propiedades.

Los capítulos siete al doce constituyen lo que los autores consideran como la segunda sección. En ellos se aborda el estudio de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y van precedidos por una introducción histórica, comenzando por el siglo XVI, donde se analizan los distintos logros que se han ido obteniendo de forma sucesiva, así como los problemas que los generaron. De esta forma se puede conocer el origen y la evolución de los distintos tipos de ecuaciones diferenciales que se van a estudiar, así como de los métodos que se van a aplicar o de los resultados que se van a poder aplicar al estudiar los distintos temas que se presentan a continuación.

El objetivo fundamental del capítulo siete es introducir las ecuaciones diferenciales en el mundo físico acercando éstas a las aplicaciones. Se tratan diferentes problemas concretos que se pueden explicar a partir de comportamientos regidos por ecuaciones diferenciales. De esta forma se da

una primera aproximación, que a lo largo de los siguientes capítulos se irá desarrollando, de cómo las ecuaciones diferenciales pueden proporcionar modelos para estudiar casos tan diferentes como la dinámica de poblaciones o como el crecimiento y desintegración de las reacciones químicas. También, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, se tratan distintas maneras de resolver algunas ecuaciones diferenciales conocidas, tal y como se trabajaban en el siglo XVII.

Una de las cuestiones fundamentales en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es el estudio de las condiciones por las que se puede asegurar la existencia de solución, o que ésta sea única, sin tener que resolverla previamente. Una ecuación diferencial en general no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única. En el capítulo ocho se introducen los problemas de valor inicial, o problemas de Cauchy, y se tratan las condiciones que garantizan la existencia y la unicidad de solución, que se conocen como teoremas de existencia y unicidad.

Al escribir este capítulo nos hemos encontrado con la dificultades siguientes. Por un lado queríamos que supieran que, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, en un principio no se imaginaba que una ecuación procedente de un problema físico pudiera no tener solución, o que ésta no fuera única, y que fue en el curso de Análisis que impartió Cauchy, cuando se planteó este problema, lo que supone una nueva etapa en las matemáticas. Ser conscientes de que toda ecuación diferencial no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única, supone un gran paso en la historia. Tratarlas, por ello, con el requerido cuidado, es importante. Pero por otro, éstos teoremas son complicados y sus

demostraciones sobrepasan en muchas ocasiones el nivel de este libro. Se ha valorado el grado de dificultad que presentan y se han incluido aquéllas que por el propio razonamiento que siguen puedan aportar una claridad adicional. D. Alberto Dou fue profesor tanto de la escuela de ingenieros de caminos como de la facultad de matemáticas, impartiendo en ambos lugares, la asignatura de ecuaciones diferenciales, y le hemos oído comentar que estos teoremas y su desarrollo minucioso parecía adecuado en un determinado momento para los matemáticos, y que sin embargo, resultan ser tremendamente prácticos para los ingenieros que iban a resolver las ecuaciones diferenciales que les aparecieran usando el ordenador y los métodos numéricos, obteniendo una solución, que podía no tener ningún sentido si antes no habían garantizado la existencia y unicidad de las soluciones.

El interés de los teoremas de existencia y unicidad estriba en que en muchas ocasiones, al resolver un problema cuyo modelo es una ecuación diferencial, no es preciso encontrar la solución exacta de la ecuación y basta encontrar valores aproximados de ella, lo que se puede conseguir aplicando alguna fórmula numérica como las que se presentan en los capítulos trece y catorce. Pero para que los valores obtenidos a partir de dichas fórmulas sean aceptables es preciso conocer a priori que el problema en cuestión tiene una única solución.

En el capítulo nueve se trabaja la relación entre los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden superior, particularizando los teoremas de existencia y unicidad a estos casos. Se introduce la transformada de Laplace como herramienta para transformar una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales

en una ecuación algebraica o un sistema de ecuaciones algebraicas, y se estudian sus propiedades. Se estudian, de nuevo, un buen número de aplicaciones particulares.

El capítulo diez se ocupa de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, y el capítulo once de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El orden para impartir estos capítulos es discutible. Ya se ha visto, en el capítulo anterior, la relación existente entre un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y una ecuación diferencial lineal de orden n , y la posibilidad de convertir las unas en los otros. El estudio de la estructura algebraica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, estructura de espacio vectorial para las que son homogéneas, y de espacio afín, para las no homogéneas, proporciona una idea de cuáles deben ser los procedimientos para buscar las soluciones. Quizás un orden más matemático sería estudiar antes los sistemas, pero las ecuaciones de orden superior resultan más sencillas, por lo que se ha decidido trabajarlas antes, y poder así añadir en el capítulo once cuestiones como la exponencial de una matriz, específicas de los sistemas lineales.

El capítulo doce es una iniciación a los sistemas dinámicos. Los modelos matemáticos simplifican la realidad para poder estudiarla, y una de esas simplificaciones es la linealización, lo que implica considerar que el proceso es lineal. Existe para ello una razón importante. En las ecuaciones diferenciales no lineales aparecen grandes complicaciones. Con el uso de los ordenadores se ha visto que ecuaciones diferenciales no lineales, que verifican los teoremas de existencia y unicidad, pueden producir caos, es decir, que si existe un pequeño error en la obtención de las condiciones iniciales, pueda dar lugar al cabo de un

cierto tiempo, a que la nueva solución que se obtenga se aleje demasiado de la anterior, con lo que el fenómeno resulte impredecible. Después de explicar durante muchos años en cursos de doctorado y tercer ciclo estos hechos se ha intentado dar unas orientaciones sencillas en este capítulo donde quizás queden abiertas las puertas de manera que el estudiante interesado pueda sentirse invitado a seguir trabajando, pues ya sabe que no conoce todo sobre ecuaciones diferenciales sino que existen muchos problemas abiertos de gran interés y belleza que merecen el esfuerzo de ser estudiados.

La tercera sección la constituyen los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Comienza, como las secciones anteriores, con una breve introducción histórica. Es interesante saber que estos métodos ya existían antes del uso de los ordenadores, y cómo se aplicaban a resolver sobre todo problemas de balística, por lo que muchas veces sus resultados se mantenían en secreto. Con la aparición de los ordenadores se han podido analizar las soluciones obtenidas, comprobar qué métodos tenían mejores propiedades, y confeccionar aquellos que tienen una relación calidad-coste óptima.

Los distintos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales se agrupan en dos grandes grupos: los métodos de un paso y los métodos lineales multipaso. Su estudio se realiza en los capítulos trece y catorce.

En el capítulo trece se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de un solo paso como el método de Euler, los métodos de Taylor, los métodos de Runge – Kutta o los pares encajados de Runge – Kutta. Una vez conocidos estos métodos, sus ventajas y sus

inconvenientes, se hace un estudio general de los métodos de un paso para poder analizar los distintos tipos de errores, el error global, el error de truncamiento y el error local, así como los conceptos de convergencia y consistencia. Se estudia a continuación la estabilidad absoluta de las distintas fórmulas, y también se comenta brevemente la extrapolación de Richardson.

En el capítulo catorce se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales lineales multipaso, especialmente los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton, siendo los primeros métodos explícitos y los segundos, implícitos. Termina el capítulo con un estudio detenido de los conceptos de convergencia, consistencia, orden de consistencia y estabilidad, así como algunos tipos distintos de estabilidad, como la estabilidad absoluta y la relativa de las fórmulas lineales multipaso.

Termina el texto con una bibliografía separada en las tres secciones que lo forman.

Esto es todo, los autores desean que el libro resulte de su agrado y sea de utilidad.

Los autores

VARIABLE COMPLEJA

La teoría de las funciones de variable compleja se puede considerar, como se observa al analizar su azarosa historia, uno de los milagros de la Matemática. La derivabilidad de una función real en un abierto sólo implica, en general, que ésta tenga derivada en los puntos del abierto. Sin embargo en el campo complejo basta que una función sea derivable en un conjunto abierto para que sea infinitamente derivable en dicho conjunto. La condición de derivabilidad es más fuerte en el campo complejo puesto que deben cumplirse las condiciones de Cauchy-Riemann, pero entonces se verifican otras muchas relaciones: las funciones como transformaciones son conformes, sus funciones componentes son armónicas ya que verifican la relación de Laplace, son desarrollables en serie de potencias, tienen función primitiva, la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, etc.

Comienza el apartado de “Variable Compleja” con una introducción histórica que permite comprender las dificultades que los matemáticos han ido encontrando y resolviendo hasta que la variable compleja se ha convertido en lo que hoy es. Esta introducción requiere distintas lecturas, quizás, una al principio, pero al ir avanzando en el estudio de la variable compleja se aconseja volver de nuevo a leerlo, pues entonces se estará en condiciones de comprender el interés y la importancia de algunos resultados.

HISTORIA DE LA VARIABLE COMPLEJA

El desarrollo de las Matemáticas está íntimamente relacionado con la historia del número. Como el producto de un número real por sí mismo es siempre positivo es claro que se necesita ampliar el campo numérico para dar solución a determinadas ecuaciones. Stillwell¹ dice que los números complejos son uno de los milagros de la Matemática: *“La resolución de la paradoja de $\sqrt{-1}$ fue muy poderosa, inesperada y bella por lo que únicamente la palabra “milagro” parece adecuada para describirla”*. Al principio de su historia los números complejos fueron considerados como *“números imposibles”* tolerados únicamente en un limitado dominio algebraico porque parecían útiles para resolver ecuaciones cúbicas. Cobraron significado cuando se interpretaron geoméricamente y no obstante la variable compleja ha servido para la unificación de las funciones algebraicas con las transformaciones conformes, teoría del potencial y otros *“imposibles”* campos como las geometrías no euclídeas.

Los números complejos

Los números complejos se empiezan a utilizar para obtener soluciones de ecuaciones algebraicas y culminan, en este sentido, cuando se demuestra el teorema fundamental del álgebra.

B. Riemann dijo, en su *Discurso inaugural* de 1851 que *“la introducción de magnitudes complejas en las Matemáticas tiene su origen y finalidad*

¹ Stillwell, J.: *Mathematics and its history*. Springer. 1989. Página 188.

inmediata en la teoría de leyes de dependencia simple de magnitudes variables, leyes expresadas por operaciones entre las magnitudes. En efecto si se les aplican estas leyes de dependencia en un campo más extenso, atribuyendo valores complejos a las magnitudes variables a las que se refieren estas leyes, se presenta entonces una armonía y una regularidad que sin esto quedan escondidas”.

Usualmente se dice que los números complejos nacen de la necesidad de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, con la dificultad de que carece de sentido geométrico el que un cuadrado tenga un área negativa. Sin embargo esto no es enteramente cierto. Muchas ecuaciones cuadráticas, como círculos o parábolas, están ya implícitas en la geometría de los griegos y entonces se analizó si tenían o no solución real, por ejemplo, la intersección de una recta con dichas figuras. Los babilonios, alrededor del año 2000 antes de Cristo, conocían esencialmente el método para resolver ecuaciones cuadráticas, y Herón de Alejandría (100 a. C.) utilizó $\sqrt{-63}$, aunque algebraicamente, sin preguntarse por su significado, pues por aquellos tiempos no se especulaba acerca de la naturaleza de las raíces imaginarias.

Sin embargo cuando en 1545 Girolamo Cardano escribió²

$$40 = (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15})$$

estos números fueron considerados sin sentido y se les aplicó el término de “*imaginarios*”.

Incluso cuando aparecen las ecuaciones cuadráticas, con Diofanto o los árabes, no hay razón para admitir que no tengan solución. Se comienza a

² Bell, E. T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. (2ª ed.). Edic. Fondo de Cultura Económica.

4 Variable Compleja

necesitar cuando Ferro, Tartaglia y Cardano intentan resolver la ecuación cúbica $x^3 = p \cdot x + q$ en cuya fórmula de solución aparecen números complejos (cuando $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) y sin embargo tiene siempre una solución real. Bombelli en 1572 trabajó formalmente con el álgebra de los números complejos e implícitamente introdujo las funciones complejas, aunque a pesar de ello los números complejos todavía eran considerados como imposibles. A. Girard enunció en "*L'invention nouvelle en algèbre*" en 1629 el **principio de permanencia** según el cual se puede aplicar a los números complejos todas las identidades obtenidas en el campo real, y a lo largo del siglo XVIII se sigue utilizando frecuentemente dicho principio usando la frase: "*recurso de las razones extraídas de la generalidad del álgebra*". Estos argumentos son criticados por Cauchy en su "*Cours d'Analyse*" (1821) donde dice: "*las razones de este tipo ... no pueden ser consideradas, a mi parecer, más que como inducciones propias para presentir alguna vez la verdad, pero están poco de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas*".

Al final del siglo XVIII ya se tenía una gran maestría en la manipulación de los números complejos y sin embargo no se tenía la noción de un número complejo como un par de números reales formado por su parte real y su parte imaginaria. C. Wessel, en 1799, en el artículo "*Sur la représentation analytique d'une direction*" asoció todo número complejo con un vector del plano con origen en O , y reinterpretó con estos vectores las operaciones elementales de los números complejos. R. Argand en 1806 en "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*" interpretó geométricamente los números complejos. El número i , por ejemplo, lo representó como una rotación de un ángulo recto alrededor del origen. A partir de dicha interpretación ya

empezaron a usarse sin dificultades dichos números.

Funciones de variable compleja

La teoría moderna de las funciones de variable compleja ha tenido cuatro fundadores: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), Bernhard Riemann (1826 – 1866) y Karl Weierstrass (1815 – 1897).



Figura 1: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

El primero no ejerció influencia en su tiempo por no haber publicado nada, y haberse encontrado sus manuscritos mucho tiempo después de su muerte. Cada uno de los otros tres matemáticos siguió un camino diferente. Cauchy impuso algunas condiciones restrictivas para que dichas funciones tengan derivadas continuas. Su teoría reposa sobre un teorema muy importante relativo a las integrales complejas y sobre la noción de residuo. Esta teoría contiene en germen los planteamientos geométricos de Riemann y los

aritméticos de Weierstrass. La imagen geométrica jugó un papel predominante en Riemann. Una función compleja era para Riemann una ley por medio de la cual las superficies se pueden transformar y su objetivo fue el de representar estas transformaciones y analizarlas. Weierstrass se preocupó por el desarrollo en series de potencias de la función dentro de su círculo de convergencia, que se puede prolongar mediante la prolongación analítica. Todo resultaba para él como una consecuencia de la teoría de series y esta teoría estaba establecida sobre bases sólidas.

Los primeros desarrollos en serie de las funciones elementales aparecieron en el siglo XVII. Taylor utilizó las fórmulas de interpolación de Gregory-Newton para tener en 1712 la fórmula que lleva su nombre y obtener el desarrollo en serie de potencias de una función, cuyas propiedades se probaron por procedimientos algebraicos; se pueden utilizar las técnicas de derivación e integración de manera formal en el anillo de las series consideradas, todavía, sin preocupaciones de convergencia. Los analistas se habituaron así, a lo largo del siglo XVIII a manipular indiferentemente argumentos reales y complejos no sólo en expresiones racionales sino incluso en la función exponencial o en las funciones trigonométricas. De Moivre, a principios del siglo, gracias a una utilización sistemática de las fórmulas de la trigonometría, resaltó la relación entre las raíces de un número complejo y la división de la circunferencia en partes iguales. En la primera mitad del siglo se utilizaron fórmulas notables entre las funciones elementales.

La función logaritmo

La extensión del campo complejo a la función logaritmo hace aparecer un

problema que no tenía lugar con las funciones reales: las funciones multiformes. En virtud del principio de permanencia no existió duda, a principios del siglo XVIII, sobre la existencia de una función, y por tanto unívoca, $\log z$, definida por: $e^{\log z} = z$, y que verifica la ecuación diferencial: $d(\log z) = \frac{dz}{z}$. En este contexto la determinación de los logaritmos de -1 y de i condujo a contradicciones indisolubles dando lugar a la célebre controversia entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1 646 – 1 716) y Jean Bernoulli de 1 700 a 1 716.

Bernoulli en 1 702 observó la descomposición de la integral de $\frac{dz}{1+z^2}$ en dos fracciones y llegó a la conclusión de que los logaritmos imaginarios expresan sectores circulares reales, lo que dicho en lenguaje actual equivale a decir que $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$. Sin embargo persistentemente sostenía que $\log(-x) = \log(x)$, y en particular que $\log(-1) = 0$, pues $d(\log(-x)) = 1/x = d(\log x)$.

Leibniz en cambio afirmaba que los logaritmos de los números negativos, y “por una razón más fuerte los de los números imaginarios”, eran imaginarios. Utilizaba en su razonamiento el principio de permanencia, y por él, la inyectividad del logaritmo complejo. Este desacuerdo entre dos grandes de las Matemáticas hizo que existiera una fuerte controversia y produjo en aquella época un profundo malestar.

Leonhard Euler³ (1 707 – 1 783) expresó con claridad la necesidad de abandonar el principio de permanencia, rompiendo con los principios de Leibniz, y con una claridad genial afirmó que se debía abandonar la unicidad de la función logaritmo afirmando que todo número real positivo tiene una infinidad

³ Euler, L: *Letter to John Bernoulli*. 10-XII-1728. Bibli. Math. ser. 3, 4, 352-354.

de logaritmos complejos de los cuales sólo uno es real. Los logaritmos complejos son funciones infinitamente valoradas.

La memoria de Euler no convenció a sus contemporáneos, en especial a D'Alembert (1717 – 1783) quien volvió a utilizar las ideas de Bernoulli, apoyadas con las suyas propias, para mostrar que los logaritmos de las cantidades negativas se podían suponer indiferentemente reales o imaginarios dependiendo del sistema de logaritmos que se eligiese.

Diversas fórmulas obtenidas por Leonhard Euler mostraron que a menudo es posible reunir dos igualdades reales en una sola igualdad compleja, efectuar en ella los cálculos y separando parte real e imaginaria obtener nuevas expresiones de interés, que son difíciles de conseguir directamente. Al mismo tiempo Còtes (1714) descubrió la relación entre los logaritmos complejos y las funciones circulares: $\log(\cos x + i \cdot \sin x) = i \cdot x$, reconociendo la importancia de este resultado en el trabajo titulado "*Harmonia Mensurarum*". Se usaron "medidas" de las funciones logaritmo y arco tangente, relacionadas con las integrales $\int \frac{dx}{1+x}$ y $\int \frac{dx}{1+x^2}$, aunque no se comprendió porqué eran necesarias esas extrañas "medidas". Después de Bernoulli ésta fue la primera vez en que se empezó a sospechar que el problema de determinar el dominio de la función logaritmo compleja y de las inversas de las funciones circulares era esencialmente el mismo.

Integración

En una serie de memorias de publicación póstuma, escritas a partir de 1776, Euler utilizó los números complejos para obtener, a partir de integrales

reales ya conocidas, otras integrales. Y en su obra *“De integrationibus maxima memorabilis ex calculo imaginariorum oriundis”* llegó a escribir las ecuaciones que tradicionalmente se conocen con el nombre de Cauchy-Riemann. D’Alembert en su ensayo *“Essai sur une nouvelle théorie de la résistance des fluides”* hizo la primera descripción sobre las funciones armónicas conjugadas que Riemann tomará como punto de partida de su teoría sobre las funciones de variable compleja en su discurso inaugural de 1851. Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) lo utilizará en la mecánica de fluidos.

Euler y Laplace, hacia la misma época, pero de forma independiente, utilizaron fórmulas de cálculo bastante parecidas para el tratamiento de integrales definidas, aunque ninguno de ellos las consideraba suficientemente rigurosas. En *“Memoire sur les intégrales définies”* Poisson señaló que la integral $\int_a^b f(x) \cdot dx$ puede no ser la misma según que la variable pase de a a b por una sucesión de valores reales o por valores imaginarios, llegando a expresar que la integral depende del camino recorrido, base del concepto de integral curvilínea.

La idea de Gauss sobre la futura teoría de variable compleja era ya notablemente clara en 1811. Por entonces Gauss ya tenía la representación geométrica de los números complejos y la noción de integral curvilínea, el teorema integral de Cauchy e incluso las primeras nociones sobre los periodos de las integrales. Pero no expuso sus ideas públicamente hasta 1831.

Cauchy y la variable compleja

Cauchy no utilizó la representación geométrica hasta 1825 y en su

“*Cours d’Analyse*” continuó representando a los números complejos como “expresiones simbólicas” que pueden ser sometidas a las diversas operaciones del álgebra.



Figura 2: Augustin-Louis Cauchy (1 789 - 1 857).

Cauchy está muy relacionado con los más importantes resultados de la época. Estudió con precisión la convergencia de una serie de potencias resaltando la existencia del radio de convergencia, y también el problema recíproco, la posibilidad de desarrollar localmente en serie de potencias una función holomorfa, siendo el radio de convergencia la distancia del centro a la singularidad más próxima. Escribió “*Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*”, auténtico punto de partida de las integrales curvilíneas, donde aparece el concepto de variación continua de las curvas que hoy se conoce por homotopía y el caso en el que la función se “vuelve infinita” en puntos de un rectángulo de lados paralelos a los ejes. Hasta 1 850 Cauchy no consideró otras singularidades que los polos. Introdujo la noción de residuo en “*Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal*” dando en

una nota posterior la fórmula de los residuos para un rectángulo.

En Turín en 1831 publicó una memoria sobre la mecánica celeste donde desarrolló un método para el estudio de la convergencia de series y acotación de errores al sustituir la serie por la suma de un número finito de términos. Estableció la fórmula integral que lleva el nombre de “teorema integral de Cauchy” y las desigualdades de Cauchy de las que se sigue de forma inmediata el teorema de Liouville, esencial en el estudio de las funciones enteras.

Una extensión importante de estos resultados se debe a P. M. H. Laurent (1813 – 1854) quien consideró funciones holomorfas definidas sobre coronas circulares y llegó al desarrollo conocido con su nombre, que es el punto de partida del estudio de las singularidades esenciales.

Como ya se ha indicado, Cauchy no presentó jamás una visión general de su teoría, que fue elaborada en distintas memorias e innumerables notas publicadas en *Comptes Rendues*. Hacia 1844 J. Liouville (1809 – 1882) en sus clases impartidas en el *Collège de France* dedicadas a funciones periódicas intentó establecer una exposición sistemática de las funciones de variable compleja, pero dichas lecciones no fueron publicadas, aunque dieron lugar a una querrela entre Cauchy y Liouville sobre la prioridad del teorema que hoy se conoce como de Liouville. Las lecciones de Cauchy son el origen de la primera presentación de la teoría de funciones realizada por Briot y Bouquet en “*Recherches sur la théorie des fonctions*” (Journal de l’Ecole Polytechnique, 1856). Las demostraciones están incompletas en muchas ocasiones y se utilizaron nociones intuitivas de topología por lo que es necesario esperar a Weierstrass para una construcción precisa.

Riemann y la variable compleja



Figura 3: Bernhard Riemann (1 826 – 1 866)

La primera publicación de Riemann fue su discurso inaugural “Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de una variable compleja” (Göttingen, 1 851). Él mismo indicó que sus demostraciones eran a menudo incompletas, y únicamente con la construcción de nuevas teorías y entes matemáticos podrían ser posteriormente rellenadas las lagunas. La primera presentación completa de estos trabajos de Riemann se debe a H. Weyl que utilizó nociones como variedad analítica, homología y formas armónicas. Riemann descubrió nuevas geometrías que con una axiomatización conveniente han llegado a ser el cuadro geométrico de la Física y la Matemática contemporánea.

Riemann se situó en un marco geométrico y representó los números complejos como puntos de un plano. Escribió por ejemplo: “*Cuando a todo valor de z le corresponde un valor determinado w , variando de forma continua*

con z , ..., entonces a todo punto del plano A corresponde un punto del plano B , a toda línea, de forma general, una línea, a toda porción conexa de superficie, una porción de superficie igualmente conexa. En consecuencia se puede considerar esta dependencia de la magnitud w de z como una representación del plano A sobre el plano B ". Así nos mostraba Riemann que w es una función de z , derivable en sentido complejo si "entre dos triángulos infinitesimales que se corresponden hay similitud".

La idea fundamental de Riemann para estudiar una función multiforme fue recuperar la uniformidad de la función desdoblado, tantas veces como fuera necesario, los valores de la variable. Dijo entonces: "la función multiforme admite en cada punto de una superficie que representa así el modo de ramificación, un único valor determinado, y puede ser vista como una función perfectamente determinada sobre esa superficie". Explicó cómo las familias de funciones algebraicas y los períodos de sus integrales están caracterizados por un único invariante topológico de sus superficies de Riemann, el orden de conexión, definido a partir de sistemas de curvas. Riemann obtuvo, en su memoria, teoremas de prolongación para funciones armónicas, el principio del módulo máximo y el principio de prolongación analítica. Terminó con una magistral aplicación del principio de Dirichlet, que dice que: "Dos superficies de Riemann simplemente conexas pueden siempre ser representadas conformemente una sobre la otra".

Weierstrass y la variable compleja

La motivación principal de Weierstrass fue el estudio de las funciones elípticas y abelianas, y desde este punto de vista profundizó en la teoría de las

funciones de variable compleja.

Hizo una presentación rigurosa de la teoría, independiente de toda referencia a la intuición geométrica. Sus primeros trabajos, que datan de 1840 a 1842, se publicaron por primera vez en 1894, por lo que fueron ignorados por sus contemporáneos.



Figura 4: Karl Weierstrass (1815 – 1897)

Conoció el desarrollo en serie de Laurent; introdujo la noción de convergencia uniforme y demostró, utilizando el método de los mayorantes, el teorema sobre las soluciones analíticas de un sistema de ecuaciones diferenciales mediante el desarrollo en serie; esbozó la teoría de la prolongación analítica y el estudio de los puntos singulares. Weierstrass se hizo célebre cuando en 1854 publica su memoria “*Sobre la teoría de funciones abelianas*”. Entre 1857 y 1887 elaboró cuidadosamente su edificio matemático, donde partiendo de una construcción correcta de los números reales desembocó en una teoría general de las funciones analíticas, y en la teoría de las funciones elípticas y abelianas.

El punto de partida de Weierstrass fue el concepto de función analítica. La

representación local de una función analítica como serie de potencias hizo ver que una función de este tipo posee numerosas propiedades análogas a las de un polinomio. Esto permitió hablar del orden de un cero, y partiendo del hecho de que los ceros son aislados se llegó al principio de prolongación analítica.

En su memoria "*Teoría de las funciones analíticas*" Weierstrass demostró que si una función tiene una singularidad esencial en un punto, z_0 , el conjunto de imágenes de los puntos de un disco cualquiera centrado en dicho punto y sin su centro (disco pinchado) es denso en el plano complejo. Este resultado fue completado por E. Picard (1 856 – 1 941), en 1 879, demostrando que este conjunto de valores omite, a lo sumo, un punto del plano complejo.

CAPÍTULO 1

Los números complejos

La variable compleja permite resolver problemas muy diferentes dentro de áreas tan variadas como pueden ser hidráulica, aerodinámica, electricidad, electromagnetismo... Algunos de ellos sólo requieren el conocimiento de los números complejos, como sucede en el caso del cálculo de los autovalores asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Otros en cambio requieren la utilización de la teoría de funciones analíticas complejas, como los problemas de contorno que aparecen, por ejemplo, en el estudio del flujo de fluidos,¹ la conducción del calor, la elasticidad o el potencial electrostático. Muchos problemas geométricos pueden resolverse utilizando las transformaciones complejas. Mientras que para los primeros bastaría con los contenidos que se revisan en este capítulo, sobre los números complejos y las propiedades de sus operaciones que quizá ya conozca el alumnado de secundaria, sin embargo para resolver los problemas de los siguientes tipos se requiere un conocimiento profundo sobre las funciones complejas que se estudiarán en los siguientes capítulos.

Dentro de las Matemáticas propiamente dichas, es interesante estudiar la variable compleja por estar estrechamente relacionada con distintas áreas, de manera que su estudio pueda hacer accesible parte del álgebra, de la

¹ Ver en Lamb, H.: *Hydrodynamics*, aplicaciones de la teoría de funciones analíticas a la hidrodinámica.

trigonometría, o proporcione herramientas para el cálculo integral y la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

Comienza este capítulo con una revisión del conjunto de los números complejos, su estructura algebraica de cuerpo conmutativo, la conjugación, los conceptos de módulo y argumento, su interpretación geométrica en el plano y las operaciones elementales en forma binómica y en forma polar, pues para poder entender adecuadamente las funciones de variable compleja es necesario comprender el conjunto sobre el que están definidas: los números complejos. Se suponen conocidas las propiedades de los números reales.

Al dotar el campo de los complejos de una distancia se tiene un espacio métrico. La estructura de orden de los números reales se pierde con los números complejos, por lo que el concepto de infinito es ahora distinto. Es preciso ampliar el conjunto de los complejos añadiendo un nuevo ente, el infinito, y explicar su significado.

1.1. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los antiguos algebristas operaron con expresiones en las que aparecía $\sqrt{-1}$. Leibniz, en el siglo XVII, todavía decía que $\sqrt{-1}$ era “*una especie de anfibio entre el ser y la nada*”. En 1777 Euler le dio al “*monstruo*” $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por *imaginario*). En la actualidad esta notación se usa casi universalmente, excepto en ingeniería eléctrica, donde se utiliza j en lugar de i , ya que esta letra se usa para indicar la intensidad de la corriente.

Cuando se desarrolló la teoría de los números complejos, la electricidad era una materia de interés sólo de laboratorio. Pero antes del final del siglo XIX los descubrimientos sobre electricidad y electromagnetismo transformaron el mundo, y en este proceso los números complejos fueron una herramienta que simplificó el cálculo con las corrientes alternas. Esto prueba que conocimientos que son matemática pura para una generación se convierten en aplicados para la siguiente.

1.1.1. Números complejos en forma binómica

Definición 1.1.1:

Un **número complejo** se define como una expresión de la forma

$$z = x + i \cdot y$$

donde x e y son números reales.

Este tipo de expresión, $z = x + i \cdot y$, se denomina **forma binómica**.

Se llama **parte real** de $z = x + i \cdot y$ al número real x , que se denota **$Re(z)$** , y **parte imaginaria** de $z = x + i \cdot y$, al número real y , que se denota **$Im(z)$** , por lo que se tiene entonces que: $z = Re(z) + i \cdot Im(z)$.

El **conjunto de los números complejos** es, por tanto,

$$\mathbf{C} = \{z = x + i \cdot y; x, y \in \mathfrak{R}\}.$$

Esta construcción permite considerar a los números reales como un subconjunto de los números complejos, siendo **real** aquel número complejo de parte imaginaria nula. Así, los números complejos de la forma $z = x + i \cdot 0$ son números reales y se denominan números **imaginarios** a los de la forma $z = 0 +$

$i \cdot y$, es decir, con su parte real nula.

Dos números complejos $z_1 = x + i \cdot y$ y $z_2 = u + i \cdot v$ son **iguales** si y sólo si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias: $x = u$, $y = v$.

1.1.2. Operaciones en forma binómica

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos. Para la suma y el producto de dos números complejos escritos en la forma binómica: $x + i \cdot y$, $u + i \cdot v$ se tienen en cuenta las propiedades usuales del Álgebra con lo que se definen:

Definición 1.1.2:

Suma: $(x + i \cdot y) + (u + i \cdot v) = (x + u) + i \cdot (y + v)$

Definición 1.1.3:

Producto: $(x + i \cdot y) \cdot (u + i \cdot v) = (x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u)$

Se comprueba que el cuadrado del número complejo i es un número real negativo, -1 , pues: $(0 + i) \cdot (0 + i) = -1 + i \cdot (0) = -1$.

Si los números complejos son reales, con su parte imaginaria nula, estas operaciones se reducen a las usuales entre los números reales ya que:

$$(x + i \cdot 0) + (u + i \cdot 0) = (x + u) + i \cdot (0)$$

$$(x + i \cdot 0) \cdot (u + i \cdot 0) = (x \cdot u) + i \cdot (0)$$

Esto permite considerar al cuerpo de los números reales \mathfrak{R} como un subconjunto de los números complejos, \mathbf{C} .

Definición 1.1.4:

El **conjugado** del número complejo $z = x + y \cdot i$, se define como: $\bar{z} = x - y \cdot i$

1.1.3. Propiedades algebraicas

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto tiene estructura de **cuerpo conmutativo**. Esto es, verifica las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa de la suma: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.
2. Propiedad conmutativa de la suma: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.
3. Existencia de elemento cero: Existe un elemento, $0 = 0 + 0 \cdot i$, tal que para todo $z \in \mathbf{C}$, verifica: $z + (0 + 0 \cdot i) = (0 + 0 \cdot i) + z = z$.
4. Existencia de elemento opuesto: Para todo $z \in \mathbf{C}$, existe $-z \in \mathbf{C}$, definido como $-z = -x + (-y) \cdot i$, tal que $z + (-z) = 0$.
5. Propiedad asociativa del producto: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.
6. Propiedad conmutativa del producto: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.
7. Existencia de elemento unidad: Existe un elemento, $1 = 1 + 0 \cdot i$, tal que para todo $z \in \mathbf{C}$, verifica: $z \cdot (1 + 0 \cdot i) = (1 + 0 \cdot i) \cdot z = z$.
8. Existencia de elemento inverso: Para todo número complejo no nulo, $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, existe $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.

9. Propiedad distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.

Todas estas propiedades son sencillas de verificar, lo que se deja como ejercicio. (*Ejercicio 1.1*).

Se observa que, en efecto, el inverso de z no está definido para el elemento nulo, pues entonces se estaría dividiendo por cero, ya que entonces $x^2 + y^2 = 0$.

El cuerpo de los complejos es algebraicamente cerrado. Esto significa que cualquier polinomio de grado n , mayor o igual a uno, con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz compleja. Este resultado, (que se demostrará en el *capítulo 4*) se conoce como *Teorema Fundamental del Álgebra* y fue probado por Gauss (1799). Como consecuencia se tiene que cada polinomio de grado n tiene exactamente n raíces en el campo complejo, no necesariamente distintas.

Se recuerda que los números reales tienen estructura de cuerpo conmutativo y ordenado. Al ser un subconjunto de los números complejos, son un subcuerpo de ellos. Pero como contrapartida se pierde una importante propiedad, el orden. El cuerpo de los números complejos no es un cuerpo ordenado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.1.1: Calcular $(2 - i) \cdot (1 + 2i)$

Para calcular $(2 - i) \cdot (1 + 2i)$ se procede con las reglas usuales del Álgebra

teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$$(2 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i.$$

Ejemplo 1.1.2: El conjugado del número complejo $z = 3 + 5i$, es $\bar{z} = 3 - 5i$

Ejemplo 1.1.3: Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador, y así se consigue que el denominador sea un número real:

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{2-2i}{1+1} = 1-i.$$

Ejemplo 1.1.4: Para elevar a potencias la unidad imaginaria, se tiene en cuenta que $i^2 = -1$, y por tanto, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$:

$$i^6 = -1,$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-(-1)} = i.$$

Ejemplo 1.1.5: Calcular $(1 + i)^4$.

Utilizando el binomio de Newton se obtiene:

$$(1 + i)^4 = \binom{4}{0} 1^4 + \binom{4}{1} i + \binom{4}{2} i^2 + \binom{4}{3} i^3 + \binom{4}{4} i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Ejercicios

1.1. Demostrar que las operaciones de suma y producto de números complejos dotan a \mathbf{C} de una estructura de cuerpo conmutativo.

1.2. Comprobar que:

a) $(1 - i)^4 = -4$.

$$b) \frac{5+10i}{3-4i} + \frac{2-i}{i} = -2$$

$$c) (1+i)^5 = -4-4i$$

1.3. Realizar las siguientes operaciones con números complejos:

$$a) \frac{68}{(1-i) \cdot (2-i) \cdot (3-i)}$$

$$b) (2+i) - i(1-2i)$$

$$c) \frac{2+i}{4-3i} + \frac{3+i}{5i}$$

$$d) (3-2i) \cdot (3+2i)$$

1.4. Comprobar si:

$$a) \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z).$$

$$b) \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$$

$$c) \operatorname{Im}(|iz|) = 0.$$

$$d) \operatorname{Re}((3-i) \cdot (\frac{1}{5} + \frac{1}{10}i) \cdot (3+i)) = 2.$$

1.5. Comprobar si:

$$a) \operatorname{Im} z^3 = 3x^2 \cdot y - y^3$$

$$b) (\operatorname{Im} z)^3 = y^3.$$

$$c) \operatorname{Im} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

1.6. Calcular:

a) $\operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{z}$

b) $\operatorname{Re}(z^4)$

c) $(\operatorname{Re}(z))^4$

1.2. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. DIAGRAMA DE ARGAND

El desarrollo moderno de los números complejos empezó con el descubrimiento de su interpretación geométrica que fue indistintamente expuesta por John Wallis (1685) y ya de forma completamente satisfactoria por Caspar Wessel (1799). El trabajo de Wessel no recibió ninguna atención, y la interpretación geométrica de los números complejos fue redescubierta por Jean Robert Argand (1806) y de nuevo por Carl Friedrich Gauss (1831).

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y el producto por un número real tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos, y es, por tanto, isomorfo a \mathfrak{R}^2 . Una base de este espacio está formada por el conjunto $\{1, i\}$. (*Ejercicio 1.7*).

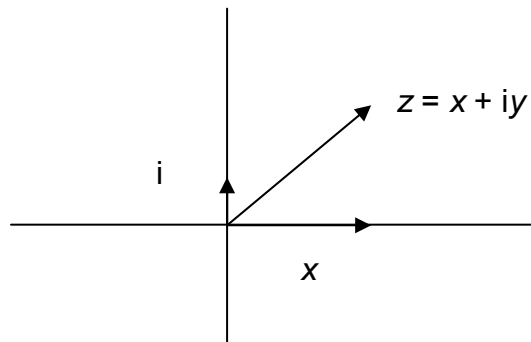


Figura 1.1: Representación de los números complejos

Al igual que los números reales representan los puntos de una recta, los números complejos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de un plano. Los números reales se representan en el eje de abscisas o eje real, y a los múltiplos de $i = \sqrt{-1}$ se les representa como puntos del eje imaginario, perpendicular al eje real en el origen. A esta representación geométrica se la conoce como el **Diagrama de Argand**. El eje $y = 0$ se denomina eje real y el $x = 0$, eje imaginario.

Como la condición necesaria y suficiente para que $x + iy$ coincida con $u + iv$ es que $x = u$, $y = v$, el conjunto de los números complejos se identifica con \mathfrak{R}^2 , y los números complejos se pueden representar como puntos del “plano complejo”. El número complejo $z = x + iy$ se corresponde con la abscisa y la ordenada del punto del plano asociado al par (x, y) . En unas ocasiones se refiere el número complejo z como el punto z y en otras como el vector \mathbf{z} .

La suma de números complejos corresponde gráficamente con la suma de vectores. Sin embargo, el producto de números complejos no es ni el producto escalar de vectores ni el producto vectorial.

El conjugado de z , \bar{z} , es simétrico a z respecto del eje de abscisas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.2.1: Representar en el plano de Argand los números complejos:

$$a = 2 + i, b = 2i \text{ y } c = -2 - 2i.$$

Los números complejos $a = 2 + i$, $b = 2i$ y $c = -2 - 2i$ se representan:

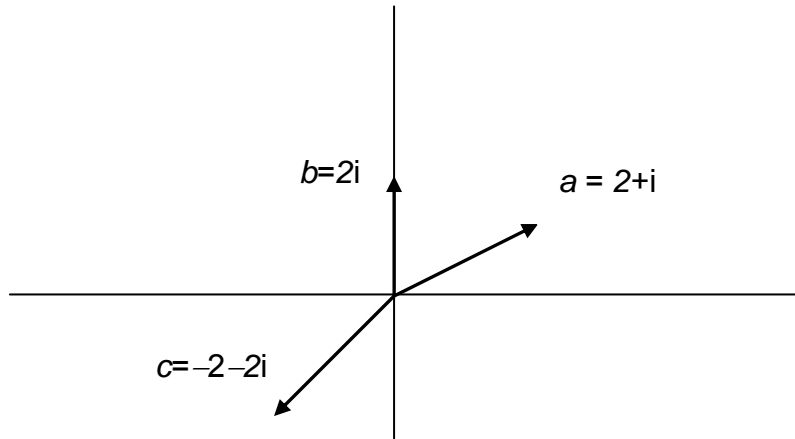


Figura 1.2: Ejemplo 1.2.1 - Representación de a , b y c .

Ejemplo 1.2.2: Representar en el plano de Argand los números complejos:

$2 + 3i$, $-1 + 2i$, $-3 - 2i$, $5 + i$ y $4 - 3i$.

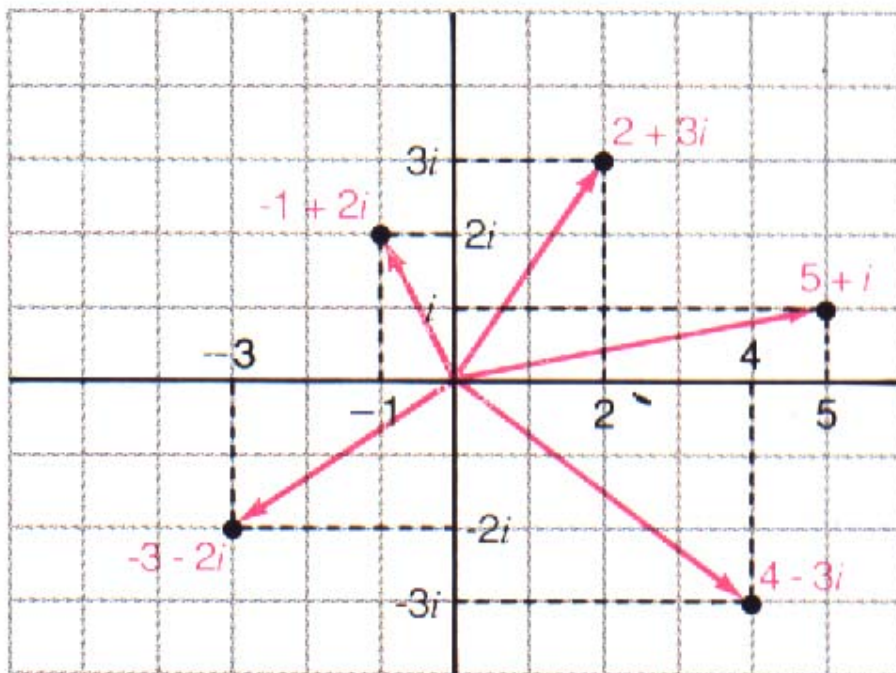


Figura 1.3: Ejemplo 1.2.2 - Representación de números complejos

Ejemplo 1.2.3: Representar el número complejo conjugado de $a = 2 + i$.

El conjugado de $a = 2 + i$, $2 - i$, se representa:

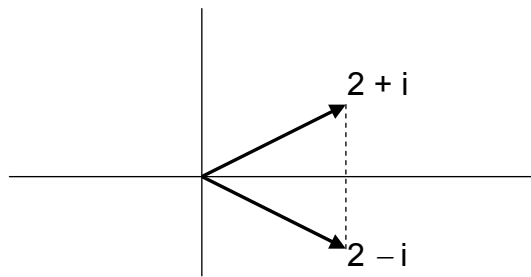


Figura 1.4: Ejemplo 1.2.3 - Representación del conjugado.

y se observa que es el simétrico respecto del eje de abscisas. La conjugación es un automorfismo del campo complejo relacionado con la simetría.

Ejemplo 1.2.4: Representar la suma de dos números complejos.

La suma se representa igual que la suma vectorial:

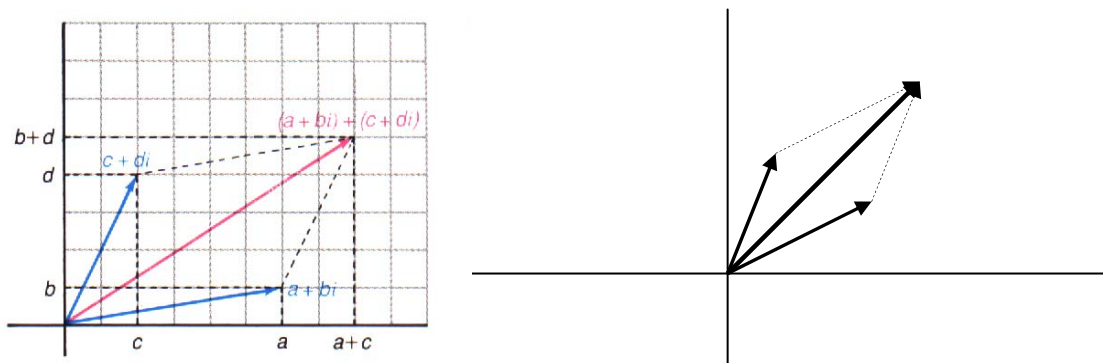


Figura 1.5: Representación de la suma de números complejos.

Ejemplo 1.2.5: Representar el producto del número complejo $2 + i$ por la unidad imaginaria: i .

El producto de $2 + i$ por i es igual a $-1 + 2i$, y al representarlo se observa que multiplicar por la unidad imaginaria es girar 90° .

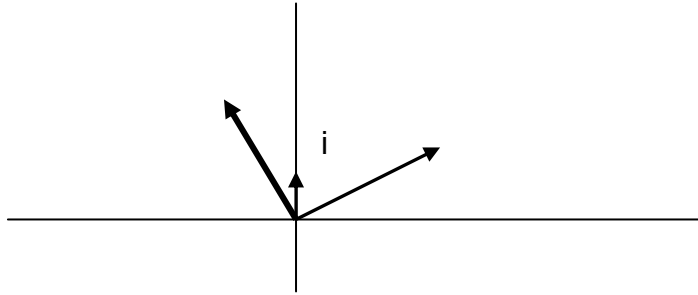


Figura 1.6: Representación del producto de un número complejo por la unidad imaginaria

Ejercicios

- 1.7. Demostrar que \mathbf{C} , con las operaciones de suma y el producto de un número real, tiene estructura de espacio vectorial bidimensional.
- 1.8. Representar gráficamente los siguientes números complejos:
 - a) $a = 3i$
 - b) $b = -2i$
 - c) $c = 5$
 - d) $d = 1 + i$
 - e) $e = -1 - i$
- 1.9. Representar gráficamente el conjugado de los números complejos:
 - a) $a = 3i$
 - b) $b = -2i$
 - c) $c = 5$

d) $d = 1 + i$

e) $e = -1 - i$

1.10. Representar gráficamente la suma de los siguientes números complejos:

a) $a + b$

b) $a + c$

c) $b + d$

d) $d + e$

1.11. Representar gráficamente el producto de los siguientes números complejos:

a) $a \cdot i$

b) $b \cdot i$

c) $c \cdot i$

d) $d \cdot i$

e) $e \cdot i$.

1.3. FORMA POLAR

1.3.1. Módulo

Definición 1.3.1:

El **módulo** de un número complejo se define como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y representa la distancia de z al origen, es decir, la longitud del vector libre (x, y) de \mathfrak{R}^2 .

Por tanto el módulo nunca puede ser un número real negativo. El módulo de un número real coincide con su valor absoluto.

Aunque no tiene sentido decir si $z_1 < z_2$, salvo que sean números reales, sí tiene sentido la desigualdad $|z_1| < |z_2|$ y significa que z_1 está más próximo al origen que z_2 .

Otra forma de expresar el módulo de un número complejo es mediante la expresión $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ donde \bar{z} es el conjugado de z , siendo el producto de un número complejo por su conjugado igual a $(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2$ un número real y positivo.

1.3.2. Argumento

El **argumento** de un número complejo z , si $z \neq 0$, representa el ángulo, en radianes, que forma el vector de posición con el semieje de abscisas positivas.

Es por tanto cualquier número real θ tal que $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$, $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{|z|}$. Se tiene

entonces que cada número complejo no nulo tiene infinidad de argumentos, positivos y negativos, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π .

Si z es igual a cero, su módulo es cero, pero su argumento no está definido.

Si se quiere evitar la multiplicidad de los argumentos se puede

seleccionar para θ un intervalo semiabierto de longitud 2π , lo que se llama elegir una rama del argumento; por ejemplo, si se exige que $\theta \in (-\pi, \pi]$, (o para otros autores a $[0, 2\pi)$), se obtiene el **argumento principal** de z , que se denota por $Arg(z)$. Si z es un número real negativo su argumento principal vale π . En ocasiones es preferible utilizar argumentos multivaluados:

$$arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

donde \mathbf{Z} representa el conjunto de los números enteros.

Si se define $Arg(z)$ como $arctg(y/x)$ se tiene una nueva ambigüedad, ya que existen dos ángulos en cada intervalo de longitud 2π de los cuales sólo uno es válido. Por todo ello, las afirmaciones con argumentos deben ser hechas con una cierta precaución, pues por ejemplo la expresión:

$$arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

es cierta si se interpretan los argumentos como multivaluados.

Si z es distinto de cero, \bar{z} verifica que $|\bar{z}| = |z|$, y $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

1.3.3. Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo

Algunas propiedades del conjugado y del módulo de un número complejo son:

1. $\forall z, w \in \mathbf{C}, \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}.$
2. $\forall z \in \mathbf{C}, \overline{\bar{z}} = z, Arg(\bar{z}) = -Arg(z), arg(\bar{z}) = -arg(z).$
3. $z \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$

$$4. \forall z, w \in \mathbf{C}, z \cdot \bar{z} = |z|^2, |\bar{z}| = |z|, |z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$5. |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$6. \forall z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

$$7. \forall z \in \mathbf{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

$$8. \forall z, w \in \mathbf{C}, \left| |z| - |w| \right| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

Las propiedades de la conjugación prueban que ésta es un automorfismo idempotente en \mathbf{C} . Se observa que las desigualdades 7 y 8 son siempre entre números reales, no entre complejos, por lo que sí tiene sentido escribir una desigualdad. La segunda parte de la propiedad 8 se conoce con el nombre de desigualdad triangular. Las propiedades del módulo prueban que éste es una norma en el espacio vectorial \mathbf{C} .

La comprobación de estas propiedades se deja como ejercicio. (*Ejercicio 1.12*).

1.3.4. Forma polar

Definición 1.3.2:

Si ρ es igual al módulo del número complejo no nulo z y θ es un argumento de z , entonces (ρ, θ) son las **coordenadas polares** del punto z .

La conversión de coordenadas polares en cartesianas y viceversa se hace mediante las expresiones:

$$x = \rho \cdot \cos \theta, y = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta, \text{ por lo que } z = x + i \cdot y = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta).$$

Esta última expresión es válida incluso si $z = 0$, pues entonces $\rho = 0$, por

lo que se verifica para todo θ .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.3.1: Calcular el módulo de los siguientes números complejos: $-2 + 3i$ y $4 + i$.

Al calcular $|-2 + 3i| = \sqrt{13}$ y $|4 + i| = \sqrt{17}$ se sabe que el primero dista menos del origen que el segundo.

Ejemplo 1.3.2: Calcular el argumento de los siguientes números complejos: $5i$, $-7i$, 3 y -3 .

El argumento principal de $5i$ es igual a $\frac{\pi}{2}$, el de $-7i$ es $\frac{3\pi}{2}$, el de 3 vale 0 y el -3 es π .

Ejemplo 1.3.3: Escribir en forma binómica el número complejo de módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{3}$.

El número complejo de módulo 2 y argumento principal $\frac{\pi}{3}$ es $1 + \sqrt{3}i$, ya que: $x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$ e $y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ejemplo 1.3.4: Calcular el módulo y el argumento de: $-1 - i$.

El número complejo $-1 - i$ tiene de módulo $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Uno de sus argumentos es $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, y su argumento principal es

$\frac{-3\pi}{4}$, por tanto $\operatorname{arg}(-1 - i) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$.

Ejemplo 1.3.5: Comprobar si se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$.

Se verifica que $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$ considerando estos argumentos como conjuntos, y en general no se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$, pues por ejemplo $Arg((-i)^2) = Arg(-1) = \pi$, mientras $Arg(-i) + Arg(-i) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$.

Ejercicios

- 1.12. Demostrar las propiedades del apartado 1.3.3.
- 1.13. Discutir el significado de las siguientes expresiones, poniendo distintos ejemplos:
- a) $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$,
 - b) $arg(\bar{z}) = arg(z^{-1}) = -arg(z)$,
 - c) $arg(z/w) = arg(z) - arg(w)$.
- 1.14. Calcular el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:
- a) $\sqrt{3} - i$
 - b) $-2 - 2i$
 - c) $1 - \sqrt{3} i$
 - d) $-4i$
- 1.15. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:
- a) i

- b) $-i$
- c) $4 + 4i$
- d) -4

1.4. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Definición 1.4.1.:

Se denomina **Fórmula de Euler** a la expresión:

$$e^{i\theta} = \exp(i\cdot\theta) = \cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ se mide en radianes.

Definición 1.4.2:

La fórmula de Euler permite expresar un número complejo no nulo en lo que se conoce como la **forma exponencial**:

$$z = |z| \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot e^{i\theta}.$$

Al estudiar la función exponencial se justificará esta expresión.

Para cada valor previamente fijado de ρ los puntos de la ecuación $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ están sobre la circunferencia de radio ρ y centro el origen.

Dos números complejos, $z_1 = \rho \cdot e^{i\theta}$ y $z_2 = r \cdot e^{i\alpha}$, no nulos, son iguales si, y sólo si, $\rho = r$ y $\theta = \alpha + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

1.4.1. Operaciones entre números complejos en forma exponencial

Para **multiplicar** números complejos expresados en una de estas formas, basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos:

$$(\rho \cdot e^{i\theta}) \cdot (r \cdot e^{i\alpha}) = (\rho \cdot r) \cdot e^{i(\theta+\alpha)}.$$

La relación entre números complejos y transformaciones geométricas, donde multiplicar por i corresponde a girar 90° , y multiplicar por $a + bi$ es girar el argumento de dicho número y aplicar una homotecia de razón su módulo, es muy útil en la Mecánica y en otras partes de la Física.

Para **dividir** números complejos, basta dividir sus módulos y restar sus argumentos:

$$\frac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\alpha}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\alpha)}$$

El **inverso** de un número complejo distinto de cero, $z = \rho \cdot e^{i\theta}$, tiene como módulo, el inverso del módulo, y como argumento, el opuesto del argumento:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Para elevar un número complejo a una **potencia**, se eleva el módulo a dicha potencia, y se multiplica el argumento por el exponente. Así:

$$(r \cdot e^{i\theta})^n = (r^n) \cdot e^{ni\theta},$$

cualquiera que sea el número entero n , lo que permite calcular raíces n -ésimas.

Para calcular la **raíz n -ésima** de un número complejo, $w = \sqrt[n]{z}$, se tiene

en cuenta que si $w = r e^{i\alpha} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta}$ el módulo r debe ser igual a $r = \sqrt[n]{\rho}$, pero al tener un número complejo muchos argumentos, ahora el argumento no es único, sino que se tienen n argumentos distintos, e iguales a $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, donde k toma los valores desde 0 hasta $n - 1$ antes de que dichos valores comiencen a repetirse.

Por tanto la función raíz n -ésima es una función multivalorada, con n valores que se pueden representar gráficamente en los vértices de un n -ágono regular de centro el origen y radio, el módulo $r = \sqrt[n]{\rho}$, pues todas las raíces están situadas en la circunferencia de radio $r = \sqrt[n]{\rho}$ uniformemente espaciadas cada $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

Todas estas expresiones pueden deducirse teniendo en cuenta que en la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta$, se encierra toda la trigonometría elemental.

A modo de ejemplo se demuestra la fórmula del producto de números complejos en forma exponencial:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho \cdot e^{i\theta}) \cdot (r \cdot e^{i\alpha}) = (\rho \cdot r) \cdot e^{i \cdot (\theta + \alpha)}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (\rho \cdot e^{i\theta}) \cdot (r \cdot e^{i\alpha}) = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta) \cdot r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha) = \\ &= (\rho \cdot r) \cdot [\cos \theta \cdot \cos \alpha - \text{sen } \theta \cdot \text{sen } \alpha] + i \cdot [\cos \theta \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } \theta \cdot \cos \alpha] = \\ &= (\rho \cdot r) \cdot (\cos (\theta + \alpha) + i \cdot \text{sen } (\theta + \alpha)) = (\rho \cdot r) \cdot e^{i \cdot (\theta + \alpha)}. \quad \square \end{aligned}$$

De igual modo se obtiene la fórmula del seno de una suma o del coseno

de una suma considerando en la demostración anterior números complejos de módulo uno.

Se comprueba que el conjugado de un número complejo tiene el mismo módulo y el argumento opuesto: $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$.

1.4.2. Fórmula de Moivre

Al aplicar la fórmula obtenida de una potencia al número complejo de módulo uno, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, se obtiene que

$$(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta),$$

cualquiera que sea el número entero n .

Esta expresión, que permite conocer $\operatorname{sen}(nx)$ o $\cos(nx)$ en función de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ desarrollando la potencia mediante el binomio de Newton y separando partes real e imaginaria, se conoce como fórmula de Moivre.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.4.1: Representar gráficamente el producto de los números

complejos: $2 e^{\frac{\pi}{6}i}$, $3 e^{\frac{\pi}{4}i}$.

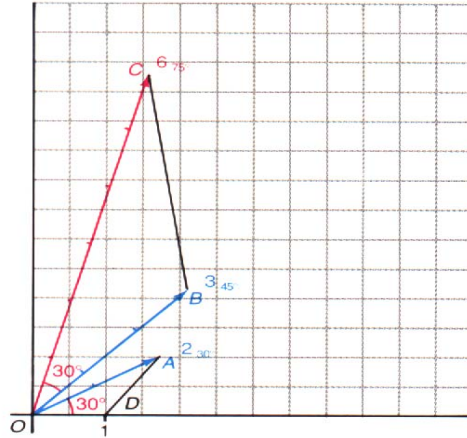


Figura 1.7: Representación del producto de números complejos

Ejemplo 1.4.2: Calcular: $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$.

Para dividir $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ se pueden escribir los números complejos en forma exponencial y dividir los módulos y restar los argumentos:

$$\frac{-2}{1+\sqrt{3}i} = \frac{2e^{\pi i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \left(\frac{2}{2}\right)e^{(\pi-\frac{\pi}{3})i} = 1e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por tanto $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ escrito en forma exponencial es $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, de módulo 1, y

argumento principal $\frac{2\pi}{3}$. Decir que su módulo es 1 es decir que está sobre la

circunferencia de centro el origen y radio 1.

Ejemplo 1.4.3: Calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$.

Para calcular una potencia, en general es mucho más sencillo utilizar la

forma exponencial en vez de aplicar la fórmula del binomio de Newton. Por

ejemplo, si se quiere calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$, es mucho más práctico calcular

$$\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{60} = e^{\frac{2\pi \cdot 60}{3}} = e^{i40\pi} = 1.$$

Ejemplo 1.4.4: Calcular la raíz cúbica de -1 .

Para calcular una raíz n -ésima se debe recordar que se tienen n raíces distintas:

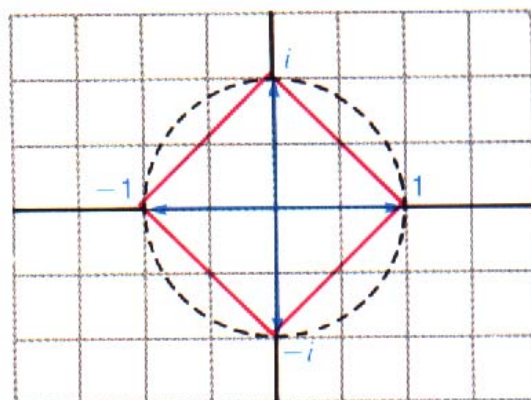
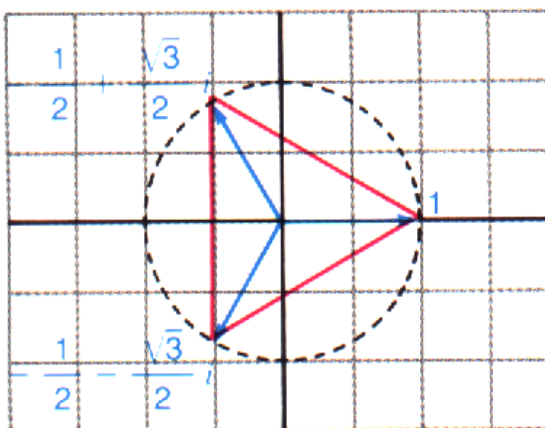
$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1e^{\pi i}} = \begin{cases} 1e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)i} = e^{\pi i} = -1 \\ 1e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot 2}{3}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.5: Resolver $z^3 = -1$.

Esto permite resolver ecuaciones. Así, las soluciones de la ecuación cúbica $z^3 = -1$ son tres, la raíz real -1 , y las raíces complejas conjugadas:

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ejemplo 1.4.6: Representar gráficamente las raíces cúbicas y cuartas de la unidad.



1.8: Raíces de la unidad

1.16. Comprobar los resultados siguientes:

a) $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$.

b) $\sqrt[3]{27i} = \begin{cases} 3e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{9\pi}{6}} \end{cases}$

1.17. Realizar las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $\frac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

1.18. Resolver las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

1.19. Calcular las raíces n -ésimas de la unidad, para $n = 2, 3$ y 4 .

Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

1.5. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO

Al identificar \mathbf{C} con el plano real \mathfrak{R}^2 mediante la biyección que asocia el par (x, y) con el número complejo $x + yi$ tiene sentido hablar del plano complejo, y se puede dotar a \mathbf{C} de una estructura de espacio métrico definiendo una distancia $d(z, w) = |z - w|$, que es la *distancia euclídea*, con lo que (\mathbf{C}, d) es un *espacio métrico*. Como el módulo es una norma, \mathbf{C} tiene estructura de *espacio vectorial normado*.

Se deja como ejercicio comprobar que con esta definición d es una distancia.

Tener una métrica permite utilizar el concepto de entorno. Para ello se introducen los siguientes conceptos:

Disco abierto o **bola abierta** de centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z interiores a la circunferencia de centro z_0 y radio r .

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C}; |z - z_0| < r\}.$$

Disco cerrado o **bola cerrada** de centro z_0 y radio r es igual al círculo de centro z_0 y radio r .

$$\bar{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

La **frontera** del disco es igual a la circunferencia de centro z_0 y radio r .

$$Fr(B_r(z_0)) = \{z \in \mathbf{C}; |z - z_0| = r\}.$$

Entorno del punto z_0 y radio ε es igual a la bola abierta de centro z_0 y radio ε :

$$Ent_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbf{C}; |z - z_0| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(z_0).$$

Entorno punteado, o **disco pinchado**, de centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z interiores a la circunferencia de centro z_0 y radio r salvo el propio punto z_0 :

$$B_r^{\neq}(z_0) = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Se puede definir ahora una topología en \mathbf{C} y hablar de proximidad. Los conceptos topológicos que se necesitarán son análogos a los ya estudiados en funciones de varias variables, de los que se utilizarán de manera especial los conceptos de abierto, cerrado, conexo y dominio.

Se dice que z es un **punto interior** de un conjunto $A \subseteq \mathbf{C}$, si existe algún entorno de z contenido en A . Se dice que z es un **punto exterior** de $A \subseteq \mathbf{C}$, si existe algún entorno de z que no contiene puntos de A . Si un punto z no es ni interior ni exterior de A se dice que es un **punto frontera** de A ; por lo tanto en todo entorno de un punto frontera existen puntos de A y puntos que no pertenecen a A .

Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son interiores. Luego:

$$X \text{ es un conjunto abierto} \Leftrightarrow \forall z \in X, \exists r > 0, B_r(z) \subset X.$$

Un conjunto X es **cerrado** si su complementario (conjunto de puntos de \mathbf{C} que no pertenecen a X) es un conjunto abierto. Un conjunto cerrado contiene a sus puntos frontera. Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

El **segmento** de extremos a y b , se puede representar como:

$$[a, b] = \{z \in \mathbf{C}; z = t \cdot a + (1 - t) \cdot b, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Un conjunto X es **conexo** cuando no existen dos abiertos A y B contenidos en X , disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) y distintos del vacío tales que $X = A \cup B$.

Un conjunto X es **conexo por caminos** si todo par de puntos de X se pueden unir por un camino contenido en X .

X es un **dominio** si es un conjunto abierto y conexo.

Una bola abierta, $B_r(z)$, es un ejemplo de conjunto abierto y conexo, y por lo tanto es un dominio. También es un dominio la corona circular definida por: $\{z \in \mathbf{C}; r < |z - z_0| < R\}$ ya que es un conjunto abierto y conexo. Una bola cerrada, $\bar{B}_r(z_0)$, es un ejemplo de conjunto cerrado. El disco pinchado, $B_r^*(z_0)$, definido como $\{z \in \mathbf{C}; 0 < |z - z_0| \leq r\}$, formado por los puntos de la bola cerrada excepto el centro, no es ni abierto ni cerrado.

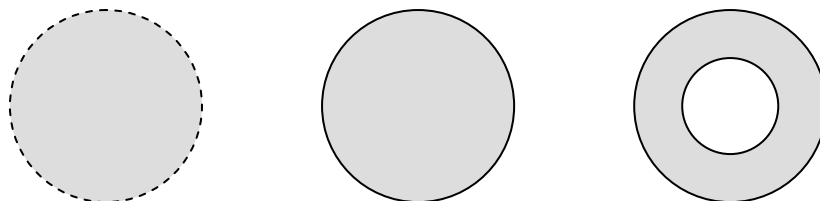


Figura 1.9: Bola abierta. Bola cerrada. Corona circular.

Un conjunto X está **acotado** si está contenido en alguna bola de radio R :

$$X \subset \{z \in \mathbf{C}; |z - z_0| < R\}.$$

En caso contrario se dice que A es **no acotado**.

Así, por ejemplo, la corona circular es un conjunto acotado mientras que el semiplano $\text{Im}(z) > 0$ es un conjunto no acotado.

Toda sucesión de números complejos, (z_n) , se puede considerar formada por dos sucesiones de números reales, $(\text{Re}(z_n))$ y $(\text{Im}(z_n))$, y se verifica que: $(z_n) \rightarrow z$ si y sólo si $(\text{Re}(z_n)) \rightarrow \text{Re}(z)$ y $(\text{Im}(z_n)) \rightarrow \text{Im}(z)$. Como consecuencia se obtiene que el espacio (\mathbf{C}, d) es un *espacio métrico completo*, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.5.1: Escribir en forma conjuntista el círculo cerrado de centro 1 y radio 2.

El círculo cerrado de centro 1 y radio 2 se puede representar como $\{z \in \mathbf{C}; |z - 1| \leq 2\}$, está formado por el conjunto de puntos $z = x + yi$ tales que $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$, y es un conjunto conexo, cerrado y acotado.

Ejemplo 1.5.2: Escribir en forma conjuntista el círculo cerrado de centro $2 - 3i$ y radio 2, y el círculo cerrado de centro $\frac{i}{2}$ y radio 4.

El círculo cerrado de centro $2 - 3i$ y radio 2 se puede representar como $\{z \in \mathbf{C}; |z - 2 + 3i| \leq 2\}$. Y el círculo cerrado de centro $\frac{i}{2}$ y radio 4 se puede

representar como $\{z \in \mathbf{C}; |2z - i| \leq 8\}$.

Ejercicios

1.20. Probar que la distancia euclídea $d(z, w) = |z - w|$ verifica las propiedades de distancia.

1.21. Indicar qué región del plano complejo representan los siguientes conjuntos de puntos:

a) $\{z \in \mathbf{C}; |z + 3 - 4i| \leq 5\}$

b) $\{z \in \mathbf{C}; |z - 1 - i| < 2\}$

c) $\operatorname{Re}(z) \leq 3$

d) $\operatorname{Im}(z) < 2$

e) $\{z \in \mathbf{C}; 1 < |z + 1 - i| < 2\}$

f) $\{z \in \mathbf{C}; \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$

g) $\operatorname{Re}(z) = 2$

h) $\operatorname{Im}(z + 3) > 1$

i) $\{z \in \mathbf{C}; |z - i| < 2 \text{ y } |z - 3| = |z + 3|\}$

1.22. En los conjuntos del ejercicio anterior, indicar cuáles son abiertos, cerrados, conexos, acotados y cuáles son dominios.

1.6. LA ESFERA DE RIEMANN. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Resulta necesario ampliar el plano complejo añadiendo el punto del infinito, ∞ . En la recta real, que estaba ordenada, se añadían dos puntos del infinito, $-\infty$, menor que cualquier número real, y $+\infty$, mayor que cualquiera de ellos. Esto ahora no va a ser posible al perderse el orden. Si se piensa en el plano complejo como un espacio vectorial podría pensarse que se puede acercar al infinito por cualquier dirección, pero esta no va a ser la solución adoptada. Riemann, en el siglo XIX, tuvo la genial idea de pensar en el plano como la proyección estereográfica de una esfera. Consideró una esfera de centro el origen y radio uno cortada diametralmente por el plano complejo, y mediante la proyección estereográfica obtuvo una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera, menos el polo norte, y los puntos del plano.

Definición 1.6.1:

Se denomina **esfera de Riemann** a una esfera S , contenida en \mathfrak{R}^3 , de centro el origen y radio uno.

Entonces la esfera de Riemann, S , es igual a $\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Se llama *polo norte*, N , al punto $(0, 0, 1)$ de la esfera.

Se puede suponer que el subespacio de \mathfrak{R}^3 formado por los puntos cuya tercera coordenada es nula es isomorfo al plano complejo \mathbf{C} :

$$\{(x, y, 0); x, y \in \mathfrak{R}\} \sim \mathbf{C}$$

Se considera entonces en el espacio \mathfrak{R}^3 al plano complejo como el plano

coordenado $x_3 = 0$, que corta diametralmente a la esfera S . De este modo el número complejo $x + iy$ se identifica con el punto $(x, y, 0)$. El ecuador de la esfera coincide con la circunferencia unidad del plano complejo \mathbf{C} .

Definición 1.6.2:

Se llama **proyección estereográfica** a una transformación biunívoca del plano complejo, \mathbf{C} , en la esfera de Riemann, S , sin el polo norte: $S \setminus \{P\}$ definida haciendo corresponder a cada punto del plano $z \in \mathbf{C}$, el punto de la esfera $w \in S$ en el que corta a S la recta que pasa por z y por el polo norte $N = (0, 0, 1)$. Se dice que $w \in S$ es la proyección estereográfica de $z \in \mathbf{C}$, o también a la inversa, que $z \in \mathbf{C}$ es la proyección estereográfica de $w \in S$.

La proyección estereográfica establece la correspondencia entre los puntos de \mathbf{C} y los de S en que a cada punto del plano $z \in \mathbf{C}$ le corresponde el punto de la esfera $w \in S$ en el que corta a S la recta que pasa por z y por el polo norte $N = (0, 0, 1)$. Por tanto las ecuaciones de la proyección estereográfica se calculan fácilmente. La relación explícita entre $z = x + iy$ y su proyección (x_1, x_2, x_3) sobre la esfera es $(x, y, 0) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$, siendo $x + yi =$

$\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$, y siendo:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Si el punto de la esfera está en el hemisferio norte, $x_3 > 0$, entonces su correspondiente del plano tiene su módulo mayor que uno, mientras que si el punto de la esfera pertenece al hemisferio sur, $x_3 < 0$, el correspondiente del plano tiene su módulo menor que uno. Si el punto está en el ecuador, se

transforma en él mismo y su módulo es igual a uno.

Tomando como métrica la distancia euclídea usual se comprueba que la esfera de Riemann es un espacio métrico compacto y completo.

A medida que los puntos en el plano complejo van estando más lejos del origen, sus imágenes en la esfera de Riemann van aproximándose al polo norte, P , lo que permite interpretar el transformado del polo P como el punto del infinito, ∞ . Se añade un único punto del infinito, haciendo corresponder al polo norte de la esfera el punto del infinito. De esta forma se obtiene el plano complejo ampliado que es topológicamente equivalente a la esfera de Riemann.

Definición 1.6.3:

El **plano complejo ampliado** es el plano complejo al que se le ha añadido un punto del infinito: $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Esto permite decir que el plano complejo ampliado $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ se identifica con la esfera de Riemann S .

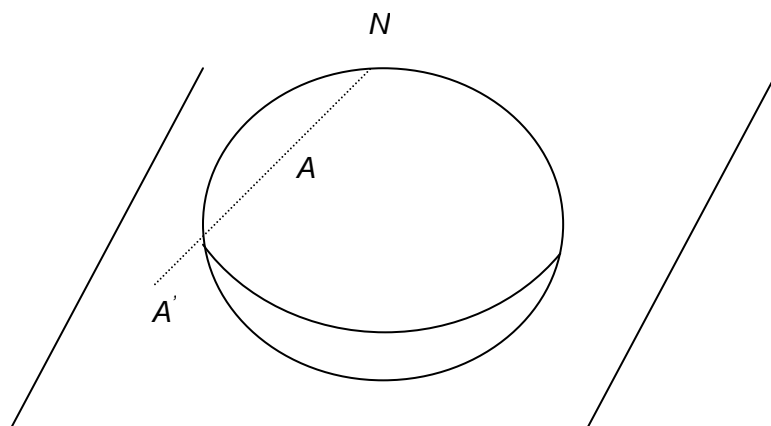


Figura 1.10: Esfera de Riemann

Definición 1.6.4:

Un **entorno del infinito** de radio M es el conjunto de todos los números complejos cuyo módulo es mayor que M :

$$Ent_M(\infty) = \{z \in \mathbf{C}; |z| > M\}.$$

La proyección estereográfica de una recta del plano complejo \mathbf{C} es una circunferencia de la esfera de Riemann S que pasa por el polo norte. Es posible interpretar las rectas del plano como circunferencias que pasan por el punto del infinito. También puede comprobarse que la proyección estereográfica conserva los ángulos, lo que posteriormente se denominará una transformación conforme.

Ejercicios

- 1.23. Escribir las ecuaciones de la proyección estereográfica que al punto de la esfera de Riemann (x, y, z) le hace corresponder el punto $z^* = x^* + iy^*$ del plano complejo.

1.7. EJERCICIOS

- 1.24. Comprobar si:

a) $Im(\bar{z}^2) = -2xy.$

b) $(Im \bar{z})^2 = y^2.$

c) $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$

d) $|\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha| = |e^{i\theta}| = 1.$

1.25. Calcular:

a) $(2 + i)^5$

b) $\frac{13}{|2 - 3i|}$

c) $\frac{(3 + 2i)^2}{(2 + 3i)^3}$

d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$

e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$

g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.

1.26. Probar que z es real si y sólo si $z = \bar{z}$.

1.27. Verificar que el inverso de z , z^{-1} , es igual a $\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$.

Calcular el inverso de $2 + 3i$.

1.28. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $-3 + 3i$

b) -3

c) $-3i$

d) $3 - 3i$.

1.29. Expresar en forma polar y exponencial los siguientes números complejos:

- a) $5i$
- b) $-7i$
- c) $5 - 5i$
- d) $\sqrt{3} + i$.

1.30. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos en forma exponencial:

- a) $2e^{\frac{\pi}{3}}$
- b) $3e^{\frac{-\pi}{4}}$
- c) $e^{\frac{\pi}{2}}$
- d) $5e^{\frac{2\pi}{3}}$.

1.31. Realizar las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

- a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$
- b) $(4 - 4i)^{-11}$
- c) $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{12}}{(-2 - 2i)^8}$.

1.32. Utilizar la fórmula de Moivre para expresar en función de $\text{sen } \theta$ y $\text{cos } \theta$:

- a) $\text{cos } 2\theta$
- b) $\text{sen } 2\theta$

c) $\cos 3\theta$

d) $\operatorname{sen} 3\theta$.

1.33. Calcular el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\frac{-3}{\sqrt{3} + i}$

b) $\frac{-i}{1-i}$

c) $(1 - i\sqrt{3})^7$.

1.34. Calcular, representar en el plano complejo y escribir en forma binómica:

a) $\sqrt{-3i}$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[4]{-81}$.

1.35. Resolver las ecuaciones:

a) $x^3 = -27$.

b) $x^4 = -81$.

c) $x^5 - 32 = 0$.

d) $x^3 - 8 = 0$.

1.36. Calcular todos los valores de z para los que:

a) $z^6 + 64 = 0$.

b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

1.37. Calcular las raíces quintas de la unidad y representarlas en el plano de Argand. Calcular también las raíces quintas de -1 , representarlas también. Generalizar este resultado.

1.38. Calcular las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilizarlas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.

1.39. Resolver la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

1.40. Calcular a para que el número complejo $\frac{a+i}{3-i}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

1.41. Indicar qué región del plano complejo que representan los siguientes conjuntos de puntos:

a) $\{z \in \mathbf{C}; |z - 5 + 2i| \leq 1\}$.

b) $\{z \in \mathbf{C}; |z + 3 - i| < 3\}$.

c) $\operatorname{Re}(z) < 2$.

d) $\operatorname{Im}(z) \leq 0$.

1.42. Indicar la región del plano complejo que representa el conjuntos

de puntos siguiente: $\{z = x + yi \in \mathbf{C}; |\operatorname{Arg}(z)| \leq \frac{\pi}{3}, y > 0\}$.

CAPÍTULO 2

Funciones complejas

Como se ha comprobado en el capítulo anterior, el plano complejo \mathbf{C} se puede considerar isomorfo al plano real, \mathfrak{R}^2 . Esto puede llevar a pensar, a la hora de definir una función sobre \mathbf{C} , que la situación es análoga a la de una función de dos variables reales, ya que si $z = x + i \cdot y$, la función $f(z)$ se puede considerar como una función que depende de las variables reales x e y . Pero esto no es totalmente cierto en general, y la razón es que $f(z)$ es también una función de una única variable, la variable compleja z . Es por ello que una función compleja se puede considerar que está a medio camino entre las funciones de una variable real y las de dos variables reales, y esto hace posible que para una función compleja se puedan definir conceptos que no es posible definir para funciones de dos variables reales, como es el caso de la derivada de una función .

Dentro de las funciones definidas en \mathbf{C} se estudian en la *Sección 2* aquéllas que tienen una dependencia directa de la variable $z = x + i \cdot y$, y no son simplemente funciones de las variables separadas x e y . Se introducen en primer lugar las funciones complejas, se definen las funciones elementales como extensiones de las correspondientes reales y se estudian los límites y la continuidad de las funciones complejas, que tienen un comportamiento análogo al caso de las funciones definidas en \mathfrak{R}^2 .

La derivada compleja, que se introduce en la *Sección 3*, es un concepto fundamental dentro de la teoría de funciones de una variable compleja porque, aunque la definición es análoga a la de derivada de una función de una variable real, el hecho de que el límite se tome en el plano complejo hace que las condiciones en las que existe la derivada sean más fuertes que en el caso real. Esta es la razón por la que una función compleja que sea derivable en un subconjunto adecuado del plano complejo tenga un comportamiento mejor que en el caso real.

Las funciones derivables en todos los puntos de un conjunto abierto G del plano complejo se denominan funciones holomorfas en G y se estudian en la *Sección 4*. Tienen un interés especial porque a partir de ellas se pueden deducir resultados realmente sorprendentes, como se verá mas adelante en los *Capítulos 4 y 5*.

El capítulo termina con la introducción, en la *Sección 5*, de las funciones armónicas, funciones de dos variables reales, que son las soluciones de la ecuación de Laplace en \mathfrak{R}^2 , y se estudia la relación que existe entre ellas y las funciones holomorfas de una variable compleja.

2.1. DEFINICIÓN. FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.1. Definición de función compleja

Definición 2.1.1:

Dado un subconjunto S del plano complejo \mathbf{C} , se denomina **función compleja de una variable compleja** $f(z)$ a una aplicación $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ tal que a cada valor $z \in S \subseteq \mathbf{C}$ le corresponde un único número complejo $f(z)$.

Si $z = x + i \cdot y$, la función $f(z)$ se puede expresar de la forma

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

donde u y v son funciones de dos variables reales que representan respectivamente la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$.

Así, por ejemplo, la función $f(z) = z^2 + 1$ se puede expresar como:

$$f(z) = (x + i \cdot y)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 2x \cdot y \cdot i + 1 = u(x, y) + i \cdot v(x, y),$$

con $u(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ y $v(x, y) = 2x \cdot y$.

Definición 2.1.2:

Se llama **dominio** de la función al conjunto S de puntos en los que la función está definida, y se llama **imagen** de f al conjunto formado por todos los valores complejos que toma la función. Si no se especifica, el dominio es el máximo subconjunto del plano complejo \mathbf{C} en el que la función está definida.

De la expresión $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ se deduce que una función compleja por una parte se puede suponer similar a una función de una variable real, puesto que a cada número complejo z le corresponde un valor complejo

$f(z)$. Pero por otra parte se puede tomar como el resultado de aplicar las funciones u y v que están definidas en un subconjunto de \mathfrak{R}^2 , y desde este punto de vista f podría considerarse próxima a las funciones definidas en \mathfrak{R}^2 . Es precisamente esta situación la que hace que las funciones complejas tengan propiedades diferentes a las de las funciones reales.

2.1.2. Funciones Elementales

2.1.2.1. Polinomios

Definición 2.1.3:

Los **polinomios complejos** son funciones de la forma

$$f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0, \quad a_j \in \mathbf{C} \text{ para } j = 0, \dots, n.$$

Las partes real e imaginaria de una función polinómica compleja son funciones polinómicas de dos variables reales. Así, por ejemplo:

$$f(z) = 2z^2 + 3 = 2(x + i \cdot y)^2 + 3 = (2(x^2 - y^2) + 3) + i \cdot (4x \cdot y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Es importante resaltar que una función polinómica compleja es aquella que se puede expresar como una combinación lineal de potencias de exponente natural de z , ya que puede ocurrir que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ sean funciones polinómicas en \mathfrak{R}^2 y sin embargo $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ no sea un polinomio complejo. Un ejemplo es la función $f(z) = (x^2 + y^2) + i \cdot (x^2 - y^2)$, que no se puede expresar de la forma $a z^2 + b \cdot z + c$, y por tanto no es un polinomio complejo.

Las funciones polinómicas complejas están definidas en todo el plano complejo.

2.1.2.2. Funciones racionales

Definición 2.1.4:

De forma análoga al caso real, se denomina **función racional** a una función definida como cociente de dos polinomios:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Como en el caso real, las funciones racionales se pueden definir en todo el plano complejo, salvo en el conjunto de los números complejos que anulen el denominador, que son las raíces del polinomio $Q(z)$.

Así, por ejemplo, la función:

$$f(z) = \frac{2z^2 + 1}{z^2 + 1}$$

está definida para todo valor complejo del plano salvo para $z = i$ y $z = -i$.

2.1.2.3. Función exponencial

Definición 2.1.5:

Dado el número complejo $z = x + iy$, la **función exponencial compleja** se define a través de la fórmula de Euler introducida en el capítulo anterior

$$f(z) = \exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y).$$

La función así definida es una extensión de la función exponencial real, puesto que si z es un número real se tiene que $y = 0$ y entonces $f(x) = e^x$.

Propiedades

La función exponencial compleja tiene las siguientes propiedades:

1. Dados $z, w \in \mathbf{C}$, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. Si $z = x + i \cdot y$, $|e^z| = e^x$, $|e^{iy}| = 1$.
3. $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k \cdot \pi \cdot i$, siendo $k \in \mathbf{Z}$.
4. $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.
5. $(e^z)^n = e^{nz}$.

Observaciones. Las propiedades anteriores indican que la función exponencial compleja mantiene en general las propiedades de la función exponencial real. Existen sin embargo dos diferencias importantes entre ellas que se presentan a continuación.

La primera diferencia es que la función exponencial real es una función inyectiva, que está definida en todos los puntos de la recta real y toma todos los valores comprendidos en el intervalo $(0, \infty)$. La función exponencial compleja está definida para todo punto del plano complejo \mathbf{C} pero no es una función inyectiva, puesto que para todo z se tiene que $e^{z+2\pi i} = e^z$. Es por tanto una **función periódica, de periodo $2\pi i$** , que se repite en bandas horizontales del plano complejo, de amplitud 2π . Esto es algo que es necesario tener en cuenta si se quiere estudiar la existencia de la función inversa.

La segunda diferencia entre las funciones exponencial real y compleja es que la función exponencial compleja puede tomar valores reales negativos, en contra de lo que sucede en el caso real. De hecho se puede demostrar a través de la definición de logaritmo complejo que **puede tomar cualquier valor complejo salvo el 0**. Esto es razonable si se tiene en cuenta que el módulo de

e^z es e^x , $|e^z| = e^x$, que toma todos los posibles valores reales positivos, salvo el valor cero, y el argumento de e^z es la parte imaginaria de z . Se comprobará este hecho de manera formal cuando se haya definido el logaritmo complejo.

2.1.2.4. Funciones trigonométricas

Las fórmulas de Euler permiten asegurar que, para todo $x \in \mathfrak{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad e^{-ix} = \cos x - i \cdot \operatorname{sen} x.$$

Se tiene entonces que si $x \in \mathfrak{R}$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Es razonable extender las funciones seno y coseno al plano complejo definiéndolas para todo $z \in \mathbf{C}$ como:

Definición 2.1.6:

Las funciones trigonométricas complejas seno y coseno se definen:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Propiedades

Estas funciones así definidas conservan, para todo $z, w \in \mathbf{C}$, las siguientes propiedades:

1. $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(z)$
2. $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$
3. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen}(z) \cdot \cos(w) + \operatorname{sen}(w) \cdot \cos(z)$

$$\cos(z+w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \operatorname{sen}(z) \cdot \operatorname{sen}(w).$$

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ se diferencian de las correspondientes funciones reales en que pueden tomar valores complejos cuyo módulo no esté acotado, al contrario del seno y el coseno reales, cuyos valores están acotados entre -1 y 1 . En efecto, basta tener en cuenta que para todo $x \in \mathfrak{R}$:

$$\operatorname{cos}(i \cdot x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(i \cdot x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2i},$$

de manera que para valores de x suficientemente grandes los módulos de los complejos asociados son mayores o iguales que cualquier valor real que fijemos.

Ceros de las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$.

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ sólo toman el valor cero en puntos de la recta real; es decir, los ceros de las funciones complejas $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ coinciden con los ceros de sus correspondientes reales. Esto se puede comprobar fácilmente expresando $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ en forma binómica: si $z = x + i \cdot y$,

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y + i \cdot \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cosh} y - i \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y.$$

Así,

$$\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ y } \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow z = 2 \cdot k \cdot \pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{cos} z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ y } \operatorname{cos} x = 0 \Leftrightarrow z = (2k + 1) \cdot \pi/2, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Las restantes funciones trigonométricas se definen de la misma forma que en el caso real. Así, por ejemplo, la **tangente** es

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z / \operatorname{cos} z,$$

y esta definida en todos aquellos valores complejos en los que no se anula el

denominador, es decir, para $z \neq (2k + 1) \cdot \pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

2.1.2.5. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen de forma similar a las funciones hiperbólicas de una variable real.

Definición 2.1.7:

Las funciones **seno** y **coseno hiperbólicos** se definen para cada $z \in \mathbf{C}$ como:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

De la propia definición se deduce de manera inmediata la relación del seno y el coseno hiperbólicos con el seno y el coseno. Se tiene:

$$\begin{aligned} \sinh z &= -i \cdot \sin(i \cdot z) & \cosh z &= \cos(i \cdot z) \\ \sin z &= -i \cdot \sinh(i \cdot z) & \cos z &= \cosh(i \cdot z). \end{aligned}$$

Propiedades

Las funciones hiperbólicas se comportan también de forma análoga a las correspondientes reales. Se tienen, para todo $z, w \in \mathbf{C}$, las siguientes propiedades:

1. $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$.
2. $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
3. $\sinh(z + w) = \sinh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(w) \cdot \cosh(z)$.
 $\cosh(z + w) = \cosh(z) \cdot \cosh(w) + \sinh(z) \cdot \sinh(w)$.
4. $\sinh z = \sinh x \cdot \cos y + i \cdot \cosh x \cdot \sin y$.

$$\cosh z = \cosh x \cdot \cos y + i \cdot \sinh x \cdot \sin y.$$

De la relación entre las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ se deduce de manera inmediata que la función $\sinh z$ toma el valor cero en los puntos $z_n = n \cdot \pi \cdot i$, mientras que los ceros de $\cosh z$ están en los puntos $z_n = (n + 1/2) \cdot \pi \cdot i$

Las restantes funciones hiperbólicas se definen de la misma forma que en el caso real. Así, por ejemplo, la tangente hiperbólica es:

$$\operatorname{tgh} z = \sinh z / \cosh z,$$

y esta definida en todos aquellos valores complejos en los que no se anula el denominador.

2.1.2.6. Función logaritmo

El logaritmo complejo se introduce como la función inversa de la función exponencial. La primera dificultad está en el hecho de que la función exponencial no es una función inyectiva, y por tanto la función inversa asociada no va a ser una correspondencia unívoca, como sucede en la definición usual de función, sino que va a ser una función multívoca, tal que a cada número complejo distinto de cero le va a asociar infinitos valores complejos.

Definición 2.1.8:

Dado $z = x + i \cdot y \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, se define:

$$\log z = \ln |z| + i \cdot (\arg z + 2k \cdot \pi), \quad k \in \mathbf{Z}$$

Así, por ejemplo:

a) $\log i = \ln |i| + i \cdot (\pi/2 + 2k \cdot \pi) = i \cdot (\pi/2 + 2k \cdot \pi), \quad k \in \mathbf{Z}$

b) $\log (-1) = i (\pi + 2k \cdot \pi), \quad k \in \mathbf{Z}$

$$c) \log(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \cdot (\pi/4 + 2k \cdot \pi), k \in \mathbf{Z}$$

El logaritmo asocia entonces a cada número complejo infinitos valores complejos, que tienen la misma parte real pero su parte imaginaria difiere entre ellos un múltiplo entero de 2π .

Si se restringen los valores del argumento de z a un determinado intervalo de amplitud 2π , como puede ser el intervalo $[-\pi, \pi)$, el logaritmo complejo se convierte en una función unívoca que se denomina **logaritmo principal**, o **determinación principal del logaritmo**, y se denota con mayúscula

$$\mathbf{Log} z = \ln |z| + i \cdot \mathbf{Arg}(z), \mathbf{Arg}(z) \in [-\pi, \pi).$$

Propiedades

1. $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$.
2. $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w$.
3. $\mathbf{Log}(z \cdot w) = \log z + \log w \pm 2k \cdot \pi \cdot i$.

Observación: Es importante tener en cuenta que mientras $\exp(\mathbf{Log} z) = z$, cualquiera que sea el valor de z , $\mathbf{Log}(\exp z)$ puede tomar un valor distinto de z . En efecto, si $z = x + i \cdot y$ es tal que $y > \pi$, se tiene que

$$\mathbf{Log}(e^z) = \ln(e^x) + i \cdot \mathbf{Arg}(e^z) = x + i \cdot (y - 2k \cdot \pi) = z - 2k \cdot \pi \cdot i \neq z.$$

Se puede comprobar ahora de manera formal que la función exponencial puede tomar cualquier valor complejo distinto de 0. En efecto, si se fija un número complejo $w \neq 0$, existe otro número complejo, z^* , tal que $e^{z^*} = w$. Basta tomar $z^* = \ln |w| + i \cdot \arg w$. Se tiene entonces:

$$e^{z^*} = e^{\ln|w|} \cdot (\cos(\arg w) + i \cdot \operatorname{sen}(\arg w)) = |w| \cdot (\cos(\arg w) + i \cdot \operatorname{sen}(\arg w)) = w.$$

2.1.2.7. Funciones definidas como potencias

Potencias complejas

El logaritmo complejo permite extender las potencias al campo complejo. Se puede así tomar un número complejo distinto de 0 y elevarlo a un determinado exponente complejo a través de la siguiente definición

Definición 2.1.9:

Dados los números complejos c y d , con $c \neq 0$, se define:

$$c^d = \exp(d \cdot \log c).$$

La expresión anterior representa a infinitos números complejos.

Así, por ejemplo:

$$a) i^{-2i} = \exp(-2i \cdot \log i) = \exp(-2i \cdot (i \cdot (\pi/2 + 2k \cdot \pi))) = e^{(4k+1)\pi}, k \in \mathbf{Z}$$

$$b) (1+i)^{-i} = \exp(-i \cdot \log(1+i)) = \exp(-i \cdot (\ln \sqrt{2} + \pi/4 + 2k \cdot \pi)) = e^{\pi/4 + 2k\pi} (\cos(\ln \sqrt{2}) - i \cdot \operatorname{sen}(\ln \sqrt{2})), k \in \mathbf{Z}$$

Se pueden también definir funciones en las que se utilicen potencias complejas, y en ellas la variable z puede aparecer en la base o en el exponente.

Definición 2.1.10:

La función $f(z) = z^c$, siendo el exponente c una constante compleja, $c \in \mathbf{C}$, se define como

$$f(z) = \exp(c \cdot \log z), z \neq 0.$$

Estas funciones son en general funciones multivaluadas, es decir, con infinitas ramas. De forma análoga al logaritmo, si se fija un intervalo de tamaño 2π para el argumento de z se tiene una función univaluada.

Se tienen distintas situaciones en función del valor del exponente c .

- Si $c = n \in \mathbf{Z}$, es decir, si c es el número entero n , entonces f es una función univaluada, pues

$$\begin{aligned} z^n &= \exp(n \cdot \log z) = \exp(n \cdot (\ln |z| + i \cdot (\arg z + 2k \cdot \pi))) = \\ &= |z|^n \cdot \exp(i \cdot n \cdot (\arg z + 2k \cdot \pi)) = |z|^n \cdot \exp(i \cdot n \cdot \arg z). \end{aligned}$$

- Si c es un número racional que tiene como forma irreducible $c = p/q$, con p y q enteros, la función $f(z) = z^c$ tiene q ramas, correspondientes a las q raíces q -simas de z^p .
- Finalmente, si c es un número real irracional, o un número complejo con parte imaginaria distinta de cero, la función $f(z) = z^c$ tiene infinitas ramas. Cada una de ellas se obtiene al fijar un valor de $\alpha > 0$, y expresar z en forma polar.

Definición 2.1.11:

La función $f(z) = c^z$, siendo la base una constante compleja, $c \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$, se define como

$$f(z) = \exp(z \cdot \log c).$$

Para cada valor de $\log c$ prefijado, la función f así definida asocia a cada número complejo z un único valor complejo, y por tanto f es una función univaluada.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.1.1: Estudiar si la función

$$f(z) = 2x^3 + 2x \cdot y - 6x \cdot y^2 - 1 + i \cdot (6x^2 \cdot y + x^2 - y^2 - 2y^3)$$

es un polinomio complejo.

La función $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = 2(x^3 + i \cdot 3x^2 \cdot y - 3x \cdot y^2 - i \cdot y^3) + i \cdot (x^2 - y^2 + 2x \cdot y) - 1 = 2z^3 + i \cdot z^2 - 1.$$

Se tiene entonces que $f(z)$ es un polinomio complejo de grado tres.

Ejemplo 2.1.2.: Estudiar el dominio de definición de las siguientes funciones

$$a) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - iz^2 - z + i}$$

$$b) g(z) = \frac{\tan z}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

$$c) h(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{\cosh z}$$

La función $f(z)$ es un cociente de polinomios. Se puede definir por tanto en todo el plano complejo salvo en los ceros del polinomio que está en el denominador. Como $z^3 - iz^2 - z + i = (z - i) \cdot (z^2 - 1)$, $f(z)$ está definida en todo \mathbf{C} menos en los puntos i , 1 y -1 .

La función $g(z)$ se puede definir en todo el plano complejo salvo en los puntos en los que no está definida la tangente y en los ceros del denominador. Está entonces definida en todo \mathbf{C} menos los puntos i , $-i$ y $z_n = (n + 1/2) \cdot \pi$, con $n \in \mathbf{Z}$.

Finalmente, la función $h(z)$ se puede definir en todo el plano complejo salvo los puntos en los que se anula el denominador; está definida por tanto en todo \mathbf{C} menos los puntos $z_n = (n + 1/2) \cdot \pi \cdot i$, con $n \in \mathbf{Z}$.

En los dos ejemplos que siguen se presentan dos procedimientos alternativos: el primero es directo, mientras que en el segundo se utiliza la definición de logaritmo complejo. Comparándolos, se puede apreciar que la utilización del logaritmo permite en algunos casos simplificar las operaciones.

Ejemplo 2.1.3: Resolver la ecuación $e^z = -2$.

Procedimiento 1: Se expresan en primer lugar los dos miembros de la igualdad de la misma forma:

$$e^x \cdot (\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y) = 2 \cdot (-1).$$

Se tiene entonces que $e^x = 2$, con lo cual $x = \ln 2$, y que $\operatorname{sen} y = 0$ y $\cos y = -1$. Por tanto $y = (2k + 1) \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Las soluciones de la ecuación inicial son entonces:

$$z = \ln 2 + (2k + 1) \cdot \pi \cdot i, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Procedimiento 2: Tomando logaritmos en la ecuación $e^z = -2$, se tiene:

$$z = \log(-2) = \ln |2| + i \cdot (\arg(-2) + 2k \cdot \pi) = \ln 2 + (2k + 1) \cdot \pi \cdot i, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ejemplo 2.1.4: Resolver la ecuación $\operatorname{sen} z = 2$.

Procedimiento 1:

$$\operatorname{sen} z = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i.$$

Llamando $m = e^{iz}$, se tiene

$$m^2 - 4i \cdot m - 1 = 0,$$

que tiene como solución

$$m = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot i.$$

Deshaciendo el cambio

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot i \Leftrightarrow e^{-y} \cdot (\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x) = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot i.$$

Se tiene entonces que $e^{-y} = (2 \pm \sqrt{3})$, con lo que $e^y = (2 \mp \sqrt{3})$ y

entonces $y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi$. Se puede asegurar pues que los

números complejos z tales que $\operatorname{sen} z = 2$ son de la forma:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi + i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}), k \in \mathbf{Z}$$

Procedimiento 2:

Se procede de la misma forma que en el procedimiento 1 hasta obtener la relación

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot i$$

Tomando logaritmos en la ecuación

$$i \cdot z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi \right), \text{ con lo que se tiene}$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k \cdot \pi + i \cdot \ln(2 \pm \sqrt{3}), k \in \mathbf{Z}$$

Ejemplo 2.1.5: Demostrar que, si $z = x + i \cdot y$, entonces:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \quad \text{y} \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{cos} z = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cosh} y - i \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y$$

se tiene

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cosh}^2 y + \cos^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y =$$

$$\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cosh}^2 y + (-\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y =$$

$$\operatorname{sen}^2 x \cdot (\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \cdot \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

De forma análoga

$$|\operatorname{cos} z|^2 = \cos^2 x \cdot \operatorname{cosh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y =$$

$$\cos^2 x \cdot \operatorname{cosh}^2 y + (-\cos^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{senh}^2 y =$$

$$\cos^2 x \cdot (\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \cdot \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

Este ejemplo muestra de manera directa que el crecimiento del módulo del seno y del módulo del coseno complejos depende de la parte imaginaria de z . Esta es la razón por la que el seno y el coseno complejos no son funciones acotadas en \mathbf{C} .

Ejemplo 2.1.6: Estudiar los valores que toman las siguientes funciones

a) $f(z) = z^{1/3}$, b) $f(z) = (1 + i)^z$, c) $f(z) = z^{1+i}$.

a) Para cada número complejo z , $f(z) = z^{1/3}$ toma los valores:

i) $|z|^{1/3} \cdot \exp(i \cdot \operatorname{Arg} z/3),$

ii) $|z|^{1/3} \cdot \exp(i \cdot \operatorname{Arg} z/3 + 2\pi/3)$ y

iii) $|z|^{1/3} \cdot \exp(i \cdot \operatorname{Arg} z/3 + 4\pi/3).$

b) $f(z) = (1 + i)^z = \exp(z \cdot \log(1 + i)).$

Si se toma $\log(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$, la función $f(z)$ asocia a cada z el valor

$$f(z) = \exp(z \cdot (\ln\sqrt{2} + i\pi/4)) = \exp(x \cdot \ln\sqrt{2} - (\pi/4) \cdot y + i \cdot (x \cdot \pi/4 + y \cdot \ln\sqrt{2})).$$

c) La función $f(z) = z^{1+i}$ toma para cada z los infinitos valores:

$$f(z) = \exp((1+i) \cdot \log z) = \exp((1+i)(\ln|z| + i(\text{Arg } z + 2k\pi))) =$$

$$|z| \cdot \exp(-\text{Arg } z - 2k\pi + i(\ln|z| + \text{Arg } z)), k \in \mathbf{Z}$$

Ejercicios

2.1. Calcular:

- a. $\text{sen } 2i$.
- b. $\text{cos } 2i$.
- c. $\text{sh } 2i$.
- d. $\text{ch } 2i$.
- e. $\text{tg}(1 + 2i)$.

2.2. Resolver las ecuaciones:

- a. $\text{cos } z = 0$.
- b. $\text{sen } z = i$.
- c. $\text{sh } z = 1$.
- d. $\text{ch } z = 0$.

2.3. Calcular $f(3 + 6i)$, $f(2i)$ y $f(-5 + 3i)$, siendo $f(z)$ igual a:

- a. $z^2 - 2z$.

b. $1/(1 - z)$.

c. $1/z^3$.

d. $z/(3z + 2)$.

2.4. Demostrar que:

a. $\cos(i \cdot z) = \operatorname{senh} z$.

b. $\operatorname{cosh}(i \cdot z) = \cos z$.

c. $\operatorname{sen}(i \cdot z) = i \cdot \operatorname{senh} z$.

d. $\operatorname{senh}(i \cdot z) = -i \cdot \operatorname{sen} z$.

2.5. Comprobar que al calcular la parte real y la parte imaginaria de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, se obtiene, si $z = x + i \cdot y$:

a. $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{senh} y$.

b. $\cos z = \cos x \cdot \operatorname{cosh} y - i \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y$.

c. $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cdot \cos y + i \cdot \operatorname{cosh} x \cdot \operatorname{sen} y$.

d. $\operatorname{cosh} z = \operatorname{cosh} x \cdot \cos y + i \cdot \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y$.

2.2. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

2.2.1. Límites de funciones

Las funciones complejas se comportan frente a los límites de forma análoga a las funciones definidas en \mathfrak{R}^2 . Sean $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ y $w_0 = u_0 + i \cdot v_0$ dos números complejos, y sea $f(z)$ una función definida en un entorno punteado de

z_0 . Se dice que la función $f(z)$ tiene como **límite** w_0 , cuando z tiende a z_0 , si la función toma valores cada vez más próximos a w_0 cuando z se aproxima a z_0 .

Expresado de manera formal

Definición 2.2.1:

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 <$

$|z - z_0| < \delta$, se verifica que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Se puede comprobar fácilmente que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i \cdot v_0$ si y sólo si

se verifica que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = u_0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Im}(f(z)) = v_0$.

Se tiene entonces que los límites de funciones complejas tienen el mismo comportamiento, el mismo tipo de dificultades y las mismas propiedades que los límites de funciones de dos variables reales.

2.2.2. Límites en el infinito. Límites infinitos

Se puede extender la definición de límite al plano complejo ampliado con el punto del infinito. En este caso se tienen las siguientes definiciones

Definición 2.2.2:

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $M > 0$ tal que

siempre que $|z| > M$, se verifica que $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Definición 2.2.3:

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si para todo número real $M, M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$, se verifica que $|f(z)| > M$.

2.2.3. Continuidad

Una función compleja $f(z)$ es continua en un punto z_0 si está definida en z_0 y en puntos próximos a z_0 toma valores próximos a $f(z_0)$.

La definición formal es la siguiente:

Definición 2.2.4:

La función $f(z)$ es **continua** en un punto z_0 si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|z - z_0| < \delta$ se verifica que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

La función $f(z)$ es continua en un conjunto G del plano complejo si $f(z)$ es continua en todos los puntos de G .

Es importante subrayar que, como sucede en el caso de funciones definidas en \mathfrak{R}^2 , para que una función $f(z)$ sea continua en un punto z_0 hace falta que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

- 1) La función debe estar definida en z_0 , es decir, debe existir $f(z_0)$.
- 2) Debe existir el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
- 3) Debe coincidir dicho límite con el valor de la función en el punto z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si alguna de estas tres condiciones no se verifica, la función no es continua en z_0 .

Los polinomios complejos $p(z)$, así como la función exponencial, e^z , las funciones trigonométricas $\cos z$ y $\sin z$ y las funciones hiperbólicas $\sinh z$ y $\cosh z$, son funciones continuas en todo el plano complejo.

La función $tg z$ no será continua en los valores en que se anule el denominador, $\cos z$.

La función $Log z = \ln |z| + i \cdot Arg(z)$, $Arg(z) \in [-\pi, \pi)$, no es continua en 0 porque no está definida en 0. Tampoco es continua en los puntos del semieje real negativo, pues en efecto, si z_0 es un número real negativo,

$$Log z_0 = \ln |z_0| + i \cdot Arg(z_0) = \ln |z_0| - i \cdot \pi.$$

Los puntos z_1 que están próximos a z_0 por debajo del eje real son tales que $Log z_1 = \ln |z_1| + i \cdot Arg(z_1)$, donde $Arg(z_1)$ se aproxima a $-\pi$. Se tiene entonces que $Log z_1 \rightarrow Log z_0$.

Sin embargo, los puntos z_2 que están próximos a z_0 por encima del eje real son tales que $Log z_2 = \ln |z_2| + i \cdot Arg(z_2)$, donde $Arg(z_2)$ se aproxima a π . Por tanto, $Log z_2$ no se aproxima a $Log z_0$ por lo que la función $Log z$ no es continua en los puntos del semieje real negativo.

En los restantes puntos de \mathbf{C} , la función $Log z$ es continua.

Si se toma otra rama del logaritmo, por ejemplo, $Log z = \ln |z| + i \cdot Arg(z)$, $Arg(z) \in [0, 2\pi)$, la función $Log z$ es continua en todo \mathbf{C} menos los números complejos $z = x$, $x \geq 0$, es decir, en todos los números complejos menos los que están situados en el semieje real positivo, incluido 0. Cualquier rama de la función $Log z$ es continua en \mathbf{C} salvo en una semirrecta de origen el punto 0.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.2.1: Calcular los siguientes límites: a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{2}$; b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$;

$$c) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$$

$$a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{2} = \frac{i+1}{2}$$

$$b) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + iy} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Si se toman los límites direccionales, es decir, a través del eje real y del eje imaginario, se obtienen respectivamente los valores 1 y $-i$. Se tiene entonces que los límites direccionales son diferentes y por tanto no existe límite.

$$c) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 \bar{z}}{z \bar{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2 \bar{z}}{|z|^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0.$$

Ejemplo 2.2.2: Estudiar el límite en el infinito y los límites infinitos de la

$$\text{función: } f(z) = \frac{1}{z^2}$$

El estudio de la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ puede servir como muestra para aplicar

las definiciones de límites infinitos o en el infinito. Se tiene que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} = 0$

porque fijado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número real $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ tal que si el módulo

de z es mayor que M se tiene que $|f(z)| = \left| \frac{1}{z^2} \right| < \frac{1}{M^2} < \varepsilon$.

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = \infty$ porque para cualquier número real $M > 0$ existe $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ tal

que si $0 < |z| < \delta$, se verifica que $|f(z)| = \left| \frac{1}{z^2} \right| > M$.

Ejemplo 2.2.3: Estudiar la continuidad de las funciones del ejemplo 2.2.1.

a) $f(z) = \frac{z+1}{2}$ es continua en $z = i$ porque:

i) Está definida en i , $f(i) = \frac{i+1}{2}$.

ii) Existe $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{2}$, ya que $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{2} = \frac{i+1}{2}$.

iii) El límite coincide con el valor de la función en $z = i$, $f(i) =$

$$\frac{i+1}{2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{2}.$$

b) $f(z) = \frac{|z|}{z}$ no es continua en $z = 0$ porque f no está definida en 0 , y

tampoco existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$.

c) $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$ no es continua en $z = 0$ porque f no está definida en 0 ,

aunque existe $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = 0$.

d) La función $f^*(z) = \begin{cases} \frac{|z|^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$, es continua en 0 porque ahora si se

verifican las tres condiciones, i) existe $f^*(0) = 0$, ii) existe el límite y iii) el límite

coincide con el valor de la función en $z = 0$, $f^*(0) = 0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$.

Ejercicios

2.6. Demostrar que: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i \cdot v_0$ si y sólo si se verifica que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = u_0 \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \operatorname{Im}(f(z)) = v_0.$$

2.7. Calcular:

a. $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{iz}{3}$.

b. $\lim_{z \rightarrow 2i} (3x - i \cdot 5y^2)$.

c. $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{3z + 2i}{2z + 3}$.

d. $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{iz + 2}{2z + 3}$.

2.8. Calcular:

a. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z + 2i}{z - 1}$.

b. $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z + 2i}{z + 1}$.

2.9. Calcular:

a. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z + 2i}{z - 1}$.

b. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 + 2i}{z - 1}$.

c. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z + 2i}{z^2 - 1}$.

2.10. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a. f(z) = \frac{3z + 2i}{z - 1}.$$

$$b. f(z) = e^{\frac{3z + 2i}{z - 1}}.$$

$$c. f(z) = \text{sen} \left(\frac{3z + 2i}{z - 1} \right).$$

$$d. f(z) = x^2 \cdot y + i \cdot (5x - 2y).$$

$$e. f(z) = \text{sen } x \cdot y + i \cdot e^{(x - 2xy)}.$$

2.3. DERIVADA COMPLEJA

2.3.1. Definición de derivada

En el apartado anterior se ha comprobado que el comportamiento de una función compleja frente a la continuidad se puede considerar análogo al de las funciones definidas en \mathfrak{R}^2 . Esto no es así si se quiere introducir la derivación, y la razón de ello es que, como ya se ha indicado antes, una función compleja se puede considerar como una función de una única variable, la variable compleja z , para la que existen unas operaciones análogas a las operaciones entre números reales. Esto permite introducir el concepto de derivada de una función compleja en un punto z_0 de forma análoga a la derivada de una función de una variable real, es decir, como el límite de un cociente de incrementos al aproximarse z al punto z_0 .

Definición 2.3.1:

Sea f definida en un conjunto S , y sea z_0 un punto interior de S . La función

f es **derivable en z_0** si existe:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0), \quad z, h \in \mathbf{C}.$$

Se llama **derivada** de f en el punto z_0 al valor de este límite, es decir a:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Definición 2.3.2:

La función f es **derivable en un conjunto S** del plano \mathbf{C} si f es derivable en todos los puntos de S .

Ejemplos de funciones derivables

- a) Las funciones constantes son derivables en todo punto del plano complejo. Así, la función $f(z) = 2 + i$ es derivable en \mathbf{C} y su derivada es 0.
- b) La función $f(z) = z$ es también derivable en \mathbf{C} y su derivada es 1.
- c) Lo mismo sucede con la función $f(z) = z^n$, que, como en el caso real, tiene como derivada $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$.

Ejemplos de funciones que no son derivables

- a) La función $f(z) = \bar{z} = x - i \cdot y$ no es derivable en ningún punto, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}, \text{ que no existe pues es}$$

diferente según la dirección ya que si h fuese real el límite valdría 1, y si $h = k \cdot i$, valdría -1 .

- b) La función $f(z) = |z|$ tampoco es derivable en ningún punto, pues:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h| - |z|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h(|z+h| + |z|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\overline{z+h}) - z\bar{z}}{h(|z+h| + |z|)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{z} + z\bar{h} + h\bar{h}}{h(|z+h| + |z|)} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{z}}{|z+h| + |z|} + \frac{\bar{h}}{|z+h| + |z|} + \frac{\bar{h}z}{h(|z+h| + |z|)} \right)$$

El límite de los dos primeros sumandos existe pero el tercer sumando no tiene límite cuando h tiende a cero. Por tanto, la función no es derivable en ningún punto.

c) La función $f(z) = |z|^2$ sólo es derivable en el punto $z = 0$. En efecto

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2 \bar{h}}{|h|^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0.$$

Sin embargo, si $z \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)(\overline{z+h}) - z\bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\bar{z} + z\bar{h} + h\bar{h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\bar{z} + z \frac{\bar{h}}{h} + \bar{h} \right), \text{ que no existe.}$$

Es importante observar que la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + 0 \cdot i$ no es derivable en ningún número complejo $z \neq 0$ a pesar de que sus partes real e imaginaria son funciones de \mathfrak{R}^2 con muy buenas propiedades de regularidad.

2.3.2. Propiedades

La derivada compleja conserva las propiedades de la derivada en \mathfrak{R} . Dadas dos funciones complejas $f(z)$ y $g(z)$ derivables en un punto z_0 , y dado un número complejo c cualquiera, se verifican las siguientes propiedades:

- 1) Las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en z_0 .
- 2) Las funciones $f(z) + g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ y $c \cdot f(z)$ son derivables en el punto z_0 y sus derivadas son respectivamente:

$$(f(z) + g(z))' = f'(z_0) + g'(z_0),$$

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0),$$

$$(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z_0).$$

- 3) Si $g(z_0) \neq 0$ en un entorno de z_0 , f/g es derivable en z_0 y su derivada

$$\text{es } \left(\frac{f}{g} \right)' (z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

- 4) Si $f(z)$ es derivable en z_0 y $g(z)$ es derivable en $f(z_0)$, la composición de funciones $h(z) = g(f(z))$ es derivable en z_0 y $h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

2.3.3. Condiciones de Cauchy - Riemann

La derivada compleja de una función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ puede fallar aunque sus partes real e imaginaria, consideradas como funciones de \mathfrak{R}^2 , sean funciones muy regulares, como se ha podido comprobar que sucede en el caso de la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Por ello es importante analizar el comportamiento de las funciones u y v frente a la derivada con el fin de determinar las condiciones precisas que deben verificar para que f sea

derivable.

Sea f derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$. Entonces existe $f'(z_0)$, es decir, existe

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

El hecho de que exista el límite anterior significa que los límites iterados deben también existir y su valor debe ser $f'(z_0)$. Esto significa que, si h es un número real

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right) = \\ &= u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Por otra parte si el incremento de la variable z es un número imaginario puro, $i \cdot h$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} \right) = \\ &= v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0),$$

y por tanto, si existe la derivada de f en z_0 se deben verificar entre u y v las siguientes condiciones, que se conocen como condiciones de Cauchy – Riemann:

Definición 2.3.2:

La función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ verifica las **condiciones de Cauchy – Riemann** en el punto $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ si se verifican las ecuaciones

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Las condiciones de Cauchy - Riemann son entonces condiciones necesarias para la existencia de derivada.

Así, en el caso de la función $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i \cdot 0$, se tiene:

$$u_x(x, y) = 2x; \quad u_y(x, y) = 2y; \quad v_x(x, y) = 0; \quad v_y(x, y) = 0.$$

Por tanto sólo se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann si $z = 0$, el único punto en el que la función es derivable.

Se puede entonces asegurar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1:

Si $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$, se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann en z_0 .

Corolario 2.3.2:

Si $f(z)$ es derivable en z_0 ,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0).$$

Observación. Las condiciones de Cauchy - Riemann no son suficientes para asegurar la derivabilidad de la función, como se puede ver con el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo:

Sea $f(z) = \frac{\bar{z}^2}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$. Esta función no es derivable en 0 ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\bar{h}}{h} \right)^2, \text{ no existe.}$$

Sin embargo, $f(z)$ verifica las condiciones de Cauchy - Riemann en $z = 0$.

En efecto, separando su parte real y su parte imaginaria

$$f(z) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{y^3 - 3yx^2}{x^2 + y^2}.$$

Las derivadas parciales de u y v en 0 valen

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0+h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 = u_x(0, 0)$$

$$u_y(0, 0) = 0 = v_x(0, 0),$$

y por tanto se verifican las condiciones de Cauchy - Riemann en $z = 0$.

Es entonces natural preguntarse si existen condiciones necesarias y suficientes para asegurar la existencia de derivada de una función compleja. La respuesta la da la siguiente proposición que se presenta sin demostración:

Proposición 2.3.3:

Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbf{C}$. La función $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ si y sólo si u y v como funciones de \mathfrak{R}^2 son diferenciables en (x_0, y_0) y verifican las condiciones de Cauchy - Riemann.

El estudio de la condición de diferenciabilidad de las funciones u y v , que se exige en la *Proposición 2.3.3*, puede ser complicado, por lo que se puede

sustituir por una condición suficiente, la existencia de derivadas parciales continuas, más fácil de comprobar:

Proposición 2.3.4:

Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ definida en un conjunto $D \subset \mathbf{C}$. Si existen las derivadas parciales $u_x(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, $v_y(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0)$ y son continuas, y se verifican las condiciones de Cauchy – Riemann en (x_0, y_0) , entonces $f(z)$ es derivable en $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$.

2.3.4. Estudio de la derivada de distintas funciones

Se puede ahora estudiar fácilmente la derivabilidad de funciones como la función exponencial, las funciones trigonométricas o el logaritmo.

Función exponencial. $f(z) = e^z = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sen y$.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de la función exponencial son funciones continuas con derivadas parciales continuas en todo \mathfrak{R}^2 . Además,

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cdot \cos y & u_y &= -e^x \cdot \sen y \\ v_x &= e^x \cdot \sen y & v_y &= e^x \cdot \cos y. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que la función exponencial verifica las condiciones de Cauchy - Riemann en todo punto del plano complejo, con lo que se puede asegurar que la función exponencial es derivable en todo el plano complejo.

Al ser derivable en cada punto del plano, se puede aplicar el *Corolario 2.3.2* para calcular la derivada:

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sen y = e^z$$

Se tiene entonces que la derivada de la función exponencial es la misma

función exponencial, $(e^z)' = e^z$, como ocurre en el caso real.

Se puede comprobar fácilmente que la función $f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbf{C}$, también es derivable en todo el plano complejo y su derivada es $f'(z) = a \cdot e^{az}$.

Funciones trigonométricas. Las funciones seno y coseno, al estar definidas como suma o diferencia de funciones exponenciales, son también

derivables en todo el plano complejo. Así, como $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, se tiene

$$(\cos z)' = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z.$$

Sucede lo mismo en el caso del seno. Como $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, se tiene:

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

El seno y el coseno hiperbólicos son también funciones derivables en todo el plano complejo, y se comportan de forma análoga al seno y coseno hiperbólicos reales. Se puede comprobar fácilmente que

$$(\cosh z)' = \operatorname{senh} z \quad \text{y} \quad (\operatorname{senh} z)' = \cosh z$$

Las restantes funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas se rigen por las reglas de derivación. Así, por ejemplo, $f(z) = \operatorname{tg} z$ es derivable en todos los puntos en los que no se anule el coseno y $(\operatorname{tg} z)' = 1 + (\operatorname{tg} z)^2$.

Logaritmo complejo.

La función $f(z) = \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \cdot \operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$, está definida en todo el plano complejo salvo $z = 0$ y no es continua en el semieje real negativo.

Su expresión en función de las variables x e y es:

$$\text{Log } z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Para todo $z \in \mathbf{C} \setminus \{z: z \in \mathfrak{R}, z \leq 0\}$ las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria existen y son continuas:

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Además verifican las condiciones de Cauchy - Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x.$$

Por tanto, $\text{Log } z$ es derivable en todo $\mathbf{C} \setminus \{z: z \in \mathfrak{R}, z \leq 0\}$. Su derivada es

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.3.1: Estudiar la derivabilidad de la función: $f(z) = \text{Re}(z)$.

Sea $h = \Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$; aplicando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x + i \Delta y}$$

que es igual a 1 si Δy es igual a cero, y a 0 si Δx es igual a cero, por lo que el límite no existe, y la función $\text{Re}(z)$ no es derivable en ningún punto.

Ejemplo 2.3.2: Estudiar la derivabilidad de la función: $f(z) = \text{Im}(z)$.

Sea $h = \Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$; aplicando la definición de derivada se obtiene:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y + \Delta y - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

que es igual a $1/i$ si Δx es igual a cero, y a 0 si Δy es igual a cero, por lo que el límite no existe, y la función $Im(z)$ no es derivable en ningún punto.

Los ejemplos anteriores demuestran que existen funciones que no son derivables en \mathbf{C} y sin embargo sus partes real e imaginaria son funciones diferenciables en \mathfrak{R}^2 .

Ejemplo 2.3.3: Estudiar las condiciones de Cauchy – Riemann de las funciones siguientes: a) $f(z) = z^3$; b) $f(z) = Re(z)$; c) $f(z) = Im(z)$.

a) $f(z) = z^3 = (x + i \cdot y)^3 = (x^3 - 3x \cdot y^2) + i \cdot (3x^2 \cdot y - y^3),$

$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y, -u_y = 6x \cdot y = v_x,$ por lo que verifica las condiciones de Cauchy – Riemann para todo punto z de \mathbf{C} .

b) $f(z) = Re(z) = x, u_x = 1$ distinto de $v_y = 0$; $u_y = 0$; $v_x = 0$. No las verifica en ningún punto.

c) $f(z) = Im(z) = y, u_x = 0$; $v_y = 0$; $u_y = 1$ distinto de $v_x = 0$. No las verifica en ningún punto.

Ejemplo 2.3.4: Estudiar los puntos en los que la función $f(z) = Log(z - i)$ es derivable, y calcular su derivada en los puntos en los que exista.

La función es derivable en $\mathbf{C} \setminus \{z: z = x + i, x \leq 0\}$. Su derivada en estos puntos es $f'(z) = \frac{1}{z - i}$.

Ejemplo 2.3.5: Estudiar los puntos en los que la función $f(z) = \frac{Log(z + 4)}{z^2 + i}$

es derivable, y calcular su derivada en los puntos en los que exista.

La función es derivable en $\mathbf{C} \setminus \left\{ \left\{ z = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right\} \cup \{z : z \in \mathfrak{R}, z \leq -4\} \right\}$ y su

derivada es

$$f'(z) = \frac{z^2 + i - 2z(z+4)\text{Log}(z+4)}{(z^2 + i)^2(z+4)}.$$

Ejercicios

2.11. Comprobar los valores de la derivada de $f(z)$ en los puntos indicados:

a. $f(z) = (z^2 - i)^2$ en $3 - 2i$ vale $-44 - 196i$.

b. $f(z) = 1/(z^3)$ en $3i$ vale $-1/27$.

c. $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ en $-i$ vale $i/2$.

2.12. Derivar las siguientes funciones:

a. $f(z) = (z^2 - i)^6$.

b. $f(z) = \frac{1}{z}$.

c. $f(z) = \frac{z+3}{z-5}$.

d. $f(z) = \frac{4}{(4-z)^2 + i}$.

2.13. Demostrar que la función $f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbf{C}$, es derivable en todo el plano complejo y su derivada es $f'(z) = a \cdot e^{az}$.

2.14. Demostrar que: $(\cosh z)' = \sinh z$ y $(\sinh z)' = \cosh z$.

2.15. Determinar la condición o condiciones que deben verificar las constantes reales a y b para que la función:

$$f(z) = a(x^3 - i \cdot y^3) - 2b \cdot (i \cdot x^2 \cdot y - x \cdot y^2) + i \cdot (y^2 - x^2) + 2x \cdot y - 7$$

satisfaga las condiciones de Cauchy – Riemann.

2.16. Demostrar que la función $f(z) = \frac{xy(x + iy)}{x^2 + y^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, no es

derivable en 0 y sin embargo verifica las condiciones de Cauchy – Riemann en $z = 0$.

2.4. FUNCIONES HOLOMORFAS

La derivada compleja definida en la sección anterior permite introducir el concepto de holomorfía. Las funciones holomorfas juegan un papel fundamental dentro de la teoría de funciones complejas debido a que tienen muy buenas propiedades, como se podrá comprobar a lo largo de esta sección. Esta es la razón por la que algunos autores las denominan funciones regulares.

El buen comportamiento de las funciones holomorfas permite deducir para ellas resultados realmente sorprendentes, que aparecerán en capítulos posteriores.

2.4.1. Funciones holomorfas. Definiciones

Definición 2.4.1:

$f(z)$ es **holomorfa en un conjunto abierto** G si es derivable en todos los puntos de G .

Definición 2.4.2:

$f(z)$ es **holomorfa en un conjunto** A si es holomorfa en un abierto G que contiene a A .

Definición 2.4.3:

Una función $f(z)$ es **holomorfa en un punto** z_0 si es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0 , es decir, si existe un disco de centro z_0 y radio r , $B_r(z_0)$, $r > 0$, tal que $f(z)$ es derivable en todos sus puntos.

Definición 2.4.4:

$f(z)$ es una función **entera** si es holomorfa en todo el plano complejo \mathbf{C} .

2.4.2. Estudio de la holomorfía de las distintas funciones

Los polinomios complejos $p(z)$ son funciones derivables en todo el plano complejo; son entonces funciones holomorfas en \mathbf{C} y por tanto se puede decir que los polinomios son funciones enteras.

La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es derivable en todo el plano complejo salvo $z = 0$. Por

tanto es holomorfa en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Las funciones racionales $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, al estar formadas por cocientes de

polinomios, son funciones derivables en todo el plano complejo, salvo en los puntos que anulan el denominador, es decir, los puntos z_i tales que $Q(z_i) = 0$.

Por tanto, son holomorfas en todo $\mathbf{C} \setminus \{z_i: Q(z_i) = 0\}$.

La función $f(z) = |z|^2$ no es holomorfa en ningún punto del plano complejo, puesto que sólo es derivable en $z = 0$.

Las funciones e^z , $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son holomorfas en todo \mathbf{C} y por tanto son funciones enteras.

La función $\log z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$, $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi)$, es holomorfa en $\mathbf{C} \setminus \{z: z \in \mathfrak{R}, z \leq 0\}$.

2.4.3. Propiedades de las funciones holomorfas

Si una función es constante en un conjunto abierto, existe su derivada y vale cero. La siguiente proposición demuestra la implicación en sentido contrario.

Proposición 2.4.1:

Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto G y sea $f'(z) = 0$ en todos los puntos de G , entonces $f(z)$ es constante en G .

Demostración:

Si $f'(z) = 0$ se tiene que las derivadas parciales de u y v son 0. Basta demostrar que dados dos puntos distintos cualesquiera $z_1 = (x_1 + i \cdot y_1)$ y $z_2 = (x_2 + i \cdot y_2)$ de G , se verifica que $f(z_1) = f(z_2)$. Para ello se toma en primer lugar el punto intermedio $z^* = (x_2 + i \cdot y_1)$. Se tiene:

$$u(x_1, y_1) - u(x_2, y_1) = u_x(\theta_1, y_1)(x_1 - x_2) = 0, \theta_1 \in (x_1, x_2) \Rightarrow u(x_1, y_1) = u(x_2, y_1)$$

$$v(x_1, y_1) - v(x_2, y_1) = v_x(\theta_2, y_1)(x_1 - x_2) = 0, \theta_2 \in (x_1, x_2) \Rightarrow v(x_1, y_1) = v(x_2, y_1)$$

Se tiene entonces que $f(z_1) = f(z^*)$.

Con un razonamiento análogo se comprueba que $f(z_2) = f(z^*)$, con lo que está demostrado que $f(z)$ debe ser constante. \square

La proposición anterior permite obtener de manera inmediata los

siguientes resultados:

Corolario 2.4.2:

Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto

G . Las siguientes implicaciones son ciertas:

- a) $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .
- b) $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .
- c) $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .

Estos resultados se obtienen sin más que comprobar que las condiciones que se dan en las hipótesis de a), b) y c) implican que la derivada debe de ser cero en todo punto de G , y por tanto $f(z)$ es constante en G .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.4.1: Estudiar la holomorfía de $f(z) = e^{|z|^2}$ y calcular el valor de la derivada en $z = x + i \cdot y$, si existe.

$$f(z) = e^{|z|^2} = e^{x^2+y^2}, \text{ por lo que } u(x, y) = e^{x^2+y^2} \text{ y } v(x, y) = 0 \Rightarrow$$

$u_x = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$ distinto de $v_x = 0$, salvo si $x = 0$; $u_y = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$ distinto de $v_y = 0$, salvo si $y = 0$. Por tanto, sólo se verifican las condiciones de Cauchy – Riemann en el punto $z = 0$; como las derivadas parciales existen y son continuas en $z = 0$, la función es derivable en $z = 0$, pero no existe ningún disco que contenga al origen en el que sea derivable, por lo que la función no es holomorfa en ningún punto.

Ejercicios

2.17. Demostrar que si $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es una función holomorfa en un conjunto abierto G , las siguientes implicaciones son ciertas:

a. $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .

b. $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .

c. $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .

2.18. Estudiar la holomorfía de las siguientes funciones complejas, y calcular el valor de la derivada en $z = x + i \cdot y$, si existe:

a. $f(z) = (z + i) \cdot (\bar{z} - 2)^2$.

b. $f(z) = 1/(1 - z)$.

c. $f(z) = (z + \bar{z})^2 / (z - \bar{z})$.

2.19. Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto abierto G . Estudiar si son válidas las siguientes expresiones:

a. $f'(z) = u_z + i \cdot v_z$.

b. $f'(z) = u_x + i \cdot v_x$.

c. $f'(z) = u_y + i \cdot v_y$.

d. $f'(z) = u_z + i \cdot v_z$.

2.5. FUNCIONES ARMÓNICAS

Las funciones armónicas reales, aunque son funciones definidas sobre subconjuntos del plano real, $G \subseteq \mathfrak{R}^2$, están estrechamente relacionadas con las funciones holomorfas.

Las funciones armónicas, como soluciones de la ecuación de Laplace, aparecen en múltiples aplicaciones dentro de diversos campos, como son el potencial electrostático, el flujo de fluidos o problemas relacionados con la transmisión del calor. La relación existente entre las funciones armónicas y las funciones holomorfas hace que la teoría de funciones complejas sea de gran utilidad en la resolución de estos problemas.

2.5.1. Funciones armónicas. Definición

Definición 2.5.1:

Una función $h(x, y)$, $h: G \subseteq \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, es una **función armónica** en el abierto G si tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y

verifica la ecuación de Laplace:
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

La relación entre las funciones holomorfas y las funciones armónicas se puede apreciar en el siguiente resultado:

Proposición 2.5.1:

Si $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es una función holomorfa en un conjunto abierto $G \subseteq \mathbf{C}$, entonces las funciones u y v son armónicas en $G \subseteq \mathfrak{R}^2$.

Demostración.

Si $f(z)$ es holomorfa en el conjunto abierto G , entonces u y v tienen derivadas parciales de primer y segundo orden continuas. Este es un resultado que se demostrará más adelante en el capítulo 4.

Además, las funciones u y v verifican las condiciones de Cauchy – Riemann: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, de donde se deduce que:

$$u_x = v_y \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ v_{yy} = u_{xy} \end{cases}$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow \begin{cases} u_{yy} = -v_{xy} \\ v_{xx} = -u_{yx} \end{cases}$$

Se tiene entonces $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$ y $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$; por tanto u y v son armónicas en $G \subseteq \mathfrak{R}^2$. \square

De la definición de función holomorfa se obtiene de manera inmediata el siguiente resultado:

Proposición 2.5.2:

Si u y v son funciones armónicas en un conjunto abierto $G \subseteq \mathfrak{R}^2$ y verifican $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, la función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es holomorfa en G .

Observación. En la proposición anterior la función u debe ser la parte real de $f(z)$ y v la parte imaginaria. Si se modifica el orden, la función resultante $f(z) = v(x, y) + i \cdot u(x, y)$ puede no ser holomorfa.

Definición 2.5.2:

Sean u y v funciones armónicas en un conjunto abierto $G \subseteq \mathfrak{R}^2$. Se dice que v es **la armónica conjugada de u** en G si la función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es holomorfa en G considerado como un subconjunto de puntos del plano

complejo.

Así, por ejemplo, la función $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2x \cdot y \cdot i$ es holomorfa en \mathbf{C} .

Por tanto, la función $v = 2x \cdot y$ es la armónica conjugada de $u = x^2 - y^2$.

2.5.2. Propiedades de las funciones armónicas

Se presentan a continuación algunas de las propiedades de las funciones armónicas.

1. Si v es la armónica conjugada de u en G , $-u$ es la armónica conjugada de v en G .

En efecto, al ser la función $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ holomorfa en G entonces la función $g(z) = v(x, y) - i \cdot u(x, y)$ es también holomorfa en G .

2. Si u es armónica en G , u_x es la parte real de una función holomorfa.

Basta comprobar que la función

$$f^*(z) = u^*(x, y) + i \cdot v^*(x, y) = u_x(x, y) - i \cdot u_y(x, y) \text{ es holomorfa en } G.$$

3. Si u es armónica en G , y G es un conjunto suficientemente bueno (simplemente conexo), u es la parte real de una función holomorfa.

4. Dada una función armónica u , se puede calcular su armónica conjugada.

El procedimiento para ello se puede ver en el *ejemplo 2.5.1*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 2.5.1: Dada la función $u(x, y) = y^3 - 3x^2 \cdot y$, comprobar que es armónica en \mathbf{C} y obtener su armónica conjugada $v(x, y)$.

$$u_x = -6x \cdot y; u_y = 3y^2 - 3x^2; u_{xx} = -6y; u_{yy} = 6y.$$

Por tanto, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y la función u es armónica en \mathbf{C} .

Para obtener su armónica conjugada, v , se utilizan las condiciones de Cauchy – Riemann:

$$u_x = v_y \Rightarrow v = \int u_x \cdot dy + \varphi(x) = \int -6x \cdot y \cdot dy + \varphi(x) = -3x \cdot y^2 + \varphi(x) \Rightarrow$$

$$v_x = -3y^2 + \varphi'(x) \text{ y al imponer que } v_x = -u_y \Rightarrow -3y^2 + \varphi'(x) = -(3y^2 - 3x^2) \Rightarrow$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3.$$

Se tiene entonces que $v(x, y) = -3x \cdot y^2 + x^3$, y la función

$$f^*(z) = y^3 - 3x^2 \cdot y + i \cdot (x^3 - 3x \cdot y^2) = i \cdot z^3$$

es holomorfa en \mathbf{C} .

Ejemplo 2.5.2: Dada la función $f(z) = y^2 \cdot x - \frac{2}{3}y^3 + i \cdot (x^2 \cdot y - \frac{2}{3}x^3)$, calcular la derivada en los puntos en los que exista. ¿Se puede construir una función $f^*(z)$ holomorfa en \mathbf{C} tal que $Im(f^*(z)) = x^2 \cdot y - \frac{2}{3}x^3$? Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular $f^*(z)$.

Las derivadas parciales de u y v existen y son continuas

$$u_x = y^2; u_y = 2x \cdot y - 2y^2; v_x = 2x \cdot y - 2x^2; v_y = x^2$$

Se impone a continuación que verifiquen las condiciones de Cauchy – Riemann y se tiene entonces que:

$$u_x = v_y \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x.$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 2x \cdot y - 2y^2 = -2x \cdot y + 2x^2 \Rightarrow 2(x - y)^2 = 0 \Rightarrow y = x$$

Las condiciones de Cauchy – Riemann se verifican sólo en los puntos de la recta $z = x + i \cdot x$. Por tanto, $f(z)$ es derivable sólo en los puntos de esta recta y su derivada en cada punto $z_0 = x_0 + i \cdot x_0$ es

$$f'(z_0) = u_x(x_0, x_0) + i \cdot v_x(x_0, x_0) = x_0^2 + i \cdot (2x_0^2 - 2x_0^2) = x_0^2.$$

Se tiene entonces que $f(z)$ no es derivable en ningún conjunto abierto del plano complejo y entonces no es holomorfa en ningún punto.

Para que la función $v(x, y) = x^2 \cdot y - \frac{2}{3} x^3$ pueda ser la parte imaginaria de una función holomorfa hay que ver en primer lugar si $v(x, y)$ es armónica.

Sus derivadas parciales segundas son $v_{xx} = 2y - 4x$ y $v_{yy} = 0$; por tanto, $v_{xx} + v_{yy} = 2y - 4x \neq 0$ si $y \neq 2x$ por lo que $v(x, y)$ no es armónica en ningún conjunto abierto y no puede ser entonces la parte imaginaria de ninguna función holomorfa.

Ejercicios

- 2.20. Comprobar que las funciones $u(x, y) = e^x \cdot \cos y$, $v(x, y) = e^x \cdot \sen y$ son armónicas y que v es la armónica conjugada de u .
- 2.21. Demostrar que si $v(x, y)$ es armónica conjugada de $u(x, y)$, y si $u(x, y)$ es armónica conjugada de $v(x, y)$, entonces $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ es una función constante.
- 2.22. Demostrar que si u es armónica en G , y G es un conjunto suficientemente bueno (simplemente conexo), u es la parte real de una función holomorfa.

2.6. EJERCICIOS

2.23. Calcular la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$ siendo $f(z)$ igual a:

a. $z^2 - 3z + 5$.

b. $z + 1/z$, con z distinto de cero.

c. $z^3 + 2$.

d. $1/(1 - z)$.

2.24. Expresar en forma binómica:

a. e^{1+i} .

b. $e^{\frac{-\pi i}{4}}$.

c. $e^{\frac{-\pi i}{3}}$.

d. $e^{1+\pi i}$.

2.25. Expresar en forma binómica:

a. $\cos(2 - i)$.

b. $\operatorname{sen} i$.

c. $\cos i$.

d. $\operatorname{tg}(1 + i)$.

e. $\operatorname{senh} i$.

f. $\operatorname{cosh} i$.

2.26. Expresar en forma binómica:

a. $\log (1 + i)$.

b. $\text{Log} (-e \cdot i)$.

c. $\text{Log} (1 - i)$.

d. $\log (-e \cdot i)$.

e. $\log (1 - i)$.

2.27. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $e^z = 3$.

b. $e^z = -2$.

c. $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

d. $e^{3zi-1} = 1$.

e. $\log z = e + \pi \cdot i$.

2.28. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\cosh z = 2$.

b. $\cos z = -2$.

c. $\sinh z = 0$.

d. $\cos z = -i$.

e. $\sen z = i$.

2.29. Comprobar que al resolver la ecuación $\cos z = \sen z$ se obtiene $z =$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ con } k \in \mathbf{Z}$$

2.30. La función real $\cosh x$ no se anula nunca; estudiar dónde se anula

$\cosh z$ y comprobar que se anula para $z = \pi \cdot i \cdot \left(\frac{1}{2} + k\right)$ con $k \in \mathbf{Z}$.

2.31. Calcular el dominio de definición de las funciones:

a. $f(z) = \frac{\text{Log}(z+1)}{z^2 + 4i}$.

b. $g(z) = \frac{z-1}{z^2 + iz - 4 - 4i}$.

c. $h(z) = \text{tgh}(2z-1)$.

2.32. Expresar en forma binómica los números complejos:

a. $(1-i)^{i-1}$.

b. $(2i)^{2i+1}$

c. $(-1 + \sqrt{3} \cdot i)^{3/2}$.

d. i^i .

e. 1^i .

f. i^1 .

g. $(2i)^i$.

2.33. Demostrar que, para $z = x + i \cdot y$,

a. $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$.

b. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$.

2.34. Demostrar que $\text{Log}(1+i)^2 = 2 \text{Log}(1+i)$ pero que $\text{Log}(-1+i)^2$ es distinto de $2\text{Log}(-1+i)$.

2.35. Demostrar que se satisfacen las siguientes igualdades:

a. $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1.$

b. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{cos} z.$

c. $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$

2.36. Estudiar si existen los siguientes límites:

a. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}.$

b. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z - \bar{z})^3}{z + \bar{z}}.$

c. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2 + 2z + 5}{3z^2 + 5z - 3}.$

2.37. Estudiar la continuidad de las funciones:

a. $f_1(z) = |z|.$

b. $f_2(z) = \bar{z}.$

c. $f_3(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3 + z}.$

d. $f_4(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3 + z}$ si $z \neq \pm i$, $f(\pm i) = 2i.$

2.38. Estudiar la derivabilidad de las funciones que se indican y calcular en cada caso la derivada en los puntos donde exista.

a. $f(z) = \frac{2z + 1}{\operatorname{cos} z - 2}.$

b. $f(z) = e^{2z/(z-1)}.$

c. $f(z) = h(x)$, siendo h una función tal que $h'(x) \neq 0$.

d. $f(z) = 2x - y + i \cdot 3y^2$.

2.39. Estudiar la derivabilidad de $f(z) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$.

2.40. Deducir las condiciones de Cauchy - Riemann cuando la función está expresada en coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

y comprobar que $f'(z) = e^{i\theta} \cdot (u_r + i \cdot v_r)$.

2.41. Estudiar donde son holomorfas las funciones que se indican:

a. $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$.

b. $f(z) = 1/(1+z)$.

c. $f(z) = z + \bar{z}$.

d. $f(z) = \frac{2z+1}{e^z + e^{-z}}$.

2.42. Sea $f(z)$ una función holomorfa en una región A . Estudiar la holomorfía de las siguientes funciones:

a. $f_1(z) = f(\bar{z})$.

b. $f_2(z) = \bar{f}(z)$.

c. $f_3(z) = \bar{f}(\bar{z})$.

d. $f_4(z) = \cos(\bar{z})$.

2.43. Sea $u(x, y) = 2x \cdot (1 - y)$ una función de dos variables reales.

- a) Demostrar que es armónica.
- b) Encontrar una función $f(z)$ holomorfa tal que su parte real sea $u(x, y)$.
- c) Expresar $f(z)$ en términos de z .

2.44. Estudiar si las siguientes funciones son armónicas y en caso afirmativo calcular sus armónicas conjugadas.

a. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x \cdot y - 2x + 3y$.

b. $u(x, y) = 3x^2 \cdot y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$.

c. $u(x, y) = 2x \cdot y + 3x \cdot y^2 - 2y^3$.

2.45. Dada la función $u(x, y)$ comprobar que es armónica y obtener su armónica conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ sea una función holomorfa, siendo:

a. $u(x, y) = x \cdot y, f(0) = i$.

b. $u(x, y) = e^x \cdot \cos y, f(0) = 1 + 2i$.

c. $u(x, y) = x^2 - y^2, f(0) = i$.

d. $u(x, y) = x^3 - 3x \cdot y^2, f(0) = i$.

2.46. Obtener una función holomorfa $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, siendo:

a. $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(1) = 0$.

b. $v(x, y) = x \cdot y, f(0) = 1$.

c. $v(x, y) = e^x \cdot \cos y, f(0) = i$.

d. $u(x, y) = y^3 - 3x^2 \cdot y, f(0) = i$.

2.47. Sea $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ una función holomorfa en un conjunto

abierto G . Demostrar que las siguientes implicaciones son ciertas:

- a. $u(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .
- b. $v(x, y)$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .
- c. $|f(z)|$ constante en $G \Rightarrow f(z)$ constante en G .

CAPÍTULO 3

Series complejas

El interés fundamental que se persigue en este capítulo es la representación de las funciones complejas por medio de series de potencias, lo que se puede conseguir si las funciones tienen buenas propiedades de regularidad. Como se podrá comprobar en este capítulo y en los capítulos siguientes, tanto las series de potencias como las *series de Laurent* tienen una importancia especial en la teoría de funciones de variable compleja, pues, por una parte toda función holomorfa en un punto admite un desarrollo en serie de potencias en dicho punto, es decir, es analítica en dicho punto, y por otra parte los coeficientes de la serie juegan un papel fundamental dentro de la teoría de integración compleja, lo que permite utilizar los desarrollos en *series de Laurent* en un punto singular para el cálculo de integrales.

En las *secciones 1 y 2* de este capítulo se estudian el comportamiento y las propiedades de las sucesiones y series de números complejos y las sucesiones y series de funciones complejas. Para ello es conveniente revisar los conocimientos sobre sucesiones y series reales, con el fin de adaptarlos al campo complejo. Las definiciones, teoremas y consecuencias que se verifican en el caso de series reales se mantienen, pues el campo complejo se comporta de manera similar a \mathfrak{R}^2 , ya que una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

igual a $\{x_n + i \cdot y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con lo cual basta estudiar las dos sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para analizar el comportamiento de la sucesión compleja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se presentan las definiciones de sucesión de números complejos y de funciones complejas, límite de una sucesión, convergencia de sucesiones, sucesiones de *Cauchy* y convergencia absoluta, así como las consecuencias que se derivan del hecho de que el plano complejo \mathbf{C} sea un espacio métrico completo. Una serie infinita se define como el límite de la sucesión de las sumas parciales asociadas a la serie. Se introduce el concepto de convergencia uniforme y se analiza el dominio de convergencia en el plano complejo.

Dentro de las series de funciones tienen un interés especial las series de potencias, y esta es la razón por la que se estudian de manera específica en la *sección 3*. Las series de potencias definen, dentro de su disco de convergencia, funciones complejas con muy buenas propiedades de regularidad. Esto motiva el que se las considere como un grupo especial de funciones, que se denominan funciones analíticas, y su estudio se desarrolla en la *sección 4*.

Sin embargo, muchas de las funciones que se utilizan habitualmente no se pueden expresar como series de potencias en determinados puntos, debido a que en esos puntos presentan singularidades. Se plantea entonces la posibilidad de extender el concepto de serie de potencias a una situación más general, es decir a la representación de una función a través de sumas infinitas de series de potencias positivas y negativas. Esto da lugar a la utilización de las series de Laurent o series dobles, que se estudian en la última sección de este capítulo.

3.1. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Las sucesiones y series de números complejos se comportan de la misma forma que las sucesiones y series de números reales. Así, una sucesión de números complejos es un conjunto ordenado de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, y, dada la sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, la serie asociada se

representa de la forma $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$.

Definición 3.1.1:

La sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es **convergente** y tiene como límite c si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural m tal que para todo $n > m$ los términos c_n de la sucesión están a una distancia de c menor o igual que ε .

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \equiv \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } m \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n > m, |c_n - c| < \varepsilon.$$

Se comprueba fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.1:

Si $c_n = a_n + ib_n$ y $c = a + ib$ se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Basta entonces estudiar el comportamiento de las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ para analizar la convergencia de $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Las definiciones, propiedades y operaciones de las sucesiones reales se

pueden así extender de manera automática al campo complejo.

Definición 3.1.2:

Una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n_1, n_2 > m, |c_{n_1} - c_{n_2}| < \varepsilon$.

Como en el caso real se verifica:

Proposición 3.1.2:

Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de números complejos, entonces:

$\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow \{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es convergente.

La convergencia de una serie de números complejos se define como el límite de la sucesión de las sumas parciales de la serie.

Definición 3.1.3:

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, se dice que la serie asociada $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es **convergente** si la sucesión de las sumas parciales $S_n =$

$\sum_{k=1}^n c_k$ converge. Es decir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \equiv \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } m \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n > m, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} c_k \right| < \varepsilon.$$

Si una serie compleja no es convergente, se dice que es **divergente**.

Si una serie converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, se dice que S es el valor de la **suma**

de la serie: $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = S$.

En función de su conveniencia, se utilizará también la notación $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$, en

la que el primer término de la serie se denomina c_0 .

Se comprueba fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.3:

Sea $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tales que $c_n = a_n + ib_n$.

Entonces: $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ converge $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ convergen.

De la misma forma que en el caso de las sucesiones, basta estudiar el comportamiento de las series de números reales $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ para analizar la

convergencia de la serie compleja $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Se pueden utilizar entonces los

criterios de convergencia de series reales para analizar la convergencia de las series complejas.

De este hecho se deduce de manera inmediata el siguiente resultado:

Corolario 3.1.4:

Una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ sea convergente es que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Definición 3.1.4:

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es **absolutamente convergente** si la serie real de sus

módulos $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|$ converge.

Si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es absolutamente convergente, como $|a_k| \leq |c_k|$ y $|b_k| \leq$

$|c_k|$, el criterio de comparación de series reales asegura la convergencia de las

series reales $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|$, y como consecuencia de ello la convergencia de

las series $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Se deduce entonces, igual que en el caso real,

que la convergencia absoluta de una serie compleja implica la convergencia de la serie.

Dada una serie compleja $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ se tienen entonces tres series reales

asociadas a ella:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(c_k), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Im}(c_k) \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|.$$

Basta revisar las propiedades, los teoremas y los criterios de convergencia de las series reales para estudiar automáticamente los de las series complejas. Son de especial utilidad los criterios de la raíz y del cociente, que se enuncian a continuación:

Proposición 3.1.5: Criterio de la raíz

Sea $\{c_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, una sucesión de números complejos, y sea $L =$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Si L es menor que 1 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge absolutamente, y

si L es mayor que 1 la serie diverge.

Se observa que en el caso en el que L sea igual a 1, el criterio no afirma nada, por lo que suele denominar el caso dudoso.

Proposición 3.1.6: Criterio del cociente

Sea $\{c_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ una sucesión de números complejos, y sea $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$. Si L es menor que 1 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge absolutamente, y si L es mayor que 1 la serie diverge.

Se observa que en el caso en el que L sea igual a 1, el criterio no afirma nada, por lo que suele denominar el caso dudoso.

Es interesante recordar que ambos criterios están estrechamente ligados entre sí, ya que si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ entonces también existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ y ambos coinciden.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.1.1: Estudiar la convergencia de la sucesión $c_n = \frac{n+i}{n-i}$.

La sucesión c_n se puede expresar como $c_n = \frac{(n+i)^2}{(n-i)(n+i)} = \frac{n^2-1}{n^2+1} +$

$$\frac{2ni}{n^2+1}.$$

La sucesión de números reales $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ es convergente y tiende a 1, y

la sucesión $b_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$ también es convergente y tiende a 0. Por tanto la

sucesión c_n es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Ejemplo 3.1.2: Estudiar la convergencia de la sucesión $c_n = \frac{1 + (-2)^n i}{2^n}$.

La parte real es la sucesión de números reales $a_n = \frac{1}{2^n}$, que converge a

0. Pero la parte imaginaria $b_n = \frac{(-2)^n}{2^n}$ es una sucesión de números reales que

no converge porque los términos pares de la sucesión tienden a 1 mientras que los impares tienden a -1 . Por tanto, la sucesión c_n no converge.

Ejemplo 3.1.3: Demostrar que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} c^k$,

definida para un número complejo c fijado previamente, es absolutamente convergente si $|c| < 1$, y es divergente si $|c| \geq 1$.

En efecto, si

$S_n = 1 + c + c^2 + \dots + c^n$, multiplicando esta expresión por c se tiene:

$$cS_n = c + c^2 + \dots + c^{n+1}.$$

Restando ambas expresiones:

$$S_n(c - 1) = c^{n+1} - 1, \text{ y por tanto } S_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

Si $|c| < 1$, al hacer tender n a infinito $\sum_{k=0}^{+\infty} c^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - c}$.

Sin embargo, si $|c| \geq 1$, la sucesión S_n es divergente, puesto que en este

caso $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ no tiende a cero.

Ejemplo 3.1.4: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \dots = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots) + i(1 - \frac{1}{3}$

$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots)$. Se tiene entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Las partes real e imaginaria de la serie son series reales alternadas monótonas decrecientes y por tanto convergen. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ es entonces

convergente. Sin embargo no es absolutamente convergente ya que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge.

Ejercicios

3.1. Demostrar que la sucesión $c_n = -1 + \frac{1-n}{n^3}i$ converge a -1 .

3.2. Demostrar que la sucesión $c_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n$ converge a 0 .

3.3. Demostrar que la sucesión $c_n = \frac{1+2^n i}{2^n - i}$ converge a i .

3.4. Estudiar la convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^3} + \frac{2n+3}{n^4} i \right)$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$$

3.2. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS

Las sucesiones y series de funciones complejas se comportan también de la misma forma que las sucesiones y series de funciones reales. Dada una sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ de funciones complejas definidas en los puntos z de un conjunto $G \subseteq \mathbf{C}$, los conceptos de convergencia puntual, absoluta y uniforme de

la sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ o de la serie asociada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ son análogos al caso de

sucesiones de funciones reales, así como los teoremas que permiten transmitir las buenas propiedades de las funciones que forman la sucesión a la función límite.

3.2.1. Sucesiones de funciones complejas

Sean $f_n(z)$, $n \in \mathbf{N}$, y $f(z)$ funciones complejas definidas en un subconjunto $G \subseteq \mathbf{C}$, sea z_0 un punto de G y sea $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ la sucesión de funciones complejas definida con las funciones $f_n(z)$.

Definición 3.2.1:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ **converge en el punto** z_0 a $f(z_0)$ en G si la sucesión

numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a $f(z_0)$. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n > m, |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Definición 3.2.2:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ **converge puntualmente** a la función $f(z)$ en G si para cada $z_0 \in G$ la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a $f(z_0)$.

Es decir, para cada $z_0 \in G$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n > m$, $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Definición 3.2.3:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ **converge absolutamente** a la función $f(z)$ en G si para cada $z_0 \in G$ la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge absolutamente a $f(z_0)$.

Definición 3.2.4:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ **converge uniformemente** a la función $f(z)$ en G si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que para todo $z \in G$ y todo $n > m$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Es importante resaltar que para que la convergencia de la sucesión en un conjunto G sea uniforme es preciso que para cada $\varepsilon > 0$ fijado exista un término m de la sucesión, **independiente** del punto z , a partir del cual la distancia entre $f_n(z)$ y $f(z)$ sea menor ε , para todo $z \in G$.

3.2.2. Series de funciones complejas. Definición y convergencia

Los distintos tipos de convergencia de series se definen a través de la convergencia de las correspondientes sucesiones de sumas parciales asociadas. Sea $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto $G \subseteq \mathbf{C}$.

Definición 3.2.5:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ **converge en el punto** $z_0 \in G$ si la serie de números

complejos $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$ converge. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que

$$\forall n > m, \text{ se verifica que } \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Definición 3.2.6:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ **converge puntualmente** en G si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$

converge para todo $z_0 \in G$.

Definición 3.2.7:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ **converge absolutamente** en $z_0 \in G$ (respectivamente

en G) si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z_0)|$ converge (resp. $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge en todo $z \in G$).

Definición 3.2.8:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ **converge uniformemente** en G si para cada $\varepsilon > 0$ existe

$m \in \mathbf{N}$ tal que para todo $z \in G$ y $\forall n > m$, se verifica que $|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(z)| < \varepsilon$.

Es importante señalar que, igual que en el caso de las sucesiones, para que la convergencia de la serie en G sea uniforme, el valor m debe depender únicamente del ε elegido y no del punto z del dominio, como ocurría en la convergencia puntual. Tiene sentido, por tanto, hablar de convergencia uniforme en un conjunto (nunca en un punto).

La relación entre los distintos tipos de convergencia que se acaban de definir es la misma que en el caso real.

De la propia definición se deduce de manera inmediata que la convergencia absoluta implica la convergencia puntual.

La convergencia uniforme de una serie en un conjunto implica también la convergencia puntual de la serie en el conjunto.

Si una serie converge uniformemente en un conjunto G también converge uniformemente en cualquier subconjunto de G .

Por otra parte, es importante observar que, como en el caso real, la convergencia uniforme de una serie en un conjunto no implica necesariamente la convergencia absoluta de la serie en dicho conjunto.

Los criterios de convergencia de series de funciones reales son válidos para el estudio de la convergencia de series de funciones complejas. De ellos cabe destacar el criterio de Weierstrass que se enuncia a continuación.

Proposición 3.2.1: Criterio de la mayorante de Weierstrass.

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ una serie de funciones complejas definidas en un

subconjunto G del plano complejo, tales que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe una constante $M_n \in \mathfrak{R}$ que verifica $|f_n(z)| \leq M_n, \forall z \in G$, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge absolutamente y uniformemente en G .

El criterio de la mayorante de Weierstrass permite entonces asegurar la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones a través de la convergencia absoluta de una serie numérica que la mayorante, y será de gran utilidad en el estudio de la convergencia de las series de potencias.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente y absolutamente en

el conjunto $A_r = \{z; |z| \leq r\}$, siempre que r sea un número real tal que $0 \leq r < 1$,

pues en este caso se tiene que $\left| \frac{z^n}{n} \right| \leq r^n = M_n$, y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si $r < 1$. En

consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $A_1 = \{z; |z| < 1\}$ y

converge además uniformemente y absolutamente en cualquier conjunto $A_r = \{z; |z| \leq r\}$, si $r < 1$.

De la convergencia puntual de una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ en un conjunto G se

deduce la existencia de una función $f(z)$ definida en G tal que para cada $z \in G$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z).$$

Definición 3.2.9:

Dada una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ convergente en un conjunto G , se llama **suma de**

la serie a la función $f(z)$ que define la serie en los puntos de G .

Así, la **serie geométrica** $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$, que como se ha comprobado en el

ejemplo 3.1.2. es convergente para todo valor de z tal que $|z| < 1$, define una función $f(z)$ en el interior del disco unidad, $B_1(0)$, que representa la suma de la

serie y es precisamente $\frac{1}{1-z}$, por lo que $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$.

De la misma forma que en el caso de series de funciones reales, la obtención de la función que define una serie convergente no es en general una tarea fácil, pero sí lo es para algunos tipos especiales de series. Este es el caso anterior, en el que $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ es una serie geométrica.

3.2.3. Series de funciones complejas. Continuidad y derivabilidad

La convergencia uniforme de una serie de funciones definidas en un subconjunto del plano complejo permite transmitir a la función límite muchas de las buenas propiedades de las funciones que definen la serie. Los teoremas

que aseguran las condiciones que se precisan son los mismos que en el caso de series de funciones reales y se enuncian a continuación.

Proposición 3.2.2:

Si las funciones $f_n(z)$ son continuas en G y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge

uniformemente en G a $f(z)$, entonces $f(z)$ es una función continua en G .

La convergencia uniforme es suficiente para garantizar la continuidad de la función límite de una serie de funciones continuas. Más adelante, cuando se haya introducido el concepto de integración compleja, se podrá comprobar que la convergencia uniforme es también suficiente para asegurar la integrabilidad de la función límite de una serie de funciones integrables.

Sin embargo, la continuidad uniforme no es una condición suficiente para garantizar la derivabilidad de la función límite de una serie de funciones $f_n(z)$ derivables. Se necesitan para ello condiciones adicionales, como señala la siguiente proposición, que también se enuncia sin demostración.

Proposición 3.2.3:

Si las funciones $f_n(z)$ son derivables en G , la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge en

un punto $z_0 \in G$ y la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(z)$ converge uniformemente

en G , entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en G a una función

derivable $f(z)$ y se tiene que $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(z)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.2.1: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^n 2^{-n} \text{ en el conjunto } G \equiv \{z = x + iy; x \geq 0\}.$$

Si $\left| \frac{1-z}{1+z} \right| \leq 1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$, serie geométrica

convergente, por lo que por el criterio de Weierstrass, si $\left| \frac{1-z}{1+z} \right| \leq 1$ la serie

converge absoluta y uniformemente.

Si $z \in G$, se tiene que $\left| \frac{1-z}{1+z} \right|^2 = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1-z}{1+z} \right| \leq 1$ y por tanto

la serie converge absoluta y uniformemente en G .

Ejemplo 3.2.2: Obtener la suma de la serie del *ejemplo 3.2.1*.

Esta serie es una serie geométrica de razón $\frac{1-z}{2(1+z)}$ y como $\left| \frac{1-z}{2(1+z)} \right| =$

$\frac{1}{2} \left| \frac{1-z}{1+z} \right| \leq \frac{1}{2} < 1$ si $z \in G$, la serie se puede sumar en G y se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-z}{2(1+z)} \right)} = \frac{2(1+z)}{2(1+z) - (1-z)} = \frac{2(1+z)}{1+3z}.$$

Este resultado se puede extender al subconjunto de puntos del plano

complejo tales que $\left| \frac{1-z}{2(1+z)} \right| < 1$, es decir, al conjunto de puntos $z = x + iy$ tal

$$\text{que } (x-1)^2 + y^2 < 4((x+1)^2 + y^2) \Rightarrow 3 \left[x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 \right] > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{3} \right)^2 + y^2 - \frac{16}{9} > 0.$$

Se tiene entonces que la serie converge en el conjunto de puntos z tal

que $\left| z + \frac{5}{3} \right| > \frac{4}{3}$, es decir, converge en el exterior del disco de centro el

punto $-\frac{5}{3}$ y de radio $\frac{4}{3}$.

Ejercicios

3.5. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-z}{2+z} \right)^{n-1} 3^{-n-1}$ en el

conjunto $G \equiv \{ z = x + iy; x \geq 0 \}$ y si es posible calcular su suma.

3.6. Estudiar el dominio de convergencia de las series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2z-1)^{n+1} 4^{-n+1}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+z} \right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2z)^{n+1} 4^{-n+1}$

3.7. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$ converge en la región $\{z; \operatorname{Re} z < 0\}$.

3.3. SERIES DE POTENCIAS

Dentro de las series de funciones tienen un interés especial las series de potencias. Como se verá a continuación, las series de potencias juegan un papel fundamental dentro de la teoría de funciones de variable compleja.

3.3.1. Definición. Convergencia de una serie de potencias

Definición 3.3.1.

Se denomina **serie de potencias** alrededor del punto z_0 a una serie de la

forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con $c_n \in \mathbf{C}$.

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ que se han estudiado en

secciones anteriores son ejemplos de series de potencias desarrolladas alrededor del punto $z_0 = 0$, con unos coeficientes c_n que valen respectivamente 1 y $\frac{1}{n}$. Ambas series convergen uniformemente en cualquier disco cerrado de centro 0 y radio r , con $0 < r < 1$, y convergen puntualmente en el disco de radio uno, $\{z; |z| < 1\}$.

El primer problema que se puede plantear es el estudio de la

convergencia de una serie de potencias. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge siempre en el punto $z = z_0$ y su valor es c_0 . Se trata de estudiar si además converge en otros puntos distintos de z_0 .

Sea $B_R(z_0)$ al disco abierto de centro z_0 y radio R , es decir, el conjunto de números complejos z tales que $|z - z_0| < R$.

La proposición que sigue aporta una información precisa sobre el comportamiento de una serie de potencias frente a la convergencia.

Proposición 3.3.1:

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en un punto $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente y uniformemente en cada disco cerrado $\bar{B}_r(z_0)$, con $r < |z_1 - z_0|$.

Demostración:

Como la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ converge, el término general de la sucesión $\{c_n (z_1 - z_0)^n\}$ tiende a cero y la sucesión está acotada. Sea M una cota de la sucesión, es decir, sea M tal que $|c_n (z_1 - z_0)^n| \leq M$, para todo n , y sea $r < |z_1 - z_0|$. Se tiene entonces, para todo $z \in \bar{B}_r(z_0)$,

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left| c_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} (z_1 - z_0)^n \right| \leq M \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leq M \left| \frac{r}{|z_1 - z_0|} \right|^n = M_n.$$

Al ser $|z_1 - z_0| > r$, la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = M \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{r}{|z_1 - z_0|} \right|^n$

converge, ya que es una serie geométrica de razón menor que 1. Aplicando el criterio de Weierstrass se tiene entonces la convergencia absoluta y uniforme

de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en el disco $\bar{B}_r(z_0)$, $r < |z_1 - z_0|$. \square

Corolario 3.3.2:

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en un punto $z_1 \neq z_0$, y no converge en

otro punto z_2 , existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge en $B_R(z_0)$ y no converge en ningún número complejo z tal que $|z - z_0| > R$.

Demostración:

Basta tomar $R = \sup\{s \in \mathfrak{R}; \exists z \in \mathbf{C}, |z - z_0| = s \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

converge}. El supremo de este conjunto existe siempre puesto que es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente por $|z_2 - z_0|$. \square

La proposición y el corolario anteriores permiten asegurar que si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ además de converger en z_0 converge en algún otro punto z_1 , existe un disco centrado en z_0 , que contiene a z_1 , en cuyo interior la serie converge mientras que fuera de él la serie diverge. Es importante observar que este disco puede tener radio infinito, en cuyo caso la serie converge en todo el plano complejo.

Definición 3.3.2:

Se llama **radio de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ al número

real R tal que la serie converge en el interior de $B_R(z_0)$ y diverge si $|z - z_0| > R$.

Si la serie sólo converge en el punto z_0 el radio de convergencia es 0. Por el contrario, si la serie converge en todo el plano complejo su radio de convergencia es infinito. En este caso, la *proposición 3.3.1* asegura que la serie converge absolutamente en todo el plano complejo y converge uniformemente en cada disco $B_r(z_0)$, con $0 < r < \infty$.

Utilizando el criterio de la raíz se puede asegurar que

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

con el convenio de que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

La fórmula anterior permite calcular el radio de convergencia de una serie a partir de los coeficientes de la serie. Sin embargo, en la práctica suele ser más sencillo calcularlo directamente, estudiando la convergencia de la serie.

Así, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$.

Tiene por tanto radio de convergencia 1.

Para estudiar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ se puede

aplicar el criterio del cociente, con el que se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)}{z^n/n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{zn}{n+1} \right| = |z|.$$

La serie entonces converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$, por lo que su

radio de convergencia es 1.

Mediante el criterio del cociente se calcula el radio de convergencia de la

serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ y se obtiene que también es 1.

Definición 3.3.3:

Se llama **disco de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ al disco

$B_R(z_0)$, donde R es el radio de convergencia de la serie.

El radio de convergencia de una serie permite pues dividir al plano complejo en dos regiones: el disco de convergencia de la serie, en cuyos puntos la serie converge, y el exterior del disco, es decir, los puntos z del plano tales que $|z - z_0| > R$, donde la serie diverge. En los puntos de la frontera entre las dos regiones el comportamiento de la serie frente a la convergencia puede dar lugar a situaciones diferentes, como se puede apreciar en los ejemplos que se acaban de estudiar:

Las series $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tienen el mismo radio de

convergencia, $R = 1$. Sin embargo, su comportamiento frente a la convergencia en los puntos z de la frontera, $|z| = 1$, es diferente en los tres casos, como se verá a continuación.

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ no converge en ningún punto de la

circunferencia de centro 0 y radio 1, ya que para cada z_0 , $|z_0| = 1$, z_0^n no tiende

a 0 al tender n a infinito. Lo que sucede es que para cada z_0 , $|z_0| = 1$, con $\arg(z_0) = k \cdot \pi$, si k es un número racional, los valores de z_0^n se repiten a partir de un n suficientemente grande, con lo que la serie tiende a infinito. Y si k es un número irracional, los valores de z_0^n no se repiten y van recorriendo puntos diferentes del círculo unidad sin aproximarse a ninguno.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ se comporta de manera diferente en los puntos de la

frontera. Si $z = 1$ la serie diverge, pues es la serie armónica. En cambio, la serie converge si $z = -1$ pues coincide con la serie armónica alternada. De hecho, se puede demostrar que converge en todos los puntos de la circunferencia unidad salvo en $z = 1$.

Por último, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolutamente en todos los puntos

de la circunferencia unidad, puesto que si $|z| = 1$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que es convergente.

Los ejemplos anteriores demuestran que la convergencia de una serie en los puntos de la frontera de su disco de convergencia es una cuestión delicada, que aquí sólo se va a tratar en casos puntuales en los que el estudio de la convergencia sea fácil de abordar.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.3.1. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$.

Aplicando el criterio del cociente:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)z^{n+1}}{nz^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)z}{n} \right| = |z|.$$

Por tanto, la serie converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$, con lo cual su radio de convergencia es 1.

Ejemplo 3.3.2. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

El criterio del cociente en este caso
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! z^{n+1}}{(n+1)! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0$$

para todo z . Esto quiere decir que la serie converge en todo el plano complejo y por tanto su radio de convergencia es infinito.

Ejemplo 3.3.3. Calcular el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)^n)^n z^n.$$

El radio de convergencia de la serie es:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(1 + (-1)^n)^n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n)} = \frac{1}{2}.$$

El estudio de la convergencia de esta serie también se puede hacer

teniendo en cuenta que $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} z^{2n}$; aplicando el criterio

del cociente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{2^{2n} z^{2n}} \right| = 4 |z|^2 < 1$ si $|z| < \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3.3.4. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$.

El criterio del cociente de nuevo asegura que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot z = \infty$$

sea cual sea el valor de z . Esto quiere decir que la serie diverge en todo el plano complejo salvo $z = 0$, y por tanto su radio de convergencia es 0.

3.3.2. Funciones definidas por series de potencias

Toda serie de potencias define en su disco de convergencia una función compleja.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z).$$

Este es el caso de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, que define la función $f(z) =$

$$\frac{1}{1-z} \text{ para todo } z \text{ tal que } |z| < 1.$$

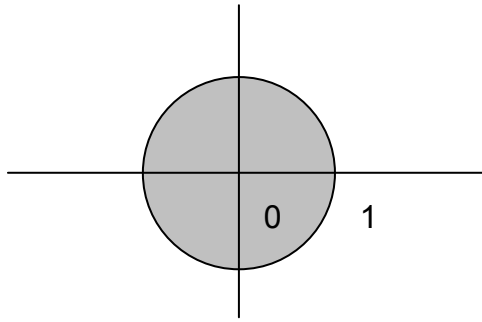


Figura 3.1: Disco de centro el origen y radio 1.

Las funciones definidas como series de potencias se pueden sumar y multiplicar dentro de su radio de convergencia.

Proposición 3.3.3:

Dadas dos funciones $f(z)$ y $g(z)$, definidas como series de potencias tales

que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con un radio de convergencia R_1 , y $g(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$, con un radio de convergencia R_2 , $0 \leq R_1 \leq R_2$, se tiene que:

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) (z - z_0)^n$$

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n, \text{ con } p_n = \sum_{j=0}^n c_j d_{n-j},$$

y ambas series tienen un radio de convergencia mayor o igual que R_1 .

Las funciones definidas como series de potencias tienen muy buenas propiedades dentro del disco de convergencia. Ello es debido a que una serie de potencias converge absoluta y uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en su disco de convergencia. Esto hace que la función $f(z)$ herede

las buenas propiedades de las sumas parciales S_n de la serie, que son en realidad polinomios complejos, con lo cual S_n son funciones continuas y derivables cuantas veces se quiera. De esta forma se deduce de manera inmediata la continuidad de $f(z)$ en su disco de convergencia. Para estudiar su derivabilidad se define en primer lugar la serie derivada.

Definición 3.3.4:

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ definida en $B_R(z_0)$, con radio de convergencia R , se llama **serie derivada** a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$.

La relación entre estas dos series se determina en las proposiciones que se presentan a continuación.

Proposición 3.3.4:

Las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración:

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Para obtener el radio de convergencia de la serie derivada se calcula:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|n c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|n c_n|} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Por tanto, el radio de convergencia de la serie derivada es también R . \square

Proposición 3.3.5:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, $f(z)$ es derivable en $B_R(z_0)$ y

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \text{ para todo } z \text{ de } B_R(z_0).$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las *proposiciones 3.2.3 y 3.3.4.*

Proposición 3.3.6:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, $f(z)$ es infinitamente

derivable en $B_R(z_0)$.

Demostración:

Basta aplicar la *proposición 3.3.5* a las sucesivas derivadas.

Proposición 3.3.7:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, se tiene que $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, y

la serie de potencias coincide con la serie de Taylor en el punto z_0 de la función que define la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Demostración:

En virtud de la *proposición 3.3.5.* se tiene que $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$

con lo que $f'(z_0) = c_1$.

Aplicando de nuevo la proposición a la serie derivada:

$$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2}$$

con lo que $f''(z_0) = 2c_2$ y $c_2 = f''(z_0)/2$.

Repetiendo el proceso k veces se tiene:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k}$$

por lo que $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot c_k$ y $c_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, con lo cual la serie de potencias que define la función coincide necesariamente con la serie de Taylor de la función.

□

Proposición 3.3.8:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es igual a cero en un entorno del punto z_0 , debe

ser idénticamente nula en todo su dominio de convergencia.

Demostración:

Si $f(z) = 0$ en un entorno de z_0 todas las derivadas de f en z_0 deben valer cero, y por tanto los coeficientes de la serie deben ser 0. Se tiene así que, aplicando la *proposición 3.3.7*, la serie es idénticamente nula en todo su dominio de convergencia. □

Es interesante observar que las condiciones de la *proposición 3.3.8* se pueden debilitar de manera que basta que $f(z)$ se anule en una sucesión de puntos $z_n \rightarrow z_0$ para asegurar que la función tiene que ser idénticamente nula

en todo su dominio de convergencia.

La proposición anterior permite demostrar de manera inmediata el principio de unicidad para las series de potencias.

Proposición 3.3.9:

Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ tienen el mismo radio de

convergencia R y coinciden en un conjunto de puntos $\{z_n, z_0\}$, con $z_n \rightarrow z_0$, entonces necesariamente $a_n = b_n$ para todo n , y las dos series coinciden en todo su disco de convergencia.

Las proposiciones anteriores confirman las buenas propiedades de las funciones que se pueden expresar como series de potencias, así como la estrecha relación que existe entre una serie y su serie derivada. Esta relación permite utilizar de manera alternativa una serie o su serie derivada para estudiar la convergencia de la otra, o incluso para obtener su suma.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.3.5. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ y

calcular su suma.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ es la serie derivada de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$, que

es una serie geométrica de razón $\frac{z-i}{5}$ y, por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$

converge si $|z - i| < 5$. Se puede entonces asegurar lo mismo para la serie

derivada, con lo que el disco de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ es

$B_5(i)$.

Para obtener su suma se puede utilizar de nuevo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{5^n}$, ya

que al ser una serie geométrica se puede sumar fácilmente y coincide en $B_5(i)$

con la función $f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z-i}{5}} = \frac{5}{5+i-z}$, por lo que obteniendo su derivada:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n} = f'(z) = \frac{5}{(5+i-z)^2}.$$

Ejemplo 3.3.6. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ utilizando su

serie derivada y calcular su suma.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n =$

$z \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$. Como la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ es la serie derivada de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, se tiene

que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ es el mismo que el de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, y por

tanto vale 1.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ se puede expresar como $z \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ y como la serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ es la serie derivada de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en el disco $B_1(0)$, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}. \text{ Por tanto } \sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, z \in B_1(0).$$

Ejemplo 3.3.7. Obtener una serie de potencias en el punto $z = 0$ que coincide con la función $f(z) = \frac{3}{1-2z}$ en algún disco del plano complejo y estudiar su dominio de convergencia.

La función $f(z)$ se puede considerar como tres veces la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $2z$, y por tanto:

$$f(z) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \text{ que converge si } |2z| < 1, \text{ es decir si } |z| < \frac{1}{2}.$$

Su dominio de convergencia es el disco $B_{\frac{1}{2}}(0)$.

Ejemplo 3.3.8. Obtener una representación de la función $f(z) = \frac{2z+1}{1-z}$ en serie de potencias alrededor del punto $z = 0$ y estudiar su dominio de convergencia.

La función $f(z)$ se puede expresar de la forma:

$$f(z) = -2 + \frac{3}{1-z} = -2 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \text{ que tiene como dominio de}$$

convergencia el disco $B_1(0)$.

Ejercicios

3.8. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} (2z - i)^{n^2}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n^2 + n}} (z + i)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^{n-2}}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! z^{n-1}}{n^n 2^n}$$

$$\text{e) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+i)^n} (z+2-i)^n.$$

3.9. Desarrollar en serie de potencias las siguientes funciones, calculando el radio de convergencia de la serie obtenida.

$$\text{a) } \frac{3}{(1-z)^2}$$

$$\text{b) } \frac{2z+1}{(1-z)^2}.$$

3.10. Calcular, para los valores de z que sea posible, la suma de las series:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

3.4. FUNCIONES ANALÍTICAS

El hecho de que las funciones definidas como series de potencias tengan tan buenas propiedades motiva el que se las considere como un grupo especial de funciones, las funciones analíticas, que se estudian a continuación.

3.4.1. Definición y propiedades

Definición 3.4.1:

La función $f(z)$ es **analítica en un punto** z_0 si $f(z)$ se puede expresar de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ en } B_R(z_0), \text{ con } R > 0.$$

Se dice también que $f(z)$ es analítica en z_0 si $f(z)$ es desarrollable en serie

de potencias en un entorno de z_0 .

Se tiene entonces que $f(z)$ es analítica en el punto z_0 si la serie de Taylor de la función en z_0 , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, tiene radio de convergencia R estrictamente mayor que cero.

Así, la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en el punto 0 porque $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ en el disco $|z| < 1$.

Definición 3.4.2:

La función $f(z)$ es **analítica en un conjunto** G si $f(z)$ es analítica en cada uno de los puntos de G .

Si una función es analítica se tiene el siguiente resultado que se enuncia sin demostración.

Proposición 3.4.1:

Si $f(z)$ es analítica en un punto z_0 es también analítica en todo el disco de convergencia de la serie. Es decir, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $B_R(z_0)$, con $R > 0$, $f(z)$ es también analítica en todo el disco $B_R(z_0)$.

La *proposición 3.4.1* permite asegurar que la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ no sólo es analítica en el punto 0, sino que también es analítica en todo el disco $|z| < 1$.

Se puede comprobar fácilmente que las funciones analíticas tienen las siguiente propiedades:

- 1- La suma, el producto y la composición de funciones analíticas es una función analítica.
- 2- Si $f(z)$ es analítica en un conjunto G , $f(z)$ es holomorfa en G .
- 3- Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo $f(z)$ es una función entera.

3.4.2. Desarrollos en serie de funciones

Se presentan a continuación a modo de ejemplo los desarrollos de Taylor en $z = 0$ de algunas de las funciones más usuales, que coinciden con los correspondientes desarrollos en \Re .

La **función exponencial** $f(z) = e^z$ es una función analítica en todo el plano complejo, puesto que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, que tiene radio de convergencia infinito y por tanto converge en todo \mathbf{C} .

Las **funciones trigonométricas** $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{cos} z$ son también funciones analíticas en \mathbf{C} , pues se pueden desarrollar en serie potencias positivas alrededor de $z = 0$ de la forma:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ambos desarrollos tienen radio de convergencia infinito y por tanto convergen en todo \mathbf{C} .

Las **funciones hiperbólicas** $\operatorname{senh} z$ y $\operatorname{cosh} z$ tienen desarrollos en serie de potencias positivas alrededor de $z = 0$ de la forma:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

que tienen también radio de convergencia infinito y por tanto convergen en todo

C.

La función exponencial, el seno, el coseno, el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico son funciones analíticas en todo el plano complejo **C**, es decir, son funciones enteras.

Por último, la función **logaritmo** se puede también expresar de la forma:

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},$$

que tiene radio de convergencia 1.

La función $\text{Log}(1+z)$, $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$, no puede ser analítica en todo el plano complejo **C** porque no es continua en el semieje $\{z: z \in \mathfrak{R}, z \leq -1\}$. Sin embargo, los resultados de la siguiente sección permiten demostrar que es analítica en los restantes puntos del plano complejo, es decir, en todo el plano salvo los puntos $z = a$, siendo a un número real tal que $a \in (-\infty, -1]$.

3.4.3. Prolongación analítica

La *proposición 3.4.1.* asegura que una función $f(z)$ definida como una

serie de potencias, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, es analítica en todo el disco $B_R(z_0)$, y

permite asegurar que la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en todo el disco $|z| < 1$.

Pero la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es un cociente de polinomios, y por tanto es indefinidamente derivable en todos los puntos del plano complejo salvo en $z = 1$, y por tanto es razonable pensar que se pueda extender el dominio del plano en el que se pueda asegurar que $f(z)$ es analítica. Este proceso se conoce como **prolongación analítica**.

La cuestión que se plantea es la siguiente:

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ convergente en $B_R(z_0)$ y dado $z_1 \in B_R(z_0)$,

¿existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_1)^n$, con radio de convergencia R_1 tal que si $z \in$

$B_R(z_0) \cap B_{R_1}(z_1)$ las series coinciden?

La respuesta la da la siguiente proposición que se enuncia sin demostración.

Proposición 3.4.2:

Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$, y dado un

punto $z_1 \in B_R(z_0)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$ tiene radio de convergencia R_1

$\geq R - |z_1 - z_0| > 0$, y define una función $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$ tal que $g(z)$

$= f(z)$ si $z \in B_R(z_0) \cap B_{R_1}(z_1)$.

A continuación se propone un ejemplo que ilustra la proposición anterior:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ tiene radio de convergencia $R = 2$ y define en el disco $B_2(0)$

$$\text{la función } f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}.$$

Las derivadas sucesivas de $f(z)$ son: $f'(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$, $f''(z) = \frac{2}{(2-z)^3}$, ...,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(2-z)^{n+1}}.$$

Sea ahora $z_1 = -1 \in B_2(0)$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$

tiene radio de convergencia $R_1 = 3$ y define entonces en $B_3(-1)$ la función $g(z)$,

que coincide con $f(z)$ en $B_2(0) \cap B_3(-1)$ puesto que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}} =$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{3}} = \frac{1}{2-z} = f(z). \text{ La función } g(z) \text{ se denomina prolongación analítica}$$

de $f(z)$ en $B_3(-1) \setminus B_2(0)$.

Si se repite el proceso en otro punto diferente que pertenezca al disco

$B_2(0)$, por ejemplo, en $z_2 = i$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(i)}{n!} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ tiene

radio de convergencia $R_2 = \sqrt{5}$ y define en el disco $B_{\sqrt{5}}(i)$ una función $h(z)$

que también coincide con $f(z)$ en $B_2(0) \cap B_{\sqrt{5}}(i)$.

Las funciones $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$ y $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ son

prolongaciones analíticas de $f(z)$ en sus respectivos dominios.

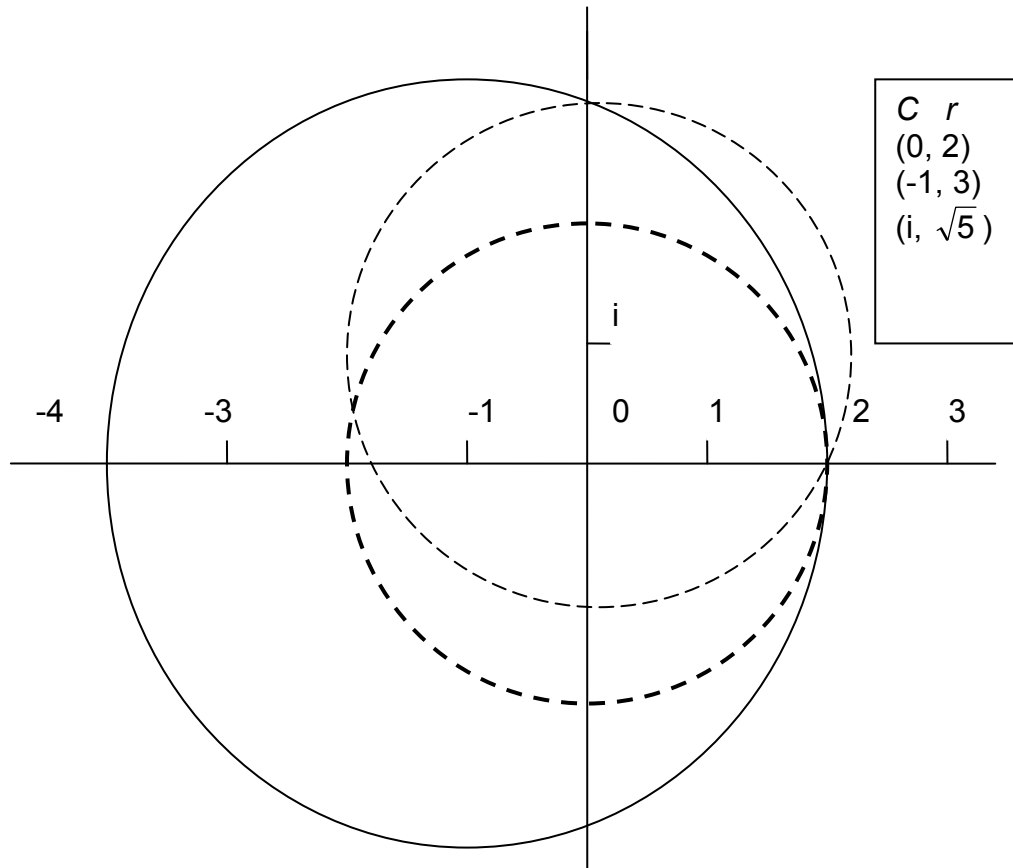


Figura 3.2: Prolongación analítica

A través del ejemplo que se acaba de presentar se puede observar que en general se puede prolongar analíticamente una función desde un punto z^* en un disco de radio igual a la distancia de z^* al punto más próximo a z^* en el que la función tenga una singularidad, es decir, un punto donde la función no es derivable (el concepto de singularidad se estudia con más detenimiento en el *capítulo 5*). En el ejemplo anterior, la función $f(z) = \frac{1}{2-z}$ tiene una singularidad en el punto $z = 2$, por lo que al hacer un desarrollo de Taylor de la función en el punto $z_1 = -1$ se ha obtenido un radio de convergencia $R_1 = 3$, que es precisamente la distancia entre los puntos -1 y 2 , y en el caso de $z_2 = i$ el radio de convergencia es $R_2 = \sqrt{5}$, que coincide con la distancia entre los puntos i y 2 .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.4.1. Estudiar si la función $f(z) = \frac{2z+3}{z-1}$ es analítica en el punto

$z = -1$.

$$\begin{aligned} \text{La función } f(z) &= \frac{2z+3}{z-1} = 2 + \frac{5}{z-1} = 2 - \frac{5}{2-(z+1)} = 2 - \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{z+1}{2}} = \\ &= 2 - \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

es, por tanto, desarrollable en serie de potencias

alrededor de $z = -1$ con un radio de convergencia $R = 2 > 0$, ya que el desarrollo es válido en el disco $|z + 1| < 2$.

Ejemplo 3.4.2. Obtener una prolongación analítica del disco $|z + 1| < 2$ para la función $f(z) = \frac{2z+3}{z-1}$, de manera que en la nueva región esté contenido el punto $z = 1 + i$.

Para prolongar analíticamente la función de manera que el punto $z = 1 + i$ esté contenido en la nueva región, basta tomar un punto adecuado del disco $|z + 1| < 2$, tal que su distancia al punto $1 + i$ sea menor que su distancia al punto donde está la singularidad más próxima de la función. Así, por ejemplo, el punto $z = i$ está a distancia 1 de $z = 1 + i$, y a distancia $\sqrt{2}$ de la singularidad más próxima de la función, que está en el punto $z = 1$. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{2z+3}{z-1} = 2 + \frac{5}{z-1} = 2 - \frac{5}{1-i-(z-i)} = 2 - \frac{\frac{5}{1-i}}{1-\frac{z-i}{1-i}} =$$

$$= 2 - \frac{5}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n, \text{ que converge si } |z-i| < |1-i| = \sqrt{2}.$$

Ejercicios

3.11. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 0$

de las funciones

a) $f(z) = \text{sen}(2z)$

b) $f(z) = \text{cos}(z^2)$

c) $f(z) = z^3 \cdot \text{sen}(z^2) + 1$

d) $f(z) = \frac{z^2}{2z-3}$

e) $f(z) = \frac{z^3 - z}{2z+2}$.

3.12. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 1$

de las funciones:

a) $f(z) = \frac{z^2}{2z-3}$

b) $f(z) = \frac{z^2 + z}{2z+2}$.

c) $f(z) = \frac{z}{z-3}$

d) $f(z) = \frac{z^2 + z}{z+2}$.

3.13. Estudiar si la función $f(z) = \frac{\text{senz}}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, es analítica en \mathbf{C} .

3.14. Estudiar si la función $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = -\frac{1}{2}$, es

analítica en \mathbf{C} .

3.15. Estudiar si la función $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica

en \mathbf{C} .

3.5. SERIES DE LAURENT

Cabe plantearse ahora la posibilidad de desarrollar una función en serie de potencias en un entorno de una singularidad. Naturalmente el problema no puede resolverse sin introducir algunos conceptos, puesto que las series del tipo *Taylor* dan lugar a funciones holomorfas. El problema se soluciona utilizando las series de potencias inversas.

3.5.1. Series de Laurent. Definición y convergencia

Muchas de las funciones que se utilizan habitualmente no se pueden expresar como series de potencias en las proximidades de determinados puntos, debido a que en esos puntos presentan singularidades, pero si se pueden, en cambio, expresar como sumas de potencias positivas y negativas.

Las siguientes funciones son ejemplo de ello:

$$1. f(z) = \frac{(z+1)^2}{z} = z + 2 + \frac{1}{z}.$$

$$2. g(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

$$3. h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

Las funciones anteriores son ejemplos de funciones que se pueden expresar como sumas, finitas o infinitas, de potencias positivas y negativas de z . Pero es fundamental saber para qué valores de z las sumas anteriores representan a las correspondientes funciones, o, lo que es igual, obtener el dominio de convergencia de las series que las definen. Las series de potencias positivas y negativas se denominan series de Laurent o series dobles.

Definición 3.5.1:

Se llama **serie de Laurent**, o **serie doble**, a una serie definida de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

Una serie de Laurent se puede expresar entonces como la suma de dos series. La primera de ellas es una serie de potencias positivas y se llama **parte analítica** de la serie. La segunda está formada por los sumandos con potencias negativas y se conoce como la **parte principal** de la serie.

Un ejemplo es la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$, que representa a la suma de las series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}.$$

Definición 3.5.2:

La serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ **converge** si convergen la parte

analítica y la parte principal de la serie. Si éstas convergen, el valor de la serie de Laurent es la suma de los valores de las dos series.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} .$$

Para investigar la convergencia de la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

se estudia por separado la convergencia de la parte analítica y la parte principal de la serie; el dominio de convergencia de la serie es entonces la intersección de las dos regiones de convergencia.

La parte analítica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ es una serie de potencias y por tanto

converge en el disco $B_R(z_0)$, siendo R el radio de convergencia de la serie de potencias.

La parte principal es una serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} .$$

Si se aplica el criterio del cociente para estudiar su convergencia,

$$\left| \frac{c_{-(n+1)} (z - z_0)^{-(n+1)}}{c_{-n} (z - z_0)^{-n}} \right| = \left| \frac{c_{-(n+1)}}{c_{-n}} \right| \left| \frac{1}{(z - z_0)} \right| < 1 \text{ si } |z - z_0| > \left| \frac{c_{-(n+1)}}{c_{-n}} \right| =$$

R_1 , es decir, la parte principal de la serie de Laurent converge si $|z - z_0| > R_1$.

Se puede decir entonces que la serie doble converge si $R_1 < |z - z_0| < R$,

siempre que $R_1 < R$.

El dominio de convergencia de una serie doble es, por tanto, una corona circular con centro el punto z_0 y radios R_1 y R .

Se demostrará más adelante, en el *capítulo 5*, que el comportamiento de una serie de Laurent en su dominio de convergencia es muy bueno, pues se puede asegurar la convergencia uniforme de la serie sobre conjuntos compactos contenidos en la corona circular que define su dominio de convergencia.

Si R es infinito, el dominio de convergencia de la serie doble es el exterior del círculo de centro z_0 y radio R_1 .

Si $R_1 = 0$, el dominio de convergencia de la serie es lo que se denomina un **disco pinchado**: el interior del círculo de centro z_0 y radio R salvo el punto z_0 , $B'_R(z_0)$.

Si R es infinito y además $R_1 = 0$, el dominio de convergencia de la serie se extiende a todo el plano complejo excepto el punto z_0 , $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.

Así, por ejemplo, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ converge en la corona circular $\frac{1}{2} < |z|$

< 2 , pues la parte analítica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ tiene radio de convergencia $R = 2$, y la parte

principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}$ es una serie geométrica de razón $|2z|^{-1}$ y por tanto converge

si $|2z|^{-1} > 1$, es decir, si $|z| > \frac{1}{2}$.

Para obtener la función que define la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ se estudian su parte

analítica y su parte principal.

La parte analítica representa a la función $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$ si $|z| < 2$.

La parte principal representa a la función $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n 2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z-1}$ si $|z| >$

$\frac{1}{2}$. Por tanto, si $\frac{1}{2} < |z| < 2$, la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ define la función:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = \frac{2}{2-z} + \frac{2z}{2z-1} = \frac{-2z^2 + 8z - 2}{(2-z)(2z-1)}.$$

3.5.2. Representación de funciones en serie de Laurent

En esta sección se aborda el problema inverso: dada una función previamente fijada, obtener una representación de la función en serie de Laurent alrededor de un punto.

Para una mayor facilidad de comprensión se toma una función concreta y se estudian para dicha función distintas posibilidades.

Sea $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$. Esta función es indefinidamente derivable en

todo el plano complejo salvo los puntos $z = 2$ y $z = 3$. Se presentan a continuación desarrollos en serie de Laurent de $f(z)$ en los puntos $z = 0$, $z = 2$ y $z = 3$.

1.- Desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z = 0$.

Si se quiere obtener en primer lugar un desarrollo en serie doble alrededor de $z = 0$, se puede dividir el plano complejo en tres regiones distintas, delimitadas por circunferencias con centro en $z = 0$, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$$A = \{z; |z| < 2\}, B = \{z; 2 < |z| < 3\} \text{ y } C = \{z; |z| > 3\}.$$

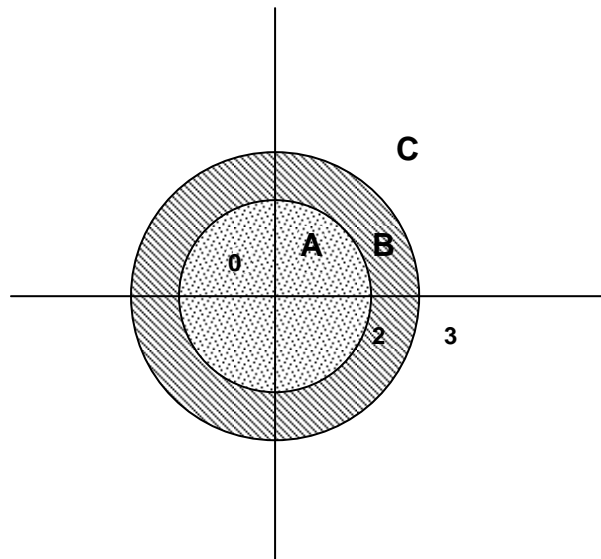


Figura 3.3: Regiones A, B y C del desarrollo en serie de Laurent en $z = 0$.

Si z está en el conjunto A,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \\ &= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que es una serie de potencias positivas de z que coincide con la función $f(z)$ siempre que z pertenezca al conjunto A, y f es por tanto una función analítica en A

Si z está en el conjunto B , se tiene que $2 < |z| < 3$, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \\ &= -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots\right) - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}. \end{aligned}$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie doble alrededor de $z = 0$, y la representación es válida en el conjunto B .

Finalmente, si z está en el conjunto C , es decir, $|z| > 3$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \\ &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{z^{n+2}}. \end{aligned}$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie de Laurent alrededor de $z = 0$ cuya parte analítica es cero, es decir, sólo tiene parte principal, y la representación es válida en el conjunto C .

2.- Desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z = 2$.

Para obtener un desarrollo en serie doble de $f(z)$ en $z = 2$, se divide el plano complejo en dos regiones distintas, delimitadas por circunferencias con centro en $z = 2$, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$$A^* = \{z; 0 < |z - 2| < 1\} \text{ y } B^* = \{z; |z - 2| > 1\}.$$

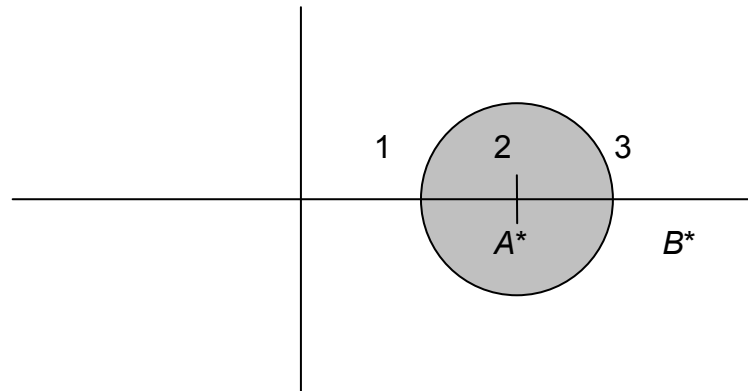


Figura 3.4: Regiones A^* y B^* del desarrollo en serie de Laurent en $z = 2$.

Si z está en el conjunto A^* , entonces $0 < |z - 2| < 1$, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{z-2-1} = \frac{1}{z-2} \frac{-1}{1-(z-2)} = \\ &= -\frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n = -\frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n. \end{aligned}$$

La representación en serie de Laurent de $f(z)$ está formada por una serie de potencias positivas como parte analítica y un único término como parte principal, y coincide con la función siempre que z pertenezca al conjunto A^* .

Si z está en el conjunto B^* , entonces $|z - 2| > 1$, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} = \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie doble alrededor de $z = 2$, cuya parte analítica es cero, y la representación es válida en el conjunto B^* .

3.- Desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en $z = 3$.

Para obtener un desarrollo en serie doble de $f(z)$ en $z = 3$, se divide también el plano complejo en dos regiones, delimitadas por circunferencias con centro en $z = 3$, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$$A^{**} = \{z; 0 < |z - 3| < 1\} \text{ y } B^{**} = \{z; |z - 3| > 1\}.$$

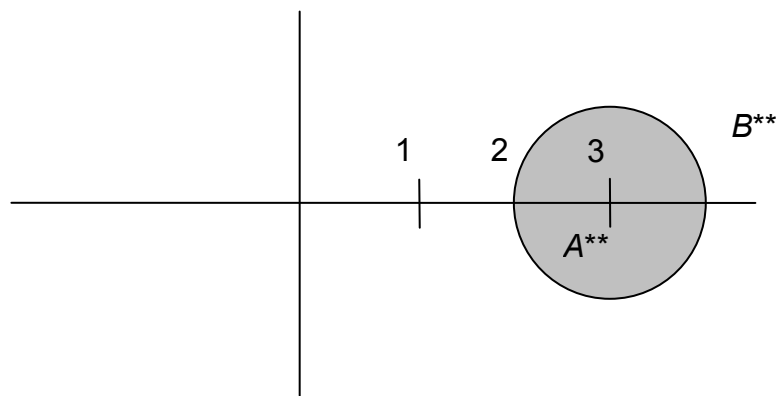


Figura 3.5: Regiones A^{**} y B^{**} del desarrollo en serie de Laurent en $z = 3$

Si z está en el conjunto A^{**} , entonces $0 < |z - 3| < 1$, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} \frac{1}{1+(z-3)} = \frac{1}{z-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-3)^n = \\ &= \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-3)^n. \end{aligned}$$

Entonces $f(z)$ tiene una representación en serie de Laurent formada por una serie de potencias positivas como parte analítica y un único término como parte principal, y coincide con la función siempre que z pertenezca al conjunto A^{**} .

Si z está en el conjunto B^{**} , entonces $|z - 3| > 1$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} \frac{\frac{1}{z-3}}{1 + \frac{1}{z-3}} = \frac{1}{(z-3)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+2}}.$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie doble alrededor de $z = 3$, cuya parte analítica es cero, y la representación es válida en el conjunto B^{**} .

Ejercicios

3.16. Representar en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ la función $f(z)$

$$= \frac{5}{z(z-1)}$$

de manera que la representación sea válida en los

siguientes dominios:

a) $0 < |z| < 1$,

b) $|z| > 1$.

3.17. Representar la función $f(z) = \frac{5z-1}{(z-1)(z+4)}$ en suma de potencias

positivas y negativas de $z + 4$, calculando la corona circular de convergencia de la serie.

3.18. Representar la función $f(z) = \frac{5z-1}{(z-1)(z+4)}$ en suma de potencias

positivas y/o negativas de z , en todas las regiones posibles, determinando en cada caso el dominio de convergencia.

3.6. EJERCICIOS

3.19. Demostrar la *proposición 3.1.1*.

3.20. Demostrar que la sucesión $c_n = 2 + \frac{1}{n} + \frac{1-n^2}{3n^3}i$ converge a 2.

3.21. Demostrar que la sucesión $c_n = \frac{1+2^n i}{2^n + i}$ converge a i .

3.22. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(\sqrt{2})^n n^2}$.

3.23. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz-1)^n}{2^{n+1}}$ cuando z toma los

valores a) $z = 1$, b) $z = i$, c) $z = -1$ y d) $z = 1 + i$.

3.24. Estudiar los dominios de convergencia de las series siguientes y si es posible calcular su suma.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1} \right)^n$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z^2)^n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (z^{n-1} - z^{n+1})$$

3.25. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{in^2 z}$ converge en la región $\{z; \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.26. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1-z^{2n})(1-z^{2n+2})}$ converge absolutamente en el disco abierto de centro 0 y radio 1, y calcular su suma.

3.27. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n^2}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n} (z+i)^n$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$.

3.28. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^{n^2}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n n^2}$

$$c) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{n!}$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} (z + 2 - i)^n .$$

3.29. Calcular el radio de convergencia de la serie que resulta de sumar las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2z - 1)^{n+1} 4^{-n+1} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2+z} \right)^n .$$

3.30. Desarrollar en serie de potencias las siguientes funciones, calculando el radio de convergencia de la serie obtenida.

$$a) \frac{z}{1-z^2}$$

$$b) \frac{z}{z^2 - 5z + 6} .$$

3.31. Calcular, para los valores de z que sea posible, la suma de las series:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(n-1)z^n .$$

3.32. Sabiendo que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R ,

calcular el radio de convergencia de las series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^p z^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| z^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 z^n .$$

3.33. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de las funciones:

$$a) f(z) = \cos \frac{z}{2}$$

$$b) f(z) = \operatorname{sen}(z^2)$$

$$c) f(z) = z^2 \cdot \cos(z^3) - 2z.$$

3.34. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de las funciones:

$$a) f(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$b) f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$c) f(z) = \operatorname{Log}(z+2).$$

3.35. Estudiar si la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica en \mathbf{C} .

3.36. Estudiar si la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z - z}{z^3}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1/6$, es analítica en \mathbf{C} .

3.37. Estudiar si la función $f(z) = \frac{\cos^2 z - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = -1$, es analítica en \mathbf{C} .

3.38. Estudiar si la función $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 5$, es analítica en \mathbf{C} .

3.39. Estudiar si la función $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica en \mathbf{C} .

3.40. Obtener la serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{e^z}{(z-2)^3}$ en potencias de z

– 2.

3.41. Obtener una representación en potencias negativas de z de la función $f(z)$

$= \frac{1}{1-z}$ y calcular el dominio de convergencia de la serie.

3.42. Representar en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ la función $f(z)$

$= \frac{2}{(z+1)(z-3)}$ de manera que la representación sea válida en los

siguientes dominios:

a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 3$, c) $|z| > 3$.

3.43. Representar la función $f(z) = \frac{2z+3}{(z+1)(z-3)}$ en suma de potencias

positivas y negativas de $z - 3$, calculando la corona circular de convergencia de la serie.

CAPÍTULO 4

Integración en el plano complejo

El desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja sigue un camino muy diferente al de la teoría de funciones de variable real, pues en esta última, después de considerar las funciones derivables, se procede a estudiar aquellas que admiten derivadas de segundo orden, y seguidamente aquellas que son indefinidamente derivables, mientras que en el caso de las funciones de variable compleja, una vez que se requiere que sean funciones holomorfas, es decir, derivables en un abierto, esto lleva consigo el que estas funciones sean indefinidamente derivables y verifiquen, además de un gran número de propiedades, resultados aparentemente sorprendentes como el hecho de que toda función holomorfa sea analítica.

La integración en el campo complejo es notable por su distinción matemática ya que los teoremas son, en general, poderosos mientras que sus demostraciones son casi siempre muy sencillas. En este capítulo se estudian las integrales de funciones complejas de una variable compleja.

Mientras en la recta real el significado del símbolo “integral entre a y b ” es claro pues en \mathfrak{R} sólo hay un camino, cuando se quiere extender esta idea al campo complejo se debe previamente conocer cómo ir desde a hasta b , pues a y b son puntos de un plano y no del intervalo $[a, b]$, por lo que se debe especificar el “camino” a lo largo del cual se hace la integral, y es natural

suponer que la integral dependa del camino. Las principales conclusiones responden al descubrimiento de condiciones que hacen que el valor de la integral no dependa del camino elegido, y éstas están íntimamente relacionadas con el hecho de que la función sea holomorfa.

Así como en el caso de la integración real se tenía el objetivo geométrico de “encontrar un área”, en el caso de la integral compleja el proceso es inverso, primero se generalizan las integrales reales, y después se investiga sobre su significado. El valor de la integral va a ser un número complejo que, al considerar separadamente su parte real y su parte imaginaria, será posible interpretar geométricamente y físicamente.

4.1. CURVAS EN EL CAMPO COMPLEJO

Para calcular la integral entre dos puntos se puede hacer a través de distintas curvas que unan dichos puntos, por lo que se debe comenzar estudiando la representación paramétrica de una curva. En este apartado se introduce el concepto de camino, o aquellos tipos de curvas que resultan apropiados para definir sobre ellas la integral de una función compleja.

Definición 4.1.1:

Una **curva** o **arco de curva** es una aplicación continua $\gamma: [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{C}$, tal que a un número real t le corresponde el número complejo $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$.

Definición 4.1.2:

Se denomina **traza** o **trayectoria** de la curva a su imagen:

$$(\gamma) = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}.$$

Por ser γ una función continua, la traza es un subconjunto compacto del plano complejo.

No se debe confundir la curva γ , que es una aplicación, con su traza, (γ) , que es un subconjunto de puntos del plano complejo, ya que la curva no es sólo su traza sino una cierta forma de recorrerla, como puede comprobarse en el ejemplo 4.1.3.

Definición 4.1.3:

Los **extremos** de la curva son los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, siendo $\gamma(a)$ el *punto origen* y $\gamma(b)$ el *punto final*. Una curva es **cerrada** si coinciden sus extremos, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 4.1.4:

Una curva es un **arco simple** o **arco simple de Jordan** si la aplicación γ es inyectiva (es decir, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica que $t_1 = t_2$). Es decir, la curva no pasa por un mismo punto dos veces.

Una curva es **cerrada simple** o **curva de Jordan** si es cerrada, es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$, y la restricción a $[a, b)$ es inyectiva.

Una curva de Jordan divide al plano complejo en dos subconjuntos abiertos y conexos, uno acotado, el interior de la traza, $\text{int } \gamma$ o $(\gamma)^\circ$, y el otro no acotado, el $\text{ext}(\gamma)$. Este resultado que es intuitivamente evidente tiene una difícil demostración.

Definición 4.1.5:

Dado un número natural $n \geq 1$ se dice que una curva $\gamma: [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{C}$ es de clase C^n en $[a, b]$, y se denota $\gamma \in C^n([a, b], \mathbf{C})$ cuando $\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ verifica que $x(t) \in C^n([a, b], \mathfrak{R})$, $y(t) \in C^n([a, b], \mathfrak{R})$.

La expresión $C^n([a, b], \mathbf{A})$ representa el conjunto de funciones definidas en el intervalo cerrado $[a, b]$ sobre \mathbf{A} , continuas y con sus derivadas continuas hasta el orden n .

Definición 4.1.6:

Una curva es **diferenciable con continuidad en $[a, b]$** , o bien **continuamente diferenciable en $[a, b]$** , si la aplicación γ es continua y con derivada primera continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, (incluidos los extremos, donde las derivadas son las derivadas laterales), es decir, $\gamma \in C^1[a, b]$.

Por lo tanto existen las derivadas $x'(t)$ y $y'(t)$ en $[a, b]$ y dichas derivadas son continuas. A una curva diferenciable con continuidad se la denomina **arco suave** si las derivadas no se anulan en el intervalo $[a, b]$.

Definición 4.1.7:

Una curva es **diferenciable con continuidad a trozos**, o un **arco suave a trozos**, si el intervalo $[a, b]$ se puede descomponer en una cantidad finita de intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de modo que γ sea una curva diferenciable con continuidad en cada intervalo, es decir, si $\gamma \in C^1([t_k, t_{k+1}], \mathbf{C})$ y existen los límites laterales de las derivadas en los extremos de cada intervalo.

Definición 4.1.8:

Se denomina **camino** a una curva diferenciable con continuidad a trozos.

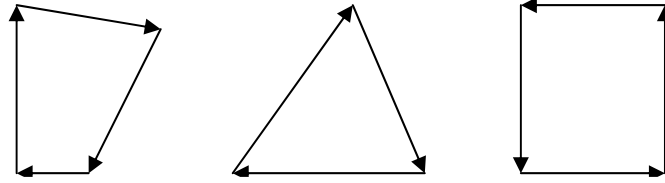


Figura 4.1: Ejemplos de trazas de caminos cerrados simples o curvas cerradas simples diferenciables con continuidad a trozos.

Se dice que los caminos son **rectificables** cuando es posible calcular su longitud.

Definición 4.1.9:

La **longitud del camino** γ es el valor de la integral real

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt, \text{ donde } |\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Definición 4.1.10:

Un **cambio de parámetro** es una aplicación biyectiva $\alpha: [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase uno, y tal que $\alpha'(t) > 0, \forall t \in (a, b)$.

La composición de dos cambios de parámetro es también un cambio de parámetro.

Definición 4.1.11:

Dos caminos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}, \sigma: [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$, son **equivalentes**, y se denota $\sigma \sim \gamma$, si existe una biyección o cambio de parámetro $\alpha: [a, b] \rightarrow [c, d], \alpha(a) = c, \alpha(b) = d$, tal que: $\sigma \circ \alpha = \gamma$.

También se dice que σ es una **reparametrización** de γ .

Si dos caminos son equivalentes, $\sigma \sim \gamma$, entonces tienen la misma traza,

$(\sigma) = (\gamma)$, que recorren el mismo número de veces y en el mismo sentido cada vez, pero se modifica la velocidad a la que se recorre la traza, pues:

$$\gamma'(t) = (\sigma \circ \alpha)'(t) = \sigma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

La relación $\sigma \sim \gamma$ es una relación de equivalencia entre los caminos.

Definición 4.1.12:

Dado el camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ se define su **camino inverso** o **camino opuesto**, y se denota $-\gamma$, al camino: $-\gamma: [-b, -a] \rightarrow \mathbf{C}$ como $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ con $-b \leq t \leq -a$.

El camino $-\gamma$ recorre la misma traza que γ pero en sentido inverso.

Definición 4.1.13:

Si dos caminos $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$, y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$, son tales que $\gamma(b) = \sigma(c)$, se define la **suma de caminos** como $\gamma + \sigma: [a, b + d - c] \rightarrow \mathbf{C}$, siendo:

$$(\gamma + \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } a \leq t \leq b \\ \sigma(t + c - b) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Así definido, $\gamma + \sigma$ es un camino o curva diferenciable con continuidad a trozos, por ser $\gamma(b) = \sigma(c)$ y serlo γ y σ . En general si existe $\gamma + \sigma$, $\sigma + \gamma$ no estará definido, por lo que la suma de caminos no es conmutativa. Se verifica la propiedad asociativa: $\gamma + [\sigma + \tau] = [\gamma + \sigma] + \tau$, así como que la traza de la suma es igual a la unión de las trazas: $(\gamma + \sigma) = (\gamma) \cup (\sigma)$.

Unas propiedades inmediatas son:

1. Si $\sigma \sim \gamma$ entonces $long(\sigma) = long(\gamma)$
2. $long(-\gamma) = long(\gamma)$

$$3. \text{long}(\gamma + \sigma) = \text{long}(\gamma) + \text{long}(\sigma)$$

Demostración:

$$1) \text{ Si } \sigma \sim \gamma \text{ entonces } \text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt = \int_a^b |(\sigma \circ \alpha)'(t)| \cdot dt = \\ \int_a^b |\sigma'(\alpha(t))| \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d |\sigma'(s)| \cdot ds = \text{long}(\sigma), \text{ haciendo el cambio } s = \alpha(t).$$

$$2) \text{long}(-\gamma) = \int_{-b}^{-a} |(-\gamma)'(t)| dt = \int_{-b}^{-a} |\gamma'(-t)| dt = \int_a^b |\gamma'(s)| ds = \text{long}(\gamma),$$

haciendo el cambio $s = -t$.

$$3) \text{long}(\gamma + \sigma) = \int_a^{b+d-c} |(\gamma + \sigma)'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt + \int_b^{b+d-c} |\sigma'(t)| dt =$$

$\text{long}(\gamma) + \text{long}(\sigma)$. \square

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.1.1: El camino que recorre el segmento de extremos $[z_0, z_1]$, desde z_0 hasta z_1 , recorrido a velocidad constante, $\gamma'(t) = z_1 - z_0$, viene dado por:

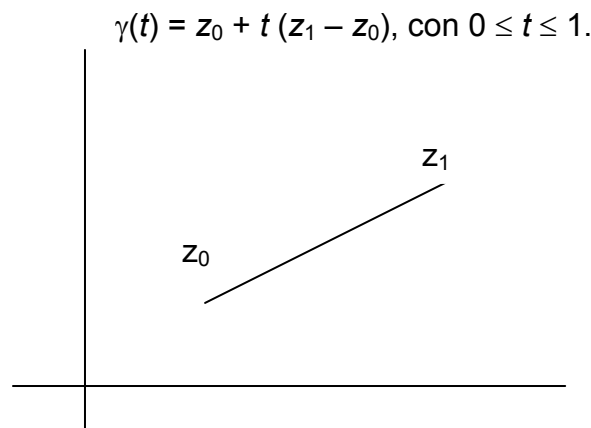


Figura 4.2: Traza de un segmento

Ejemplo 4.1.2: $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, es el camino cerrado cuya

traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R , recorrida una vez, en sentido positivo (el sentido contrario al de las agujas del reloj), comenzando en $z_0 + R$.

Se llama orientación positiva de una curva cerrada si ésta es recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj, y orientación negativa si es recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

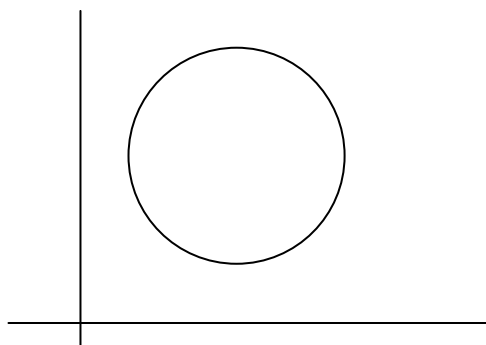


Figura 4.3: Traza de la circunferencia

Ejemplo 4.1.3: $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{-it}$, con $-\pi \leq t \leq \pi$, es el camino cerrado cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R , la misma traza del ejemplo anterior, pero su punto origen y su punto final son otros, y está recorrida en sentido contrario al anterior, es decir, está orientada negativamente.

Ejemplo 4.1.4: $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$, con $-\pi \leq t \leq 2\pi$, es el camino cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R , la misma traza de los dos ejemplos anteriores, pero ahora no es un camino cerrado, su punto origen $z = -R$ y su punto final $z = R$ son diferentes, está recorrida en sentido positivo y no es una curva simple.

Ejemplo 4.1.5: $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{i2t}$, con $0 \leq t \leq \pi$, es el camino cerrado cuya traza es la circunferencia de centro z_0 y radio R . Es un camino equivalente al del *ejemplo 4.1.2*, pero se modifica la velocidad de recorrido.

Ejemplo 4.1.6: Los caminos: $\gamma(t) = e^{-it}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, y $\gamma(t) = e^{it}$, con $0 \leq t \leq 4\pi$, tienen ambos la misma traza, la circunferencia de centro el origen y radio uno, pero el primero la recorre en el sentido de las agujas del reloj, y el segundo la recorre dos veces en sentido positivo, contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 4.1.7: La curva $\gamma(t) = \begin{cases} (2+3i)t & 0 \leq t \leq 1 \\ (5-3i)t - (3-6i) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ es un camino,

pues es continua y diferenciable a trozos. Está formada por dos segmentos, el primero de origen en $z = 0$ y extremo en $z = 2 + 3i$, y el segundo de origen en $z = 2 + 3i$, y extremo en $z = 7$.

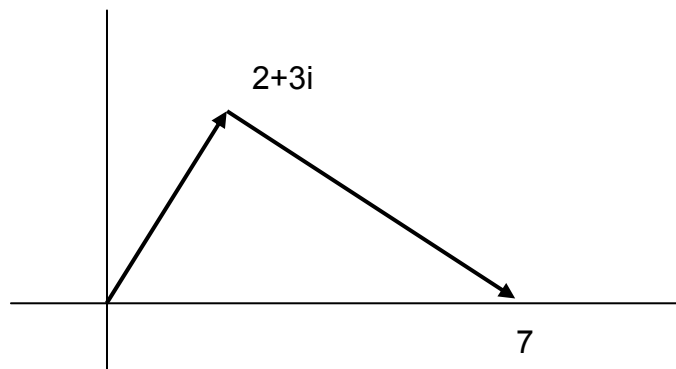


Figura 4.4: Traza del ejemplo 4.1.7.

Ejemplo 4.1.7: Calcular la longitud del camino determinado por la curva

del ejemplo anterior: $\gamma(t) = \begin{cases} (2+3i)t & 0 \leq t \leq 1 \\ (5-3i)t - (3-6i) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$.

Por la definición de longitud de un camino:

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt, \text{ siendo } |\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

luego en este caso se puede considerar que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, siendo:

$$|\gamma_1'(t)| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + (y_1'(t))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ y}$$

$$|\gamma_2'(t)| = \sqrt{(x_2'(t))^2 + (y_2'(t))^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34},$$

por lo que:

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| = \int_0^1 |\gamma_1'(t)| + \int_1^2 |\gamma_2'(t)| = \sqrt{13} + \sqrt{34}.$$

Ejercicios

- 4.1. Probar que la relación $\sigma \sim \gamma$ definida en el apartado anterior es una relación de equivalencia pues verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
- 4.2. Demostrar que un camino siempre tiene longitud, es decir, siempre es rectificable.
- 4.3. Sea $\Gamma(t) = R \cdot e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$; $\sigma(t) = -R + (R - r) \cdot t$ con $0 \leq t \leq 1$; $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$; y $\tau(t) = r + (R - r) \cdot t$ con $0 \leq t \leq 1$, siendo $0 < r < R$: Representar gráficamente la traza del camino $\Gamma + \sigma - \gamma + \tau$. ¿Está bien definido? ¿Es un camino? Indicar su origen y su final.
- 4.4. Calcular la longitud de los caminos:
- $\gamma(t) = z_0 + t \cdot (z_1 - z_0)$ con $0 \leq t \leq 1$,
 - $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$,
 - $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{i2\pi t}$ con $0 \leq t \leq 1$,
 - $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$ con $0 \leq t \leq 6\pi$.
- 4.5. Razonar por qué se exige que $\alpha'(t) > 0$ en la equivalencia de

caminos. ¿Qué sucedería si $\alpha'(t) < 0$?

4.6. Indicar cuales de los ejemplos resueltos, del 2 al 5, son parametrizaciones equivalentes.

4.7. Representar la traza de la curva $z(x) = \sqrt{1-x^2} + ix, -1 \leq x \leq 1$.

¿Es otra parametrización del arco de la circunferencia de radio uno y centro el origen: $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$? Buscar la ecuación de cambio de parámetro α . Comprobar si $\alpha'(t) > 0$.

4.2. INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS

Se define y estudia lo que se va a entender como la integral de una función compleja sobre un camino. Para ello, previamente se estudia el concepto de integral sobre una función real con valores complejos.

Definición 4.2.1:

Sea f una función real con valores complejos, $f: [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{C}$ siendo $f(t) = x(t) + i \cdot y(t)$. Se define la **integral de f** a través de dos integrales reales, siempre que estas integrales existan:

$$\int_a^b f(t) \cdot dt = \int_a^b x(t) \cdot dt + i \cdot \int_a^b y(t) \cdot dt$$

La función f es integrable en $[a, b]$ si las funciones x e y son integrables en $[a, b]$ siendo $\operatorname{Re}(\int_a^b f(t) \cdot dt) = \int_a^b x(t) \cdot dt$ y $\operatorname{Im}(\int_a^b f(t) \cdot dt) = \int_a^b y(t) \cdot dt$, por lo que sus propiedades se deducen de forma inmediata de las propiedades de las integrales de las funciones reales.

4.2.1. Integral de una función sobre un camino

Definición 4.2.2:

La integral entre $[a, b]$ del camino $\gamma: [a, b] \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, se define a través de dos integrales reales bien definidas:

$$\int_a^b \gamma(t) \cdot dt = \int_a^b x(t) \cdot dt + i \cdot \int_a^b y(t) \cdot dt$$

En general, si f es una función real con valores en \mathbf{C} siendo $f(t) = u(t) + i \cdot v(t)$, $t \in [a, b]$, entonces si u y v son integrables en $[a, b]$ se define:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \cdot \int_a^b v(t) dt.$$

Verifica las siguientes propiedades:

1. Si f y g son integrables en $[a, b]$ entonces $f + g$ y $k \cdot f$ son integrables en $[a, b]$, donde $k \in \mathbf{C}$.

2. Si $a \leq b$ entonces $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

Demostración de 2:

Si $\int_a^b f = 0$, entonces se verifica la propiedad.

Si $\int_a^b f \neq 0$, entonces $\int_a^b f = r \cdot e^{i\theta}$ por lo que:

$$\left| \int_a^b f \right| = r = e^{-i\theta} \cdot \int_a^b f = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\theta} \cdot f \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \cdot f) \leq \int_a^b |f|. \quad \square$$

Definición 4.2.3:

Sea f una función de variable compleja definida en un abierto G , $f: G \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, continua a trozos, y sea γ un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow G$. Se define la **integral de f sobre el camino γ** (o integral de f a lo largo del camino γ) como:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Como γ es un camino, γ es diferenciable con continuidad a trozos, por lo que $f(\gamma(t))$ es una función continua a trozos y γ' es continua a trozos, y en consecuencia la función subintegral tiene a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad, por lo que existe su integral.

4.2.2. Relación de la integral compleja con la integral curvilínea real

Si $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, la integral $\int_{\gamma} f$ se expresa mediante dos

integrales curvilíneas reales, siendo:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \cdot \int_{\gamma} (v dx + u dy) \quad (4.1)$$

Demostración:

En efecto, si $\gamma(t) = \alpha(t) + i \cdot \beta(t)$ entonces:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= (u(\alpha(t), \beta(t)) + i \cdot v(\alpha(t), \beta(t))) \cdot (\alpha'(t) + i \cdot \beta'(t)) \\ &= u(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t) \\ &\quad - v(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t) + i \cdot (u(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \beta'(t) + v(\alpha(t), \beta(t)) \cdot \alpha'(t)). \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\int_{\gamma} (u dx - v dy) = \int_a^b (u(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t) - v(\gamma(t)) \cdot \beta'(t)) dt$$

$$\int_{\gamma} (v dx + u dy) = \int_a^b (v(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t) + u(\gamma(t)) \cdot \beta'(t)) dt$$

de donde se deduce la igualdad. \square

4.2.3. Propiedades elementales

1. La integral sobre un camino es invariante bajo una parametrización. Es

$$\text{decir, si } \gamma \sim \sigma \text{ entonces } \int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f.$$

2. La integral a lo largo del camino opuesto vale: $\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f.$

3. La integral a lo largo de una suma de caminos vale: $\int_{\gamma+\sigma} f = \int_{\gamma} f + \int_{\sigma} f.$

$$4. \int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g.$$

$$5. \int_{\gamma} kf = k \cdot \int_{\gamma} f, \text{ con } k \in \mathbf{C}.$$

6. Si $M \in \mathfrak{R}$ y $|f(z)| \leq M, \forall z \in (\gamma)$, entonces:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma). \tag{4.2}$$

Se observa que si f es una función continua, entonces $|f(\gamma(t))|$ es una función real y continua definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, por lo que si el intervalo $[a, b]$ es acotado entonces siempre alcanza un valor máximo en dicho

intervalo, y por tanto $|f(z)| \leq M, \forall z \in (\gamma)$. Lo mismo se puede asegurar si f es una función continua a trozos. Por tanto la *propiedad 6* se puede escribir:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{z \in (\gamma)} |f(z)| \cdot \text{long}(\gamma).$$

7. Si F es una primitiva de f sobre (γ) , es decir, $F'(z) = f(z), \forall z \in (\gamma)$, siendo γ

un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$, entonces $\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

8. Si F es una primitiva de f sobre (γ) y γ es un camino cerrado, $\int_{\gamma} f = 0$.

Demostraciones:

1. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ y $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ siendo $\gamma \sim \sigma$ entonces existe una aplicación

$\alpha: [a, b] \rightarrow [c, d]$, tal que $\gamma = \sigma \circ \alpha$, por lo que:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b f(\sigma \circ \alpha(t)) \cdot \sigma'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \cdot dt =$$

y haciendo el cambio $s = \alpha(t)$ se obtiene:

$$\int_c^d f(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) ds = \int_{\sigma} f. \square$$

$$2. \int_{-\gamma} f = \int_{-b}^{-a} f((-\gamma)(t)) \cdot (-\gamma)'(t) dt = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t)) \cdot (-\gamma'(-t)) dt =$$

y haciendo el cambio $s = -t$ se obtiene

$$- \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f. \square$$

Las demostraciones de las propiedades 3, 4 y 5 se dejan como ejercicios.

6. Si $M \in \mathfrak{R}$ y $|f(z)| \leq M, \forall z \in (\gamma)$ entonces:

$$\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt \leq \int_a^b M \cdot |\gamma'(t)| dt = M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot \text{long}(\gamma).$$

7. Si F es una primitiva de f sobre (γ) y γ es un camino, entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt$$

Si $F(\gamma(t)) = u(t) + i \cdot v(t)$ entonces:

$$= \int_a^b (u' + iv')(t) dt = \int_a^b (u')(t) dt + i \cdot \int_a^b (v')(t) dt =$$

aplicando la Regla de Barrow:

$$u(b) - u(a) + i \cdot (v(b) - v(a)) = u(b) + i \cdot v(b) - u(a) - i \cdot v(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square$$

8. $\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ por ser el camino γ cerrado y por tanto $\gamma(b) = \gamma(a)$.

□

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.2.1: Calcular $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

El camino γ tiene como traza la mitad del círculo de radio uno que va desde $-i$ hasta i . La función $f(\gamma(t)) = e^{-it}$ pues, para calcular el conjugado, el ángulo es el opuesto, y $\gamma'(t) = ie^{it}$.

$$\text{Por tanto } \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it} ie^{it} dt = i \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi \cdot i.$$

Ejemplo 4.2.2: Calcular la integral $\int_{\gamma} z^2 dz$ sobre los tres caminos γ_1 , γ_2 , y

γ_3 , y también sobre el camino: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, siendo $\gamma_1(t) = t \cdot (2 + i)$, $0 \leq t \leq 1$; $\gamma_2(t) = (2 + i) + t(-i)$, $0 \leq t \leq 1$; y $\gamma_3(t) = 2 - 2t$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_{\gamma_1} z^2 dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 ((2+i)t)^2 \cdot (2+i) dt = (2+i)^3 \int_0^1 t^2 \cdot dt =$$

$$\frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i.$$

$$\int_{\gamma_2} z^2 dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (2+i-ti)^2 \cdot (-i) dt = 2 + \frac{-11}{3}i,$$

$$\int_{\gamma_3} z^2 dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 (2-2t)^2 \cdot (-2) dt = \frac{-8}{3},$$

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz + \int_{\gamma_3} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i + 2 + \frac{-11}{3}i + \frac{-8}{3} = 0.$$

Este último resultado, cero, era de esperar por la *propiedad 8*, pues $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ es un camino cerrado y z^2 tiene función primitiva.

Ejemplo 4.2.3: Calcular la integral $\int_{\gamma} z^2 dz$ sobre el camino γ , siendo:

$$\gamma(t) = e^{-it}, \quad -\pi \leq t \leq 0.$$

Utilizando la definición de integral sobre un camino se obtiene:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{-\pi}^0 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-\pi}^0 (e^{-it})^2 (-i)(e^{-it}) dt = \int_{-\pi}^0 (-i)(e^{-3it}) dt =$$

$$\frac{1}{3}(1 - e^{3\pi i}) = \frac{1}{3}(1 - (\cos(3\pi) + i \operatorname{sen}(3\pi))) = \frac{2}{3}.$$

Otra forma de hacerlo es utilizando la *propiedad 7*, pues como z^2 tiene la función primitiva $\frac{z^3}{3}$, la integral es independiente del camino, para ir desde $a =$

-1 hasta $b = 1$, luego:

$$\int_{\gamma} z^2 dz = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 4.2.4: Calcular la integral $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$ siendo $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Utilizando la definición de integral sobre un camino se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} r \cos t \cdot r i (e^{it}) dt = i \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (e^{it}) dt = \\ & i \cdot r^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + i \cos t \cdot \operatorname{sen} t) dt = i \cdot r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} + i \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \right) dt = i \cdot r^2 \cdot \pi \end{aligned}$$

que es distinto de cero, a pesar de ser el camino cerrado, lo que muestra que la función parte real de z , $\operatorname{Re}(z)$, no tiene función primitiva sobre la circunferencia de centro el origen y radio r .

Ejemplo 4.2.5: Calcular la integral $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Para calcular $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $f(\gamma(t)) = e^{-it}$ y $\gamma'(t) = i \cdot e^{it}$,

$$\text{luego } \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i \cdot e^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, \text{ distinto de}$$

cero, a pesar de ser el camino cerrado pues es la circunferencia de centro el origen y radio uno, luego la función $f(z) = \bar{z}$ no tiene primitiva sobre dicho

círculo.

Ejemplo 4.2.6: Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Para calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $f(\gamma(t)) = \frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$ y $\gamma'(t) =$

$$i \cdot e^{it}, \text{ por lo que } \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} \cdot i \cdot e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

distinto de cero, a pesar de ser el camino cerrado pues es la circunferencia de centro el origen y radio uno, luego la función $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva sobre dicha circunferencia. Como $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1$, entonces $f(z) = \bar{z} = \frac{1}{z}$, por tanto el resultado coincide con el del ejemplo anterior.

La función primitiva de $f(z) = \frac{1}{z}$ es la función logaritmo, $w = \log z$, que no es holomorfa sobre la circunferencia de centro el origen, pues no es holomorfa en el eje real negativo. Es imposible encontrar ninguna rama holomorfa del logaritmo sobre toda la circunferencia unidad, pues siempre corta a una semirrecta (por ejemplo, la semirrecta real negativa) donde se produce una discontinuidad. El que la integral no se anule no entra en contradicción con la propiedad 8 pues la función $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva en todo (γ) .

Ejemplo 4.2.7: Acotar la integral: $\left| \int_{\gamma} \frac{z-3}{z^2+2} dz \right|$ siendo $\gamma(t) = 3 \cdot e^{-it}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Para acotar la integral se utiliza la *propiedad 6*, que dice: Si $|f(z)| \leq M \in$

$\Re, \forall z \in (\gamma)$ entonces $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma)$. Como la longitud del arco de

circunferencia es $\frac{3\pi}{2}$, $|z - 3| \leq |z| + |-3| \leq 3 + 3 = 6$, y $|z^2 + 2| \geq ||z|^2 - |2|| \geq$

$$|9 - 2| = 7, \text{ entonces } \left| \frac{z-3}{z^2+2} \right| \leq \frac{6}{7}, \text{ y } \left| \int_{\gamma} \frac{z-3}{z^2+2} dz \right| \leq \frac{9\pi}{7}.$$

Ejemplo 4.2.8: Acotar la integral: $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2-3)} dz \right|$ con $\gamma(t) = R \cdot e^{it}, 0$

$\leq t \leq \pi, R > 3$, y comparar con el límite: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f$.

Para acotar la integral se utiliza las propiedad 6, que dice: Si $|f(z)| \leq M \in \Re, \forall z \in (\gamma)$ entonces $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma)$. Como la longitud del arco de

circunferencia es $R \cdot \pi$, $|z| = R, |z^2 + 2|^2 \geq (||z|^2 - |2||)^2 \geq |R^2 - 2|^2, |z^2 - 3| \geq |R^2 - 3|$.

Entonces:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2-3)} dz \right| \leq \frac{1}{(R^2-2)^2(R^2-3)}, \text{ y al calcular el límite cuando } R$$

tiende a infinito, ese valor tiende a cero: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f = 0$.

Ejercicios

4.8. Calcular: $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$, con n entero, siendo $\gamma(t) = z_0 + e^{it}, 0 \leq t$

$$\leq 2\pi.$$

4.9. Comprobar que: $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz = -\frac{2}{3}(1+i)$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

4.10. Calcular: $\int_{\gamma} f$, siendo $f(z) = f(x+yi) = x + 2y - iy^2$, y $\gamma(t) = (1 + 3i)t$, $0 \leq t \leq 1$.

4.11. Comprobar que $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^4} dz \right| \leq 4\sqrt{2}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento $[i, 1]$.

4.12. Calcular: $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{z}} f(z) dz \right|$ siendo $\gamma(t) = r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y $f(z)$ una

función holomorfa y acotada en el interior de γ y sobre su traza (γ).

4.13. Demostrar que $\int_{\gamma} \operatorname{Im}(z) dz = -\frac{\pi}{2}$, siendo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} t & -1 \leq t \leq 1 \\ e^{i(t-1)} & 1 \leq t \leq 1+\pi \end{cases}$$

4.14. Sea $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $R > 2$, y sea $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^3+3}$. Acotar $\left| \int_{\gamma} f \right|$

y comprobar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f = 0$.

4.3. ÍNDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CURVA

En este apartado se introduce el concepto de “índice de un punto z respecto de un camino cerrado γ ”, que es un concepto importante.

4.3.1. Definición de índice

Definición 4.3.1: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un camino cerrado y z un punto del plano complejo que no pertenece a la traza de γ , $z \in \mathbf{C} \setminus (\gamma)$. Se define el **índice de un punto z respecto de un camino γ** , $I_\gamma(z)$, como:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

La integral anterior está bien definida pues al no pertenecer el punto z a la traza de γ , se tiene que la función subintegral es continua en (γ) .

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$$

- El índice representa geoméricamente “el número de vueltas que da el camino alrededor del punto”.

Este hecho puede interpretarse, de forma intuitiva y matemáticamente imprecisa, si se considera que:

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{d}{dt}(\log(\gamma(t)-z))$$

Por lo que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{d}{dt} (\log(\gamma(t) - z)) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i} [\log(\gamma(b) - z) - (\log(\gamma(a) - z))] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} [(\ln|\gamma(b) - z| + i \arg(\gamma(b) - z) - (\ln|\gamma(a) - z| + i \arg(\gamma(a) - z)))] =$$

$$\frac{1}{2\pi} [\arg(\gamma(b) - z) - \arg(\gamma(a) - z)] =$$

$$\frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot \text{número de vueltas alrededor de } z = \text{Número de vueltas alrededor de } z.$$

Ya que como el camino γ es una curva cerrada se tiene que $\gamma(a) = \gamma(b)$, por lo que $\ln|\gamma(b) - z| = \ln|\gamma(a) - z|$ y la variación del argumento es igual a 2π por el número de vueltas del vector $\gamma(b) - z$ alrededor de z .

- El camino γ hace una partición de $\mathbf{C}/(\gamma)$ en un conjunto de componentes conexas, donde todas las componentes son acotadas, excepto una, la componente “no acotada”.
- El índice es una función continua en $\mathbf{C}/(\gamma)$ y es siempre un número entero.
- En consecuencia, el índice es constante para todos los puntos de una misma componente conexa.
- El índice se anula sobre la componente no acotada.
- El índice de un punto z respecto al camino opuesto a γ es igual a:

$$I_{-\gamma}(z) = -I_{\gamma}(z)$$

4.3.2. Índice y homotopía

Una propiedad muy importante del índice es el ser invariante por homotopía. De manera intuitiva, se dice que dos caminos cerrados contenidos en un abierto G son homótopos, si pueden deformarse continuamente entre sí, sin que las deformaciones salgan de G .

Definición 4.3.2: Sea G un abierto y sean γ_0 y γ_1 dos caminos cerrados definidos en $[a, b]$ con su traza contenida en G . Una aplicación continua α es una **homotopía admisible** entre γ_0 y γ_1 si la función $\alpha: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ verifica que $\alpha(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\alpha(t, 1) = \gamma_1(t)$ para todo t del intervalo $[a, b]$ y $\alpha(a, s) = \alpha(b, s)$ para todo s de $[0, 1]$.

En ese caso se dice que γ_0 y γ_1 son **homótopos** en G .

Se dice que γ_1 es un camino **homótopo a 0** si γ_1 es homótopo a una curva constante, (o punto): $\gamma_1(t) = z_0$, para todo $t \in [a, b]$.

Si γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrados, z no pertenece a sus trazas y son homótopos en $\mathbf{C}/\{z\}$, se tiene que $I_{\gamma_0}(z)$ es igual a $I_{\gamma_1}(z)$. En particular si γ_0 es homótopo a 0 , $I_{\gamma_0}(z)$ es igual a cero. Aún más interesante es el hecho de que también se verifica el recíproco, esto es, el índice determina completamente qué caminos son homótopos en $\mathbf{C}/\{z\}$.

Si G es un abierto y γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrados se dice que son “homólogos” respecto de G si $I_{\gamma_0}(z)$ es igual a $I_{\gamma_1}(z)$ para todo punto z que pertenezca al complementario de G .

4.3.3. Índice y conexión

Definición 4.3.3: Sea G un abierto y conexo de \mathbf{C} . G es **simplemente conexo** si cualquier camino cerrado $\gamma \in C([0, 1]; G)$ es homótopo a 0 .

De manera intuitiva se considera que un conjunto es simplemente conexo si es un abierto sin agujeros. Por este motivo, un dominio G es simplemente conexo si todo camino cerrado y simple contenido en él, encierra únicamente puntos de G . Por ejemplo, si γ es un camino cerrado y simple entonces el interior de su traza, $(\gamma)^\circ$, es un dominio simplemente conexo. Si un dominio conexo no es simplemente conexo se dice que es **múltiplemente conexo**.

Un caso particular de conjunto simplemente conexo es un conjunto **convexo**. En efecto, si G es convexo, $\gamma \in C([0, 1]; G)$ y $z \in G$, entonces existe una homotopía admisible entre el camino γ y la curva constante z , dada por:

$$\alpha(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + s \cdot z, \text{ para todo } (t, s) \in [a, b] \times [0, 1].$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.3.1: Sea $\gamma(t) = z + R e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ la circunferencia de centro z y radio R definida en el plano complejo, recorrida una vez en sentido positivo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = 1.$$

En efecto, el camino da una vuelta en sentido positivo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.2: Sea $\gamma(t) = z + R \cdot e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida una vez en sentido negativo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2\pi} \frac{-Rie^{-it}}{Re^{-it}} dt = -1.$$

El camino da una vuelta en sentido negativo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.3: Sea $\gamma(t) = z + R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2k\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida k veces en sentido positivo. Por la definición de índice se tiene:

$$I_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2k\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2k\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = k.$$

El camino da k vueltas en sentido positivo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.4: Sea $\gamma(t) = z + R \cdot e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2k\pi$, la circunferencia de centro z y radio R recorrida k veces en sentido negativo. Por la definición de índice se tiene:

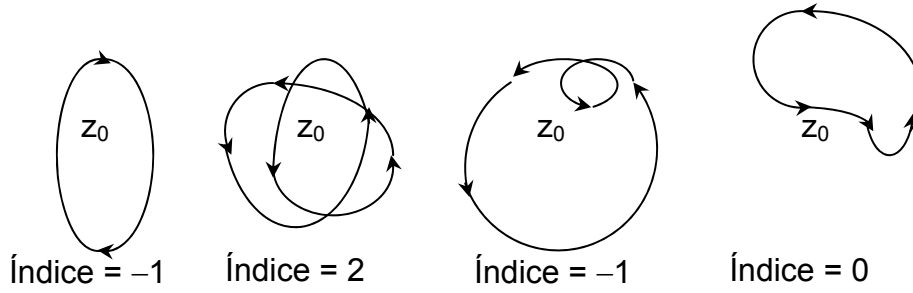
$$I_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2k\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_0^{2k\pi} \frac{-Rie^{-it}}{Re^{-it}} dt = -k.$$

El camino da k vueltas en sentido negativo alrededor del punto.

Ejemplo 4.3.5: Si G es simplemente conexo y se perfora en un punto, $A = G - \{z_0\}$, el índice de cada punto de A puede valer 1, -1 o 0, para cada camino cerrado y simple según que el camino rodee al punto en una orientación, en la otra o pertenezca a la componente exterior.

Ejemplo 4.3.6: Determinar el índice del punto z_0 respecto a la curva

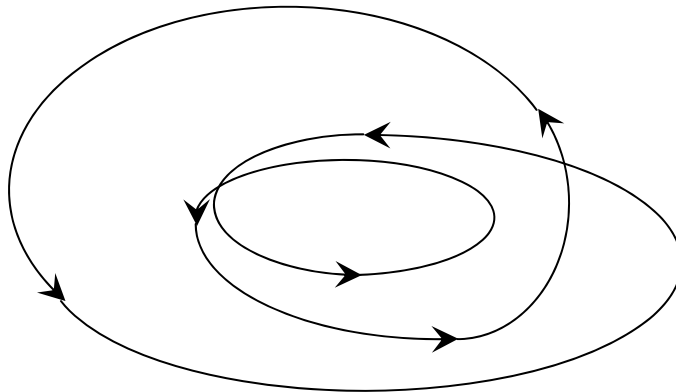
indicada:



4.5. Determinación de índices. Ejemplo 4.3.6

Ejercicios

4.15. Determinar el índice de los puntos de cada una de sus componentes conexas en que las siguientes curvas dividen al plano complejo:



4.6. Determinación de índices. Ejercicio 4.15

4.16. Calcular el índice del origen respecto de la curva $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.4. TEOREMA DE CAUCHY

4.4.1. Primitivas

Aunque el valor de una integral compleja depende, en general, del camino recorrido, existen ciertas funciones cuyas integrales son independientes del camino. En esos casos también se anula la integral sobre un camino cerrado. Este resultado está relacionado con la existencia de una función primitiva $F(z)$, tal $F'(z) = f(z)$, para todo z . Esto es consecuencia del siguiente teorema:

Teorema 4.4.1:

Sea $f: G \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ una función continua en el dominio G . Las condiciones siguientes son equivalentes:

- a) La función f tiene una función primitiva F en G .
- b) Las integrales de f a lo largo de caminos contenidos en G que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor.
- c) La integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado contenido en G vale cero.

Demostración:

Se va a probar que a) implica b), b) implica c), c) implica b) y b) implica a).

Probar que a) implica b) es consecuencia de la *propiedad 7* del apartado 4.2.2, pues se parte de la hipótesis de que la función f tiene una función primitiva F , es decir, para todo z de G , $F'(z) = f(z)$. Sea γ un camino contenido en G que une los puntos z_1 y z_2 con $z = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, $\gamma(a) = z_1$ y $\gamma(b) = z_2$.

Como $\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1),$$

con lo que queda probado que la integral no depende del camino elegido.

Para probar que b) implica c) se considera un camino cerrado cualquiera, γ , contenido en G , y sean z_1 y z_2 dos puntos que pertenecen a γ . Se toman dos caminos, σ y τ , ambos con punto inicial z_1 y final z_2 , tales que $\gamma = \sigma - \tau$. Como por la hipótesis b) la integral no depende del camino, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f(z) \cdot dz &= \int_{\tau} f(z) \cdot dz, \text{ por lo que:} \\ 0 &= \int_{\sigma} f(z) \cdot dz - \int_{\tau} f(z) \cdot dz = \int_{\sigma} f(z) \cdot dz + \int_{-\tau} f(z) \cdot dz = \int_{\sigma - \tau} f(z) \cdot dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) \cdot dz. \end{aligned}$$

Recíprocamente si se quiere demostrar que c) implica b) se consideran dos caminos cualesquiera, σ y τ , contenidos en G , ambos con punto origen z_1 y extremo final z_2 . Se construye el camino $\gamma = \sigma - \tau$ que es cerrado, luego, por la hipótesis c) la integral vale cero, $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0$, con lo que $\int_{\sigma} f(z) \cdot dz = 0 =$

$$\int_{\sigma - \tau} f(z) \cdot dz = \int_{\sigma} f(z) \cdot dz - \int_{\tau} f(z) \cdot dz, \text{ y por tanto: } \int_{\sigma} f(z) \cdot dz = \int_{\tau} f(z) \cdot dz.$$

Para probar que b) implica a) se considera un camino cualquiera, γ , contenido en G , que parte de un punto z_0 y termina en un punto genérico z . Se define:

$$F(z) = \int_{\gamma} f = \int_{z_0}^z f(w) \cdot dw.$$

Se analiza bajo qué condiciones la función F está bien definida. Para

poder definir $F(z)$, para todo z de G , tiene que ser G un conjunto conexo, y así existir ese camino, γ , que parte de un punto z_0 y termina en z . Sea $z + \Delta z$ un punto, distinto de z , en un entorno de z de radio δ , suficientemente pequeño, contenido en G .

Se calcula la derivada de la función F :

$$F(z + \Delta z) = \int_{\sigma} f = \int_{\gamma + [z, z + \Delta z]} f = \int_{\gamma} f + \int_{[z, z + \Delta z]} f = F(z) + \int_{[z, z + \Delta z]} f.$$

El camino $[z, z + \Delta z]$ es un segmento y la integral $\int_{[z, z + \Delta z]} f$, por hipótesis, no depende del camino, por lo que $\int_{[z, z + \Delta z]} f = \int_z^{z + \Delta z} f$

Restando:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{[z, z + \Delta z]} f = \int_z^{z + \Delta z} f, \text{ y:}$$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(w) \cdot dw - f(z)$$

Como la variable de integración, w , no es z , $f(z)$ no depende de w y se obtiene que:

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) \cdot dw = f(z) \int_z^{z + \Delta z} dw = f(z) \cdot \Delta z, \text{ en consecuencia:}$$

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \left[\int_z^{z + \Delta z} (f(w) - f(z)) \cdot dw \right].$$

Calculando el módulo y acotando, utilizando la propiedad (4.2):

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \left[\int_z^{z + \Delta z} (f(w) - f(z)) \cdot dw \right] \right| \leq$$

$$\frac{1}{|\Delta z|} \cdot (\text{Longitud del camino } [z + \Delta z, z]) \cdot (\text{Máximo valor de } |f(w) - f(z)|, \text{ si } w$$

$$\in [z, z + \Delta z] = \frac{1}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| \cdot \max_{w \in [z, z + \Delta z]} |f(w) - f(z)| = \max_{w \in [z, z + \Delta z]} |f(w) - f(z)|.$$

Por hipótesis f es una función continua en el punto z , luego si $|w - z| < \delta$, entonces de $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$, por lo que se puede considerar que:

$$\max_{w \in [z, z + \Delta z]} |f(w) - f(z)| < \varepsilon, \text{ de donde se obtiene que:}$$

$$\text{Si } |\Delta z| < \delta \text{ entonces } \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon, \text{ y al calcular el límite}$$

cuando $|\Delta z|$ tiende a cero se tiene que:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z), \text{ por lo que } F \text{ es la función primitiva de } f, \text{ pues}$$

$F'(z) = f(z)$, como se quería demostrar. \square

4.4.2. Distintos enunciados del teorema de Cauchy

Existen muchos enunciados diferentes del teorema de Cauchy, con condiciones distintas sobre el camino, sobre la función y sobre el dominio. El teorema anterior demuestra que si una función $f(z)$ tiene primitiva en un dominio, su integral a lo largo de una curva cerrada contenida en él vale cero. El problema queda ahora reducido a conocer las condiciones que permiten asegurar la existencia de una función primitiva de una función sobre el dominio.

El hecho de que una función sea holomorfa en un dominio no garantiza la existencia de función primitiva, como se ha visto en el caso de la función $f(z) = 1/z$, que es holomorfa en $\mathbf{C}/\{0\}$ y sin embargo no tiene primitiva.

El teorema de Cauchy expresa las condiciones en las que se puede

garantizar la existencia de primitiva de una función, o lo que es equivalente, que la integral sobre cualquier curva cerrada contenida en un dominio sea cero.

Si se analiza un poco el **desarrollo histórico** de este importante teorema, el teorema de Cauchy, se comprueba que en algunas ocasiones se buscan condiciones sobre el camino, γ , otras veces sobre la función f , y por último, se imponen condiciones sobre el dominio G para asegurar que f tenga primitiva en G , o que la integral sobre un camino cerrado sea nula. Por esto, se tienen distintos enunciados que imponen condiciones suficientes, no necesarias, para ello.

El primer enunciado que se estudia, se debe a su interés histórico y a la sencillez de su demostración. Cauchy enunció y demostró el teorema imponiendo a f ser holomorfa y con derivada f' continua en G :

Versión primera del Teorema de *Cauchy*

Si γ es un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo en un dominio G y f es holomorfa y con derivada primera f' continua tanto sobre la traza (γ) como en la zona encerrada por la curva γ entonces $\int_{\gamma} f = 0$.

Demostración:

La demostración de *Cauchy* se basa en el teorema de *Green* y relaciona la integral compleja con las integrales curvilíneas reales (4.1). El teorema de *Green* dice que si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en la región Ω formada por la traza de un camino cerrado y simple γ y por el interior de dicho camino, $\Omega = (\gamma) \cup (\gamma)^{\circ}$,

entonces:

$$\int_{\gamma} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) \cdot dx \cdot dy$$

Por lo tanto:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \cdot \int_{\gamma} (v dx + u dy) =$$

$$\iint_{\Omega} (-v_x - u_y) dx dy + \iint_{\Omega} (u_x - v_y) dx dy ,$$

pues al ser f' continua en $\Omega = (\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$, las funciones u y v son continuas en Ω así como sus derivadas de primer orden. Imponiendo las condiciones de *Cauchy-Riemann*, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, se obtiene que la integral vale cero, $\int_{\gamma} f =$

0. \square

Pero para poder usar la fórmula de *Green* deben ser las derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y continuas en Ω , siendo $\Omega = (\gamma) \cup (\overset{\circ}{\gamma})$, y estas condiciones no son necesarias. El resultado se puede ampliar a cualquier camino cerrado, aunque no sea simple, y su orientación no sea positiva.

Lema de Goursat

E. Goursat (1 858 – 1 936) fue el primero en demostrar que la condición de continuidad sobre f' se podía omitir. Probó que:

Si f es holomorfa en un abierto y conexo G y T es un camino cerrado rectangular simple y orientado positivamente, tal que él y su interior estén contenidos en G , $((T) \cup (\overset{\circ}{T}) \subset G)$, entonces $\int_T f = 0$.

La idea de la demostración se basa en construir una sucesión de rectángulos cada vez más pequeños $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, e ir acotando la integral de partida con esos rectángulos que convergen a un punto z_0 de G . La integral queda acotada debido a la derivabilidad de f .

A *Pringsheim* se debe una nueva demostración que sustituye el rectángulo por un triángulo, (que en ocasiones se conoce también con el nombre de “*Lema de Goursat*”).

Demostración:

La idea de la demostración se basa en dividir el triángulo T en cuatro triángulos semejantes obtenidos a partir de los puntos medios de los lados: $T_0^1, T_0^2, T_0^3, T_0^4$, que se orientan igual que T .

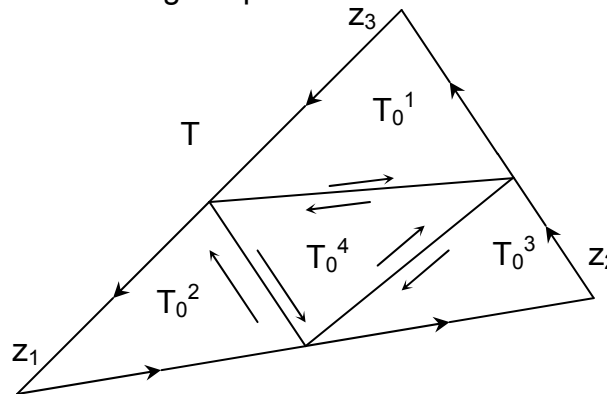


Figura 4.7: *Lema de Goursat*

De esta forma se tiene que la longitud de cada triángulo es la mitad del triángulo T de partida: $Long(T_0^k) = \frac{1}{2} Long T$, y que:

$$\int_T f = \sum_{k=1}^4 \int_{T_0^k} f . \text{ Se elige al triángulo } T_1 \text{ como el triángulo } T_0^k \text{ que hace máximo}$$

$$\text{el valor de la integral: } \left| \int_{T_0^k} f \right|, \text{ pues entonces: } \left| \int_T f \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{T_0^k} f \right| \leq 4 \left| \int_{T_1} f \right|$$

Se divide ahora de nuevo el triángulo T_1 en cuatro triángulos $T_1^1, T_1^2, T_1^3, T_1^4$ de la misma forma que antes, y se llama T_2 al triángulo T_1^k que hace

máximo el valor de la integral $\left| \int_{T_1^k} f \right|$, siendo $long(T_2) = \frac{1}{2} long(T_1) = \frac{1}{4} long(T)$.

Se repite indefinidamente el proceso construyendo una sucesión de triángulos cada vez menores, tales que $T, T_1, T_2 \dots T_i \dots$ donde cada triángulo T_i

se divide en cuatro triángulos $T_i^1, T_i^2, T_i^3, T_i^4$ de forma que $\int_{T_i} f = \sum_{k=1}^4 \int_{T_i^k} f$ y

se elige T_{i+1} tal que:

$$\left| \int_{T_{i+1}} f \right| = \max_{1 \leq k \leq 4} \left| \int_{T_i^k} f \right| \text{ y por tanto } \left| \int_{T_i} f \right| \leq 4 \left| \int_{T_{i+1}} f \right|,$$

$$long(T_{i+1}) = \frac{1}{2} long(T_i) = \frac{1}{2^{i+1}} long(T).$$

Por tanto:

$$\left| \int_T f \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{T_1} f \right| \leq \dots \leq 4^n \cdot \left| \int_{T_n} f \right|$$

De este modo se obtiene una sucesión de conjuntos compactos triangulares K_n , cuyas fronteras son los triángulos T_n , tales que: $K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset$

$K_n \supset \dots$ con diámetros cada vez menores: $diámetro(K_n) = \frac{1}{2^n} diámetro(K_0)$.

Se recuerda que se define el diámetro de un conjunto K como el supremo de las distancias entre dos puntos de K :

$$\text{Diámetro}(K) = \sup_{z_1, z_2 \in K} |z_1 - z_2|.$$

Por tanto el diámetro de K_n tiende a cero cuando n tiende a infinito y la intersección de dichos compactos es un punto z_0 que pertenece a G :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Diámetro}(K_n)) = 0; \cap K_n = \{z_0\} \in G.$$

Utilizando la derivabilidad de f se acota la integral. Como f es holomorfa en G , existe su derivada en el punto z_0 , siendo: $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B_\delta(z_0) - \{z_0\}$ entonces:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

por lo que para todo z distinto de z_0 tal que $|z - z_0| < \delta$, entonces:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \tag{4.3}$$

Sea n suficientemente grande para que K_n esté contenido en $B_\delta(z_0)$, se verifica entonces que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{T_n} f \right| &= \left| \int_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \leq \\ &\left| \int_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| + \left| \int_{T_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \leq \end{aligned}$$

La primera integral vale cero pues es la integral de un polinomio, por lo que existe su función primitiva y T_n es una curva cerrada. La segunda integral se puede acotar usando la acotación (4.3)

$$\left| \int_{T_n} \varepsilon |z - z_0| dz \right| \leq \varepsilon \cdot \text{diámetro}(K_n) \cdot \text{long}(T_n) \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \text{diámetro}(K_0) \cdot \frac{1}{2^n} \text{long}(T) =$$

$$\frac{1}{4^n} \varepsilon \cdot \text{diámetro}(K_0) \cdot \text{long}(T).$$

Por tanto:

$$\left| \int_T f \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{T_n} f \right| \leq 4^n \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \varepsilon \cdot \text{diámetro}(K_0) \cdot \text{long}(T) = \varepsilon \cdot \text{diámetro}(K_0) \cdot \text{long}(T)$$

que se puede hacer tan pequeña como se quiera, por lo que $\int_T f = 0$. \square

Otro camino fue probar el teorema cuando el dominio G es un disco. Esto conduce a la tercera versión del teorema de *Cauchy*.

Teorema de *Cauchy* para un disco

Si f es una función holomorfa en un disco $B_r(z_0)$ entonces la integral

$$\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0 \text{ cualquiera que sea el camino cerrado } \gamma \text{ contenido en } B_r(z_0).$$

La demostración se basa en el enunciado anterior y en probar que, en esas condiciones, f tiene función primitiva sobre $B_r(z_0)$, es decir, existe $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo z de $B_r(z_0)$.

Demostración:

Se define $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(s) \cdot ds = 0$ para todo z de $B_r(z_0)$. Entonces:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\int_{[z_0, z+h]} f(s) \cdot ds - \int_{[z_0, z]} f(s) \cdot ds - f(z) \cdot h \right) \right| =$$

Utilizando el teorema de Cauchy para el triángulo se tiene que:

$$\int_{[z_0, z] + [z, z+h] + [z+h, z_0]} f(s) \cdot ds = 0 \text{ por lo que:}$$

$$\int_{[z, z+h]} f(s) \cdot ds - f(z) \cdot h = \int_{[z_0, z+h]} f(s) \cdot ds - \int_{[z_0, z]} f(s) \cdot ds$$

y sustituyendo:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} f(s) \cdot ds - f(z) \cdot h \right| =$$

$$\frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} (f(s) - f(z)) ds \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \max_{s \in [z, z+h]} |f(s) - f(z)| = \max_{s \in [z, z+h]} |f(s) - f(z)|$$

Al ser la función continua cuando h tiende a cero, $f(s)$ tiende a $f(z)$ por lo que $\max_{s \in [z, z+h]} |f(s) - f(z)|$ tiende a cero, y entonces $F'(z) = f(z)$ para todo z de

$B_r(z_0)$. \square

Se observa que la demostración se basa en poder acotar la derivada para poder asegurar que existe función primitiva, para lo que se ha utilizado el hecho de que para todo z de B los segmentos $[z_0, z]$, $[z_0, z+h]$ y $[z, z+h]$ deben estar contenidos en B , por lo que es posible extender el teorema, en lugar de para un disco, o para un triángulo, cuando la región B es un conjunto convexo, (es decir, contiene a todos los puntos de cualquier segmento, con origen y extremo en el conjunto).

Teorema de *Cauchy* para caminos homótopos

Sea G una región y γ un camino cerrado con traza contenida en G y homótopo a 0 , entonces la integral $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz$ se anula para toda función f holomorfa definida en G .

Sean γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados con trazas contenidas en G y que son *homótopos* en G . Entonces sus integrales $\int_{\gamma_1} f(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} f(z) \cdot dz$ son iguales para toda función holomorfa f definida en G .

Teorema de *Cauchy* en dominios simplemente conexos

Sea G un conjunto *abierto simplemente conexo*. Entonces la integral $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz$ se anula para todo camino cerrado y toda función f holomorfa en G .

Probarlo para todo dominio simplemente conexo es sencillo si el camino es cerrado y simple, o si se intersecta a sí mismo un número finito de veces, y se basa en versiones ya demostradas. Las sutilezas aparecen cuando el camino tiene infinitas autointersecciones¹.

Combinando esta versión con la caracterización de la existencia de funciones primitivas se tiene que si G es un conjunto abierto y simplemente conexo toda función holomorfa definida en G admite primitiva.

Una consecuencia quizá menos esperada de la conexión simple es el hecho de que si f es holomorfa y no se anula, puede definirse, en un conjunto simplemente conexo, una rama holomorfa del $\log(f(z))$. De forma más precisa, si G es simplemente conexo y f es una función holomorfa definida sobre G tal que $f(z)$ sea distinto de cero para todo z de G , existe una función holomorfa g definida también sobre G tal que $f(z) = \exp(g(z))$.

Estos resultados, incluyendo la última versión del *teorema de Cauchy*, son verdaderas caracterizaciones de los conjuntos simplemente conexos, es decir,

¹ Esta demostración se encuentra en Markushevich, A. I. (1977): *Theory of functions of a complex variables*. Chelsea Publ.

se verifican también los recíprocos.

Se tienen las dos siguientes consecuencias inmediatas:

- Una función holomorfa en un dominio simplemente conexo tiene función primitiva en ese dominio
- Las funciones enteras admiten función primitiva

La versión más sencilla de utilizar, y que resume algunas de las anteriores es la conocida como teorema de Cauchy-Goursat:

Teorema de *Cauchy-Goursat*

Si γ es un camino cerrado y simple, y f es una función holomorfa en

$(\gamma) \cup (\gamma)^\circ$ entonces la integral $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.4.1: Calcular la integral $\int_{\gamma} f$ siendo $f(z) = z^2$, y γ el camino de

origen $z_0 = 0$ y extremo $z_1 = 2 + 3i$.

Para calcular la integral de $f(z) = z^2$ desde el punto $z_0 = 0$ hasta el punto $z_1 = 2 + 3i$, no es preciso conocer el camino, pues $f(z)$ tiene función primitiva;

$F(z) = \frac{z^3}{3}$, $\forall z \in \mathbf{C}$, por lo que

$$\int_{\gamma} z^2 dz = F(2 + 3i) - F(0) = \frac{(2 + 3i)^3}{3} = \frac{-46}{3} + 3i.$$

Ejemplo 4.4.2: Calcular la integral $\int_{\gamma} f$ siendo $f(z) = e^{z^2+3}$, y γ un camino

cerrado.

Sea γ un camino cerrado y con cualquier orientación. La $\int_{\gamma} e^{z^2+3} dz = 0$,

pues la función e^{z^2+3} es una función entera (holomorfa en todo el campo complejo).

Por la misma razón: $\int_{\gamma} (5z^4 - 7z^2)e^{z^2+3} dz = 0$; $\int_{\gamma} \text{sen}(z^3 - 1) dz = 0$,

$\int_{\gamma} \text{ch}(e^{z^2+3}) dz = 0$.

Ejemplo 4.4.3: Sea $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Verificar que se anulan las

siguientes integrales: $\int_{\gamma} f(z).dz$, siendo a) $f(z) = \frac{z^2+3}{z+4}$, b) $f(z) =$

$(z^2+1)e^{-z^3}$, c) $f(z) = \frac{z-3}{z^2-4}$, d) $f(z) = \frac{\text{senz}}{\cos z}$.

En efecto, todas se anulan, pues la función a) no es holomorfa en $z = -4$, que queda fuera del círculo de centro el origen y radio 1. La función b) es entera. La función c) no es holomorfa en $z = 2$ y en $z = -2$, que no pertenecen a $(\gamma) \cup (\gamma)^\circ$. La función d) no es holomorfa en todos los puntos en que se anula la función coseno, pero ninguno queda dentro de $(\gamma) \cup (\gamma)^\circ$.

Ejercicios

4.17. Comprobar que la integral $\int_{\gamma} \frac{1}{z^3} dz = 0$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq$

2π .

4.18. a) Calcular la integral $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma_1(t) = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) Calcular la integral $\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$ siendo $\gamma_2(t) = e^{it}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.

c) Comprobar que la integral $\int_{\gamma_3} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, siendo $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$.

4.19. Comprobar que la integral $\int_{\gamma} f = 0$ siendo $f(z) = (z + 4) e^{z-7}$ y $\gamma(t)$

$= r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, para todo r . Razonar la respuesta.

4.20. Comprobar que la integral $\int_{\gamma} f = 0$ siendo

$f(z) = (3z^2 + 4z) \cdot \text{sen}(5z^3 - 3)$ y $\gamma(t) = r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, para todo r . Razonar la respuesta.

4.21. Comprobar que la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)} = 0$ siendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, y

$\gamma_1(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Ayuda: Calcular previamente las integrales sobre el camino formado por los semicírculos superiores y los segmentos del eje de abscisas necesarios para que sea un camino cerrado. Lo mismo con los

semicírculos inferiores).

4.22. Comprobar las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{2+3i} z^2 dz = \frac{(2+3i)^3}{3}$$

$$\text{b) } \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$$

$$\text{c) } \int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z} dz = i\pi, \text{ siempre que el camino esté dentro del dominio}$$

$$\{z; |z| > 0, \arg(z) \in (-\pi, \pi)\}.$$

4.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL COMPLEJA

4.5.1. Trabajo y flujo

El valor de la integral va a ser un número complejo, al que se puede dar un significado geométrico o físico. Se puede considerar a w como un vector que asocia a cada punto (x, y) un vector $\mathbf{w} = (u, -v)$. Una función $w = f(z)$ se puede interpretar entonces físicamente de distintas formas. Se considera al camino γ como una curva cerrada y simple, recorrida en sentido positivo.

Se puede interpretar a \mathbf{w} como una **fuerza**, y la curva γ como una trayectoria a lo largo de la cual se mueve una partícula material por la acción de dicha fuerza. La dirección del movimiento es la del vector unitario tangente a la curva, por lo que si se denomina α el ángulo que forma la tangente con el eje

de abscisas x , entonces dicho vector es $e^{i\alpha}$.

Si se interpreta w como la **densidad de corriente**, entonces es natural pensar en la curva γ como una frontera por la cual se puede mover un punto material. Ahora cobra importancia el vector unitario normal a la curva por lo que si se denomina β el ángulo que forman la curva y el eje de abscisas x , entonces dicho vector es $e^{i\beta}$. Como un vector se obtiene girando 90° el otro, se tiene que $e^{i\alpha} = i \cdot e^{i\beta}$ y por tanto $\cos \alpha = -\text{sen } \beta$ y $\text{sen } \alpha = \cos \beta$.

La proyección de la fuerza sobre la dirección del movimiento multiplicada por la distancia recorrida es el trabajo, mientras que el flujo de materia a través de la curva es la componente normal al campo vectorial por la longitud de línea que lo cruza.

$$\int_{\gamma} f \cdot dz = \int_{\gamma} f_T \cdot ds + i \cdot \int_{\gamma} f_N \cdot ds.$$

De una forma poco ortodoxa se puede decir que:

$$\int_{\gamma} f \cdot dz = \text{trabajo} + i \cdot \text{flujo}.$$

El teorema de Cauchy: "Si γ es un camino cerrado y simple, y f es una función holomorfa en $(\gamma) \cup (\gamma)^\circ$ entonces la integral $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0$ ", se puede interpretar entonces como que, al anularse la integral, es nula su parte real y su parte imaginaria. Por tanto, al considerar nula la parte real, si $w = f(z)$ se interpreta como una fuerza, entonces el trabajo realizado por el campo de fuerzas cuando una partícula recorre una trayectoria cerrada y simple es nulo. Esto se expresa diciendo que el campo es irrotacional. Al considerar nula la parte imaginaria resulta que no hay flujo a través de la frontera, el gasto total a

través de la frontera es nulo, lo que se expresa diciendo que el campo vectorial no tiene fuentes.

4.5.2. Teorema de la divergencia

Desde la óptica anterior se puede recordar el teorema de la divergencia (de Gauss, Green, Riemann o Ostrogradsky) que dice que

$$\oint_{\gamma} u \cdot dx + v \cdot dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

$$\oint_{\gamma} u \cdot dy - v \cdot dx = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

donde γ es un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo, D es la región encerrada por γ y las funciones u y v son funciones continuas y con derivadas parciales continuas. Considerando a $w = f(z) = f(x + iy) = u - iv$. entonces

$$\int_{\gamma} f_T \cdot ds = \iint_D \operatorname{rot}(w) \cdot dx \cdot dy$$

$$\int_{\gamma} f_N \cdot ds = \iint_D \operatorname{div}(w) \cdot dx \cdot dy$$

El rotacional de un campo de fuerzas w se define como el cociente entre el trabajo realizado a lo largo de una pequeña curva cerrada y el área encerrada por esa curva.

$$\operatorname{rot}(w) \cdot dx \cdot dy = \text{trabajo infinitesimal.}$$

De manera similar se define divergencia:

$\text{div}(w) \cdot dx \cdot dy = \text{flujo infinitesimal}.$

El trabajo total a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a la suma de los trabajos realizados alrededor de todos los elementos de área encerrados en dicha trayectoria. El flujo total a través de una frontera es igual a los flujos infinitesimales de todas las fuentes que se encuentren dentro de área limitada por la frontera.

Ejercicios

- 4.23. La integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, siendo γ la circunferencia de centro el origen y radio uno, recorrida una vez en sentido positivo. Interpretar este resultado en términos de trabajo y flujo.

4.6. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

A partir del teorema de Cauchy se obtienen importantes consecuencias sobre el comportamiento de las funciones holomorfas.

En primer lugar se obtiene una representación integral de la función y de sus derivadas mediante la “fórmula integral de Cauchy”, y como consecuencia de ella se tienen propiedades locales y globales muy útiles de las funciones holomorfas, como que una función holomorfa puede desarrollarse en serie de potencias convergente alrededor de cada punto de holomorfía, lo que

demuestra que es infinitamente derivable en dicho punto.

Corolario 4.6.1:

Sea γ un camino cerrado y simple recorrido una vez en sentido positivo con traza contenida en un dominio simplemente conexo D , $D \supset (\gamma) \cup (\gamma)^\circ$. Sea f una función holomorfa en D salvo a lo sumo en un conjunto finito de puntos z_1, z_2, \dots, z_n , contenidos también en el interior de la traza de γ , $z_1, z_2, \dots, z_n \in (\gamma)^\circ$. Sean C_i n círculos de radio r_i recorridos una vez en sentido positivo alrededor de cada uno de esos puntos, y cuyos dominios interiores no tienen puntos en común, de tal forma que la función es holomorfa en el interior de su traza salvo en el punto z_i . Entonces:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f$$

Demostración:

Se construyen dos caminos como los de la figura, añadiendo segmentos que conectan cada círculo, formados por parte del camino γ , (recorrido en sentido positivo), unos segmentos que unen los círculos y parte de cada uno de los círculos, (recorridos en sentido negativo), de forma que σ_1 y σ_2 son caminos cerrados simples que no contienen en el interior de su traza ningún punto donde la función f no sea holomorfa:

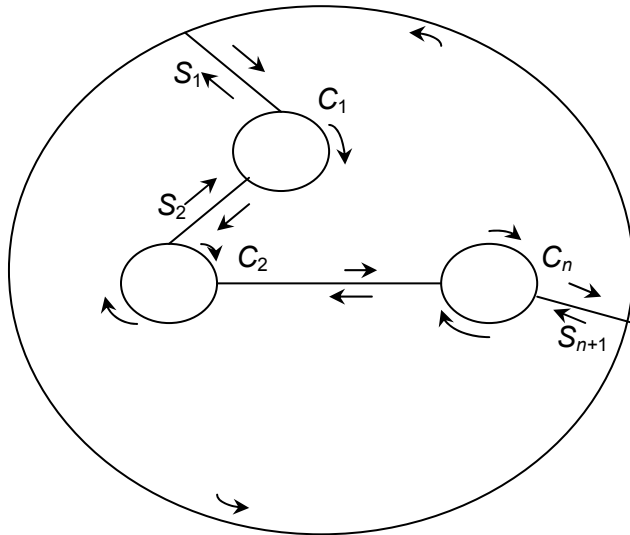


Figura 4.8: Fórmula integral de Cauchy

$$\sigma_1 = 1/2\gamma + s_1 + 1/2C_1 + s_2 + \dots + 1/2C_n + s_{n+1}$$

$$\sigma_2 = 1/2\gamma - s_1 + 1/2C_1 - s_2 + \dots + 1/2C_n - s_{n+1}$$

Aplicando a los caminos σ_1 y σ_2 el teorema de Cauchy-Goursat: Si σ es un camino cerrado y simple, y f es una función holomorfa en $(\sigma) \cup (\sigma)^\circ$ entonces la integral $\int_{\sigma} f(z).dz = 0$, se tiene que $\int_{\sigma_1} f = 0$ y que $\int_{\sigma_2} f$, luego:

$$\int_{\sigma_1 + \sigma_2} f = \int_{\sigma_1} f + \int_{\sigma_2} f = 0 = \int_{\gamma} f + \sum_{i=1}^n \int_{-C_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{s_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{-s_i} f$$

Los segmentos se recorren una vez en un sentido y otra en sentido

opuesto, luego $\sum_{i=1}^{n+1} \int_{s_i} f + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{-s_i} f = 0$.

Los círculos se recorren una vez en el sentido de las agujas del reloj (orientación negativa), luego:

$$\sum_{i=1}^n \int_{-C_i} f = - \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f$$

Por lo tanto

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f$$

donde el camino γ y los círculos se recorren una vez con orientación positiva. \square

Principio de Deformación de Caminos:

La demostración de este principio es una consecuencia inmediata del corolario anterior, y se denomina usualmente **Principio de Deformación de Caminos** ya que indica que si el camino γ_1 se deforma hasta convertirse en γ_2 , pasando siempre por puntos donde f es holomorfa, entonces el valor de la integral no varía. Dice así:

Corolario 4.6.2: Principio de Deformación de Caminos

Si f una función holomorfa en un dominio abierto y conexo D salvo en un punto z_0 , y γ_1 es un camino cerrado y simple con traza contenida en D , $D \supset (\gamma_1) \cup (\gamma_1)^\circ$, que rodea a z_0 , y γ_2 es un círculo de radio r y centro en z_0 contenido en D . Entonces:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

4.6.1. Fórmula integral de **Cauchy**

Sea D una región del campo complejo y sea f una función holomorfa en D .

Sea γ un camino cerrado con la traza y su interior, $(\gamma) \cup (\gamma)^\circ$, contenido en D .

Sea z un punto cualquiera que pertenece al interior de la región rodeada por la traza de γ . Para cada punto z de D que no pertenezca al traza de γ se tiene:

$$I_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw \quad (4.4)$$

La expresión (4.4) se denomina **Fórmula Integral de Cauchy**.

Demostración:

Se define una nueva función:

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \in D - \{z\} \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

La función g es continua en D y holomorfa en $D - \{z\}$. Se calcula su integral sobre γ .

$$\int_\gamma g = 0, \text{ pues } \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z), \text{ por lo que } \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right| < \varepsilon,$$

por tanto:

$$\int_\gamma g = \int_\gamma \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) + f'(z) \right) dw =$$

$$\int_\gamma \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right) dw + \int_\gamma f'(z) dw$$

Esta segunda integral es nula, $\int_\gamma f'(z) dw = 0$, y

$$\left| \int_\gamma g \right| = \left| \int_\gamma \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(z) \right) dw \right| \leq \varepsilon \cdot \text{Long}(\gamma).$$

Al ser f holomorfa en D por hipótesis al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que $\int_\gamma g =$

0.

Por otro lado:

$$\int_{\gamma} g = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw =$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$$

Por definición de índice, se tiene que: $l_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}$.

Por tanto:

$$0 = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \cdot l_{\gamma}(z) \cdot 2\pi i, \text{ y como}$$

consecuencia:

$$l_{\gamma}(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} \cdot dw. \quad \square$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.6.1: Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, siendo γ un cuadrado cerrado recorrido una

vez en sentido positivo de vértices $(5, 5)$, $(-5, 5)$, $(-5, -5)$, $(5, -5)$.

La integral $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, donde γ_1 es la circunferencia de centro el origen y

radio uno, recorrida una vez en sentido positivo. Por el principio de deformación continua su valor no varía al deformarse el círculo en el cuadrado y entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Ejemplo 4.6.2: Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2 - 1)(z + 3)} dz$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

La función no es holomorfa en $z = 1, -1$ y -3 , pero en el interior del círculo sólo están los puntos 1 y -1 . La integral puede descomponerse como suma de integrales:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2 - 1)(z + 3)} dz = \frac{-1}{4} \int_{\gamma} \frac{1}{(z + 1)} dz + \frac{1}{8} \int_{\gamma} \frac{1}{(z - 1)} dz + \frac{1}{8} \int_{\gamma} \frac{1}{(z + 3)} dz$$

Como el círculo es una curva cerrada recorrida una vez en sentido positivo, tomando en la fórmula integral de Cauchy $f(z) = 1$, las dos primeras integrales valen $2\pi i$, y la tercera vale cero. Por tanto:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z^2 - 1)(z + 3)} dz = \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{8} \right) 2\pi i$$

Ejemplo 4.6.3: Calcular $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aplicando la fórmula de Cauchy: $2\pi i \cdot I_{\gamma}(a) \cdot f(a) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$, con $a = 1$ y

$f(z) = z$, se tiene que $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot I_{\gamma}(1) \cdot f(1) = 2\pi i$.

Ejemplo 4.6.5: Calcular $\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 16)(z - 2)} dz$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 6\pi$.

Se aplica la fórmula de Cauchy, con $a = 2$, $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 16}$, $I_{\gamma}(2) = 3$ pues la

curva da tres vueltas en sentido positivo alrededor del punto, con lo que se obtiene que:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 16)(z - 2)} dz = 2\pi i \cdot 3 f(2) = \frac{-3\pi i}{2}.$$

Ejercicios

4.24. Calcular las siguientes integrales $\int_{\gamma} f$ siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq$

2π , y $f(z)$ igual a:

a) $\frac{z^2 - z + 6}{z + 1}$

b) $\frac{z^3}{(z^2 - \pi^2)(z - 1)}$

c) $\frac{\operatorname{sen} z}{z - \pi}$

d) $\frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)(z + 1)}$

e) $\frac{e^{z^2+3}}{z-1}$

4.25. Calcular las siguientes integrales $\int_{\gamma} f$ siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq$

2π , y $f(z)$ igual a:

a) $\frac{z^2 + 3z - 5}{z}$

b) $\frac{z^3 + 4}{(z^2 - 2)z}$

c) $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$

d) $\frac{\operatorname{cos} z}{(z - \pi)}$

$$e) \frac{e^{z^2+1}}{z}.$$

4.7. CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY

Varias son las consecuencias y aplicaciones que se pueden obtener de esta fórmula:

- Si γ es un camino de Jordan orientado positivamente, y si z es un punto cualquiera que pertenece al interior de la región rodeada por la traza de γ , entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw, \text{ mientras que si } z$$

$$\text{pertenece a la componente no acotada: } \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw = 0.$$

- Una función holomorfa se puede representar por medio de una integral:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i \cdot I_{\gamma}(z)} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw$$

- Observando que el valor de la función en un punto interior al camino viene determinado completamente por los valores que la función toma sobre su traza, se puede asegurar que si dos funciones holomorfas coinciden sobre una circunferencia, (o sobre un camino cerrado), deben coincidir también en todos los puntos interiores.
- Si se considera el camino determinado por la circunferencia de centro a y radio r recorrida una vez en sentido positivo, se obtiene

que:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

que puede interpretarse como que el valor de una función holomorfa f en un punto interior a es la media de los valores que toma f sobre la circunferencia $|z - a| = r$. De esta observación se obtienen otras importantes consecuencias como el teorema del módulo máximo o el principio del máximo.

4.7.1. Aplicación al cálculo de integrales reales

Se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy para calcular integrales reales. Basta para ello calcular integrales complejas, por ejemplo a lo largo del contorno cerrado que se descompone en el segmento real $[-R, R]$ y la semicircunferencia de radio R . Este procedimiento permite conocer el valor de ciertas integrales reales trigonométricas complicadas.

Por ejemplo, se vio en el *ejemplo 3* del apartado anterior que:

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz = 2\pi i.$$

Si ahora se calcula esa misma integral separando parte real y parte imaginaria, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{2e^{it}-1} 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{4ie^{2it}}{2e^{it}-1} dt = \int_0^{2\pi} \frac{4i(\cos 2t + i\sin 2t)}{2\cos t + i2\sin t - 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{4\sin 2t - 8\sin t}{5 - 4\cos t} dt + i \int_0^{2\pi} \frac{8\cos t - 4\cos 2t}{5 - 4\cos t} dt, \text{ por lo que:} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\operatorname{sen}2t - 8\operatorname{sent}}{5 - 4\cos t} dt = 0, \text{ y } \int_0^{2\pi} \frac{8\cos t - 4\cos 2t}{5 - 4\cos t} dt = 2\pi.$$

4.7.2. Desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa

Una consecuencia fundamental de la fórmula integral de Cauchy es:

Proposición 4.7.1:

Si f es holomorfa en z_0 entonces f es analítica en z_0 .

Demostración:

Sea $B_R(z_0)$ un disco en el cual f es holomorfa, y sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con r menor que R , entonces $\forall z \in B_R(z_0)$ se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) \cdot dw}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w) \cdot dw}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{f(w)}{w - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw$$

Como $z \in B_R(z_0)$ y w pertenece a la traza de γ , se tiene que $|z - z_0| < |w - z_0| = r$, por lo que $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$ y se puede aplicar la fórmula de la suma de los

infinitos términos de una serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

que converge uniformemente sobre los conjuntos compactos contenidos en $B_R(z_0)$, se puede entonces integrar término a término:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw,$$

y por lo tanto f es desarrollable en serie de potencias en z_0 y el desarrollo es válido en $B_r(z_0)$, por lo que f es analítica en z_0 . \square

Esta proposición justifica que en ocasiones se llame “analítica” a una función holomorfa.

Como consecuencia de lo anterior se tiene que:

Proposición 4.7.2:

Si f es holomorfa en $G \setminus \{a\}$, y si $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z) = 0$ entonces también

existe el límite de f cuando z tiende a a , y si se define $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ entonces

f es holomorfa en G .

Este punto a se denomina singularidad evitable.

Otra consecuencia de la fórmula integral de Cauchy es que toda función holomorfa es indefinidamente derivable, y se puede encontrar una expresión similar para las derivadas de la función f a la obtenida para la función $f(z)$ mediante la fórmula integral de Cauchy, ya que por ser f holomorfa en un abierto G entonces van a existir las derivadas de todos los órdenes de f en cada punto de dicho abierto G , y todas ellas son holomorfas en G , es decir, $f^{(m)}$

es también una función holomorfa en cada punto de G para cualquier número natural, m .

De forma precisa:

4.7.3. Derivadas de orden superior

Proposición 4.7.3:

Si f es holomorfa en z_0 entonces f es infinitamente derivable en z_0 y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

siendo $B_R(z_0)$ un disco en el cual f es holomorfa, y siendo $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con r menor que R .

Demostración:

Si f es una función holomorfa sobre un abierto G y z_0 es un punto de G , entonces f admite una representación en serie de potencias en un entorno de

z_0 , representación que es de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Al estudiar el desarrollo en serie de potencias de la función, y por ser único dicho desarrollo de Taylor, la expresión de la derivada queda probada. \square

Otra forma de hacer la demostración² es buscando la expresión de la derivada, y probar la expresión de la derivada n -ésima mediante el principio de inducción como un mero ejercicio.

La demostración, utilizando la definición de derivada, es:

² Página 138 de *Churchill & Brown*.

Demostración:

Como $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} \cdot dw$ entonces:

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - (z + \Delta z)} \cdot dw \text{ luego}$$

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \cdot \Delta z} \int_{\gamma} \left(\frac{f(w)}{w - (z + \Delta z)} - \frac{f(w)}{w - z} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i \cdot \Delta z} \int_{\gamma} f(w) \left(\frac{\Delta z}{(w - z - \Delta z)(w - z)} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z - \Delta z)(w - z)} \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)(w - z - \Delta z + \Delta z)}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2} \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w) \left(\frac{1}{(w - z)^2} + \frac{\Delta z}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2} \right) \cdot dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} \cdot dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)\Delta z}{(w - z - \Delta z)(w - z)^2} \cdot dw = I_1 + I_2.$$

Si en la segunda integral I_2 se sustituye la curva γ por una circunferencia de centro z y radio r , $r > 2|\Delta z|$, que se recorre una vez en sentido positivo, entonces su valor no se modifica y se tiene la siguiente acotación, aplicando la propiedad 6 (4.2): “Si $M \in \mathfrak{R}$, $|f(z)| \leq M \forall z \in (\gamma)$ entonces $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \cdot \text{long}(\gamma)$ ”

La longitud de la curva es $2\pi r$. Como $f(w)$ es continua en el conjunto compacto $|w - z| \leq r$, se puede acotar y $|f(w)| < M_r$. Se toma:

$|\Delta z| < r/2$, $|w - z| = r$, $|w - z - \Delta z| \geq ||w - z| - |\Delta z|| \geq r - r/2 = r/2$. Por lo

que se acota:

$$|I_2| = \left| \frac{1}{2\pi i \cdot l_\gamma(z)} \int_C \frac{f(w)\Delta z}{(w-z-\Delta z)(w-z)^2} \cdot dw \right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi |l_\gamma(z)|} \cdot \frac{M_r}{\frac{r}{2} \cdot r^2} \cdot 2\pi r = \frac{2M}{r^2} \cdot |\Delta z|$$

y al calcular el límite cuando Δz tiende a cero se comprueba que vale cero. Por tanto:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \cdot l_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} \cdot dw$$

Por inducción, derivando sucesivamente se prueba que una función holomorfa en un punto z , tiene infinitas derivadas de la forma:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i \cdot l_\gamma(z)} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} \cdot dw \quad \square$$

Como consecuencia se obtiene que si una función es holomorfa en un punto z , su función derivada, f' , es también una función holomorfa en ese punto, z , sus funciones derivadas son también funciones holomorfas en ese punto, z , y por tanto, basta que una función sea holomorfa en un punto z para que f tenga infinitas derivadas en dicho punto ($f \in C^\infty(z)$).

Si una función es holomorfa en un abierto G entonces es de clase infinito en ese abierto G .

Como consecuencia, se tiene que si $f = u + iv$ es holomorfa en un punto entonces, necesariamente, existen las derivadas parciales de u y v de cualquier orden y son continuas en dicho punto.

4.7.4. Desigualdad de Cauchy

En el caso de que γ sea una circunferencia, aplicando la acotación

anterior, se obtienen las llamadas **desigualdades de Cauchy**.

Proposición 4.7.4: Desigualdad de Cauchy

Si f es holomorfa en el círculo de centro a y radio r , $\{z \in \mathbf{C}: |z - a| \leq r\}$, entonces $|f^{(n)}(a)| \leq n! \cdot \frac{M(r)}{r^n}$ donde $M(r)$ es el máximo valor $|f(z)|$ del módulo de la función f sobre la circunferencia $|z - a| = r$.

Demostración:

Si $|f(z)| \leq M(r)$ sobre la circunferencia, acotando la integral por (4.2)

$$f^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i \cdot l_\gamma(a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \cdot dz$$

se obtiene que

$$|f^{(m)}(a)| \leq \frac{m! \cdot M(r)}{|2\pi i| r^{m+1}} \cdot 2\pi r = \frac{m! \cdot M(r)}{r^m}. \quad \square$$

Y en particular, una consecuencia inmediata de la desigualdad correspondiente a la primera derivada es el siguiente resultado:

$$|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r}$$

4.7.5. Teorema de Liouville

El teorema de Liouville es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy.

Proposición 4.7.5: Teorema de Liouville

Si f es entera y acotada en todo el plano complejo, entonces $f(z)$ es una función constante en \mathbf{C} .

Si f está acotada $M(r) = M$ y se tiene $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ para todo a , por lo que su módulo se puede hacer tan pequeño como se quiera al hacer crecer r . Al ser f entera es posible aplicar esta acotación en todo punto z , es decir, $f'(z)$ se anula para todo z , y en consecuencia, f es constante.

4.7.6. Teorema fundamental del Álgebra

Como consecuencia inmediata del Teorema de Liouville se obtiene el siguiente resultado conocido como “**Teorema Fundamental del Álgebra**”:

Proposición 4.7.6: Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio con coeficientes complejos, no constante, tiene siempre un cero.

Demostración:

Se demuestra utilizando el principio de contradicción.

Se construye $f(z) = 1/P(z)$ y se observa que si $P(z)$ es distinto de cero para todo z , entonces $f(z)$ está acotada. En efecto, como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = \infty$, existe un R tal que si $|z| > R$ entonces $|1/P(z)| < 1$. Y como por hipótesis $P(z)$ no se anula, la función $1/P(z)$ es continua en el disco de centro el origen y radio R : $B_R(0)$, luego está acotada para $|z| \leq R$, por lo que $1/P(z)$ está acotada en todo el plano complejo, \mathbf{C} .

Entonces si fuese entera, sería constante. Pero, por hipótesis, no es constante, por lo que no puede ser una función entera. Al ser una función racional no es holomorfa en los puntos en que se anula el denominador, con lo cual debe existir algún punto en el que $P(z)$ se anule, es decir, $P(z)$ debe tener algún cero. \square

Como consecuencia se obtiene que un polinomio complejo de grado n , $n \geq 1$, tiene n raíces (contadas cada una de ellas con su orden de multiplicidad).

4.7.7. Teorema de Morera

El **teorema de Morera**, debido a *E. Morera* (1 856 – 1 909), es también una consecuencia inmediata de lo anterior y se puede considerar recíproco del teorema de *Cauchy*. Dice:

Proposición 4.7.7: Teorema de Morera

Si f es continua en un dominio simplemente conexo $G \subseteq \mathbf{C}$, y para todo camino cerrado contenido en G las integrales de f a lo largo de esos caminos son siempre nulas, entonces la función es holomorfa en G .

Demostración:

En efecto, la hipótesis del teorema implica que f admite una función primitiva F cuya derivada coincide con f en G , $F' = f$, por lo que F es derivable en G , y por tanto es holomorfa en G , con lo que las derivadas de orden n de F son funciones holomorfas, y en particular su derivada primera, f , es una función holomorfa en G . \square

El teorema de *Morera* es útil en numerosas ocasiones para demostrar la holomorfía de funciones.

Una aplicación sencilla es el principio de reflexión de *Schwartz* que dice así:

Proposición 4.7.8: Principio de reflexión de Schwartz

Sea G_+ un abierto del semiplano superior del plano complejo, cuya frontera contiene al segmento L del eje real. Sea G_- el abierto simétrico de G_+

respecto del eje real. Sea f una función holomorfa en G_+ que toma valores reales en L . Entonces la función definida mediante:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in G_+ \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in G_- \end{cases}$$

es holomorfa en el abierto $G_+ \cup G_- \cup L$.

4.7.8. Principio del módulo máximo

También se tienen resultados importantes relacionados con los **valores máximos (y mínimos) de los módulos** de funciones holomorfas. El resultado siguiente se denomina a veces **teorema del valor medio de Gauss**.

Lema 4.7.9: Teorema del valor medio de Gauss

Sea f una función holomorfa en un entorno $|z-a| < \varepsilon$. Si $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo z del entorno, entonces $f(z)$ tiene valor constante $f(a)$ en ese entorno.

Es una consecuencia casi directa del hecho de que el valor de la función en un punto interior a sea el promedio de los valores de f en la circunferencia de radio r y centro a . Este lema se utiliza para probar el teorema que se conoce como **principio del módulo máximo**:

Proposición 4.7.10: Principio del Módulo máximo

Si una función f es holomorfa y no constante en un dominio G , $f(z)$ no alcanza un valor máximo en G .

Es decir, no existe ningún punto a de G tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo z de G .

La demostración de este resultado se basa en suponer que existe un punto de G en el que la función alcanza su valor máximo, llegando a la

conclusión de que en ese caso la función sería constante, lo que se ha impuesto, por hipótesis, que no lo es.

Otra consecuencia inmediata se obtiene si la misma idea se aplica ahora a una región cerrada y acotada:

Si una función f es holomorfa en una región cerrada y acotada G , es, naturalmente, una función continua en G , luego por el teorema de *Weierstrass* el módulo de la función debe alcanzar un valor máximo en G . Si f no es constante ese valor máximo no puede alcanzarlo en el interior de la región G , con lo que se obtiene la siguiente consecuencia:

Proposición 4.7.11:

Si f es una función continua en una región cerrada y acotada G y es holomorfa y no constante en el interior de G , entonces el máximo valor de $|f(z)|$, se alcanza en algún punto de la frontera de G .

En efecto, $|f(z)|$ no puede alcanzar su máximo en el interior del recinto G , por lo que deberá alcanzarlo en la frontera.

Como consecuencia, si f es una función entera, (holomorfa en todo el campo complejo), y no es constante, no puede ser acotada en \mathbf{C} .

Por ejemplo, ya se vio que las funciones $\operatorname{sen}(z)$ y $\operatorname{cos}(z)$ no eran acotadas en el campo complejo, y se acaba de comprobar que al ser funciones enteras y no ser funciones constantes, necesariamente no podrían estar acotadas en \mathbf{C} .

De forma similar puede probarse que el mínimo valor de $|f(z)|$ debe alcanzarse en la frontera, nunca en el interior del recinto.

4.7.9. Otras consecuencias

Estos resultados permiten extraer algunas importantes consecuencias:

1. Si f es holomorfa en una región G y existe un punto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo n mayor o igual a uno, entonces f es constante en G .
2. Si f es holomorfa en una región G y existe una sucesión (a_n) contenida en G con todos los a_n distintos, y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in G$, y $f(a_n) = 0$ para todo n mayor o igual a uno, entonces $f(z) = 0$ para todo z de G . Es decir, los ceros de una función holomorfa no nula tienen que ser puntos aislados en el dominio de holomorfa.

Principio de prolongación analítica

Proposición 4.7.12: Principio de prolongación analítica

Sea G una región del campo complejo y (a_n) una sucesión de puntos distintos de G tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in G$. Si f y g son funciones holomorfas en G tales que $f(a_n) = g(a_n)$ para todo n mayor o igual a uno, entonces $f(z)$ es igual a $g(z)$ para todo z de G .

Como consecuencia, si dos funciones holomorfas coinciden en la intersección de una recta con G deben coincidir en todo G , con lo que queda probado, por ejemplo, que sólo existe una forma de extender la función real $f(z) = e^x$ a una función holomorfa en todo el campo complejo.

Ceros de funciones holomorfas

Proposición 4.7.13: Ceros de funciones holomorfas

Si f es holomorfa y no constante en G y $a \in G$ es un cero de f ($f(a) = 0$) entonces existe un mínimo entero $k > 0$ tal que $f(z) = (z - a)^k g(z)$ donde g es holomorfa en G y $g(a)$ es distinto de cero. Se dice entonces que f tiene en a un cero de orden k .

Regla de L'Hôpital

Proposición 4.7.14: Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones holomorfas en a tales que $f(a) = g(a) = 0$. Entonces se verifica que:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Se formulan a continuación tres resultados sobre el comportamiento en puntos de la frontera del círculo de convergencia de una serie de potencias.

Proposición 4.7.15: Teorema del límite de Abel

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot z^n$ con círculo de convergencia $|z| < 1$,

que se supone que converge en $z = 1$. Sea G_θ el interior de un ángulo de amplitud 2θ , ($\theta < \pi/2$) con vértice en $z = 1$, tal que se abre hacia la izquierda y

que es simétrico respecto al eje x . Entonces $\lim_{z \rightarrow 1, z \in G_\theta} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ siendo $f(z)$

la suma de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ en el interior del círculo.

Proposición 4.7.16: Teorema de Tauber

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia 1 y sea $f(z)$

su suma en el interior del círculo de convergencia. Si se satisface la relación

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n = 0$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

converge y tiene por suma A .

Proposición 4.7.17: Teorema de Fatou

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia 1,

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Entonces la serie converge uniformemente en cada arco z

$= e^{i\theta}$, ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) tal que todos sus puntos son regulares (no son singulares) para $f(z)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 4.7.1: Calcular $\int_C \frac{dz}{z - z_0}$ y $\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, si C es una curva

cerrada simple, orientada positivamente, que rodea a z_0 .

Si C es una curva cerrada que rodea a z_0 , entonces a) $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, lo

que se obtiene como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy, siendo

$f(z) = 1$. b) $\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0$, para todo n desde 2 en adelante, lo que se obtiene

como consecuencia de la fórmula de la derivada de la fórmula integral de Cauchy.

Ejemplo 4.7.2: Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$ siendo γ la circunferencia de centro i

y radio 2, recorrida una vez en sentido positivo.

La función subintegral tiene singularidades aisladas en $2i$ y $-2i$, pero sólo $2i$ está en el interior del recorrido. Se escribe:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 + 4)^2} = \int_{\gamma} \frac{1}{(z+2i)^2} \cdot \frac{1}{(z-2i)^2} \cdot dz$$

Se toma como $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$, que es holomorfa en el interior del

recorrido, $z_0 = 2i$ y $n = 1$. Se aplica la expresión de la derivada:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Se obtiene que
$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+2i)^2} \cdot \frac{1}{(z-2i)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i \cdot f'(2i)}{1!} = \frac{2\pi i \cdot (-2)}{(4i)^3} = \frac{\pi}{16}.$$

Ejercicios

4.26. Aplicar el principio de inducción completa para demostrar la fórmula de la derivada de orden n .

4.27. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y siendo

$$f(z) \text{ igual a } \frac{7z^6 - 4z^2}{(z-2)^5}.$$

4.28. Aplicando la expresión de las derivadas de la fórmula integral

de Cauchy, calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} \cdot dz$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, 0

$\leq t \leq 2\pi$, y n un número natural. Utilizar el resultado obtenido para

demostrar que: $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \cdot dx = \frac{2\pi \cdot (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$.

4.29. Utilizar el Teorema de Liouville para demostrar que si f es una función entera y $\operatorname{Re} f \geq 0$, entonces f es constante.

4.30. Utilizar el teorema del valor medio de Gauss para calcular la

integral: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}^2((\pi/6) + e^{it})} \cdot dt$.

4.8. EJERCICIOS

4.31. Calcular la longitud del camino:

$$z(x) = \begin{cases} x + ix & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

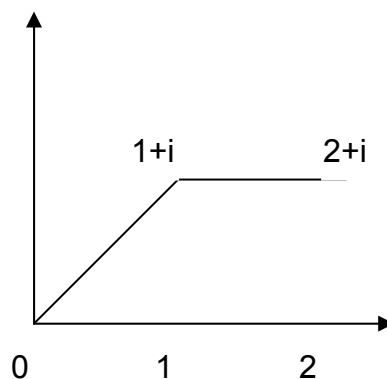


Figura 4.9: Ejercicio 4.32

4.32. Comprobar si $\int_{\gamma} f$ es igual a:

a) 2, si $f(z) = \bar{z}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento que une el origen con el punto $2i$.

b) $8(1 - i)$, si $f(z) = \bar{z}$, siendo $\gamma(t)$ el segmento que une el punto $2i$ con $4 + 2i$.

c) ¿Puede existir una función holomorfa cuya derivada sea \bar{z} ?

4.33. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular

$$\int_{\gamma} f, \text{ si } f(z) = \bar{z}, \text{ y siendo } \gamma(t) = 2e^{it}, \frac{-\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \text{ y comprobar que}$$

se obtiene $4\pi i$.

4.34. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular

$$\int_{\gamma} f, \text{ con } f(z) = |z - 1|, \text{ siendo } \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ y comprobar que}$$

se obtiene 8.

4.35. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular

$$\int_{\gamma} f, \text{ para } f(z) = |z|^2, \text{ siendo } \gamma(t) \text{ el cuadrado de vértices } 0, 1, 1 + i,$$

i , y comprobar que se obtiene $i - 1$.

4.36. Aplicar la definición de integral sobre un camino para calcular

$$\int_{\gamma} f, \text{ siendo } f(z) = f(x + iy) = y - x - i \cdot 3x^2 \text{ y } \gamma(t) \text{ el triángulo de}$$

vértices $0, i, 1 + i$, y comprobar que se obtiene $\frac{i - 1}{2}$.

$$4.37. \text{ Calcular: } \left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 \operatorname{sen} z} dz \right| \text{ siendo } \gamma(t) = r \cdot e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

4.38. Comprobar que $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z+2} dz \right| \leq 4\pi$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y

$$\text{que } \int_{\gamma} \frac{1}{z+2} dz = 0.$$

4.39. Comprobar que $\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{4\pi}{3}$, siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.40. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = z^2 + 3$ y si: a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$; b) $\gamma(t) =$

$$e^{it}, 0 \leq t \leq \pi; \text{ c) } \gamma(t) = e^{it}, \pi \leq t \leq 2\pi; \text{ d) } \gamma(t) = -1 + 2t, 0 \leq t \leq 1.$$

4.41. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = \frac{3+z}{z}$ para:

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;

c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$.

4.42. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = \text{sen}(z-1)$, siendo:

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;

c) $\gamma(t) = e^{it}$, $\pi \leq t \leq 2\pi$;

d) $\gamma(t) = -1 + 2t$, $0 \leq t \leq 1$.

4.43. Calcular: $\int_{\gamma} f$ si $f(z) = e^{z+3}$, y

a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

b) $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi;$

c) $\gamma(t) = e^{it}, \pi \leq t \leq 2\pi;$

d) $\gamma(t) = -1 + 2t, 0 \leq t \leq 1.$

4.44. Sea $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Verificar si se anulan, o no, las siguientes integrales, $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz$, siendo:

a) $f(z) = \frac{z^2 - 7}{z - 3},$

b) $f(z) = (z^2 - 5)e^{-z^3 + 6},$

c) $f(z) = \frac{z + 5}{z^2 - 9},$

d) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.$

4.45. Aplicar la fórmula integral de Cauchy para calcular las siguientes integrales $\int_{\gamma} f$ siendo $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, y $f(z)$ igual a:

a) $\frac{z^2 + 3z - 5}{z(z - 2)},$

b) $\frac{z^3 + 4}{(z^2 - 16)(z + 1)},$

c) $\frac{\operatorname{sen} z}{(z - 2)},$

d) $\frac{\cos z}{(z - \pi)},$

$$e) \frac{e^{z^2+1}}{(z+1)}.$$

4.46. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, siendo $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y $f(z)$

$$\text{igual a } \frac{z^4 - 3z^2}{(z-1)^3}.$$

4.47. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, siendo $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y

$$f(z) \text{ igual a } \frac{(z^3 - 5z) \cdot e^{z-1}}{(z-1)^3}.$$

4.48. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, siendo $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, y $f(z)$

$$\frac{\operatorname{sen} z \cdot e^{z-1}}{z^2}.$$

4.49. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, siendo $\gamma(t) = 4e^{-it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, y $f(z) =$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + 2z - 3}.$$

4.50. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, si $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, y si $f(z)$ es

$$\text{igual a } \frac{\cos z \cdot e^{z-1}}{z^2 - 4}.$$

4.51. Utilizar el teorema del valor medio de Gauss para calcular la

$$\text{integral: } \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\pi/3 + 3e^{it}) \cdot dt$$

4.52. Utilizar el teorema de Liouville para demostrar que si $|f| \geq c > 0$

entonces la función f es constante.

4.53. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, con $\gamma(t) = a + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y

$$f(z) = \frac{3(z-a)\operatorname{sen}z \cdot e^{z-a}}{(z-a)^3}.$$

4.54. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, si $\gamma(t) = r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, para $r = 1/2$

y para $r = 3/2$, siendo $f(z)$ igual a $\frac{\cosh z}{(z^2 + 1)z}$.

4.55. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$, siendo $f(z)$ igual a $\frac{e^{2z}}{(z^2 + 1)z}$ y γ un

camino cerrado de índices:

a) $I_{\gamma}(0) = 0$; $I_{\gamma}(i) = 0$; $I_{\gamma}(-i) = 0$.

b) $I_{\gamma}(0) = 0$; $I_{\gamma}(i) = 1$; $I_{\gamma}(-i) = 1$.

c) $I_{\gamma}(0) = 1$; $I_{\gamma}(i) = -1$; $I_{\gamma}(-i) = -1$.

d) $I_{\gamma}(0) = 1$; $I_{\gamma}(i) = -1$; $I_{\gamma}(-i) = 1$.

4.56. Calcular la integral de $\int_{\gamma} f$ si $\gamma(t) = r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, según los

distintos valores de r , distintos de 1 y de 2, con $f(z)$ igual a

$$\frac{e^z}{(z^2 + 1)(z + 2)}.$$

4.57. Calcular las siguientes integrales, $\int_{\gamma} f$:

a) con $f(z) = z^2 + 3\bar{z}$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

b) con $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

c) con $f(z) = \text{Log } z$ y $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

d) con $f(z) = \text{Re } z$ y $\gamma(t) \equiv [1, i]$.

(Solución: a) $-2/3 + 3\pi i$; b) $2i - 2$; c) $-2i$; d) $(i - 1)/2$)

CAPÍTULO 5

Singularidades y residuos

En este capítulo se estudian las funciones complejas cerca de aquellos puntos en los que la función no es holomorfa. Estos puntos se denominan singularidades. Las singularidades más frecuentes aparecen al formar el cociente de dos funciones holomorfas, ya que los ceros del denominador van a ser singularidades de la función. Esto lleva a estudiar brevemente el conjunto de ceros de una función holomorfa.

5.1. SINGULARIDADES

Tienen importancia ahora los puntos en los que la función no es holomorfa.

Definición 5.1.1:

Se dice que una función tiene una **singularidad** en $z = a$ si f no es holomorfa en a , y en todo entorno de a existen puntos donde la función es holomorfa.

Definición 5.1.2:

Se dice que una función f tiene una **singularidad aislada** en $z = a$ si f no es holomorfa en a , y existe un número $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z; 0 < |z - a| < R\}$.

$$|z - a| < R\}.$$

El conjunto $B_R(a) = \{z; |z - a| < R\}$ se denomina **disco abierto**, **bola abierta** o **entorno** de centro a y radio R .

El conjunto $B_R(a) \setminus \{a\} = \{z; 0 < |z - a| < R\}$ se denomina **disco pinchado**, **bola pinchada** o **entorno pinchado** de centro a y radio R , y se denota por $B'_R(a)$.

Usualmente se utiliza el nombre de **singularidad** para denominar a las singularidades aisladas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.1.1: Determinar las singularidades aisladas de las funciones

$$f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}, \quad f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}, \quad f(z) = \frac{4z}{z^2 + 1}.$$

Estas funciones tienen singularidades aisladas en los puntos $0; 0; i$ y $-i$ respectivamente.

Ejemplo 5.1.2: Determinar las singularidades de la función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}$.

Tiene singularidades aisladas en los inversos de los múltiplos enteros de π . El origen, que es también una singularidad de esta función, al ser un punto de acumulación de las singularidades anteriores, es una singularidad no aislada, ya que no existe ningún entorno del origen donde la función sea holomorfa.

Nótese que si f es holomorfa en todo el plano complejo salvo una cantidad

finita de puntos, entonces todas sus singularidades son aisladas.

Ejercicios

5.1. Determinar las singularidades aisladas de las funciones:

$$\text{a) } f(z) = \begin{cases} \operatorname{sen} z & \text{si } z \neq 2 \\ 0 & \text{si } z = 2 \end{cases},$$

$$\text{b) } f(z) = \begin{cases} e^z & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{1}{z},$$

$$\text{d) } f(z) = \frac{1}{z-3}.$$

(Solución: a) $z = 2$, b) $z = 1$, c) $z = 0$, d) $z = 3$).

5.2. Determinar las singularidades aisladas de las funciones:

$$\text{a) } f(z) = \frac{z}{z^2+3},$$

$$\text{b) } f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)},$$

$$\text{d) } f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right).$$

(Solución: a) $z = \pm i\sqrt{3}$, b) $z = 0$, c) $z = 0, i, -i$, d) $z = 0$).

5.3. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$.

(Solución: Tiene singularidades aisladas en $z = \frac{1}{n\pi}$, pero en $z = 0$ tiene una singularidad no aislada.

5.4. Analizar el tipo de singularidad de la función $f(z) = \operatorname{Log} z$ en $z = 0$.

(Solución: El origen es un punto singular, pero no es una singularidad aislada sino un punto singular no aislado ya que todos los puntos del semieje real negativo son singulares).

5.5. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

(Solución: Tiene singularidades aisladas en $z = \frac{1}{n}$, para n entero, y en $z = 0$ tiene una singularidad no aislada).

5.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS

Las singularidades aisladas se pueden clasificar en tres tipos:

- Singularidades evitables
- Polos
- Singularidades esenciales

5.2.1. Singularidades evitables

Definición 5.2.1:

El punto $z = a$ es una **singularidad evitable** de f si existe una función holomorfa $g: B_R(a) \rightarrow \mathbf{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo z del conjunto $B'_R(a) = \{z; 0 < |z - a| < R\}$.

Para comprobar si una función f tiene una singularidad evitable en un punto $z = a$ se puede utilizar el hecho de que si la función tiene una extensión analítica en la bola $B_R(a)$ entonces $\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0$ para toda curva cerrada en $B'_R(a)$.

Una función f tiene una singularidad evitable en a si f está acotada en $B_R(a) \setminus \{a\}$ para algún $R > 0$, por lo que también se puede comprobar la existencia del límite (finito) de $f(z)$ cuando z tiende a a .

Caracterización 5.2.1:

Sea a una singularidad aislada de f .

La función f tiene en $z = a$ una singularidad evitable \Leftrightarrow

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) = 0.$$

5.2.2. Polos

Definición 5.2.2:

Si $z = a$ es una singularidad aislada de f , se dice que es un **polo** si

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty.$$

Si f tiene un polo en $z = a$, la función $1/f(z)$ tiene una singularidad evitable en ese punto. Así, si se define $h(z) = 1/f(z)$ si $z \neq a$ y $h(a) = 0$, la función h es holomorfa y tiene un cero en $z = a$. Al orden de este cero se le llama **orden del polo**.

Por otra parte si f tiene un cero en $z = a$, la función $1/f(z)$ tiene un polo en $z = a$. Así existe una dualidad entre estos dos conceptos. De acuerdo con las propiedades de los ceros de una función holomorfa, se tiene:

Proposición 5.2.2:

Sea G una región, $a \in G$, f holomorfa en $G/\{a\}$. La función f tiene un polo en $z = a$ si y sólo si existe un entero positivo m y una función holomorfa $g: G \rightarrow \mathbb{C}$, con $g(a) \neq 0$ tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}.$$

Se dice que m es el **orden del polo**. Si $m = 1$ se dice que $z = a$ es un **polo simple**.

Caracterización 5.2.3:

Sea a una singularidad aislada de f .

La función f tiene un polo de orden m en $z = a$

\Leftrightarrow Existe el límite $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \cdot f(z)$ y es distinto de cero \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty \\ \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k \cdot f(z) = \infty \text{ si } m > k \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k \cdot f(z) = 0 \text{ si } m < k.$$

5.2.3. Singularidad esencial

Definición 5.2.3:

Se dice que una singularidad es **esencial** si es una singularidad aislada que no es polo ni evitable.

Por tanto, f tiene una singularidad esencial en $z = a$ si y sólo si en $\mathbf{C} \cup \infty$ no existe el límite: $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

De hecho el comportamiento de la función cerca de una singularidad esencial es muy oscilante como demuestra el siguiente teorema:

Teorema 5.2.5: Teorema de Casorati-Weierstrass

La función f tiene una singularidad esencial en $z = a$ si y sólo si $f(U)$ es denso en \mathbf{C} , para todo entorno reducido U de a .

Lo que es equivalente:

Si f tiene una singularidad esencial en a entonces para todo $w \in \mathbf{C}$, $\forall r > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $z \in B'_r(a)$ tal que $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Demostración:

Si no fuera así existirían w , r y ε tales que $\forall z \in B'_r(a)$ verificaría $|f(z) - w| \geq \varepsilon$. Entonces $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ estaría acotada en $B'_r(a)$ por lo que la

singularidad en a sería evitable, y en consecuencia la función $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$

tendría, bien un polo (si $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$) o bien una singularidad evitable (si

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) \neq 0). \quad \square$$

En la línea de estos resultados existe un teorema debido a *Picard* que afirma que, en las condiciones anteriores, f toma como valores todos los números complejos infinitas veces salvo quizás con una única posible excepción. Esto da idea de la naturaleza espectacularmente oscilante de las funciones cerca de sus singularidades esenciales.

Teorema 5.2.4: Teorema grande de Picard

El punto a es una singularidad esencial si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, $f(B_\varepsilon(a) \setminus \{a\})$ es todo el campo complejo \mathbf{C} salvo, a lo sumo, un punto.

Estos teoremas tienen diferentes aplicaciones, como por ejemplo:

- Si f transforma un entorno de a en un subconjunto del campo complejo excepto dos valores $f(B_\varepsilon(a)) \subset \mathbf{C} \setminus \{b, c\}$, entonces a no es una singularidad esencial de f .
- Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{w, w = e^{1/z}, 0 < |z| < \varepsilon\}$ es $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, pues la función $w = e^{1/z}$, tiene una singularidad esencial en $z = 0$. (Se recuerda que

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}).$$

5.2.4. Ceros de una función analítica

Se ha visto el interés de estudiar los ceros de una función holomorfa para analizar los polos, pues si f tiene un polo de orden m en a , entonces $(z - a)^m f(z)$

tiene una singularidad evitable en a y por tanto existe una función holomorfa

$$g(z) \text{ en un entorno de } a \text{ tal que } f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \text{ con } g(a) \neq 0.$$

Definición 5.2.4:

Sea G una región, $a \in G$ y f una función holomorfa en a distinta de la función nula. Se dice que a es un **cerro** de f si $f(a) = 0$. Se dice que a es un **cerro de orden k** de f si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ y $f^{(k)}(a) \neq 0$.

En consecuencia, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ donde $a_n = 0$ para todo n desde 0

hasta $k-1$.

Teorema 5.2.6:

Se supone que G es una región, f una función holomorfa sobre G y que $Z(f) = \{a \in G; f(a) = 0\}$. Entonces, o bien $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en G o bien $Z(f) = G$. En el primer caso, a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo m tal que $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$ con $z \in G$ y $g(a) \neq 0$.

Por lo tanto si f es holomorfa y no nula en una región G entonces sus cerros son aislados y $Z(f)$ es a lo sumo numerable.

El entero m es el orden del cerro.

Es claro que se puede plantear un resultado similar para los α -puntos de f , es decir, para el conjunto de cerros de $f - \alpha$ donde α es un número complejo.

Consecuencia inmediata del teorema anterior es que si dos funciones f y g son holomorfas sobre una región G y coinciden sobre un conjunto que tenga un punto de acumulación en G , las dos funciones son idénticas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.2.1: Clasificar los distintos tipos de singularidades aisladas de las funciones siguientes:

1. $f_1(z) = \begin{cases} \operatorname{sen} z & \text{si } z \neq 2 \\ 0 & \text{si } z = 2 \end{cases}$ tiene una singularidad aislada y *evitable* en $z = 2$.

2.

2. $f_2(z) = \begin{cases} e^z & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$ tiene una singularidad aislada y *evitable* en $z = 1$.

3. $f_3(z) = \frac{1}{z}$ tiene un *polo* de orden 1 en $z = 1$.

4. $f_4(z) = \frac{1}{(z-3)^4}$ tiene un *polo* de orden 4 en $z = 3$.

5. $f_5(z) = \frac{z}{z^2 + 3}$ tiene dos *polos* de orden 1 en $i\sqrt{3}$ y en $-i\sqrt{3}$.

6. $f_6(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$ tiene un *polo* de orden tres en 0 y dos *polos* de orden uno en i y $-i$.

7. $f_7(z) = \exp(1/z)$ tiene en $z = 0$ una singularidad *esencial*.

8. $f_8(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ tiene en $z = 0$ una singularidad no aislada, y en $z = \frac{1}{n\pi}$,

$n \in \mathbf{N}$, *polos* simples.

Ejemplo 5.2.2: Escribir cuatro ejemplos de singularidades evitables en $z = 0$:

1) La función $g_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable,

$$\text{pues } \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1 - \cos z}{z^2} = 0.$$

2) La función $g_2(z) = \frac{\text{senz}}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, pues

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\text{senz}}{z} = 0.$$

3) La función $g_3(z) = \begin{cases} e^z & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ tiene en $z = 0$ una singularidad

evitable, pues $\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot g_3(z) = 0$.

4) La función $g_4(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable,

$$\text{pues } \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1 - \cos z}{z} = 0.$$

Ejemplo 5.2.3: Escribir tres ejemplos de polos de orden dos en $z = 1$:

1) La función $h_1(z) = \frac{1 - \cos z}{(z-1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1 - \cos z}{(z-1)^2} = 1 - \cos(1) \neq 0.$$

2) La función $h_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z-1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1 - \cos z}{z^3(z-1)^2} = 1 - \cos(1) \neq 0.$$

3) La función $h_3(z) = \frac{1 - \cos z}{(z^2 - 1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1-\cos z}{(z^2-1)^2} = (1-\cos(1))/2 \neq 0.$$

Ejemplo 5.2.4: Escribir un ejemplo de singularidad esencial en $z = 0$:

La función $f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene en $z = 0$ una singularidad esencial pues es singularidad aislada que no es ni polo ni evitable.

Ejercicios

5.6. Clasificar los distintos tipos de singularidades aisladas de las

funciones siguientes: $f_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$, $f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}$, $f_3(z) =$

$$\exp\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\right), f_4(z) = \frac{(z-1)}{(z^2-1)(z+3)}.$$

5.7. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 \operatorname{sen}^3 z}$

b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 \operatorname{tg}^3 z}$

c) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^k}$

d) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{\operatorname{sen}^2 z \cdot e^z}.$

(Solución: a) Polo de orden 4 en $z = 0$, polo de orden 3 en $z = n\pi$, $n \neq 0$; b) Polo

de orden 5 en $z = 0$, polo de orden 3 en $z = n\pi$, $n \neq 0$; c) Si $k = 1$, singularidad evitable, si $k > 1$, polo de orden $k - 1$, en $z = 0$).

5.3. SERIES DE LAURENT

En el *capítulo 3* se estudió el desarrollo de una función mediante una serie de Laurent en un entorno de una singularidad, y se comprobó que el dominio de convergencia de la serie es una corona circular, obteniéndose que:

La serie de Laurent centrada en z_0 , $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ es convergente en r

$< |z - z_0| < R$ siendo su parte regular o analítica: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$, y su parte

principal: $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m} \cdot (z - z_0)^{-m}$.

Se demostró en el *capítulo 3*, *sección 3.5*, que $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y que

$r = \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$, por lo que la parte regular converge en el interior del círculo

de centro z_0 y radio R mientras que la parte principal lo hace en el exterior del círculo con el mismo centro y radio r .

Entonces existen tres posibilidades:

- i) Si $r = 0$ la serie es absolutamente convergente en el entorno pinchado de z_0 de radio R , que puede ser todo el plano complejo excepto el punto z_0 si $R = +\infty$.

- ii) Si $0 < r < R < +\infty$ la serie es absolutamente convergente en la corona circular de radios r y R .
- iii) Si $r > R$ la serie es divergente para todo z .

Así si $r < R$ la serie de *Laurent* es convergente en la intersección de los dos dominios, es decir en la corona circular $D = \{z; r < |z - z_0| < R\}$. Además en cada conjunto compacto contenido en el dominio de convergencia, la convergencia es uniforme. Esto permite definir en D una función holomorfa por

$$\text{medio de } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n .$$

5.3.1. Expresión integral de los coeficientes de la serie de Laurent

Si se forma una nueva corona circular de centro z_0 y radios r' y R' con $r < r' < R' < R$ contenida en la corona D , en esta nueva corona circular la función es holomorfa y existe convergencia absoluta y uniforme de la serie. Se construye un camino cerrado y simple γ formado por dos circunferencias de centro z_0 contenidas en el nuevo dominio y dos segmentos que las unen; entonces, aplicando la fórmula integral de *Cauchy* se puede expresar f mediante una integral compleja. Esta integral se descompone en dos integrales, una a través del círculo interior y otra a través del exterior. Se escribe cada una de las integrales en forma de serie de potencias y se obtiene una interesante relación entre los coeficientes de la serie de Laurent: a_k y expresiones integrales de la función f .

Como consecuencia del teorema de *Cauchy*, se sabe que la integral no depende de las circunferencias elegidas por lo que si γ_ρ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ , $|z - z_0| = \rho$ y $r < \rho < R$, entonces

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \cdot dz, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Gracias a este resultado de representación integral de los coeficientes de la serie de *Laurent* se obtiene que si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ y

$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \cdot (z - z_0)^n$ son dos series de *Laurent* convergentes en las

coronas circulares D y Δ respectivamente y $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en la circunferencia $|z - z_0| = \rho$ contenida en la intersección de D y Δ , entonces los coeficientes $a_n = b_n$ para todo n , esto es, las series coinciden.

En consecuencia, en una corona circular dada, sólo hay una serie de *Laurent* centrada en $z = z_0$ que tenga una determinada suma, y por lo tanto, si f tiene una singularidad aislada en z_0 , como entonces $r = 0$, la función tiene un desarrollo de *Laurent* válido en un entorno pinchado de z_0 .

5.3.2. Relación entre el tipo de singularidad y los coeficientes de la serie de Laurent

Se puede utilizar el desarrollo de Laurent para estudiar y clasificar las singularidades aisladas de una función. Así, si $z = z_0$ es una singularidad

aislada de f y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ es su desarrollo de *Laurent* en un disco

pinchado $B'_r(z_0)$, se tiene:

- i) $z = z_0$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$ si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n \leq -1$.
- ii) $z = z_0$ es un **polo de orden m** de $f(z)$ si y sólo si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n \leq -(m + 1)$.
- iii) $z = z_0$ es una **singularidad esencial** de $f(z)$ si y sólo si $a_n \neq 0$ para infinitos enteros negativos n .

Como era previsible, la parte del desarrollo que caracteriza el tipo de singularidad es la de potencias negativas, lo que explica el nombre dado de “parte principal”.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.3.1: En el capítulo 3 se estudiaron los desarrollos en serie de Laurent en $z = 0$ de las siguientes funciones:

$$1. f(z) = \frac{(z+1)^2}{z} = z + 2 + \frac{1}{z}.$$

$$2. g(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

$$3. h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots$$

Clasificar el tipo de singularidad, en cada caso.

Todas ellas presentan en $z = 0$ una singularidad aislada. A la vista de su desarrollo se puede asegurar que:

La función $f(z)$ tiene un polo simple, pues el último coeficiente distinto de cero de las potencias negativas es el de $\frac{1}{z}$.

La función $g(z)$ tiene un polo de orden 2, pues el último coeficiente distinto de cero de las potencias negativas es el de $\frac{1}{z^2}$.

La función $h(z)$ tiene una singularidad esencial, pues tiene infinitos coeficientes de potencias negativas distintos de cero.

Ejercicios

5.8. Clasificar, si existe, el tipo de singularidad en $z = z_0$, teniendo en cuenta los desarrollos en serie siguientes:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n.$$

$$\text{c) } f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+2}}.$$

5.4. RESIDUOS

Una de las aplicaciones del desarrollo de *Laurent* en torno a una singularidad reside en el **cálculo de integrales sobre caminos cerrados**. En este cálculo, la parte significativa del desarrollo es la correspondiente al coeficiente a_{-1} , coeficiente que es conocido como “**residuo**” y que se representa como $\text{Res}(f, z_0)$: $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

La noción de residuo fue introducida por *Cauchy*, quien llegó al concepto en 1814 al estudiar la diferencia entre dos integrales $\int_{L_1} f(z).dz$, $\int_{L_2} f(z).dz$ en el caso de que L_1 y L_2 sean caminos con los mismos puntos extremos, y que existan polos de $f(z)$ en la región comprendida entre las trazas de L_1 y L_2 . El mismo término, “residuo”, data de 1826 y es debido también a *Cauchy*. Durante el periodo de 1826 a 1829 *Cauchy* aplicó la teoría de residuos a problemas como los de evaluación de integrales, desarrollos de funciones en serie y productos infinitos, teoría de ecuaciones, etc.

Definición 5.4.1:

Sea z_0 una singularidad aislada de f y sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$, $\forall z \in$

$B_r(z_0)$. Se denomina **residuo** de f en z_0 y se escribe $\text{Res}(f, z_0)$ al coeficiente a_{-1} de la serie de Laurent.

La **razón** para destacar ese coeficiente estriba en que cuando se integra f a lo largo de un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo γ contenido en el disco pinchado $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ en que es válido el desarrollo de

Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$, resulta que $\int_{\gamma} f(z) dz = a_{-1} \cdot 2\pi i \cdot I_{\gamma}(z_0)$. Este

resultado se debe a la convergencia uniforme de la serie sobre la traza del camino, lo que legitima la integración término a término, y a la existencia de primitiva para las funciones $(z - z_0)^n$ para todo $n \neq -1$, lo que anula dichas integrales, por lo que únicamente queda una integral distinta de cero, la de coeficiente a_{-1} . En consecuencia, a_{-1} es “lo que queda” o “residuo” al integrar:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz =$$

$$a_{-1} \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = a_{-1} \cdot 2\pi i \cdot I_{\gamma}(z_0).$$

Se comprende la importancia de los residuos puesto que para evaluar $\int_{\gamma} f(z) dz$ lo único que cuenta es, (suponiendo que la función no tenga en el dominio rodeado por γ más singularidades que z_0 y que $I_{\gamma}(z_0) = 1$), el residuo: $Res(f, z_0)$. Si la curva rodease un número finito de singularidades se puede descomponer $\int_{\gamma} f(z) dz$ en suma de varias integrales $\int_{\gamma_k} f(z) dz$ de forma que cada curva γ_k rodee una única singularidad.

Teorema del residuo

Teorema 5.4.1:

Sea γ un camino cerrado que encierra un número finito de singularidades:

$$z_1, \dots, z_n; \text{ entonces: } \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n I_{\gamma}(z_k) \cdot \text{Res}(f, z_k).$$

Si se supone que γ es un camino cerrado y simple, por lo que el índice es uno, la idea de la demostración se basa en elegir los caminos $\gamma_k: z_k + r \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, con r suficientemente pequeño para que los γ_k no se corten entre sí ni a γ .

Entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_1) + \dots + 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_n).$$

Este teorema generaliza tanto el teorema de *Cauchy* como las fórmulas integrales de *Cauchy* para la función y sus derivadas.

Otra formulación de este mismo teorema es:

Teorema 5.4.1. Teorema de los residuos

Sea f holomorfa en G abierto simplemente conexo excepto en las singularidades aisladas z_1, z_2, \dots, z_n . Si γ es un camino cerrado con su traza contenida en G y que no contiene a ninguno de los puntos z_1, z_2, \dots, z_n y si γ es

homótopo a $\mathbf{0}$ en G , entonces:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z).dz = \sum_{k=1}^n I_{\gamma}(z_k) \cdot \text{Res}(f, z_k).$$

5.4.2. Cálculo de residuos. Residuos en los polos

La obtención general del residuo se realiza por medio del cálculo del desarrollo en serie de *Laurent* para conseguir conocer a_{-1} . Sin embargo, en el caso de que la singularidad sea un polo, existen procedimientos más breves que se derivan directamente del desarrollo.

Proposición 5.4.2:

Si f tiene una singularidad evitable en z_0 , el residuo vale cero.

Si f tiene un polo de orden k en z_0 , el residuo se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$$k = 1: \quad \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

$$k > 1: \quad \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k \cdot f(z)]$$

Demostración:

En efecto:

Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ en un disco $B_r(z_0)$. Si f tiene una singularidad

evitable en z_0 , entonces $a_n = 0$ para todo $n \leq -1$, por lo que el residuo vale cero.

Si f tiene un polo simple en z_0 , entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$$(z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} + a_0 \cdot (z - z_0) + \dots \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

Si f tiene un polo de orden dos en z_0 , entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$$(z - z_0)^2 \cdot f(z) = a_{-2} + a_{-1} \cdot (z - z_0) + a_0 \cdot (z - z_0)^2 + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 \cdot f(z)) = a_{-1} + 2a_0 \cdot (z - z_0) + 3a_1 \cdot (z - z_0)^2 + \dots \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d}{dz} ((z - z_0)^2 \cdot f(z)) \right) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

Si f tiene un polo de orden m en z_0 , entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$$(z - z_0)^m \cdot f(z) = a_{-m} + a_{-m+1} \cdot (z - z_0) + \dots + a_{-1} \cdot (z - z_0)^{m-1} + a_0 \cdot (z - z_0)^m + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \cdot f(z)) = (m-1)! \cdot a_{-1} + m! \cdot a_0 \cdot (z - z_0) + \dots \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \cdot f(z)) \right) = (m-1)! \cdot a_{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \cdot f(z)) \right) \right) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0). \quad \square$$

Proposición 5.4.3:

Si g y h son funciones holomorfas en un entorno de z_0 , y si $f = g/h$ con

$$g(z_0) \neq 0 \text{ y } h(z_0) = 0 \text{ siendo } h'(z_0) \neq 0 \text{ entonces } \text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Demostración:

En las condiciones de la proposición, f tiene un polo simple en z_0 , y

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite. Por tanto:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad \square$$

Proposición 5.4.4:

Si g es una función holomorfa en un entorno de z_0 , y si $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$

con $g(z_0) \neq 0$ entonces $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

Demostración:

En estas condiciones z_0 es un polo de orden m de la función f , por lo tanto:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m \cdot f(z)) \right) \right) =$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m \cdot \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \right) \right) \right) =$$

$$\frac{1}{(m-1)!} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (g(z)) \right) \right) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \quad \square$$

5.4.3. Residuo en el infinito

Se supone que $f(z)$ es holomorfa en cada punto z tal que $|z| > r$, para algún $r > 0$, excepto posiblemente en el punto $z = \infty$, y si se realiza una transformación preliminar por medio del cambio $\xi = 1/z$ se transforma el punto $z = \infty$ en el $\xi = 0$ y cada sucesión que converge a infinito en una sucesión que converge a cero. Debido a esto, el estudio de la función f en $z = \infty$ se reduce al estudio de $f^*(\xi) = f(1/\xi)$ que es una función holomorfa en el entorno reducido de cero, $|\xi| < 1/r$. El comportamiento de f cerca de ∞ se conoce mediante el de f^*

cerca de 0, con lo que es posible abordar cuestiones referentes a derivabilidad y continuidad cerca de ∞ .

En estas condiciones se dice ahora, por definición, que $z = \infty$ es un punto regular, un polo de orden k o una singularidad esencial de f si $\xi = 0$ lo es de f^* , es decir, $f(z)$ tiene en $z = \infty$ una singularidad evitable, un cero de orden k , un polo de orden k , una singularidad esencial o una singularidad no aislada si lo mismo le ocurre a $f^*(z)$ en $z = 0$.

Por ejemplo, $f(z) = z^k$ es un polinomio de grado k , que es una función entera. Para analizar su comportamiento en $z = \infty$ se estudia $f^*(z)$ en $z = 0$, es decir, $f^*(z) = 1/z^k$, que tiene un polo de orden k en $z = 0$, por lo que $f(z) = z^k$ tiene un polo de orden k en $z = \infty$. En general, un polinomio de grado k tiene en $z = \infty$ un polo de orden k .

Como se observa en el ejemplo anterior, la situación en el desarrollo de *Laurent* es la misma que en el caso finito, salvo que quedan intercambiados los papeles de las potencias positivas y negativas. Así, la parte principal pasa a ser la parte de las potencias positivas, y la parte regular, la de las potencias negativas. Hasta el momento se han evaluado los residuos en puntos finitos del plano complejo, sin embargo es posible considerar también el **desarrollo en serie de *Laurent* en torno al punto del infinito**.

Definición 5.4.2:

Dada una función f con desarrollo de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot z^n, \quad R < |z| < +\infty.$$

1. Se dice que f tiene un polo de orden k en $z = \infty$, si f^* tiene un polo de orden k en $z = 0$.
2. Se dice que f tiene un cero de orden k en $z = \infty$, si f^* tiene un cero de orden k en $z = 0$.
3. Se define **residuo de una función f en el punto del infinito** como:

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{f^*(z)}{z^2}, 0\right) = -\text{Res}\left(\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}, 0\right).$$

Proposición 5.4.5:

Si γ es una curva cerrada simple recorrida una vez en sentido positivo (el sentido contrario al de las agujas del reloj), y f es una función que no tiene singularidades en la región exterior a la curva γ (salvo ∞) entonces:

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i \cdot \text{Res}(f, \infty).$$

Demostración:

Sea R suficientemente grande para que la traza de la curva esté contenida en el círculo de centro el origen y radio R : $(\gamma) \subset B_R(0)$. Como, por hipótesis, no hay singularidades entre (γ) y $|z| = R$ se verifica que:

$$\int_{\gamma} f = \int_{|z|=R} f = \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \cdot i \cdot R e^{it} \cdot dt.$$

Por otra parte $f^*(z) = f(1/z)$ no tiene singularidades en $|z| < 1/R$ (salvo en 0) porque f no las tiene en $|z| > R$ (salvo ∞). Por ello:

$$-2\pi i \cdot \text{Res}(f, \infty) = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \int_{|z|=1/R} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot dz =$$

$$\int_0^{2\pi} R^2 \cdot e^{-2it} \cdot f(Re^{-it}) \cdot \frac{i}{R} \cdot e^{it} \cdot dt = \int_0^{2\pi} i \cdot R \cdot e^{-it} \cdot f(Re^{-it}) \cdot dt$$

que haciendo un cambio de variable se transforma en:

$$= \int_{2\pi}^0 i \cdot R \cdot e^{is} \cdot f(Re^{is}) \cdot ds = \int_0^{2\pi} i \cdot R \cdot e^{is} \cdot f(Re^{is}) \cdot ds = \int_{\gamma} f$$

La penúltima igualdad se obtiene teniendo en cuenta que la función $f(z) = e^{iz}$ es periódica, con periodo 2π . \square

Corolario 5.4.6:

Si $f(z)$ es holomorfa salvo en puntos singulares aislados, la suma de todos los residuos de $f(z)$ (incluyendo el residuo en el infinito) es igual a cero.

Este resultado permite simplificar el cálculo de algunas integrales.

La elección del signo negativo en la definición del residuo del infinito se puede explicar por el hecho de que si se tiene un camino cuya traza rodea a uno o varios puntos singulares finitos, se considera como sentido positivo el contrario a las agujas del reloj, ya que, en esta situación, dichos puntos quedan a la “izquierda”, supuesto que el desplazamiento es en ese sentido sobre la traza del camino. Si se quiere hacer lo mismo con un camino circular y el punto del infinito, ahora el sentido a considerar como positivo es precisamente el mismo que el de las agujas del reloj.

Corolario 5.4.7:

Sea una función f analítica en un entorno reducido del infinito, $\{z; R < |z| < +\infty\}$ y que tenga un desarrollo de *Laurent* de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot z^n, \quad R < |z| < +\infty.$$

Entonces $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$.

Demostración:

Se sabe que $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}, 0\right) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n, 0\right)$,

$$\begin{aligned} \text{Pero } \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n &= \frac{1}{z^2} \left(\dots + a_{-n} \cdot z^n + \dots + a_{-1} \cdot z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right) \\ &= \left(\dots + a_{-n} \cdot z^{n-2} + \dots + a_{-1} \cdot z^{-1} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n, 0\right) = a_{-1},$$

y en consecuencia:

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}. \quad \square$$

Si se integra $f(z)$ sobre un camino $\gamma_\rho: |z| = \rho, \rho > R$, se tiene que

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) \cdot dz = -2\pi i \cdot a_{-1}, \text{ lo que también explica el hecho de que el residuo de } f$$

en el infinito sea la cantidad $-a_{-1}$, ya que entonces $\int_\gamma f(z) \cdot dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, \infty)$

y se mantiene la armonía con el teorema del residuo.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.4.1: Calcular los siguientes residuos: a) $\text{Res}(\cotg \pi z, 0)$, b)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, 1\right), \text{ c) } \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, \frac{-1}{2}\right).$$

En a) $\cotg \pi z = \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}$ se verifican las condiciones de la *proposición*

$$5.4.3, \text{ por lo que } \operatorname{Res}(\cotg \pi z, 0) = \operatorname{Res}\left(\frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}, 0\right) = \frac{\cos \pi 0}{(\operatorname{sen} \pi 0)'} = \frac{1}{\pi}.$$

En b) la función tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, por lo que:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, 1\right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{d}{dz} ((z-1)^2 \cdot f(z))\right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{(2z+1)}\right) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{-2}{(2z+1)^2}\right) = \frac{-2}{9}.$$

En c) la función tiene un polo simple en $z = \frac{-1}{2}$, por lo que:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, \frac{-1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\left(z - \frac{-1}{2}\right) \frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}\right) =$$

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{2 \cdot (z-1)^2} = \frac{2}{9}.$$

Ejemplo 5.4.2: Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

$$\text{a) } \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{b) } \int_{\gamma} \frac{e^z \cdot dz}{z^2}, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{c) } \int_{\gamma} \frac{(z^2 - 1) \cdot dz}{z^2 + 1}, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

En los tres ejemplos, la curva está recorrida una vez y en sentido positivo, por lo que $I_\gamma(z) = 1$, si z es un punto interior a ella. Es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

En a) la función tiene un polo simple en el interior de la circunferencia, el punto $z = 1$, mientras que $z = 3$ es exterior, por lo que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2z - 3} = \int_\gamma \frac{dz}{(z+3)(z-1)} = 2\pi i \cdot I_\gamma(1) \cdot \text{Res}(f, 1) = 2\pi i \cdot 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z+3} = \frac{\pi i}{2}.$$

En b) la función tiene un polo de orden 2 en el interior de la circunferencia, el punto $z = 0$, por lo que:

$$\int_\gamma \frac{e^z \cdot dz}{z^2} = 2\pi i \cdot I_\gamma(1) \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i,$$

pues $\text{Res}\left(\frac{e^z}{z^2}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dz} \left(z^2 \cdot \frac{e^z}{z^2}\right)\right) = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1.$

En c) la función tiene polos simples en $z = i$ y en $z = -i$ en el interior de la circunferencia:

$$\int_\gamma \frac{(z^2 - 1) \cdot dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot I_\gamma(i) \cdot \text{Res}(f, i) + 2\pi i \cdot I_\gamma(-i) \cdot \text{Res}(f, -i) = 0,$$

pues $\text{Res}\left(\frac{(z^2 - 1)}{z^2 + 1}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{(z^2 - 1)}{2z}\right) = i$, ya que f es de la forma $f = g/h$, y

$$\text{Res}(f, i) = \frac{g(i)}{h'(i)}. \text{ De igual modo } \text{Res}\left(\frac{(z^2 - 1)}{z^2 + 1}, -i\right) = \lim_{z \rightarrow -i} \left(\frac{(z^2 - 1)}{2z}\right) = -i.$$

Ejemplo 5.4.3: Calcular, utilizando el residuo en el infinito las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_{|z|=4} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz$$

$$\text{b) } \int_{|z|=5} \frac{1}{z^2 + 2z - 3} dz.$$

Todos los puntos singulares están en el interior de la curva en los dos casos por lo que se puede asegurar que las integrales valen:

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i \cdot \text{Res}(f, \infty) = -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

$$\begin{aligned} \text{En la integral a) } \int_{\gamma} f &= -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z^2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{z}-1\right)^3}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+2\right)^3}, 0\right) \\ &= -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z} \cdot \frac{(1-z)^3}{(1+2z)^3}, 0\right) = 2\pi i. \text{ pues esta función tiene un polo simple en } z \\ &= 0 \text{ y su residuo vale } -1. \end{aligned}$$

En la integral b)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{z^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{z}\right) - 3}, 0\right) = \\ &= -2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{-1}{1+2z-3z^2}, 0\right) = 0, \end{aligned}$$

pues esta función tiene una singularidad evitable en $z = 0$ y su residuo vale 0.

Ejemplo 5.4.4: Calcular las siguientes integrales reales, utilizando

integrales complejas: a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10-6\cos x}$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

a) Se toma γ como la circunferencia de centro el origen y radio 1 $\Rightarrow z = e^{ix}$

$$\Rightarrow dz = i \cdot e^{ix} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz} \cdot \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 - 6 \cos x} = \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{10 - 6(z + \frac{1}{z})/2} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{10z - 3z^2 - 3} =$$

$$i \int_{\gamma} \frac{dz}{(3z-1)(z-3)}.$$

El punto $z = 3$ es exterior a la circunferencia, y el punto $z = 1/3$ es interior, por lo que:

$$I = i \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{(3z-1)(z-3)}, 1/3\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) Para calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ se toma como recinto un semicírculo de radio R en el semiplano superior, siendo $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $0 \leq t \leq 1$; $\gamma_2(t) = R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. La función tiene dos singularidades $z = i$ y $z = -i$, pero sólo $z = i$ está en el interior de la curva.

Por tanto:

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \pi = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \quad (5.1)$$

Mediante la desigualdad de Cauchy se puede acotar la segunda integral:

$$\left| \int_{\gamma_2} f \right| \leq \text{Long}(\gamma_2) \cdot \max_{z \in \gamma_2} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \pi \cdot R \cdot \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Se calcula el límite en la igualdad (5.1) cuando R tiende a infinito, y se obtiene:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\pi \cdot R \cdot \frac{1}{R^2 - 1} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ejercicios

5.9. Calcular los siguientes residuos, sabiendo que son polos

simples y utilizando que $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$:

a) $\text{Res}\left(\frac{1}{z - z^2}, 1\right).$

b) $\text{Res}\left(\frac{1}{z - z^2}, 0\right).$

c) $\text{Res}(\cotg \pi z, 0).$

d) $\text{Res}\left(\frac{1}{z^4 - 1}, i\right).$

(Solución: a) -1 ; b) 1 ; c) $\frac{1}{\pi}$; d) $\frac{i}{3}$)

5.10. Calcular los residuos del ejercicio anterior, utilizando que $\text{Res}(f, z_0)$

$$= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}:$$

5.11. Calcular los residuos de las funciones siguientes en todas sus

singularidades aisladas:

a) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}.$

b) $f(z) = \frac{1}{1 + z^4}.$

$$c) f(z) = \frac{\pi \cdot \cot g\pi z}{z^2}.$$

$$(Solución: a) \operatorname{Res}(f, i) = \frac{-3i}{8} = -\operatorname{Res}(f, -i); b) \operatorname{Res}(f, e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}) = \frac{-1}{4} e^{\frac{2k+1}{4}\pi i},$$

$$\text{para } k = 0, 1, 2 \text{ y } 3; c) \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{-\pi^2}{3}, \operatorname{Res}(f, n) = \frac{1}{n^2}, \text{ si } n \neq 0)$$

$$5.12. \text{ Demostrar la expresión } \operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, z_0\right) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

utilizando las fórmulas integrales de Cauchy.

5.13. Calcular los residuos siguientes mediante el desarrollo de la función en serie de Laurent:

$$a) \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^4}, 0\right).$$

$$b) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}, 0\right).$$

$$(Solución: a) \frac{-i}{6}; b) 0)$$

5.14. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^4}$ utilizando el teorema del residuo,

donde $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, $\gamma_1(t) = -2 + 4t$, $0 \leq t \leq 1$; $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, y

utilizar el resultado para calcular la integral real: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

$$(Solución: \frac{\pi\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi\sqrt{2}}{2})$$

(Ayuda: Utilizar la integral primera sustituyendo el radio, $r = 2$, por R que se hace tender a infinito)

5.5. FUNCIONES MEROMORFAS, ANALÍTICAS Y ENTERAS

En esta sección se presentan algunos resultados de interés, pero sin demostración, debido a que muchos de ellos son superiores al nivel pretendido en este libro.

5.5.1. Funciones meromorfas

Definición 5.5.1:

Una función f es **meromorfa** en G si sólo tiene singularidades aisladas en G y éstas son evitables o polos.

Por tanto:

- f es meromorfa en G si y sólo si $f = g/h$ con g y h funciones holomorfas en G y h no es idénticamente nula
- Dado un abierto H en \mathbf{C} y un conjunto P de puntos aislados de H se dice que f es una función meromorfa en H si f es holomorfa en H/P siendo P el conjunto de polos y singularidades evitables de f .
- La suma y el producto de funciones meromorfas es una función meromorfa.
- Si f es una función holomorfa en un conexo H entonces se sabe que el conjunto de sus ceros es un conjunto de puntos aislados y como consecuencia la función $1/f$ es meromorfa en H . Es decir, en un

conexo el cociente de dos funciones holomorfas es una función meromorfa.

5.5.2. El principio del argumento y sus consecuencias

La fórmula integral de *Cauchy* puede considerarse como un caso especial del teorema de los residuos. Basta acudir al planteamiento de ese resultado para comprobar que si la función $\frac{f(z)}{z-a}$ tiene un polo simple en $z = a$ su residuo es $f(a)$. Así, por el teorema del residuo se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} \cdot dz = I_{\gamma}(a) \cdot \text{Res}\left(\frac{f(z)}{z-a}, a\right) = I_{\gamma}(a) \cdot f(a).$$

Por otra parte, si se considera una función analítica f que tenga en a un cero de orden h , la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene en $z = a$ un polo simple con residuo h .

Si se considera un camino cerrado γ que rodee al punto $z = a$, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = I_{\gamma}(a) \cdot \text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = I_{\gamma}(a) \cdot h$$

Si la función f tiene un polo de orden h en $z = a$, el planteamiento viene a ser el mismo, salvo que el residuo es ahora $-h$. Esta situación puede plantearse en general para funciones meromorfas y da lugar al teorema conocido como “principio del argumento”.

Teorema 5.5.1: Principio del argumento

Sea f meromorfa en G con polos p_1, \dots, p_m y ceros z_1, \dots, z_n contados tantas veces como indica su multiplicidad. Si γ es un camino cerrado con traza

contenida en G , que no pasa por los puntos $p_1, \dots, p_m, z_1, \dots, z_n$ y que es homótopo a $\mathbf{0}$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \sum_{k=1}^n I_{\gamma}(z_k) - \sum_{j=1}^m I_{\gamma}(p_j).$$

Un planteamiento más general es el siguiente:

Teorema 5.5.2:

Sea f meromorfa en G con polos p_1, \dots, p_m y ceros z_1, \dots, z_n contados tantas veces como indica su multiplicidad. Si γ es un camino cerrado con traza contenida en G , que no pasa por $p_1, \dots, p_m, z_1, \dots, z_n$ y homótopo a $\mathbf{0}$ y g es analítica en G , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \sum_{i=1}^n g(z_i) I_{\gamma}(z_i) - \sum_{j=1}^m g(p_j) I_{\gamma}(p_j)$$

El primero de los dos teoremas corresponde al caso $g(z) \equiv 1$. Si se compara la primera versión del principio del argumento con los comentarios realizados, se observa que los resultados planteados corresponden exactamente a este principio, ya que si $f(z)$ tiene un cero de orden h en $z = a$ (polo de orden h), el número $I_{\gamma}(a)$ aparece exactamente h veces en el primer sumatorio de la igualdad que constituye la tesis de este principio.

Las razones por las que el resultado anterior recibe el nombre de “principio del argumento” no son obvias. Si se puede definir $\log(f(z))$, esta función es una primitiva de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y así $2\pi i \left[\sum_{k=1}^n I_{\gamma}(z_k) - \sum_{j=1}^m I_{\gamma}(p_j) \right]$ representa

la variación del argumento de $f(z)$ cuando z recorre γ . Como este número es

imaginario puro, el cambio es, realmente, el de $\text{Im}(\log(f(z)))$, esto es, el de

$i \cdot \arg(f(z))$. Así, $\arg(f(z))$ cambia en $2\pi \cdot \left[\sum_{k=1}^n I_{\gamma}(z_k) - \sum_{j=1}^m I_{\gamma}(p_j) \right]$ cuando z

recorre γ .

Se puede entender mejor el significado de ese principio si se piensa en un

ejemplo concreto como $f(z) = \frac{z \cdot (z-3)^2 \cdot (z-6)}{z+2}$, y una curva γ que tiene de

traza la circunferencia $|z| = 5$. Cuando el punto z da una vuelta completa a lo

largo de γ , cada uno de los factores del numerador de f tiene el siguiente

efecto: z da una vuelta en torno a 0, $(z-3)^2$ da dos vueltas alrededor del origen

y $(z-6)$ no da ninguna, sólo oscila un poco, por lo que el argumento del

numerador aumenta en $3 \cdot 2\pi = 6\pi$ cada vez que z recorre el camino γ . El

denominador también da una vuelta completa alrededor de 0, que hace

disminuir el argumento de $f(z)$ en 2π .

Naturalmente la explicación anterior no es precisa ni completa. En la

situación planteada se tiene que $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = 0$ ya que es una función que

admite primitiva. Una justificación completa se puede hacer por medio del lema

de cubrimiento de *Lebesgue*, y puede verse en *J. B. Conway*.¹

5.5.3. Teorema de *Rouché*

Como consecuencia del principio del argumento se pueden extraer

conclusiones sobre el número de ceros de una función holomorfa y

¹ Conway, J.: *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlang. (2ª edición). 1984.

especialmente el “teorema de Rouché”.

Teorema 5.5.3: Teorema de Rouché

Sea γ un camino homótopo a $\mathbf{0}$ con traza contenida en un conjunto abierto y simplemente conexo G . Sean f y g funciones analíticas en G y tales que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in (\gamma)$. Entonces $\sum_{i=1}^n p_i \cdot I_\gamma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^m q_j \cdot I_\gamma(\beta_j)$ donde $\alpha_1, \dots,$

α_n son los ceros de f con multiplicidades p_1, \dots, p_n y β_1, \dots, β_m son los ceros de g con multiplicidad q_1, \dots, q_m .

La versión más interesante de este resultado aparece cuando γ es precisamente la frontera del disco. En este caso, los índices son iguales a uno y el resultado dice que f y g tienen el mismo número de ceros dentro del disco, contando cada cero tantas veces como indique su orden.

El teorema de *Rouché* dice que si se somete una función f a una pequeña perturbación, g , pequeña en el sentido de que sobre una curva γ su módulo sea inferior al de f , entonces la función modificada tiene el mismo número de ceros encerrados por γ que la función no perturbada.

El teorema de *Rouché* dice que si se somete una función f a una pequeña perturbación, g , pequeña en el sentido de que sobre una curva γ su módulo sea inferior al de f , entonces la función modificada tiene el mismo número de ceros encerrados por γ que la función no perturbada.

5.5.4. Teorema fundamental del Álgebra

Esta idea puede aprovecharse para demostrar con toda facilidad el Teorema Fundamental del Álgebra, pues el polinomio $z^n + a \cdot z^{n-1} + b \cdot z^{n-2} + \dots + c$ se puede descomponer en suma de z^n , con n raíces en $z = 0$, con el resto $a \cdot z^{n-1} + b \cdot z^{n-2} + \dots + c$, que verifica la desigualdad pedida pues z^n es mayor que el resto si $|z| = R$ es muy grande.

5.5.5. Teorema de Hurwitz

Como consecuencia importante del teorema de *Rouché* se obtiene una relación entre los ceros de las funciones de una sucesión y los de la función límite.

Teorema 5.5.4: Teorema de Hurwitz

Sea $\{f_n\}_1^\infty$ una sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto G . Sea f su función límite (que se sabe que es también holomorfa). Sea D un disco con frontera γ tal que $\bar{D} \subseteq G$ y $f(z) \neq 0$ para todo z en la traza de γ . Entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ la función f_n tiene el mismo número de ceros que f en D .

Como consecuencia se tiene que, si además de las hipótesis anteriores, G es conexo y las funciones f_n no tienen ceros, f no tiene ceros o es idénticamente nula.

Sea G una región, f una función analítica sobre G , a_1, \dots, a_m los puntos de G en los que $f(z) = \alpha$ y γ un camino con traza contenida en G y que no pasa por a_1, \dots, a_m . Entonces, por aplicación del principio del argumento, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} \cdot dz = \sum_{j=1}^m I_{\gamma}(a_j).$$

5.5.6. Teorema de la aplicación abierta

Se observa que en el planteamiento anterior aparecen los puntos en los

que f toma el valor α , esto es, los α -puntos de f . Puede derivarse de esta expresión un resultado sobre el número de raíces de una ecuación y el teorema de una aplicación abierta.

Teorema 5.5.5:

Sea f una función holomorfa en $B_R(a)$ y sea $\alpha = f(a)$. Si $f(z) - \alpha$ tiene un cero de orden m en $z = a$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para ζ , $|\zeta - \alpha| < \delta$, la ecuación $f(z) = \zeta$ tiene exactamente m raíces simples en $B_\varepsilon(a)$.

Teorema 5.5.6: Teorema de la aplicación abierta

Sea G una región y f una función holomorfa no constante en G . Entonces para todo conjunto abierto U en G , $f(U)$ es abierto. O de forma equivalente, para cada $a \in G$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subset f(G)$.

Si $f: G \rightarrow \mathbf{C}$ es inyectiva, holomorfa y $f(G) = \Omega$, la aplicación inversa $f^{-1}: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ es también holomorfa y $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, $f(z) = w$.

De acuerdo con el teorema de la aplicación abierta si $w \in f(G)$, siempre se puede encontrar una bola centrada en w y contenida en $f(G)$. Así, si f es no constante, $|f|$ no puede alcanzar el máximo dentro de G . Esto de nuevo da lugar al teorema del módulo máximo, del cual se exponen a continuación tres versiones. Para poder formular la tercera versión se utilizan las siguientes notaciones:

Si f es una aplicación definida en G y con valores en \mathfrak{R} y $a \in \overline{G}$ o $a = \infty$,

$$\limsup_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{f(z) : z \in G \cap B_r(a)\}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \inf f(z) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf \{f(z) : z \in G \cap B_r(a)\}.$$

Se llama “frontera ampliada de G ” a la frontera de G en la compactificación de \mathbf{C} y se representa por $\partial_\infty G$. Se observa que si G es un subconjunto de \mathbf{C} acotado, esta frontera coincide con la ordinaria, mientras que si G es no acotado habría que añadirle el punto del infinito, es decir:

$$\partial_\infty G = \partial G \cup \{\infty\}.$$

5.5.7. Teorema del módulo máximo

Teorema 5.5.7: Teorema del módulo máximo (primera versión)

Si f es holomorfa en una región G y a es un punto en G tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo z perteneciente a G , entonces f es constante.

Si f es holomorfa en un abierto G y no es constante entonces $|f|$ no alcanza su valor máximo en G .

Teorema 5.5.8: Teorema del módulo máximo (segunda versión)

Sea G un conjunto abierto acotado contenido en \mathbf{C} y se supone que f es continua en \bar{G} y holomorfa en G . Entonces el valor máximo de $|f|$ en \bar{G} se alcanza en la frontera de G :

$$\max\{|f(z)|; z \in \bar{G}\} = \max\{|f(z)|; z \in \partial G\}$$

Teorema 5.5.9: Teorema del módulo máximo (tercera versión)

Sea G una región en \mathbf{C} y f una función holomorfa en G . Se supone que existe una constante M tal que $\limsup |f(z)| \leq M$ para todo $a \in \partial_\infty G$. Entonces

$$|f(z)| \leq M \text{ para todo } z \in G.$$

A partir de estos resultados se pueden obtener interesantes propiedades sobre las funciones holomorfas en relación con su región de crecimiento, distribución de ceros, etc. Por ejemplo se enuncia a continuación el teorema de los “tres círculos de Hadamard”.

5.5.8. Teorema de los tres círculos de Hadamard

Teorema 5.5.10: Teorema de los tres círculos de Hadamard

Sea $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ y se supone que f es holomorfa en $\{z; R_1 < |z| < R_2\}$. Si $R_1 < r < R_2$, se define $M(r) = \max\{|f(re^{i\theta})|, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Entonces para $R_1 < r_1 \leq r \leq r_2 < R_2$, se tiene:

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2)$$

Expresado de otra manera, $\log(M(r))$ es una función convexa de $\log(r)$.

5.5.9. Problema de Dirichlet

Como consecuencia directa de la segunda versión del principio del módulo máximo se sabe que si dos funciones f y g son continuas sobre un compacto, holomorfas en el interior, y coinciden en la frontera, las dos funciones son iguales. Con esto se obtiene un nuevo resultado sobre identidad de funciones. A partir de aquí se plantea, de forma natural el siguiente problema:

“Si g es una función continua en la frontera de un compacto K , ¿existe una función f definida en K que sea prolongación de g , continua en K y holomorfa en el interior?”.

Esta es una forma particular de presentar un problema más general, conocido como “*problema de Dirichlet*”.

Otras propiedades sobre funciones holomorfas no constantes son fáciles consecuencias del hecho de que son aplicaciones abiertas. Por ejemplo, la función $\operatorname{Re}(f(z))$ no puede alcanzar el máximo (o el mínimo) en un dominio D , si f es holomorfa y no constante en él.

5.5.10. Teorema de *Phragmen-Lindelöf*

Por el teorema de *Liouville* se sabe que si una función entera es acotada entonces es constante. Sin embargo a la vista de estos últimos resultados se observa que no es necesario imponer una restricción tan fuerte, sino que es posible limitarse a dar una restricción en el crecimiento de la función. Así, si f es entera y $|f(z)| \leq 1 + |z|^{1/2}$ entonces f es constante.

En 1908 *E. Phragmen* y *E. Lindelöf* extienden el principio del módulo máximo en este sentido. En su teorema aparece una restricción del crecimiento de la función cuando z se aproxima a puntos de la frontera ampliada.

Teorema 5.5.11: Teorema de Phragmen-Lindelöf

Sea G una región simplemente conexa y f una función holomorfa en G . Se supone que existe una función analítica φ definida en G que no se anula y es acotada en G . Si M es una constante, $\partial_\infty G = A \cup B$ y se verifica:

- i) Para cada $a \in A$, $\limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| \leq M$.
- ii) Para cada $b \in B$, y $\eta > 0$, $\limsup_{z \rightarrow b} |f(z)| \cdot |\varphi(z)|^\eta \leq M$ entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

Se pueden formular los siguientes resultados, que son consecuencias del teorema anterior.

Corolario 5.5.12:

Sea $a \geq 1/2$ y $G = \{z; |\arg(z)| < \pi/(2 \cdot a)\}$. Se supone que f es holomorfa en G y que existe una constante M tal que $\limsup_{z \rightarrow w} |f(z)| \leq M, \forall w \in \partial G$. Si existen constantes positivas p y $b < a$ tales que $|f(z)| \leq p \cdot \exp(|z|^b)$ para todo z con módulo suficientemente grande, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

Corolario 5.5.13:

Sea $a \geq 1/2$ y $G = \{z; |\arg(z)| < \pi/(2 \cdot a)\}$. Se supone que $\limsup_{z \rightarrow w} |f(z)| \leq M, \forall w \in \partial G$. Además se supone que para cada δ existe una constante p (que puede depender de δ) tal que $|f(z)| \leq p \cdot \exp(\delta \cdot |z|^a)$ para todo z con módulo suficientemente grande y que pertenezca a G , entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

A continuación se presenta una última consecuencia del teorema del módulo máximo, que permite, por otra parte, caracterizar las aplicaciones conformes del disco unidad sobre si mismo.

5.5.11. Lema de Schwarz

Proposición 5.5.14: Lema de Schwarz

Sea $B_1(0) = \{z; |z| < 1\}$ y se supone que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que verifica que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B_1(0)$, y $f(0) = 0$; entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B_1(0)$. Además si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, existe una constante c con módulo uno, tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in B_1(0)$, lo que significa que f es un giro.

La conclusión $|f(z)| \leq |z|$ en el lema de Schwarz expresa una restricción específica sobre $f(z)$ en términos de z , esto es, la aplicación $z \rightarrow f(z)$ no aumenta el módulo. En particular esto implica que si z varía en algún subconjunto del disco $|z| \leq r$ ($0 < r < 1$), entonces los valores de $f(z)$ están también en ese disco.

Por aplicación de este resultado se obtiene que si f es una aplicación holomorfa y biyectiva del disco $B_1(0)$ sobre sí mismo, f es de la forma $f = c\varphi_\alpha$ donde c es una constante del módulo igual a 1 y φ_α es una transformación de

Möbius de la forma $\varphi_\alpha = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$.

5.5.12. Principio de Lindelöf o principio de subordinación

Sean f y g dos funciones holomorfas en $|z| < 1$ con rangos F y G respectivamente, y se supone que F está contenido en G . Se supone también que g es inyectiva en $|z| < 1$ y que $f(0) = g(0)$. Todos estos supuestos se expresan diciendo que f está subordinada a g para $|z| < 1$. Bajo estas

condiciones g tiene inversa analítica g^{-1} y la función $\phi = g^{-1} \circ f$ es analítica para $|z| < 1$. La función ϕ satisface el lema de Schwarz y así $|\phi'(0)| \leq 1$. Como $f(z) = g(\phi(z))$ y, en particular como $f'(0) = g'(0) \cdot \phi'(0)$ se tiene que $|f'(0)| \leq |g'(0)|$. Además la igualdad se verifica si $f(z) = g(rz)$, donde $|r| = 1$. Así la desigualdad anterior expresa el hecho de que el máximo módulo de la derivada en el 0 de todas las funciones subordinadas a g se alcanza en aquellas funciones que se obtienen de g por rotaciones en z .

La subordinación de f a g es equivalente a la relación $f(z) = g(\phi(z))$, donde ϕ satisface el lema de Schwarz.

Por tanto ϕ satisface $|\phi(z)| \leq |z|$ para todo z , ($|z| < 1$). En particular si $|z| \leq r$ ($0 < r < 1$) entonces $|\phi(z)| \leq r$. Como $f(z) = g(\phi(z))$ esto implica que la imagen de $|z| \leq r$ por f es un subconjunto de la imagen de $|z| \leq r$ bajo g .

Este resultado se conoce usualmente como “**principio de Lindelöf**”.

Puede expresarse diciendo que si f está subordinada a g para $|z| < 1$ entonces f está subordinada a g para $|z| < r$, para todo r , $0 < r < 1$.

El término “**principio de subordinación**” remite a la desigualdad $|f'(0)| \leq |g'(0)|$, a la relación $f(z) = g(\phi(z))$, o al principio de Lindelöf. El lema de Schwarz puede considerarse como un caso especial de este principio, donde G es el disco unidad abierto y $g(z) = z$.

5.5.13. Clasificación de las funciones enteras

Definición 5.5.2:

Una **función entera** es una función holomorfa en todo el plano complejo.

Esto implica que verifica un conjunto de interesantes propiedades, como por ejemplo, que:

- El desarrollo en serie de potencias en cualquier punto tiene un radio de convergencia infinito.
- La suma, diferencia y producto de un número finito de funciones enteras sigue siendo una función entera.
- El cociente de dos funciones enteras es una función entera si el denominador es distinto de cero en todo punto.
- La composición de dos funciones enteras es una función entera.
- Si $f(z)$ es una función entera que no se anula en ningún punto entonces existe una función entera $g(z)$ tal que $f(z) = \exp(g(z))$.

El comportamiento de las funciones enteras en el infinito permite clasificarlas en tres grandes grupos:

- Si la función entera tiene en el punto del infinito un punto regular, al aplicar el teorema de *Liouville* se tiene que debe ser una **función constante**.
- Si la función entera tiene en el punto del infinito un polo de orden k mayor o igual a uno, entonces la función es un **polinomio**.
- Si la función entera tiene en el punto del infinito una singularidad esencial entonces recibe el nombre de **función entera trascendente** por similitud a los números trascendentes.

Se considera un dominio acotado D y una función entera f . Aplicando el

teorema del módulo máximo se sabe que el módulo de f alcanza su máximo en la frontera de D . Por tanto si $D = \{z; |z| < r\}$ el máximo se alcanza en un punto z_0 con módulo r . Se representa por $M(r)$, o por $M(r, f)$, si se quiere hacer referencia expresa a la función, a dicho máximo:

$$M(r) = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

De igual forma, si f es una función entera que no se anula, entonces $F(z) = 1/f(z)$ es entera, y f alcanza su módulo mínimo en el punto donde F alcanza su módulo máximo, y por tanto en un punto z_1 de módulo r , que se representa por $m(r)$. Es evidente que $M(r)$ crece al crecer r . Se estudia la relación entre $M(r)$ y los coeficientes de la serie de potencias asociada a f en 0, y se compara su crecimiento con el de la función exponencial. Por último se compara el crecimiento del módulo máximo, $M(r)$, con el crecimiento del módulo mínimo $m(r)$.

Al desarrollar la función f en serie de potencias en el origen se conoce, por la desigualdad de *Cauchy*, que el módulo de los coeficientes está acotado por $|a_n| \leq M(r)/r^n$, luego en el caso en que la función sea un polinomio de grado n se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{|a_n| \cdot r^n} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, P)}{M(r, a_n z^n)} = 1,$$

es decir, el módulo máximo de un polinomio de grado n es asintóticamente igual al término de mayor grado del polinomio.

Si f es una función entera que no es un polinomio, la relación de crecimiento de su módulo máximo con respecto a la del polinomio viene dada por el siguiente teorema:

Proposición 5.5.15:

Si f es una función entera que no es un polinomio se tiene que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r, P)}{M(r, f)} = 0.$$

Esto indica que el módulo máximo de la función crece más deprisa que el módulo máximo del polinomio, sea cual sea ese polinomio.

Definición 5.5.3:

Una función holomorfa se dice que es una función **algebraica** si verifica una ecuación de la forma:

$$P_0(z) + P_1(z) \cdot f(z) + P_2(z) \cdot f^2(z) + \dots + P_n(z) \cdot f^n(z) = 0,$$

para todo z en un dominio dado, donde $P_i(z)$ son polinomios y $P_n(z)$ no es idénticamente nulo.

Los nombres de funciones enteras algebraicas y trascendentes hacen referencia a la similitud con los números irracionales algebraicos, que son raíces de alguna ecuación algebraica, o trascendentes, que no son raíces de ninguna ecuación algebraica de grado finito con coeficientes racionales. Se tiene que si una función entera no es un polinomio, entonces no es algebraica.

5.5.14. Orden de una función entera

El orden es un número que caracteriza a las funciones enteras pues compara el crecimiento del módulo máximo de la función con el crecimiento del módulo máximo de la función exponencial.

Definición 5.5.4:

Se llama **orden de una función entera** $f(z)$ no idénticamente nula al número ρ obtenido como el límite superior de:

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M(r, f)}{\lg \lg M(r, e^z)} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M(r, f)}{\lg r}.$$

Se tienen los siguientes resultados:

- Si $f(z)$ es una función entera trascendente, $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios y $P(z)$ no es idénticamente nulo, entonces el orden de $P(z) \cdot f(z) + Q(z)$ es el mismo que el de $f(z)$.
- El orden de una función entera $f(z) = P(z) \cdot e^{R(z)} + Q(z)$, donde $P(z)$, $R(z)$ y $Q(z)$ son polinomios y $P(z)$ no es idénticamente nulo, es igual al grado de $R(z)$.
- Si $R(z)$ es una función entera y el orden de $f(z) = e^{R(z)}$ es finito, entonces $R(z)$ es un polinomio y por tanto el orden de $f(z)$ es un número entero.

El desarrollo en serie de potencias de una función entera trascendente se podría suponer que es una especie de polinomio de grado infinito, con lo que entonces debería de tener, igualada a cero, un número infinito de soluciones, lo que en general no es cierto. En este sentido se tienen los siguientes resultados:

- Si $f(z)$ es una función entera trascendente y de orden finito no entero, y $P(z)$ es un polinomio no idénticamente nulo, la ecuación: $f(z) = A \cdot P(z)$, tiene infinitas raíces para todo número complejo A sin excepciones.

Si $f(z)$ es una función entera trascendente y de orden finito entero, y $P(z)$

es un polinomio no idénticamente nulo, la ecuación: $f(z) = A \cdot P(z)$, tiene infinitas raíces para todo número complejo A con la posible excepción de un valor.

Los resultados anteriores son casos particulares del siguiente teorema:

Proposición 5.5.16:

Si $f(z)$ es una función meromorfa trascendente, (con una singularidad esencial en el infinito), para cada número complejo A , finito o infinito, la ecuación $f(z) = A$ tiene un número infinito de raíces con dos posibles excepciones.

Se puede estudiar también la relación entre el conjunto de ceros y el módulo máximo de la función enunciando el teorema de *Jensen*, que se puede extender a los polos, teniendo la expresión conocida como fórmula de *Poisson-Jensen*. Un resultado parecido al teorema de *Jensen* pero que en lugar de aplicarse en una región circular se aplica en un semiplano es el teorema de *Carleman*. El teorema de *Borel* y *Carathéodory* permite obtener una cota superior del módulo de una función en un círculo a partir de cotas de sus partes real o imaginaria sobre un círculo concéntrico de radio mayor.

Otra forma de introducir el concepto de orden, útil en muchas ocasiones, es como sigue:

Definición 5.5.5:

Se dice que una función entera $f(z)$ tiene **orden finito** si existe una constante λ tal que $|f(z)| < \exp r^\lambda$ para $|z| = r$, y r mayor que un cierto r_0 .

Mediante la definición anterior es fácil probar que:

- Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones enteras de órdenes ρ_1 y ρ_2

respectivamente, y si $\rho_1 < \rho_2$, el orden de $f_1(z) + f_2(z)$ es igual a ρ_2 .

- Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones enteras de órdenes ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y si $\rho_1 \leq \rho_2$, el orden de $f_1(z) \cdot f_2(z)$ es menor o igual a ρ_2 .
- Si $f(z)$ es una función entera de orden ρ y $P(z)$ es un polinomio no nulo, el producto $f(z) \cdot P(z)$ es una función entera de orden ρ . Y si el cociente $f(z)/P(z)$ es una función entera, también es de orden ρ .

Definición 5.5.6:

Dada una función entera $f(z)$ de orden finito ρ , si se supone que existe un $k > 0$ tal que $M(r, f) < \exp(k \cdot r^\rho)$, con r suficientemente grande, entonces se dice que f es de **tipo finito**.

Al ínfimo de los valores k se le denomina **tipo** de f y se representa por σ . Si $0 < \sigma < \infty$ se dice que f es de **tipo finito**, si $\sigma = 0$ se dice que f es de **tipo mínimo**, y si $\sigma = \infty$ se dice que f es de **tipo máximo**.

5.6. EJERCICIOS

5.15. Determinar las singularidades de las funciones:

a) $f(z) = \text{Log}\left(\frac{2z+3}{z-1}\right)$,

b) $f(z) = \text{Im}(\bar{z}^2)$.

c) $f(z) = \frac{1}{z^2 \text{senz}}$.

$$d) f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

5.16. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{z})}$.

5.17. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{\operatorname{tang}(\frac{1}{z})}$.

5.18. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{senz}}$.

b) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

c) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$.

d) $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)\cos z}$.

5.19. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{(z+1)}{(z-3)^2 \operatorname{sen}^3 z}$.

b) $f(z) = \frac{z}{\frac{1}{e^z - 1}}$.

c) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{(z+5)^2 (z-1)^3}$.

$$d) f(z) = \frac{2(z+3)}{(e^z - 1)\cos\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

5.20. Clasificar, si existe, el tipo de singularidad en $z = z_0$, realizando el desarrollo en serie adecuado:

$$a) f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-3)} \text{ en } z = -2.$$

$$b) f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z-3)} \text{ en } z = -2.$$

$$c) f(z) = \frac{(z-1)^3}{(z+2)^3 z} \text{ en } z = -2.$$

$$d) f(z) = \frac{1}{z^3 \operatorname{sen} z} \text{ en } z = 0.$$

5.21. Calcular los siguientes residuos:

$$a) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 \operatorname{sen} z}, 0\right).$$

$$b) \operatorname{Res}\left(\frac{(z-1)^3}{(z+2)^3 z}, -2\right).$$

$$c) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+2)^3(z-3)}, -2\right).$$

$$d) \operatorname{Res}\left(\frac{z}{(z-3)^2 \operatorname{sen}^3 z}, 0\right).$$

5.22. Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

a) $\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3 \cdot dz}{z \cdot (z+2)}$, donde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $\int_{\gamma} \frac{\cos z \cdot dz}{(z+2)^2 (e^z - 1)}$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z \cdot dz}{z^2 (z^2 + 1)(z+5)}$, donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(Solución: a) $2\pi i$; b) $\frac{\pi i}{2}$; c) $2\pi i \left(\frac{1}{5} + \frac{5i \cdot \operatorname{sen} i}{26} \right)$)

5.23. Calcular la integral $I_m = \int_{\gamma_m} \frac{dz}{z^2 (\operatorname{sen} z)}$ si la traza de γ_m es el

cuadrado de vértices los puntos: $\frac{2m+1}{2} \pi(\pm 1 \pm i)$ y utilizar el

resultado para calcular la suma de la serie: $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(Solución: $I_m = 2\pi i \left(\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right)$; $s = \frac{-\pi^2}{12}$)

5.24. Deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(Ayuda: Evaluar la integral $I_m = \int_{\gamma_m} \frac{\pi \cdot \cot g \pi z \cdot dz}{z^2}$ cuando la traza

de γ_m es el cuadrado de vértices los puntos: $\frac{2m+1}{2} \pi(\pm 1 \pm i)$)

5.25. Deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5.26. Calcular las siguientes integrales reales, utilizando integrales

complejas:

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{(2x^2 - 1) \cdot dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cdot dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}.$$

$$\text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

(Solución: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{200}$; c) $\frac{\pi}{18}$)

$$5.27. \text{ Demostrar que } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(Ayuda: Evaluar la integral $I = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$ siendo la

traza de γ_1 el segmento $[0, R]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi/3$, y γ_3 el

segmento $[Re^{\frac{2\pi}{3}i}, 0]$. Calcular el límite cuando R tiende a infinito.)

5.28. Estudiar la forma de calcular utilizando integrales complejas las

siguientes integrales reales, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} \text{sen } x \\ \text{cos } x \end{cases} dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$

son polinomios, y aplicarlo a los siguientes ejemplos:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \cdot dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } x \cdot dx}{x^2 + x + 1}.$$

(Solución: Se calcula la integral compleja en el semicírculo, sustituyendo el seno o el coseno por e^{iz} , y se separa parte real y

parte imaginaria. a) $\frac{2\pi e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{-\pi}{\sqrt{3}}$

5.29. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cdot dx}{x^2}$.

5.30. Calcular, utilizando el residuo en el infinito las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3 \cdot dz}{z^2 \cdot (z^2 + a)}$, donde $\gamma(t) = 5e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $\int_{\gamma} \frac{\cos z \cdot dz}{(z+2)^7 (e^z - 1)}$, donde $\gamma(t) = 7e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z \cdot dz}{z^5 \cdot (z^2 + 1)^3 \cdot (z+5)^2}$, donde $\gamma(t) = 6e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.31. Se considera el camino: $\gamma(t) = 1 + (3 + 2t - t^2)e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 2$. a) Comprobar que el camino es cerrado. b) Calcular, utilizando la definición de índice, el índice de γ respecto del punto $z = 1$. c)

Calcular $\int_{\gamma} \frac{z^3 \cdot \cos(\pi z^2) \cdot dz}{(z-1)}$.

5.32. Calcular el residuo de f en su singularidad siendo f la transformación de Möbius $f(z) = k \cdot \frac{z-A}{z-B}$, donde k , A y B son números complejos. Calcular $\int_{\gamma} f'$ siendo γ una curva cerrada y simple cualquiera.

5.33. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(\pi^2 z^2 - z^4) \cdot dz}{(e^z + e^{-z}) \cdot (1 - \cos^2 z)}$ utilizando el

teorema del residuo, donde $\gamma(t) = \frac{7}{2} e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.34. Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

a) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z} \cdot dz}{(z-1)^2}$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 6\pi$.

b) $\int_{\gamma} \frac{-1}{(z-z_0)^2} dz$, donde $\gamma(t) = z_0 + 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

5.35. Sea γ el camino cerrado cuya traza es el cuadrado de vértices $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$, calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{z^2 \cdot dz}{(\pi+z)(z-i)}$, donde γ se recorre dos veces en sentido negativo.

b) $\int_{\gamma} \frac{e^{\cos z} \cdot dz}{(9-z^2)(z+\pi)}$, donde γ se recorre tres veces en sentido positivo.

c) $\int_{\gamma} \bar{z} \cdot dz$, donde γ se recorre una vez en sentido positivo.

5.36. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = 5e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) $\int_{\gamma} (1+z+z^2) \cdot e^{\frac{1}{z}} \cdot dz$.

b) $\int_{\gamma} (1+z+z^2) \cdot e^{\frac{1}{z-4}} \cdot dz$.

c) $\int_{\gamma} (1+z+z^2) \cdot (e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-4}}) \cdot dz$.

(Solución: a) $\frac{10\pi i}{3}$ b) $\frac{154\pi i}{3}$ c) $\frac{164\pi i}{3}$)

5.37. Calcular $\int_{\gamma} \frac{3z^2 \cos z \cdot dz}{(1-z^2) \cdot (z-3i) \cdot \operatorname{sen}^2 z}$,

a) donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

b) donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $-2\pi \leq t \leq 0$.

c) donde $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

d) donde $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}$, $-2\pi \leq t \leq 0$.

5.38. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = \frac{3}{4}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) $\int_{\gamma} \frac{(1-4z) \cdot dz}{(1-z)^2 \cdot (1-2z)}$.

b) $\int_{\gamma} z^5 \cdot \cos \frac{1}{z} \cdot dz$.

5.39. Calcular $\int_{\gamma} \frac{dz}{\operatorname{sen} z - 2}$, donde $\gamma(t) = \pi e^{it}$, $0 \leq t \leq 6\pi$, obteniendo

previamente las raíces de la ecuación: $\operatorname{sen} z = 2$.

5.40. Calcular $\int_{\gamma} \frac{(3z - \operatorname{sen} 2z + 3(z-1) \cdot \cos z) \cdot dz}{(z-1)^2}$, donde la traza de

la curva γ es $\{z; |z-1| = 2\}$, recorrida una vez en sentido positivo.

5.41. Calcular $\int_{\gamma} \frac{z \cdot dz}{e^z - 1}$, donde $\gamma(t) = 4e^{it} - (1 - \pi i)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(Solución: $-4\pi^2$)

5.42. Calcular $\int_{\gamma} f$, donde $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, sabiendo que $f'(z)$

$$= z^4 \cdot \cos \frac{5}{z}.$$

$$(\text{Solución: } \frac{2\pi i \cdot 5^6}{6!})$$

5.43. Calcular las siguientes integrales donde la traza de la curva γ es el contorno del cuadrado de lados paralelos a los ejes coordenados, centrado en el origen y semilado de longitudes $a = 1, 2, 3$ y 4 , recorrida una vez en sentido positivo.

a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{e^z + 1}.$

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{e^{2z} + 2e^z + 1}.$

(Solución: Para $a = 1, 2$ y 3 , $I = 0$; Para $a = 4$: $I = -4\pi i$, en ambas integrales)

5.44. Dada la función $f(z) = \frac{e^{z+3i}}{(z+3i)^4}$:

a) Calcular el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z + 3i| < +\infty$.

b) Calcular $\int_{\gamma} f$ siendo la traza de la curva γ el cuadrado de lados de longitud 10 paralelos a los ejes coordenados, centrado en el origen y recorrido una vez en sentido positivo.

$$(\text{Solución: } \int_{\gamma} f = \frac{\pi i}{3})$$

5.45. Calcular $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z \cdot dz}{z(\cos z - 1)}$, donde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(Solución: 0)

5.46. Calcular $\int_{\gamma} \frac{2tghz \cdot dz}{e^z(\cos z - 1)}$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$, siendo $tgh z$

la función tangente hiperbólica. Estudiar previamente la derivabilidad de esta función, y la derivabilidad de la función:

$$\frac{2tghz}{e^z(\cos z - 1)}$$

(Solución: $\int_{\gamma} f = -16\pi i$)

5.47. Calcular $\int_{\gamma} \left(\frac{e^z}{5z} + \frac{1}{\cos z - \operatorname{sen} x} \right) dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

(Solución: $\frac{4\pi i}{5} - 2\sqrt{2}\pi i$)

5.48. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2k\pi$, $k = 1, 2, \dots$

a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}$.

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-3}$.

c) $\int_{\gamma} \frac{e^z \cdot dz}{z^3 + 9z}$.

(Solución: a) $2\pi i \cdot k$; b) 0; c) $2\pi i \cdot k/9$)

5.49. Calcular $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + i} dz$, donde $\gamma(t) = \begin{cases} \pi e^{it} & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 2(-t + \pi)i & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

$$(Solución: \frac{\sqrt{2}}{2} \pi(-1+i))$$

5.50. Calcular $\int_{\gamma} f$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2$, y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{|n|}}$.

$$(Solución: \frac{2}{3} \pi i)$$

5.51. Calcular $\int_{\gamma} (\frac{\cos z - 1}{z^2(e^z - 1)} + (z-2)e^{\frac{1}{z}}) dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$(Solución: -4\pi i)$$

5.52. Calcular $\int_{\gamma} \frac{3z^2 \cos z}{(1-z^2)(z-3i)\operatorname{sen}^2 z} dz$, donde

a) $\gamma(t) = 6e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

b) $\gamma(t) = \frac{1}{6} e^{it}$, $-2\pi \leq t \leq 0$.

5.53. Calcular $\int_{\gamma} \frac{z - \frac{\pi}{4}}{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z} dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

CAPÍTULO 6

Geometría de las transformaciones complejas

En este capítulo se estudia la geometría de las funciones complejas, que es tan interesante por sí misma como por la magnífica visión geométrica que proporciona, y que además tiene muchas aplicaciones en la física y en la técnica.

Como se estudió en capítulos anteriores, es difícil representar gráficamente una aplicación compleja $f: A \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, ya que no es posible su representación gráfica de la misma manera que se realizaba la de las funciones reales de una variable real, aunque sin embargo admite una interesante interpretación geométrica como transformación de un “plano complejo” con coordenadas x e y tales que $z = x + iy$ en otro “plano complejo” con coordenadas u y v tales que $w = f(z) = u + iv$; de este modo a cada punto $z \in \mathbf{C}$ se le asocia un punto $w = f(z) \in \mathbf{C}$.

Si se considera que z describe una curva o una figura cualquiera (una recta, una circunferencia, un disco...) se puede analizar la curva o la figura que describe $w = f(z)$. De esta forma un subconjunto A del plano complejo se transforma a través de una función f en el subconjunto $f(A)$. El conocimiento de f permitirá averiguar de qué forma se transforman las figuras del plano z en figuras del plano w .

6.1. TRANSFORMACIONES CONFORMES

Intuitivamente se dice que una función f es **conforme** en z_0 si conserva la magnitud y el sentido de los ángulos en z_0 , es decir, si se verifica que para dos curvas cualesquiera, γ y σ , que pasen por z_0 , se tiene que sus curvas imágenes $(f \circ \gamma)$ y $(f \circ \sigma)$ forman en $f(z_0)$ el mismo ángulo que γ y σ formaban en z_0 .

Cada número complejo z , distinto de cero, determina una dirección a partir del origen, definida por el punto del círculo unidad $A[z] = \frac{z}{|z|}$. Sea f una aplicación de una región Ω en el plano complejo, sea z_0 un punto de esa región Ω , y sea $B_r'(z_0)$ un entorno reducido en el cual $f(z) \neq f(z_0)$. Se dice que f **conserva ángulos** en z_0 si el límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-i\theta} \cdot A \cdot (f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)), \quad r > 0$$

existe y es independiente de θ .

En lenguaje menos preciso, se pide que el ángulo que formen cualquier par de rayos L' y L'' con origen en z_0 , coincida con el ángulo que formen sus imágenes $f(L')$ y $f(L'')$ en $f(z_0)$, tanto en amplitud como en orientación.

La propiedad de conservar ángulos en una región es característica de las funciones holomorfas cuya derivada no tiene ningún cero en esa región. Esta es la razón por la que a esas funciones se les da el nombre de "**aplicaciones conformes**".

Definición 6.1.1:

Sea f una aplicación de un abierto Ω en el plano complejo, $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ y

sea z_0 un punto de esa región Ω , se dice que f es una **transformación conforme en z_0** si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

Teorema 6.1.1:

Sea Ω una región del plano complejo y f una aplicación de Ω en \mathbf{C} . Si existe $f'(z_0)$ en algún $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f conserva los ángulos en z_0 . Recíprocamente si la diferencial de f existe y es diferente de 0 en z_0 , y si f conserva los ángulos en z_0 , entonces $f'(z_0)$ existe y es distinto de cero.

En efecto, sea γ una curva diferenciable, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbf{C}$, sea t_0 un punto del intervalo abierto (a, b) y sea $z_0 = \gamma(t_0)$. La dirección de γ en este punto viene dada por el vector tangente de \mathfrak{R}^2 , $\gamma'(t_0)$, siendo la pendiente de la curva el argumento de $\gamma'(t_0)$ en el caso en que $\gamma'(t_0)$ sea distinto de cero, $\alpha_0 = \arg(\gamma'(t_0))$, (si $\gamma'(t_0) = 0$ se tienen problemas para precisar la dirección de la curva).

Sea $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ una transformación en el plano complejo, y se quiere analizar como varía la pendiente de la curva γ al aplicar f . Se obtiene una nueva curva: $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$, que pasa por $f(z_0)$ para $t = t_0$: $(f \circ \gamma)(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0)$. La dirección de $f \circ \gamma$ en t_0 viene dada por el vector tangente $(f \circ \gamma)'(t_0)$ que si f es holomorfa en z_0 se obtiene como $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y si $\gamma'(t_0)$ es distinto de cero, entonces su argumento es el producto de dos argumentos, $\arg(f'(z_0))$ y $\arg(\gamma'(t_0))$, pues:

$$\begin{aligned} \arg((f \circ \gamma)'(t_0)) &= \arg(f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)) = \\ &= \arg(f'(\gamma(t_0))) + \arg(\gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0)) \end{aligned}$$

que se interpreta como que la pendiente de la curva γ en el punto z_0 , al aplicarle la transformación f , aumenta en la cantidad $\arg(f'(z_0))$, sea cual sea la

curva γ .

Por lo tanto, si γ_1 y γ_2 son dos curvas que se cortan en z_0 bajo un ángulo φ , sus transformadas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ se cortan en $f(z_0)$ bajo el mismo ángulo, puesto que la transformación f hace girar a ambas curvas un mismo ángulo de medida $\arg(f'(z_0))$. \square

Corolario 6.1.2: Si f es holomorfa e inyectiva en un abierto Ω entonces $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$.

Es sencillo comprobar que si una función es holomorfa e inyectiva en un abierto Ω , entonces su derivada no se anula en ningún punto de Ω , por lo que es holomorfa en todo punto z de Ω .

Si f es holomorfa en z_0 , lo es en un entorno de z_0 , y al ser la función f' continua en z_0 , existe un entorno de z_0 donde $f'(z_0)$ es distinto de cero, y por tanto, si f es conforme en z_0 , lo es en un entorno de z_0 , y como consecuencia, existe la función inversa local cuya derivada: $(f^{-1})'(w_0) = 1 / f'(z_0)$ existe y es distinta de cero, luego es también una transformación conforme en un entorno de $w_0 = f(z_0)$.

Definición 6.1.2:

Sea f una aplicación de un abierto Ω en el plano complejo, $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, se dice que f es una **transformación conforme en Ω** si f es holomorfa e inyectiva en Ω .

Observaciones

1. Algunos autores definen transformación conforme como aquella que conserva los ángulos.

2. Otros autores definen transformación conforme en un abierto Ω como la aplicación que es conforme en todos los puntos del abierto. No exigen que la aplicación sea inyectiva. Esta definición tiene el inconveniente de no garantizar la existencia de la función inversa local. Por ejemplo, la función exponencial, cuya derivada no se anula en ningún punto, según esta definición, sería conforme en todo el plano complejo, mientras que sólo lo es en bandas horizontales de anchura menor o igual a 2π , si en la definición se impone que debe ser inyectiva.

3. En muchas ocasiones en Física existe el problema de encontrar una función holomorfa y biyectiva, y por tanto conforme, lo que conduce a definir una aplicación conforme como una aplicación holomorfa y biyectiva en una cierta región, con lo que, como consecuencia es conforme en todo punto de dicha región. Si una función es holomorfa y biyectiva entre dos dominios entonces su inversa también es holomorfa y biyectiva. A estas funciones se las suele denominar **biholomorfas**. El hecho de escoger esta definición garantiza por tanto la existencia de la función inversa, aunque según la definición 6.1.2, que es una definición más restrictiva, sólo se garantiza la existencia de inversa local.

Ortogonalidad

Naturalmente las transformaciones conformes respetan la ortogonalidad. En particular transforman haces de rectas horizontales y verticales en haces de curvas ortogonales. Esto permite obtener con facilidad pares de familias de

curvas ortogonales.

Equivalencia conforme

Uno de los aspectos más interesantes de esta teoría es el de la “equivalencia conforme”.

Definición 6.1.3: Dadas dos regiones Ω_1 y Ω_2 se dice que son **conformemente equivalentes**, $\Omega_1 \sim \Omega_2$, si existe una función f definida en Ω_1 , holomorfa e inyectiva, cuyo rango sea Ω_2 .

Dos regiones conformemente equivalentes son homeomorfas.

Proposición 6.1.3:

La relación “conformemente equivalentes” entre conjuntos es una relación de equivalencia.

Demostración:

En efecto, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- a) $\Omega \sim \Omega$ al ser la función identidad, $f(z) = z$, una aplicación conforme.
- b) Si $\Omega_1 \sim \Omega_2$, entonces $\Omega_2 \sim \Omega_1$, pues si $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2$ es una aplicación conforme, su aplicación inversa es una aplicación conforme de Ω_2 sobre Ω_1 .
- c) Si $\Omega_1 \sim \Omega_2$ y $\Omega_2 \sim \Omega_3$, entonces $\Omega_1 \sim \Omega_3$, ya que la composición de dos aplicaciones conformes es una aplicación conforme, y si $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$, y $g: \Omega_2 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_3 \subseteq \mathbf{C}$, son conformes en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, entonces $f \circ g: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_3 \subseteq \mathbf{C}$, es holomorfa e inyectiva luego es conforme, y en consecuencia $\Omega_1 \sim \Omega_3$. \square

6.1.1. Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación de Riemann

Existe una relación muy importante entre regiones conformemente equivalentes: Sea $H(\Omega)$ el conjunto de todas las aplicaciones conformes definidas sobre la región Ω ; si f es una aplicación conforme $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$, y $g: \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$ queda definida una aplicación:

$$H(\Omega_2) \rightarrow H(\Omega_1)$$

$$g \rightarrow g \circ f$$

que es inyectiva, suprayectiva y conserva las sumas y los productos, esto es, se trata de un isomorfismo de anillos de $H(\Omega_2)$ sobre $H(\Omega_1)$. Así, problemas sobre $H(\Omega_2)$ pueden ser convertidos en problemas sobre $H(\Omega_1)$, y las soluciones pueden ser transportadas de nuevo a $H(\Omega_2)$.

Dos propiedades importantes de las aplicaciones conformes son los siguientes teoremas:

Teorema de la aplicación abierta

Sea f una aplicación conforme y no constante en un conjunto abierto Ω , entonces $f(\Omega)$ es abierto.

El caso más importante está basado en el teorema de la “*Aplicación de Riemann*”, que afirma que toda región simplemente conexa en \mathbf{C} y distinta de \mathbf{C} es conformemente equivalente al disco unidad abierto.

La demostración del teorema de la *Aplicación de Riemann* es complicada, pero al menos es interesante enunciarlo pues permite asegurar que dadas dos

regiones simplemente conexas existe una aplicación conforme que transforma una de ellas en la otra.

Teorema de la *aplicación de Riemann*

Sea Ω un subconjunto de \mathbf{C} abierto y simplemente conexo distinto del plano complejo; entonces existe una aplicación conforme (holomorfa y biyectiva) f que transforma el conjunto Ω en el disco unidad con centro en el origen, es decir, tal que $f(\Omega) = B_1(0)$.

Además, dado cualquier punto $z_0 \in \Omega$ la función f anterior es única si se exigen las condiciones $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.

A partir del teorema de la *aplicación de Riemann* se tiene que dos subregiones propias y simplemente conexas de \mathbf{C} son conformemente equivalentes, al ser equivalentes las dos al disco unidad. Esta es una propiedad muy especial de las regiones simplemente conexas de \mathbf{C} .

Se plantea la cuestión de si esto puede extenderse a situaciones sencillas parecidas, como el caso de dos coronas circulares, siendo la respuesta, generalmente, negativa.

Dadas dos coronas circulares: $\{z; r_1 < |z| < R_1\}$, $\{z; r_2 < |z| < R_2\}$, una condición necesaria y suficiente para que sean conformemente equivalentes es que $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Bajo ciertas condiciones toda aplicación conforme de una región simplemente conexa Ω sobre el disco unidad $D = B_1(0)$ puede extenderse a un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre \bar{D} . En esta posible extensión juega un papel fundamental la naturaleza de la frontera de Ω .

Si w es un punto de la frontera de Ω , se dice que w es un **punto frontera simple** de Ω si tiene la siguiente propiedad:

Para toda sucesión (z_n) en Ω tal que z_n tienda a w cuando n tiende a infinito, existe una aplicación continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ y una sucesión (t_n) , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ con t_n tendiendo a 1, tal que $f(t_n) = z_n$, ($n = 1, 2, \dots$) y $f(t) \in \Omega$, $0 \leq t < 1$.

Dicho de otra manera, w es un punto frontera simple de Ω si existe una curva que pasa por todos los puntos z_n y termina en el punto w . Toda aplicación conforme de Ω sobre $D = B_1(0)$ va a admitir una extensión a los puntos de la frontera de Ω que sean puntos frontera simples. De forma precisa:

Teorema 6.1.4:

Sea Ω una región acotada y simplemente conexa en \mathbf{C} , y sea f una aplicación conforme de Ω sobre $D = B_1(0)$. Si w es un punto frontera simple de Ω entonces f tiene una extensión continua a la unión de Ω con el punto w . Además $|f(w)| = 1$, y si w_1 y w_2 son puntos frontera simples de Ω distintos y f se ha extendido a la unión de Ω y de dichos puntos, entonces necesariamente $f(w_1) \neq f(w_2)$.

Como consecuencia se tiene que si Ω es una región acotada y simplemente conexa en \mathbf{C} y si cada punto frontera de Ω es un punto frontera simple, toda aplicación conforme de Ω sobre D se extiende a un homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ sobre \overline{D} .

Este resultado tiene una consecuencia topológica:

Si cada punto frontera de una región acotada y simplemente conexa Ω es

un punto frontera simple, la frontera de Ω es una curva de *Jordan*, y $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a \overline{D} .

Se verifica también que, si la frontera de Ω es una curva de *Jordan*, todo punto frontera de Ω es un punto frontera simple.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.1.1: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = z^2$.

La aplicación $f(z) = z^2$ no es conforme en el punto $z = 0$, pues se anula su derivada en ese punto, $f'(z) = 2z \Rightarrow f'(0) = 0$. Es un punto crítico. Y en dicho punto no conserva los ángulos, sino que los dobla.

En coordenadas polares: $z = r \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow w = z^2 = r^2 \cdot e^{i2\alpha}$. En el origen un ángulo α se transforma en un ángulo 2α .

Es conforme para cada punto z de $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, pues es holomorfa y no se anula su derivada. Sin embargo no es conforme en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, pues no es inyectiva.

Del mismo modo $f(z) = z^3$ no es conforme en el punto $z = 0$, y en ese punto triplica los ángulos, pues $z = r \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow w = z^3 = r^3 \cdot e^{i3\alpha}$.

Ejemplo 6.1.2: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = e^z$.

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y) \Rightarrow u(x, y) = e^x \cdot \cos y; v(x, y) = e^x \cdot \operatorname{sen} y.$$

$f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$. No se anula su derivada en ningún punto y es una función entera, por lo que la función exponencial es conforme en cada uno de los puntos del plano complejo. Sin embargo no es conforme en \mathbf{C} , pues no es inyectiva al ser la función exponencial periódica de periodo $2\pi i$. Es conforme en cada banda vertical abierta de anchura menor a 2π .

Ejemplo 6.1.3: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \cos z$.

La función $f(z) = \cos z$ es entera, por lo que es conforme en todos los puntos en los que no se anula su derivada: $z \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. No es una aplicación conforme en \mathbf{C} , aunque es conforme en las bandas verticales $n\pi < x < (n+1)\pi$.

Ejercicios

6.1. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \frac{1}{z}$.

6.2. Estudiar dónde es conforme la aplicación de Jukowskii:

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

6.3. Estudiar dónde son conformes las funciones hiperbólicas $f(z) = \sinh z$ y $f(z) = \cosh z$.

6.4. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \bar{z}$.

6.2. ALGUNAS TRANSFORMACIONES SENCILLAS

Es interesante estudiar, con diferentes ejemplos, las propiedades geométricas de las distintas transformaciones.

6.2.1. La aplicación *lineal*: $f(z) = az + b$

Traslación: Si $a = 1$, la aplicación $w = f(z) = z + b$ es la traslación de vector de traslación b . Su derivada no se anula: $f'(z) = 1$, y es inyectiva. Existe su función inversa, $f^{-1}(z) = z - b$, por lo que la traslación es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

Si $b = b_1 + b_2 \cdot i$ la imagen de un punto $z = x + yi$ del plano z es el punto $w =$

$$u + iv = (x + b_1) + i \cdot (y + b_2).$$

La traslación transforma una recta en otra recta, paralela a la de partida, y transforma una circunferencia en otra de igual radio y con su centro trasladado.

Homotecia: Si $a = k \in \mathfrak{R}$, $a > 0$ y $b = 0$, $f(z) = kz$ es una homotecia de razón k . Su derivada no se anula: $f'(z) = k \neq 0$ y es inyectiva. Existe su función inversa, $f^{-1}(z) = z/k$, por lo que la homotecia es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

La homotecia transforma una recta que pase por el origen en ella misma, y una recta que no pasa por el origen en una recta paralela a la de partida, y transforma una circunferencia en otra, de radio multiplicado por el factor k .

Giro o rotación: Si $a = e^{i\alpha}$ y $b = 0$, $f(z) = e^{i\alpha} \cdot z$ es un giro o rotación. Su derivada no se anula: $f'(z) = e^{i\alpha} \neq 0$. Existe su función inversa, $f^{-1}(z) = e^{-i\alpha}$, por lo que la rotación es inyectiva. Luego es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

La rotación transforma una recta en otra recta y una circunferencia en otra, de igual radio.

Semejanza directa: Si $b = 0$, y $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ se tiene que $w = f(z) = a \cdot z$ es la composición de un giro con una homotecia directa, que se denomina una semejanza directa. Escribiendo a y z en forma exponencial, $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$, $z = |z| \cdot e^{i\theta}$, se tiene:

$$w = |a| \cdot |z| \cdot e^{i(\alpha+\theta)}$$

por lo que $f(z) = a \cdot z$ es una dilatación o contracción de razón $|a|$ y un giro de ángulo $\alpha = \arg(a)$ en torno al origen. La imagen de una región dada es geoméricamente semejante a la inicial.

Al ser composición de dos aplicaciones conformes es una aplicación

conforme en \mathbf{C} .

En general, una **aplicación lineal general** (no constante) $f(z) = a \cdot z + b$, con $a \neq 0$, es la composición de un giro, una homotecia y una traslación. Es una aplicación conforme en \mathbf{C} . Transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

6.2.2. La función $f(z) = z^2$

En el *ejemplo* 6.1.1 se comprobó que la transformación $w = f(z) = z^2$, es conforme en cada punto $z \neq 0$, pero no lo es en la región $\mathbf{C}/\{0\}$ porque no es inyectiva.

Se descompone en su parte real y su parte imaginaria: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2x \cdot y \cdot i$, por lo que si se consideran rectas coordenadas del plano complejo imagen: $u = a$, $v = b$, entonces $a = u(x, y) = x^2 - y^2$ y $b = v(x, y) = 2xy$, se observa que provienen de hipérbolas en el plano complejo de partida. Las rectas coordenadas $a = u$, $b = v$ son ortogonales y por lo que también lo son sus preimágenes, las hipérbolas equiláteras $a = x^2 - y^2$ y $b = 2xy$.

Las rectas $x = a$, $y = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, se transforman en parábolas, y las rectas $x = 0$, $y = 0$ se transforman en las semirrectas \Re^- y \Re^+ respectivamente; la circunferencia $|z| = r$ se transforma en la circunferencia $|w| = r^2$, y las semirrectas $\arg(z) = \theta$ en las semirrectas $\arg(w) = 2 \cdot \theta$.

Transforma el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, en el semiplano superior, y transforma el semiplano superior en todo el plano.

6.2.3. La función $f(z) = z^n$

Se puede generalizar lo anterior estudiando la transformación $w = f(z) = z^n$, donde n es un número natural. La función $f(z) = z^n = r^n \cdot e^{n\theta i}$ se comporta de manera parecida. Por medio de esta transformación una circunferencia de centro el origen y radio r se transforma en una circunferencia de centro el origen y radio r^n : $\{z \in \mathbf{C}; |z| = r\} \rightarrow \{w \in \mathbf{C}; |w| = r^n\}$. Una recta que pase por el origen y forme un ángulo θ con la dirección positiva del eje real pasa a ser otra recta que pasa por el origen y forma un ángulo $n\theta$ con la dirección positiva del eje real: $\{z \in \mathbf{C}; \arg z = \theta\} \rightarrow \{w \in \mathbf{C}; \arg w = n\theta\}$. Por tanto la propiedad de conservar ángulos no se verifica en el origen, donde la derivada de la transformación es cero si n es mayor que uno. Una región angular de vértice en origen y amplitud $2\pi/n$ se transforma en todo \mathbf{C} .

6.2.4. La función exponencial $w = \exp(z) = e^z$

En el *ejemplo 6.1.2* se comprobó que la función exponencial es una transformación conforme en cada punto del plano complejo \mathbf{C} , pero no es conforme en \mathbf{C} pues no es inyectiva, aunque si lo es en cada banda horizontal abierta de anchura menor o igual a 2π .

Las rectas horizontales, $x = a$, se transforman en circunferencias de centro el origen y radio e^a , $|w| = e^a$. Los radios son mayores o menores que uno, $r = e^a$, según que la recta esté en el semiplano de los números complejos con parte real positiva o en el semiplano de los números complejos con parte real negativa.

Las rectas paralelas al eje real, $y = b$, se transforman en semirrectas de

extremo en el origen, $\text{Arg } w = b$.

Cualquier banda paralela al eje real con altura 2π se transforma en todo el plano.

Se observa que se conserva la ortogonalidad.

6.2.5. La función $w = \cos(z)$

En el *ejemplo 6.1.3* se comprobó que la función $w = \cos(z)$ es conforme en todos los puntos $z \neq n\pi$ donde n es entero, y es conforme en la banda vertical $0 < x < \pi$.

Las rectas $x = a$ se transforman en hipérbolas y las rectas $y = b$ en elipses. Las rectas coordenadas se transforman en haces de hipérbolas y en haces de elipses cofocales.

De manera análoga pueden estudiarse el resto de funciones trigonométricas.

6.2.6. La función $w = \bar{z}$

Una función que no es conforme en ningún punto es $w = \bar{z}$ ya que no es holomorfa en ningún punto. Geométricamente representa una **simetría** respecto al eje real, y aunque la simetría conserva el valor absoluto de los ángulos, no conserva los ángulos, pues no conserva su orientación.

6.2.7. La función $w = 1/z$

La función $w = \frac{1}{z}$ es conforme en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Es posible extenderla a

$\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbf{C}}$, mediante la correspondencia $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$. Al ser $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ y

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ la aplicación f es continua en el plano ampliado. Se puede probar

que es una aplicación conforme en \bar{C} .

Al escribir la transformación en polares: $w = \frac{1}{z} = 1/(re^{i\theta}) = (1/r) \cdot e^{-i\theta}$,

transforma la circunferencia de centro el origen y radio r , $|z| = r$, en la circunferencia de centro el origen y radio r^{-1} , $|w| = r^{-1}$, y las semirrectas $\arg(z) = \theta$ en las semirrectas $\arg(w) = -\theta$.

Rectas y circunferencias se transforman en rectas y circunferencias pues:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} = u+iv, \quad u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

al ser $z = 1/w$, se tiene también que:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \quad \text{y} \quad y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

En efecto, sustituyendo lo anterior y simplificando, se obtiene que la recta o circunferencia:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0; \quad a, b, c, d \in \mathfrak{R}$$

se transforma en:

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

por lo que:

- a) Una circunferencia que pasa por el origen ($d = 0$) se transforma en una recta que no pasa por el origen
- b) Una circunferencia que no pasa por el origen se transforma en una circunferencia que no pasa por el origen

- c) Una recta ($a = 0$) que no pasa por el origen se transforma en una circunferencia que pasa por el origen
- d) Una recta ($a = 0$) que pasa por el origen ($d = 0$) se transforma en una recta que pasa por el origen

Como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ la aplicación puede ser descrita por la composición de:

$$Z = \frac{1}{|z|^2} z, \quad w = \bar{z}$$

La primera es una inversión con respecto al círculo unidad $|z| = 1$. La imagen de un punto z no nulo es el punto Z tal que:

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad y \quad \arg Z = \arg z$$

luego los puntos exteriores al círculo unidad se aplican sobre puntos interiores a él, excluido el cero, y recíprocamente; y cualquier punto de la circunferencia se transforma en sí mismo. La segunda transformación es la simetría respecto al eje real.

6.2.8. Otras transformaciones

La transformación $w = z + \frac{1}{z}$, es un sencillo ejemplo que nos permite comprobar que una circunferencia de centro el origen: $\{z \in \mathbf{C}; |z| = r, r \neq 1\}$, se

transforma en la elipse: $\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$. Por tanto, dos circunferencias

con radios recíprocos se transforman en la misma elipse, mientras que las líneas rectas que pasan por el origen se transforman en hipérbolas.

Como resultado de componer la función exponencial y la transformación anterior se puede estudiar la transformación $w = \cosh(z)$. Puede utilizarse para obtener un campo electrostático debido a un cilindro elíptico, el campo electrostático debido a un plano cargado del que se ha suprimido una banda, el flujo de un líquido alrededor de un cilindro elíptico, el flujo de un líquido a través de un corte en un plano, etc.

Otro ejemplo es la **transformación de Schwarz-Christoffel**. Se supone que en el plano complejo se tiene un polígono cuyos lados cambian de dirección un ángulo $\alpha_i \cdot \pi$ cuando se pasa por el i -ésimo vértice, moviéndose sobre la frontera del polígono de manera que el interior quede a la izquierda. La mitad superior del plano se aplica sobre el interior de este polígono por medio

de la transformación: $w = A \cdot \int \frac{dz}{(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_n)^{\alpha_n}} + B$, donde $z_1,$

..., z_n , son los puntos del eje real de partida que se aplican sobre los vértices del polígono, y donde A y B son constantes que quedan fijadas según la escala y situación del polígono. Esta transformación se utiliza, por ejemplo, para hallar la transformación analítica que resuelve el problema de determinar el campo electrostático alrededor de un conductor cilíndrico cargado con sección poligonal.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.2.1: Hallar la imagen del cuadrado de vértices $a = 1$, $b = 1 + i$, $c = i$ y $d = 0$, mediante la aplicación $f(z) = (1 + i) \cdot z + 3$.

La aplicación $f(z) = (1 + i) \cdot z + 3$ transforma el cuadrado de vértices $a = 1$, $b = 1 + i$, $c = i$ y $d = 0$ en el cuadrado de vértices $a' = 4 + i$, $b' = 3 + 2i$, $c' = 2 + i$ y

$d' = 3$. Esta transformación puede descomponerse como composición de:

$$Z = (1 + i) \cdot z \text{ y } w = Z + 3$$

que son, respectivamente, una semejanza y una traslación.

Al ser $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, la semejanza, a su vez, es composición de la homotecia, de factor de homotecia $\sqrt{2}$, y de la rotación, de centro el origen y de ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 6.2.2: Mediante la aplicación $f(z) = e^z$, comprobar que la región del plano complejo:

- a) $A = \{z = x + yi; x > 0, 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; |w| > 1, v > 0\}$
- b) $B = \{z = x + yi; x < 0, 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; |w| < 1, v > 0\}$
- c) $C = \{z = x + yi; 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; v > 0\}$.

Se sabe que las rectas paralelas al eje de ordenadas, $x = a$, se transforman en circunferencias de centro el origen y radio e^a , y las rectas paralelas al eje de abscisas, $y = b$, se transforman en semirrectas de extremo el origen y argumento b .

Las fronteras de las regiones estudiadas son, por tanto, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \pi$; $x = 0$ se transforma en la circunferencia de radio uno y centro el origen, $y = 0$ en el semieje real y positivo, $y = \pi$ en el semieje real y negativo. Si $x > 0$ se obtienen circunferencias de radio mayor que uno y si $0 < y < \pi$ se obtienen semirrectas de argumentos entre 0 y π . Así, la región A se transforma en el exterior del semicírculo de radio uno y ordenadas positivas. La región B se transforma en el interior del semicírculo de radio uno y ordenadas positivas, y la región C en el semiplano de ordenadas positivas.

Ejemplo 6.2.3: Sean dos circunferencias tangentes C_1 y C_2 (siendo C_1 interior a C_2) y una cadena de circunferencias tangentes entre sí y a C_1 y C_2 . Demostrar que los puntos de tangencia están todos ellos sobre una misma circunferencia.

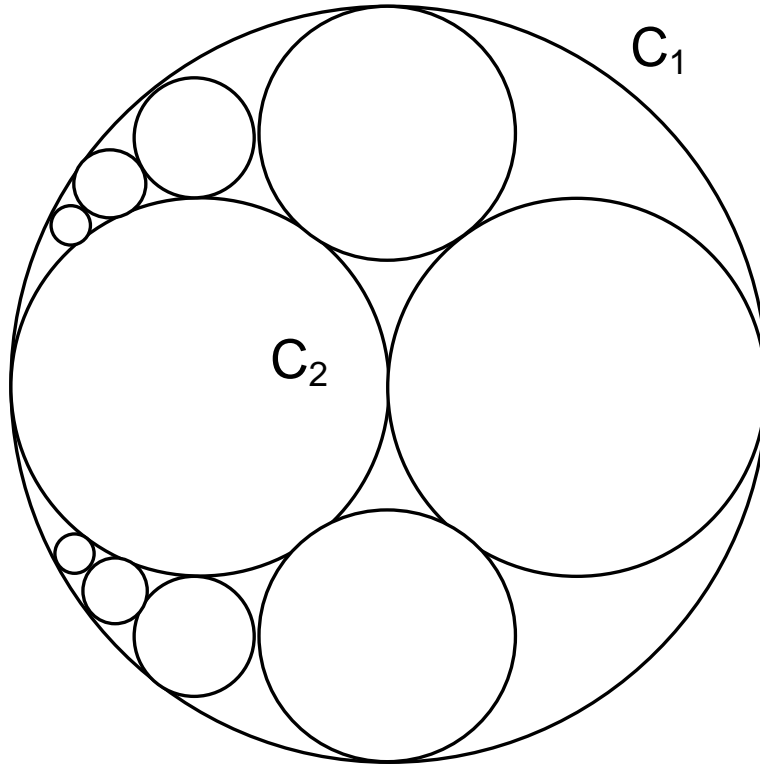


Figura 6.1: Ejemplo 6.2.3

Sea $P = C_1 \cap C_2$ el punto de tangencia y sea $T(z) = \frac{1}{z-P}$. Como $T(P) = \infty$, esta inversión transforma las circunferencias C_1 y C_2 en rectas paralelas, y la cadena de circunferencias tangentes en un haz de circunferencia tangentes a esas dos rectas paralelas, luego sus puntos de tangencia están en otra recta paralela a $T(C_1)$ y a $T(C_2)$, que la transformación inversa transforma en una circunferencia que pasa por los puntos de tangencia del haz original.

Ejercicios

6.5. Sean dos circunferencias secantes C_1 y C_2 y una cadena de

circunferencias tangentes entre sí y a C_1 y C_2 . Demostrar que los puntos de tangencia están todos ellos sobre una misma circunferencias que pasa por los puntos de intersección entre C_1 y C_2 .

6.6. Comprobar que $f(z) = \frac{1}{z}$ transforma:

a) La recta $x = 1/2$ en la circunferencia $(u - 1)^2 + v^2 = 1$.

b) La recta $y = 1/2$ en la circunferencia $u^2 + (v + 1)^2 = 1$.

c) La recta $x = a$ en la circunferencia $-a(u^2 + v^2) + u = 0$.

d) La recta $y = b$ en la circunferencia $u^2 + (v + 1/(2b))^2 = 1/(2b)^2$.

6.7. Hallar la imagen del círculo abierto de centro el origen y radio uno mediante la transformación: $J(z) = z + \frac{1}{z}$ y comprobar que J lo transforma en el plano complejo ampliado excepto el segmento $[-2, 2]$: $\mathbf{C} \cup \infty / [-2, 2]$.

6.8. Comprobar que $f(z) = \log z$ transforma $\{z \in \mathbf{C}; e^a < |z| < e^b, \alpha < \arg z < \beta\}$ en $\{w \in \mathbf{C}; a < \operatorname{Re} w < b, \alpha < \operatorname{Im} w < \beta\}$ para $a, b \in \mathfrak{R}$ y $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

6.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL O DE MÖBIUS

Un tipo particular de transformación conforme es la transformación bilineal, homografía o aplicación de *Möbius*, que se estudia de forma especial, analizando sus propiedades y su comportamiento frente a las razones dobles.

Debe su nombre a *A. F. Möbius*, (1 790 - 1 860), gran geómetra del siglo XIX, al que también se debe la conocida "banda de *Möbius*".

Definición 6.3.1:

Una transformación de la forma: $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c,$ y $d \in \mathbf{C}$, se denomina transformación lineal fraccionaria. Recibe el nombre de **transformación de Möbius**, **transformación bilineal** u **homografía** en el caso de que además verifique la relación $ad - bc \neq 0$.

La condición $ad - bc \neq 0$ garantiza que la transformación no sea constante.

La denominación de “bilineal” se debe a que puede escribirse también de la forma $czw + dw - az - b = 0$, que es una ecuación lineal en cada una de las variables z y w .

6.3.1. Propiedades básicas

Se observa que $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene un polo en el punto $z = -d/c$.

Proposición 6.3.1:

Si $ad - bc = 0$ entonces la transformación T es constante, y si $ad - bc$ es distinto de cero entonces T es conforme en $z \neq -d/c$.

En efecto, $T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$, que existe si $z \neq -d/c$ y no se anula si $ad -$

$bc \neq 0$, por lo que si $ad - bc$ es distinto de cero entonces T es una transformación conforme para todo punto z , $z \neq -d/c$. Si $ad - bc = 0$ entonces se anula la derivada en todos los puntos $z \in \mathbf{C}$ por lo que T es la transformación constante. □

Proposición 6.3.2:

La transformación de Möbius $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es inyectiva en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$ y

en consecuencia es conforme en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$.

Demostración

$$T(z_1) = T(z_2) \Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \Rightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (cz_1 + d)(az_2 + b)$$

$\Rightarrow (acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - (acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + db)) = adz_1 + bcz_2 - adz_2 - bcz_1 = 0 \Rightarrow ad(z_1 - z_2) - bc(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow (z_1 - z_2)(ad - bc) = 0$ y como $ad - bc \neq 0$ entonces $z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, por lo que T es inyectiva, y en consecuencia es conforme en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$. \square

Aplica $\mathbf{C}/\{-d/c\}$ en $\mathbf{C}/\{a/c\}$. \square

Si se define $T(-d/c) = \infty$ y $T(\infty) = a/c$ (si $c = 0$ basta hacer que $T(\infty) = \infty$), entonces se puede asegurar que la transformación de Möbius T es conforme en el plano complejo ampliado $T: \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty \rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$.

Si λ es un número complejo no nulo, la transformación $w = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$ es la misma que $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, por lo que $ad - bc$ no está determinado por T , sino que puede tomar cualquier valor no nulo, $\lambda(ad - bc)$, y de las cuatro variables, a, b, c, d , sólo tres son independientes.

Por eso en ocasiones se impone la condición de **normalización**: $ad - bc = 1$, que no supone ninguna restricción y permite fijar unívocamente los coeficientes a, b, c, d .

El hecho algebraico de que una transformación bilineal contenga tres parámetros complejos arbitrarios se traduce en que es posible elegir libremente las imágenes de tres puntos cualesquiera del plano complejo ampliado, y con ello determinar una transformación de *Möbius*.

Tiene interés discutir el número de puntos fijos que puede tener toda transformación bilineal, vista como una transformación del plano complejo ampliado en sí mismo: $T: \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty \rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$.

Proposición 6.3.3:

Una transformación de *Möbius* tiene siempre un punto fijo, puede tener dos y si tiene tres es la identidad.

Para demostrarlo se buscan los puntos fijos de $T(z)$:

Si $c = 0$ entonces $z = b/(d - a)$ es un punto fijo y otro es el punto del infinito. Las traslaciones sólo dejan fijo el punto del infinito, los giros y las homotecias, además el centro de giro o el de homotecia.

Si c es distinto de cero entonces $T(\infty) \neq \infty$ y

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Una ecuación de segundo grado, en el campo complejo, tiene dos soluciones (quizás confundidas si $(d - a)^2 + 4cb = 0$) lo que prueba que tiene siempre un punto fijo como mínimo, puede tener dos, y si tuviera tres sería la transformación identidad. \square

Proposición 6.3.4:

El conjunto $M = \{T; T \text{ es transformación de } \textit{Möbius}\}$ tiene estructura de

grupo con la operación composición de aplicaciones.

Demostración:

Se debe probar que la composición de dos transformaciones de este tipo sigue siendo de este tipo, y que la inversa de una transformación de *Möbius* es también una transformación de *Möbius*.

La inversa de T se obtiene despejando z , $T^{-1}(z) = \frac{d \cdot z - b}{-c \cdot z + a}$, y es otra

transformación de *Möbius*.

La identidad, $T(z) = z$, es una transformación de *Möbius*. Por tanto las transformaciones de *Möbius* forman un grupo para la composición. \square

6.3.2. Tipos particulares de transformaciones bilineales

Casos particulares de este tipo de transformaciones son las **aplicaciones lineales**: $T(z) = az + b$, donde $d = 1$ y $c = 0$.

La composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal y su inversa es $T^{-1}(z) = \frac{z - b}{a}$ es otra aplicación lineal. Forman un subgrupo de las aplicaciones bilineales. Son aplicaciones conformes en \mathbf{C} .

Transforman el punto del infinito en el punto del infinito, es decir, el punto del infinito es un punto fijo de las aplicaciones lineales. Entre ellas se distinguen:

Traslaciones: $T_b(z) = z + b$, donde b es un número complejo, $c = 0$ y $d = 1$. Su único punto invariante es el punto del infinito. $T^{-1}(z) = z - b$.

Rotaciones: $R(z) = az$, con $|a| = 1$, con $b = c = 0$ y $d = 1$.

Homotecias: $H(z) = r \cdot z$, con $r \in \mathfrak{R}$ y $r > 0$ con $b = c = 0$ y $d = 1$.

Semejanzas directas: Los productos $S_a(z) = a \cdot z$ con $b = c = 0$ y $d = 1$, composición de una rotación de ángulo el argumento de a y una homotecia de razón el módulo de a .

Las aplicaciones lineales transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Toda transformación lineal es composición de una traslación, un giro y una homotecia.

Otro tipo particular es la *inversión*: $in(z) = 1/z$, cuya aplicación inversa es ella misma. La inversión, como se vio en el apartado anterior transforma circunferencias generalizadas (rectas o circunferencias) en circunferencias generalizadas (rectas o circunferencias).

Se puede comprobar que cada una de las transformaciones lineales es composición de dos inversiones en rectas o en circunferencias, luego toda transformación de *Möbius* es composición de inversiones geométricas. Puede demostrarse que cuatro inversiones bastan para descomponer cualquier transformación de *Möbius*, y para algunas es suficiente con dos. El estudio de estas descomposiciones permite clasificar las transformaciones bilineales en cuatro tipos: elípticas, parabólicas, hiperbólicas y loxodrómicas, con interesantes propiedades. Este estudio puede verse en *Needham*.¹

Proposición 6.3.5:

Toda transformación de *Möbius* es composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones.

¹ Needham, T.: *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press. 1997.

Demostración:

La transformación: $T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ es composición de la traslación de vector d/c , $T_{d/c}$; la inversión, in ; semejanza directa de factor $\frac{bc - ad}{c^2}$, $S_{\frac{bc - ad}{c^2}}$; y la traslación de vector a/c , $T_{a/c}$; es decir $T = T_{a/c} \circ S_{\frac{bc - ad}{c^2}} \circ in \circ T_{d/c}$.

En efecto, sea $T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ con $ad - bc \neq 0$.

Si $c = 0$ entonces $T(z) = (a/d)z + (b/d) \Rightarrow T = T_{b/d} \circ S_{a/d}$.

Si $c \neq 0 \Rightarrow T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{1}{c} \left(\frac{acz + bc}{cz + d} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{acz + ad - ad + bc}{cz + d} \right) =$

$$\frac{1}{c} \left(a + \frac{bc - ad}{cz + d} \right) = \frac{1}{c} \left(a + \frac{bc - ad}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} \right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} =$$

$$= (T_{a/c} \circ S_{\frac{bc - ad}{c^2}} \circ in \circ T_{d/c})(z). \quad \square$$

Como consecuencia, al ser toda transformación de *Möbius* composición de transformaciones lineales (que transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias) y de inversiones (que transforman rectas o circunferencias en rectas o circunferencias) se obtiene que una transformación de *Möbius* transforma circunferencias o rectas en circunferencias o rectas.

En términos de proyección estereográfica transforma circunferencias de la esfera de *Riemann*, incluso las que pasan por el polo, en circunferencias de la esfera de *Riemann*. Y dadas dos circunferencias o rectas cualesquiera existe una transformación de *Möbius* que transforma la una en la otra. Dicho con más

precisión:

Corolario 6.3.6:

Si T es una transformación bilineal y D es una circunferencia o una recta, entonces $T(D)$ es una circunferencia o una recta.

Proposición 6.3.7:

Dadas dos circunferencias o rectas D y D' en $\bar{\mathbf{C}}$ existe una transformación de Möbius, T , tal que $T(D) = D'$.

Además se puede especificar que T aplique tres puntos cualesquiera de D sobre otros tres de D' . Si se especifican las imágenes de tres puntos distintos de D la transformación T es única.

6.3.3. Razón doble

Proposición 6.3.8:

Sean z_1, z_2 , y z_3 puntos de $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ distintos entre sí. Existe una única transformación bilineal T tal que $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$.

Demostración:

Se prueba la *unicidad* utilizando que si tiene tres puntos fijos debe ser la identidad. Si $T(z_i) = S(z_i)$ para i igual a 1, 2, y 3, entonces $(S^{-1} \circ T)(z_i) = (S^{-1} \circ S)(z_i) = z_i$ por lo que $S^{-1} \circ T$ deja tres puntos fijos y en consecuencia es la identidad, y por tanto $T = S$.

Para probar la *existencia*, se construye la transformación T :

$$T(z) = \frac{\frac{z - z_2}{z - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3},$$

en el caso de que los tres puntos pertenezcan al plano complejo, y con las debidas modificaciones si alguno de ellos vale infinito:

$$\text{Si } z_1 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}.$$

$$\text{Si } z_2 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z_1 - z_2}{z - z_3}.$$

$$\text{Si } z_3 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

La transformación T así definida verifica que $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ y $T(z_3) = \infty$. \square

Corolario 6.3.9:

Dados tres puntos de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ distintos dos a dos: z_1, z_2, z_3 , y otros tres puntos, w_1, w_2, w_3 , también en $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ y distintos dos a dos, existe una única transformación bilineal que transforma cada z_k en w_k , $T(z_k) = w_k$.

Para demostrarlo basta construirla. Sean T y S las transformaciones tales que: $T: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$, y $S: (w_1, w_2, w_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$, entonces la transformación: $S^{-1} \circ T$ transforma $(S^{-1} \circ T)(z_k) = w_k$. Si los puntos pertenecen a \mathbf{C} , su expresión es:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3},$$

de donde despejando se obtiene w en función de z . \square

Si alguno de los puntos es el del infinito se sustituye T o S por la expresión correspondiente.

Dicha transformación permite introducir un nuevo concepto, el de “razón doble” o razón armónica:

Definición 6.3.2:

Si z_0, z_1, z_2 y z_3 son puntos de $\overline{\mathbb{C}}$, se llama **razón doble** de z_0, z_1, z_2 y z_3 a la imagen de z_0 bajo la única transformación de Möbius T que aplica $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$.

Se representa por (z_0, z_1, z_2, z_3) , y su expresión es:

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}$$

La razón doble es invariante por las transformaciones de Möbius, es decir, si T es una transformación de Möbius y se toman cuatro puntos arbitrarios, z_0, z_1, z_2 y z_3 , su razón doble es igual a la razón doble de sus transformados por T : $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Proposición 6.3.10:

Sea T una transformación de Möbius, y sean z_0, z_1, z_2 y z_3 cuatro puntos, entonces $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

La demostración se basa en operar con la definición de razón doble.

La razón doble se empezó a estudiar en el siglo XVII, en el contexto de la Geometría Proyectiva, donde desempeña un papel importante, como el

principal invariante de las proyectividades.

Corolario 6.3.11:

La ecuación de la única transformación de *Möbius* que transforma z_1 en w_1 , z_2 en w_2 y z_3 en w_3 viene dada en términos de razón doble por $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$.

En efecto, la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

se puede abreviar como $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$, lo que se expresa diciendo que las transformaciones bilineales conservan las razones dobles.

Corolario 6.3.12:

$T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ es la única transformación de *Möbius* en $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ que transforma z_1 en 1, z_2 en 0 y z_3 en el punto del infinito.

$$T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}}{\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}.$$

Si se considera que “circunferencia generalizada” puede ser tanto una circunferencia como una línea recta, ya que si una circunferencia generalizada en $\bar{\mathbf{C}}$ pasa por el punto del infinito entonces es una recta, pues la razón doble permite caracterizar el hecho de que cuatro puntos pertenezcan a una misma circunferencia, pues cuatro puntos de $\bar{\mathbf{C}}$ pertenecen a una misma circunferencia cuando su razón doble es un número real.

Corolario 6.3.13:

Sean z_1, z_2 y $z_3 \in \gamma$ (circunferencia o recta) $\subset \mathbf{C}$. Si $z_0 \in \gamma$, entonces $T(z_0) = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$.

Se define $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ que transforma γ (circunferencia o recta) en γ^* (circunferencia o recta). Pero $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$, por lo que γ^* es la recta $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$, y si $z_0 \in \gamma$, entonces $T(z_0) \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$. \square

Corolario 6.3.14:

Sean z_1, z_2 y $z_3 \in \gamma$ (circunferencia o recta) $\subset \mathbf{C}$. Si z_0 no pertenece a γ , entonces $Im(T(z_0))$ es distinta de cero.

Pues, en efecto si z_0 no pertenece a $\gamma \Leftrightarrow z_0 \in \mathbf{C}/\gamma \Leftrightarrow T(z_0) \notin \mathfrak{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow Im(T(z_0)) \neq 0 \Leftrightarrow Im((w_0, w_1, w_2, w_3)) \neq 0$. \square

Esta consecuencia proporciona la clave para definir los conceptos de parte derecha y de parte izquierda de una recta y de una circunferencia.

6.3.4. Principio de simetría y principio de orientación

De forma natural es posible hacerse la siguiente pregunta: ¿Qué sucede con el interior y el exterior de los recintos limitados por dichas circunferencias? Para poder responder a dicha cuestión es preciso introducir nuevos conceptos, el de **simetría** y el de **orientación**.

En $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ no es obvio el significado de las palabras interior y exterior de una circunferencia o de una recta; para poder darles un significado es preciso introducir el concepto de orientación.

Definición 6.3.3:

Una **orientación** en una circunferencia o recta γ de $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ es una

terna ordenada de puntos de γ distintos entre sí: (z_1, z_2, z_3) .

De forma intuitiva se observa que dichos puntos dan una dirección sobre γ que correspondería a ir de z_1 a z_2 y de z_2 a z_3 . Se observa que con únicamente dos puntos no se tiene una orientación.

En $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$ existen dos orientaciones posibles: $(1, 0, \infty)$ y $(1, \infty, 0)$.

Definición 6.3.4:

Si γ es una circunferencia o una recta y (z_1, z_2, z_3) una orientación en γ , se denomina “**lado derecho**” o **región a la derecha de γ** al conjunto $\{z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$, y “**lado izquierdo**” o **región a la izquierda de γ** al conjunto $\{z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$ según la orientación dada.

Así, por ejemplo, en $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$, dada la orientación $(1, 0, \infty)$ su parte derecha es el semiplano superior. Si se toma la orientación $(1, \infty, 0)$ el semiplano superior es la parte izquierda. ¿Y con la orientación $(1, 2, -1)$? Esta orientación coincide con la orientación $(1, \infty, 0)$.

De esta forma la respuesta a la pregunta planteada anteriormente viene dada por el **principio de orientación** que dice:

Proposición 6.3.15.

Si γ_1 y γ_2 son dos circunferencias de $\bar{\mathbf{C}}$ y T es una transformación de Möbius tal que transforma la una en la otra, si se fija una orientación en γ_1 entonces T aplica el lado derecho de γ_1 sobre el lado derecho de γ_2 , y el lado izquierdo de γ_1 sobre el lado izquierdo de γ_2 , respecto de la orientación transformada.

Esto es una consecuencia de que las transformaciones de *Möbius* conservan las razones dobles. Así si (z_1, z_2, z_3) determinan una orientación en γ , y T es una transformación de *Möbius* entonces la parte derecha (y respectivamente, la parte izquierda) de γ según esa orientación, se transforma en la parte derecha (y respectivamente, la parte izquierda) de $T(\gamma)$ según la orientación $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Definición 6.3.5:

Sea γ una circunferencia que pase por los puntos z_1, z_2 y z_3 . Se dice que los puntos z y z^* son **simétricos** respecto de γ si:

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

En apariencia la definición no depende únicamente de la circunferencia γ sino también de los puntos z_1, z_2, z_3 , pero esta dependencia es aparente.

Si γ es una recta los puntos z y z^* son **simétricos** si equidistan de γ y se encuentran sobre la misma recta perpendicular a γ . Es decir, z y z^* son simétricos respecto de la recta γ , si γ es la mediatriz del segmento $[z, z^*]$

Si γ es una circunferencia en \mathbf{C} de centro a y radio r , entonces los puntos z y z^* son **simétricos** respecto de la circunferencia γ si verifican la relación:

$$(z^* - a) \cdot (\bar{z} - \bar{a}) = r^2.$$

Conocido uno de los puntos puede construirse geoméricamente el otro mediante una figura, ya que a, z y z^* están en la misma semirrecta. En efecto:

$$\arg((z^* - a) \cdot (\bar{z} - \bar{a})) = \arg(r^2) \Rightarrow \arg(z^* - a) + \arg(\bar{z} - \bar{a}) = 0 \text{ y por tanto:}$$

$$\arg(z^* - a) = \arg(z - a).$$

Por otro lado, se obtiene una semejanza de triángulos, pues:

$$|(z^* - a)| \cdot |(\bar{z} - \bar{a})| = |r^2| \Rightarrow |z^* - a| \cdot |z - a| = r^2 \Rightarrow \frac{|z^* - a|}{r} = \frac{r}{|z - a|}.$$

En general:

$$z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a.$$

Se comprueba que:

- a) El punto simétrico respecto de la circunferencia γ del punto del infinito es el centro de la circunferencia.
- b) El punto simétrico respecto de la circunferencia γ de un punto de la circunferencia (o de la recta) es él mismo.
- c) El simétrico de z respecto de $\Re \cup \{\infty\}$ es su conjugado: \bar{z} .
- d) Si z^* es el simétrico de z respecto de γ , entonces z es simétrico de z^* respecto de γ .

Circunferencias de Apolonio

La expresión: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$, con $\lambda \in \Re^+$, representa una recta si λ es igual a

uno, y una circunferencia si λ es distinto de uno.

En efecto, si $\lambda = 1 \Rightarrow |z - z_1| = |z - z_2| \Rightarrow$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \Rightarrow$$

$$2(x_1 - x_2) \cdot x + 2(y_2 - y_1) \cdot y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0,$$

que es la ecuación de la recta mediatriz del segmento $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, por lo

que z_1 y z_2 son simétricos respecto de la recta $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Si $\lambda \neq 1$ se puede comprobar que la ecuación $|z - z_1| = \lambda \cdot |z - z_2|$ representa la circunferencia de centro $a = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda^2}$ y radio $r = \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{1 - \lambda^2}$.

Definición 6.3.6:

Se denomina **circunferencia de Apolonio** a la circunferencia:

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathfrak{R}^+.$$

Proposición 6.3.16:

Los puntos z_1 y z_2 son simétricos respecto de la circunferencia de

$$\text{Apolonio: } \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, \lambda \neq 1, \text{ de centro } a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2} \text{ y radio } r = \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{1 - \lambda^2}.$$

Demostración:

El simétrico de z , z^* es:

$$z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$$

por lo que el simétrico de z_2 , z_2^* , es:

$$z_2^* = \frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a = \frac{\frac{(\lambda(z_1 - z_2))^2}{(1 - \lambda^2)^2}}{\bar{z}_2 - \frac{\bar{z}_1 - \lambda^2 \bar{z}_2}{1 - \lambda^2}} + \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2} =$$

$$\frac{\lambda^2 (z_1 - z_2)^2 + (z_1 - \lambda^2 z_2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(1 - \lambda^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)} = z_1. \quad \square$$

Como consecuencia se tiene:

Corolario 6.3.17:

Si los puntos z_1 y z_2 son dos simétricos respecto de la circunferencia γ , la ecuación de γ puede expresarse en la forma: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$, con λ constante e

independiente de z , $\lambda = \frac{|z_1 - z_2|}{r}$.

Demostración:

Sean z_1 y z_2 dos puntos simétricos fijados respecto de la circunferencia γ , de centro a y radio r . Entonces:

$$(z_1 - a) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{a}) = r^2 \Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a.$$

Sea z un punto cualquiera de la circunferencia. Se va a probar que

$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$ es independiente de z . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} &= \frac{\left| z - \left(\frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a \right) \right|}{|z - z_2|} = \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a}) - r^2|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \\ &= \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a}) - (z - a)(\bar{z} - \bar{a})|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a} - \bar{z} + \bar{a})|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \frac{|z_2 - a|}{r} = \text{cte. } \square \end{aligned}$$

Proposición 6.3.18:

El **principio de simetría** dice que si T es una transformación de *Möbius* que aplica la circunferencia generalizada γ_1 sobre la circunferencia generalizada γ_2 , todo par de puntos simétricos respecto de γ_1 se transforman

por T en un par de puntos simétricos respecto de γ_2 .

Demostración:

Es sencillo comprobar que las transformaciones lineales conservan la simetría. Bastaría, pues, probar que la inversión: $in(z) = 1/z$, la conserva.

Sea $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$ una circunferencia de la que se sabe que z_1 y z_2 son

simétricos respecto de ella. Su transformada por la inversión $w = 1/z$ es:

$$\frac{\left| \frac{1}{w} - z_1 \right|}{\left| \frac{1}{w} - z_2 \right|} = \lambda \Rightarrow \frac{|1 - z_1 w|}{|1 - z_2 w|} = \lambda \Rightarrow \frac{|z_1| \left| w - \frac{1}{z_1} \right|}{|z_2| \left| w - \frac{1}{z_2} \right|} = \lambda \Rightarrow \frac{\left| w - \frac{1}{z_1} \right|}{\left| w - \frac{1}{z_2} \right|} = \frac{\lambda |z_2|}{|z_1|} = \text{constante.}$$

En consecuencia la curva transformada es también una circunferencia para la que los puntos $\frac{1}{z_1} = w_1$ y $\frac{1}{z_2} = w_2$ son simétricos respecto a ella, por lo que la inversión conserva la simetría, y por tanto, las transformaciones bilineales conservan la simetría.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.3.1: Sea D el disco unidad, $B_1(0)$. Encontrar todas las transformaciones de Möbius, T , que transformen al disco unidad en sí mismo.

Algún punto $a \in D$ tendrá que transformarse en el origen, $T(a) = 0$, y mediante la conservación de la simetría se puede garantizar que el simétrico de a se transformará en el simétrico del centro, esto es, en el punto del infinito:

El simétrico de a es $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$ y $T(a^*) = T(1/\bar{a}) = \infty$.

Por tanto $T(z) = k \cdot \frac{z-a}{z-1/a} = k \cdot \frac{z-a}{a \cdot z-1}$ para algún número complejo k .

Si T es una transformación de Möbius tal que $T(D) = D$ entonces transformará el borde de D en el borde de D , por lo que si $|z| = 1$ entonces $|T(z)| = 1$. Como $T(1)$ ha de estar en el borde del disco D ,

$$T(1) = k \cdot \frac{1-a}{a \cdot 1-1} \Rightarrow |T(1)| = |k| \cdot \left| \frac{1-a}{a \cdot 1-1} \right| = |k|$$

Por lo que k tiene que tener módulo 1, luego será de la forma $k = e^{i\varphi}$ para algún número real φ . En consecuencia $T(z) = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-a}{az-1}$ para cierto número real φ y cierto número complejo a del disco unidad, por lo que se puede elegir de forma arbitraria un parámetro real, φ , y otro complejo, a . Se puede entonces afirmar que las transformaciones bilineales del disco en sí mismo tienen tres grados de libertad. Esos parámetros permiten elegir qué punto se transforma en el origen y cuál es el argumento de la derivada en ese punto.

Ejemplo 6.3.2: Encontrar una transformación de Möbius T que transforme $T(1) = 1$, $T(2) = 2$ y $T(7) = 3$.

Se sustituyen estos puntos en la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

y se obtiene: $\frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{w-2}{w-3} = \frac{1-7}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-7} \Rightarrow 2 \cdot \frac{w-2}{w-3} = 6 \cdot \frac{z-2}{z-7} \Rightarrow w = \frac{7z-4}{2z+1}$.

Si $z = x \in \mathfrak{R}$ entonces se transforma en $w = \frac{7x-4}{2x+1} \in \mathfrak{R}$. luego transforma

la recta real en la recta real. Si se quiere saber, por ejemplo, en qué se transforma la circunferencia de centro el origen y radio uno, se buscan los

transformados de tres puntos de dicha circunferencia: $T(1) = 1$, $T(i) = 2 + 3i$ y $T(-1) = 11$. Están sobre la circunferencia de centro 6 y radio 5: $|z| = 1 \rightarrow |w - 6| = 5$.

Ejemplo 6.3.3: Hallar el transformado de la circunferencia de centro el origen y radio 1, y de la recta real, mediante la transformación: $w = \frac{-z+i}{z+i}$.

Se buscan los transformados de tres puntos de la recta real, y se obtiene: $T(1) = i$, $T(0) = 1$ y $T(-1) = -i$. Los transformados no están alineados por lo que están en una circunferencia, la circunferencia de centro el origen y radio 1.

Se buscan ahora los transformados de tres puntos de la circunferencia de centro el origen y radio uno: $T(1) = i$, $T(i) = 0$ y $T(-1) = -i$. Además $T(-i) = \infty$. Están alineados. Es la recta imaginaria. Por tanto: $\Re \rightarrow |w| = 1$ y $|z| = 1 \rightarrow \{z = x + yi; x = 0\}$.

Ejemplo 6.3.4: Encontrar una transformación de Möbius T que transforme $T(1) = i$, $T(0) = \infty$ y $T(-1) = 1$.

Se sustituyen estos puntos en la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

y se obtiene: $w = \frac{(i+1)z + (i-1)}{2z}$.

Ejemplo 6.3.5: Comprobar que las aplicaciones de Möbius que transforman el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el disco abierto $|w| < 1$ (y la frontera $\text{Im } z = 0$ en $|w| = 1$) son de la forma $T(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$.

$$\text{Sea } T(z) = k \cdot \frac{z-a}{z-b}.$$

El punto del infinito pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$. Como $T(\infty) = k$ entonces $|T(\infty)| = |k| = 1$, de modo que $k = e^{i\alpha}$.

Algún punto del semiplano superior, z_0 , se transformará en el centro de la circunferencia, $T(z_0) = 0$, luego $a = z_0$. El simétrico de z_0 respecto del eje de abscisas ($\text{Im } z = 0$) es su conjugado, \bar{z}_0 , que se transformará en el simétrico del centro de la circunferencia que es el punto del infinito, $T(\bar{z}_0) = \infty$. Luego $b = \bar{z}_0$. Por tanto $T(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$.

Otra forma de proceder posible es considerar que el origen pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$. Como $T(0) = e^{i\alpha} \cdot \frac{-a}{-b}$ entonces $|T(0)| = |e^{i\alpha}| \cdot \left| \frac{-a}{-b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| = 1$, de modo que $|a| = |b|$.

El punto $z = 1$ pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$. Como $T(1) = e^{i\alpha} \cdot \frac{1-a}{1-b} = \frac{1-a}{1-b}$ pues $\alpha = 0$, entonces $|T(1)| = \left| \frac{1-a}{1-b} \right| = 1$, de modo que: $|1-a| = |1-b| \Rightarrow (1-a)(1-\bar{a}) = (1-b)(1-\bar{b}) \Rightarrow a + \bar{a} = b + \bar{b} \Rightarrow \text{Re}(a) = \text{Re}(b)$.

Los números complejos a y b tienen igual módulo e igual parte real, por tanto, o son iguales o son conjugados. Si fuesen iguales la transformación sería constante, en consecuencia son conjugados: $b = \bar{a}$. Y por tanto $T(z) =$

$$e^{i\alpha} \cdot \frac{z-a}{z-\bar{a}}.$$

Además si se impone que z con $\text{Im } z > 0$ debe transformarse en w del interior del círculo, $\left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| < 1$, de donde se obtiene que $\text{Im } a > 0$.

Ejercicios

6.9. Encontrar la imagen del círculo de centro el origen y radio 1 mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{z-2}{z-1}.$

b) $w = \frac{z}{z-1}.$

c) $w = \frac{z-2}{z}.$

d) $w = \frac{3z-2i}{iz-4}.$

6.10. Encontrar la imagen de la franja $0 < x < 1$, mediante las transformaciones:

e) $w = \frac{z+2}{z-3}.$

f) $w = \frac{z}{z+2}.$

g) $w = \frac{3z+2}{z-4i}.$

$$h) w = \frac{2z + 3i}{iz + 2}$$

6.11. Encontrar las transformaciones de *Möbius* que aplican los puntos 1, i y -1 , respectivamente, en:

a) 1, 0, ∞ .

b) 0, 3, $2+i$.

c) 2, $3i$, 7.

d) -1 , $-4i$, 0.

6.12. Determinar todas las transformaciones bilineales tales que dejen invariante el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

6.13. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy; x + y > 0\}$ y $B = \{w = u + iv; |w| < 3\}$.

6.14. Determinar la transformación de *Möbius* que transforma el círculo unidad en sí mismo y tal que $T(2) = 3$.

6.4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

6.4.1. Transformaciones de funciones armónicas

El “Teorema de la aplicación de *Riemann*” decía que si Ω es un subconjunto de \mathbf{C} abierto y simplemente conexo distinto del plano complejo;

entonces existe una única biyección conforme f que transforma el conjunto Ω en el disco unidad con centro en el origen, tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0)$ sea un número real positivo.

La demostración de este teorema está en el libro de *Marsden-Hoffman*. Puede comprobarse también, usando el “lema de Schwarz”, que las únicas transformaciones biyectivas y conformes de D en D son las bilineales; y la posibilidad de representar Ω sobre D de manera conforme permite resolver el importante problema, conocido como “problema de *Dirichlet*”.

6.4.2. Ecuación de Laplace con condiciones de contorno

Muchos problemas que plantea la Física se resuelven buscando soluciones de la ecuación de *Laplace*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Esta ecuación no tiene solución única; sin embargo, cuando se establecen condiciones iniciales o condiciones de contorno se estudia, bajo que condiciones, dicha solución es única.

El problema de hallar una función armónica en un dominio específico que satisfaga sobre su contorno condiciones previamente establecidas es muy importante en matemática aplicada. Si se conocen los valores de la función sobre la frontera el problema se denomina como un problema de contorno de primera especie, o problema de *Dirichlet*. Si se conocen los valores de la derivada normal a la función sobre la frontera, se dice que es un problema de contorno de segunda especie, o problema de *Neumann*.

Problema de *Dirichlet*: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que verifique la ecuación de *Laplace* en todo punto de dicho

dominio, $(u(x, y)$ armónica), cuyos valores en todo punto de la frontera de Ω son especificados, está determinada en forma única.

Problema de Neumann: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que verifique la ecuación de *Laplace* en todo punto de dicho dominio, suponiendo que se conoce la derivada direccional de u en la dirección del vector normal a la curva que define la frontera de Ω

Los dominios más frecuentes son simplemente conexos, y ya se ha estudiado en el *capítulo 2* que una función armónica en un dominio simplemente conexo tiene siempre una armónica conjugada, por lo que en ocasiones la solución de un problema de contorno para tales dominios es la parte real o imaginaria de una función holomorfa. El éxito de este procedimiento depende de la simplicidad del problema.

Un problema de *Dirichlet* se transforma mediante una aplicación conforme en otro problema de *Dirichlet*, y un problema de *Neumann* se transforma en un problema de *Neumann*.

Las condiciones de contorno mencionadas pueden quedar inalteradas bajo cambios de variables asociados a una transformación conforme. La técnica básica consiste en transformar un problema de contorno dado en el plano xy en otro más sencillo en el plano uv , resolverlo, y escribir la solución del problema original en términos de la solución obtenida para el más sencillo. Por lo que si se dispone de una tabla lo suficientemente amplia que indique como se transforman unos recintos en otros resultará que el conocimiento de la solución en un determinado recinto va a determinar la solución en otros.

Se pueden utilizar las transformaciones conformes para resolver

problemas relativos a la ecuación de *Laplace* en dos variables independientes, lo que permitirá comentar aplicaciones sobre conducción térmica, potencial electrostático o flujo de fluidos.

6.4.3. Aplicaciones a la hidrodinámica

Las ecuaciones de la hidrodinámica² son ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento de un fluido y expresan la conservación de los momentos, la conservación de la masa, o la ecuación conocida como ecuación de estado. Son demasiado complicadas, por lo que se deben añadir hipótesis para poder abordarlas. Así, se puede suponer que: i) el fluido es incompresible, ii) no existen las fuerzas externas, iii) se consideran únicamente movimientos estacionarios, y iv) se restringe el problema a flujos bidimensionales. Se comprueba entonces que una de las ecuaciones es la segunda ecuación de *Cauchy-Riemann*, lo que lleva a la utilización de las funciones holomorfas para resolver estos problemas.³

6.4.4. Aplicaciones a la teoría del calor

En la teoría de la conducción del calor, el flujo a través de una superficie interior a un sólido, en un punto de la superficie, es la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a la superficie por unidad de tiempo y por unidad de área. Por tanto varía con la derivada normal de la de la temperatura en el punto en cuestión. Se parte de la hipótesis de que ni se crea ni se destruye energía térmica en el interior del sólido, y que tanto la temperatura como sus derivadas parciales son funciones continuas, y si sólo se consideran dos

² Pueden encontrarse en *Hydrodynamics* de H. Lamb.

³ En *Polya&Latta* se encuentra explicado el flujo en canales con fuentes sumideros y dipolos.

variables, esto permite concluir que la temperatura es una función armónica de x e y . Las superficies $T(x, y) = C$ son isotermas, y las curvas que tienen al gradiente de T como vector tangente son las líneas de flujo. En Churchill⁴ se pueden encontrar aplicaciones a las temperaturas estacionarias en un semiplano y en un cuadrante.

6.4.5. Aplicaciones a la electrostática

En un campo de fuerzas electrostático la intensidad de campo en un punto es un vector que representa la fuerza ejercida sobre una carga positiva unidad colocada en ese punto. El potencial electrostático es una función con valores reales de las coordenadas del punto, tal que, en cada punto, la derivada direccional en cualquier dirección es la opuesta de la componente de la intensidad de campo en esa dirección. Para dos partículas cargadas estacionarias, la magnitud de fuerza de atracción o repulsión ejercida entre ellas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre las partículas. Por lo que el potencial en un punto debido a una sola partícula en el espacio es inversamente proporcional a la distancia entre el punto y la partícula. En toda región libre de cargas se puede demostrar que el potencial debido a una distribución de cargas externa a la región satisface la ley de Laplace para el espacio tridimensional. Y si las condiciones son tales que el potencial es el mismo en todos los planos paralelos al plano xy entonces éste es una función armónica de dos variables. El potencial en el flujo estacionario de electricidad en una lámina conductora plana es también una función armónica en zonas

⁴ Churchill, R. V.; Brown, J. W.: *Variable compleja y sus aplicaciones*. Mc Graw-Hill. (4ª edición). 1998.

libres de fuentes o sumideros. El potencial gravitatorio es otro ejemplo de función armónica en Física. Los problemas de contorno para el potencial son los mismos que para las temperaturas estacionarias.⁵

6.4.6. La transformación de *Schwarz-Christoffel*

La transformación de *Schwarz-Christoffel* que aplica el eje x y el semiplano superior en el interior y frontera de un polígono cerrado simple se utiliza para dar solución a ciertos problemas de teoría de fluidos y de teoría del potencial. Un ejemplo adecuado es hallar el potencial complejo para el flujo de un fluido en un canal con un cambio abrupto en su anchura, que se denomina canal con recodo.⁶

6.5. EJERCICIOS

- 6.15. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \log z$.
- 6.16. Comprobar que la transformación $w = iz$ es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ del plano z . Hallar la imagen de $A = \{z = x + iy; 0 < x < 2\}$ mediante $w = iz$. (Solución: $\{w = u + iv; 0 < v < 2\}$).
- 6.17. Hallar la imagen de A mediante la transformación $w = f(z)$, y representar gráficamente la región inicial y la región imagen, para:

⁵ En el libro de *Churchill & Brown* pueden verse otros ejemplos de potencial como el potencial en un espacio cilíndrico.

⁶ Estas aplicaciones de la transformación de *Schwarz-Christoffel* están desarrolladas en *Churchill & Brown*: flujo de un canal a través de una rendija, flujo en un canal con recodo, potencial electrostático en el borde de una placa conductora... En *Polya & Latta* también se explica el flujo en canales utilizando esta transformación conforme, y como ejemplos, el flujo alrededor de cuerpos fijos, el flujo con fronteras libres, y el bocal de borda.

- a) $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 0 \}; w = f(z) = (i - 1) z + 2i.$
- b) $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; y > 0 \}; w = f(z) = i z + 1 + i.$
- c) $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 1 \}; w = f(z) = (1 + i) z + 1.$
- d) $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 0, 0 < y < 2 \}; w = f(z) = (i - 1) z + 2i.$

6.18. Hallar la imagen de $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; x < -3 \}$ mediante la transformación $w = \frac{1}{z}$. ¿Es el interior de un círculo? Analizar el resultado para $A = \{ z = x + iy; \in \mathbf{C}; x < a \}$ según sea a un número real y positivo, o un número real y negativo. ¿Y si $a = 0$?

6.19. Hallar la imagen de A mediante la transformación $w = \frac{1}{z}$, para:

- a) $A = \{ z = x + iy \in \mathbf{C}; y < 3 \}.$
- b) $A = \{ z = x + iy \in \mathbf{C}; 0 < y < 3 \}.$
- c) $A = \{ z = x + iy \in \mathbf{C}; x > 1, y > 1 \}.$
- d) $A = \{ z = x + iy \in \mathbf{C}; 1 < x < 3 \}.$

Representar gráficamente, en cada caso, la región inicial y la región imagen.

6.20. Describir geoméricamente la transformación $w = \frac{1}{z+1}$.

6.21. Demostrar que aunque $w = \frac{1}{z}$ transforme una circunferencia en una circunferencia, el centro de la circunferencia inicial no se transforma en el centro de la circunferencia imagen.

6.22. Hallar la imagen de A mediante la transformación $J(z) = z + \frac{1}{z}$, para:

- a) $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$
- b) $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1/2, \text{Im } z > 0\}$
- c) $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1/2\}$
- d) $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$

6.23. Comprobar que $f(z) = z^2$ transforma la circunferencia $\{z \in \mathbf{C}; |z - r| = r\}$ en la cardiode $\rho = 2r^2(1 + \cos \theta)$. (Ayuda: Escribir las ecuaciones paramétricas de la circunferencia).

6.24. Comprobar que $w = \text{sen } z$ transforma rectas horizontales ($y = b$) en

elipses $\left(\frac{u^2}{(\cosh b)^2} + \frac{v^2}{(\sinh b)^2} = 1 \right)$ y rectas verticales ($x = a$) en

hipérbolas $\left(\frac{u^2}{(\text{sen } a)^2} - \frac{v^2}{(\cos a)^2} = 1 \right)$. Comprobar también que la

familia de las elipses es ortogonal a la familia de las parábolas.

6.25. Demostrar que la composición de dos transformaciones de *Möbius* es también una transformación de *Möbius*.

6.26. Determinar la imagen de la región A mediante la transformación T , siendo:

a) $A = \{z \in \mathbf{C}; \text{Re } z > 0 \text{ y } \text{Im } z > 0\}$ y $T(z) = \frac{2z+3i}{z-2i}$.

b) $A = \{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ y $T(z) = \frac{z-2i}{3z-i}$.

c) $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\}$ y $T(z) = 2i \frac{-z+i}{2z-3i}$.

6.27. Transformar el semicírculo de centro el origen y radio 1, con $\operatorname{Im} z > 0$, mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{z+1}{z-3}$.

b) $w = \frac{z-i}{z+2}$.

c) $w = \frac{3z-2}{z+4i}$

d) $w = \frac{3z-2i}{iz-3}$

6.28. Transformar la corona circular $1 < |z| < 2$, mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{z}{z-3}$.

b) $w = \frac{z+i}{z-5}$.

c) $w = \frac{z-i}{z+i}$

d) $w = \frac{3z-2i}{iz-4}$

6.29. Transformar el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{z-5}{z-2}$.

b) $w = \frac{z-i}{z+i}$.

c) $w = \frac{3z-2}{z+4i}$

d) $w = \frac{7z+i}{iz-3}$

6.30. Transformar la región limitada por las circunferencias: $|z-i|=1$, $|z-1|=1$, mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{-2z+1}{z-3}$.

b) $w = \frac{-2z-i}{z+2}$.

c) $w = \frac{3z+4}{z+4i}$

d) $w = \frac{3z}{iz-3}$.

6.31. Encontrar la *transformación de Möbius* T que transforme $T(-1) = -i$, $T(0) = 1$ y $T(1) = i$.

$$(\text{Solución: } w = \frac{-z+i}{z+i}).$$

6.32. Hallar la *transformación de Möbius* que aplica los puntos $z_1 = -i$, $z_2 = 0$ y $z_3 = i$ en los puntos:

a) $w_1 = -2$, $w_2 = 2$ y $w_3 = 4$.

b) $w_1 = -1$, $w_2 = i$ y $w_3 = i$.

c) $w_1 = 2i$, $w_2 = -i$ y $w_3 = -2i$.

d) $w_1 = 0$, $w_2 = i$ y $w_3 = \infty$.

Indicar, en cada caso, en qué curva se transforma el eje imaginario $x = 0$.

6.33. Hallar los puntos fijos de las transformaciones *de Möbius* siguientes:

a) $w = iz$.

b) $w = \frac{z-1}{z+1}$.

c) $w = \frac{6z-9}{z}$.

d) $w = z + 3$.

(Solución: a) $z = 0, \infty$; b) $z = i, -i$; c) $z = 3$; d) $z = \infty$).

6.34. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante la circunferencia de centro el origen y radio uno.

6.35. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante el eje real $\text{Im } z = 0$.

6.36. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante el semiplano superior $\text{Im } z > 0$.

6.37. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy; x > y\}$ y $B = \{w = u + iv; |w| < 1\}$.

6.38. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy; x < y\}$ y $B = \{w = u + iv; |w| > 2\}$.

6.39. Comprobar que todas las transformaciones de *Möbius* que aplican el

círculo unidad en sí mismo y dejan invariante el origen, son rotaciones.

- 6.40. Hallar las transformaciones de *Möbius* que aplican A en B , siendo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ y $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 2| = 2\}$ y que transforman -1 en 0 y 0 en $-2i$. Calcular $T(\mathfrak{R})$.

$$(\text{Solución: } T(z) = 2(1 + i) \cdot \frac{z+1}{2z+1-i}; T(\mathfrak{R}) = \{w \in \mathbf{C}; |w - i| = 1\}).$$

- 6.41. Hallar las transformaciones de *Möbius* que aplican A en B , siendo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 2i| = 1\}$ y $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 3| = 1\}$ y que transforman las circunferencias de centro el origen en las circunferencias de centro el punto -1 .

- 6.42. Hallar la imagen del semiplano superior por la transformación: $w =$

$$\text{Log} \frac{i - z}{i + z}.$$

- 6.43. Encontrar una transformación conforme que transforme la región $A =$

$$\{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\} \text{ en la región } B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 2| < 3\}.$$

- 6.44. Encontrar una transformación conforme que transforme la región $A =$

$$\{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\} \text{ en la región } B = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u > v\}.$$

- 6.45. Sea T una transformación de *Möbius* $w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Demostrar

que $T^{-1} = T$ si y sólo si $a = -d$.

- 6.46. Determinar y representar la imagen de $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; x^2 + y^2 + 2x < 0\}$ mediante las transformaciones:

a) $T_1(z) = z + 3;$

b) $T_2(z) = \frac{1}{z+3};$

c) $T_3(z) = \frac{z-1}{z+3};$

d) $T_3(z) = \frac{z+3}{z-1}.$

6.47. Determinar la imagen de $A = \{z \in \mathbf{C}; |\arg(z)| \leq \pi/4\}$ mediante la transformación $f(z) = z^2$.

(Solución: $T(A) = \{w \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} w \geq 0\}$).

6.48. Hallar la transformación bilineal $w = T(z)$ que aplica $A = \{z \in \mathbf{C}; |z - 4i| \leq 2\}$ en el semiplano $B = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; v \geq u\}$ y tal que $T(2i) = 0$ y $T(0) = -i$.

(Solución: $T(z) = \frac{6 + 3zi}{6i - (i+2)z}$).

6.49. Sea B la imagen mediante $T_1(z) = \frac{z}{5-z}$ de $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; y >$

$x\}$. Hallar la imagen de B mediante la transformación $T_2(z) = \frac{-z}{z+1}$.

(Solución: $T_2(T_1(A)) = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; y < x\}$).

6.50. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el círculo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 3\}$, tal que $T(i) = 0$ y $\arg(T(i)) = \pi/2$. Obtener $T(2i)$.

(Solución: $T(z) = 6 \cdot \frac{z-i}{z-4i}; T(i) = -3$).

- 6.51. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que $T(4i) = 0$ y $\arg(T'(4i)) = 3\pi/4$. Obtener $T(0)$.

$$(\text{Solución: } T(z) = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2} \cdot \frac{z-4i}{z+4i}; T(0) = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}).$$

- 6.52. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que $T(3i) = 0$ y $T(\infty) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Obtener $T(i)$.

$$(\text{Solución: } T(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z-3i}{z+3i}; T(i) = \frac{i-1}{2\sqrt{2}}).$$

- 6.53. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el círculo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que deja invariantes a los puntos: 1 y 2i. Obtener $T(i)$.

$$(\text{Solución: } T \text{ es la identidad; } T(i) = i).$$

- 6.54. Determinar la imagen de $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 4, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ mediante la transformación $T(z) = \frac{z-4}{z+4}$.

$$(\text{Solución: } T(A) = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u = 0, v > 0\}).$$

- 6.55. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w-1| < 6\}$, tal que $T(i) = 1$ y $T'(i) = 3$. Obtener $T(1)$.

- 6.56. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w-1| <$

2}, tal que $T(1) = 1$ y $T(0) = 1 - 2i$. Calcular $T(\Re)$.

6.57. Dada la transformación $w = 2j \frac{z+1}{1-z}$, determinar:

- La imagen del eje real.
- La imagen del eje imaginario.
- La imagen de cada uno de los cuatro cuadrantes.

(Solución: a) $T(\Re) = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u = 0\}$. b) $\{w \in \mathbf{C}; |w| = 2\}$. c) $C'_1 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| > 2, u < 0\}$; $C'_2 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| < 2, u < 0\}$; $C'_3 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| < 2, u > 0\}$; $C'_4 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| > 2, u > 0\}$).

6.58. Determinar la transformación bilineal $w = T(z)$ tal que $T(-i) = 0$, $T(0) = 1 + i$ y $T(\infty) = 2i$. Obtener su desarrollo en serie de potencias positivas de $z + i$. Calcular los residuos de T y T' en sus singularidades. Determinar la imagen de la recta $y = -x$ mediante la transformación T .

ECUACIONES DIFERENCIALES

ORDINARIAS

El Análisis ha sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las ecuaciones diferenciales constituyen la parte central del Análisis, además es la que mejor permite comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

En este libro se pretende establecer la relación existente entre las matemáticas puras y las aplicadas, por lo que se ha considerado muy interesante introducir las ecuaciones diferenciales presentando muchos ejemplos concretos y situaciones sencillas del mundo real, y de esta forma conseguir dos objetivos, por un lado la comprensión de la importancia histórica que las ecuaciones diferenciales han tenido en el desarrollo de la Matemática y su actual vigencia y relevancia, es decir, el interés que tiene su estudio desde el punto de vista matemático. Por otro lado, al estudiar modelos válidos para explicar situaciones sencillas del mundo real, se motiva la aplicación en contextos diversos y el tratamiento de diferentes cuestiones asociadas a ellos, como existencia y unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial,

estabilidad, problemas de contorno, comportamiento cualitativo de las soluciones, que explican la solución del problema y permiten generalizar los resultados. Para que el ingeniero pueda usar con confianza las ecuaciones diferenciales debe tener un cierto dominio sobre las técnicas de solución y un conocimiento suficiente sobre la teoría básica.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todas las áreas de la Ingeniería Civil, desde la Resistencia de Materiales hasta la Hidráulica. Pero también tienen como finalidad básica servir como instrumento para el estudio del cambio en el mundo físico; por todo esto se exponen aplicaciones tales como la del problema de la braquistócrona, las leyes de Kepler, el oscilador armónico, la teoría del potencial, las ecuaciones depredador-presa, la mecánica no lineal, el principio de *Hamilton* o el problema mecánico de *Abel*..., pues el tratamiento matemático de estos problemas es un gran logro para nuestra civilización.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de la otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio. Al expresar estas relaciones mediante símbolos matemáticos se obtiene una gran cantidad de ecuaciones diferenciales.

Es interesante detenerse en algunas de las aplicaciones, pues como dice *Simmons*¹: "... que tratan sobre este tema (ecuaciones diferenciales ordinarias) me hacen pensar en un autobús turístico cuyo conductor conduce a gran velocidad para cumplir sus horarios, y sus pasajeros tienen pocas o ninguna

1 *Simmons*, F. (1988): *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.

oportunidad para gozar del paisaje. Es mejor que lleguemos algunas veces con retraso; pero que obtengamos un mayor provecho del viaje". Por ello es necesario programar cuidadosamente el viaje, para detenerse y gozar de los mejores paisajes de las ecuaciones diferenciales, aunque procurando llegar sin retraso.

Para captar la naturaleza y el interés de las ecuaciones diferenciales y desarrollar métodos para resolver problemas científicos y técnicos no es conveniente construir una estructura matemática lógicamente impecable, y si se tiene presente además los niveles de rigor comentados por *Freudenthal* es preciso alcanzar exactamente el nivel de rigor adecuado, sin pasarse ni quedarse cortos, y en algunas ocasiones, presentar argumentos razonablemente convincentes, aunque puedan no ser auténticas demostraciones para el profesorado de matemáticas. La historia proporciona la génesis de los conceptos, y ya se sabe que muchos grandes matemáticos cometieron, con la óptica actual, graves errores, pero que sin embargo aportan noticia de la dificultad que pueden tener esos conceptos cuando son aprendidos por primera vez. En este libro se trata por tanto de combinar, de la forma más adecuada, el conocimiento teórico con una gran variedad de aplicaciones.

Los **objetivos** que se plantean en esta sección son los siguientes:

1. Comprender los conceptos sobre ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.
2. Introducir una serie de métodos y técnicas de solución que se deberán manejar con soltura, que permitan calcular la solución de determinadas

ecuaciones diferenciales, y en particular de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes.

3. Aplicar a problemas de valor inicial las hipótesis y conclusiones de los teoremas de existencia y unicidad presentados, lo que en la actualidad resulta de gran importancia para poder utilizar los métodos numéricos.
4. Saber realizar el análisis de las aplicaciones, con construcción de modelos e interpretación de las soluciones.
5. Puesto que pueden presentarse problemas que, por los teoremas de existencia y unicidad estudiados, se sabe que tienen solución, pero no se conocen métodos para calcularla, (o son demasiado complicados), se dedica una sección completa a la resolución numérica del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

6. Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones.

HISTORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las **ecuaciones diferenciales** sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

En la historia de las ecuaciones diferenciales se pueden considerar cinco etapas², donde cada una de ellas marca un avance definitivo. La primera etapa iría desde los inicios hasta 1820 cuando *Cauchy* publica su teorema de existencia, que da inicio a la segunda etapa que marca la edad del rigor. La tercera comienza en 1870 con *M. S. Lie* (1842 – 1899) y la aplicación de la teoría de grupos continuos a las ecuaciones diferenciales, particularmente aquellos de la dinámica de *Hamilton-Jacobi*. La cuarta comienza en 1880 con el trabajo de *E. Picard* (1856 – 1941) y su teorema de existencia. La construcción de las ecuaciones diferenciales es análoga a la teoría de las ecuaciones algebraicas de *Galois*. La última etapa comienza en 1930 donde el análisis se hace más general. Ya *E. H. Moore* en 1908 estudia ecuaciones con un número infinito numerable de variables; ahora se estudiarán ecuaciones diferenciales de dimensión infinita, y comienza el cálculo de variaciones y el análisis funcional.

² Bell, E. T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. (2ª ed.). Edic. Fondo de Cultura Económica.

Quizá se podría situar **la primera idea** sobre ecuación diferencial hacia finales del siglo XVI y principios del siglo XVII en los trabajos realizados por *John Napier* (1 550 – 1 617) cuando inventó los logaritmos. Vistas las tablas confeccionadas por él, si se utilizara el simbolismo moderno del cálculo infinitesimal, se podrían considerar como la resolución numérica de una ecuación diferencial.

Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1 564 – 1 642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución ecuaciones diferenciales. De *Pierre Fermat* (1601-1665) dice *Laplace* que es el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Las ecuaciones diferenciales aparecen simultáneamente al cálculo infinitesimal. Por ejemplo en 1 638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1 596 – 1 650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no conocía el cálculo), y fue resuelto en 1 674 por *Leibniz* y en 1 690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

Las ecuaciones diferenciales comienzan con *Isaac Newton* (1 642 - 1727) y *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1 646 – 1 716). Dice este último “*Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él*

ha hecho es, con mucho, la mitad mejor". Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de las leyes naturales.**

Isaac Newton (1 642 – 1 727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1 665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio, o fluxión de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.



Figura 1: Isaac Newton (1 642 – 1 727)

El “*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*”, publicado en 1 711, contiene la primera exposición sistemática del cálculo, donde formula un método sistemático de diferenciación, (aunque no se distingue mucho del que publicó *Barrow* en 1 670). En 1 742 se publicó “*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*”, escrito hacia 1 671, en el que ya aparecen ecuaciones

diferenciales. En 1676 escribió “*De quadratura curvarum*” donde evitaba las cantidades infinitamente pequeñas reemplazándolas por las llamadas “razones primeras y últimas”, aunque su primera obra impresa: “*Philosophiae naturalis principia mathematica*” fue en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de las ecuaciones diferenciales. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... $mv' = mg - kv$ donde m , g y k son constantes reales mayores que cero, con lo que se obtiene una ecuación diferencial en la que se quiere encontrar $v = v(t)$. Pero esta ecuación diferencial no proporciona propiamente el estado sino que dice como evoluciona el sistema. Para conocer el estado se debe imponer una condición inicial.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas son ecuaciones diferenciales es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

Newton clasifica las ecuaciones diferenciales en tres tipos:

a) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ integral indefinida

b) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y)$

c) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x, y)$ caso general.

Cree saber resolverlas todas. Su método consiste en desarrollar la

función f en serie de potencias, derivar, y sustituir término a término. El cálculo de coeficientes es recursivo y el primero es arbitrario (aunque la noción de constante arbitraria es más tardía).

A modo de ejemplo se transcribe una expresión de *Newton*:

$$3x^2 \dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3x\dot{x}\dot{x} - a\dot{x}\dot{x} + a\dot{x}\dot{y} - 3y\dot{y}\dot{y} + \dot{x}^3 - y^3 = 0$$

donde se puede observar que había una cierta vaguedad en el modo de formulación.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues publicó en la revista “*Acta Eruditorum*” una exposición del cálculo en 1684.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de dx y del signo de integral, fue el primero en introducir el término “*ecuación diferencial*” y el término “*derivar*” en el sentido de “deducir” (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).



Figura 2: *Gottfried Wilhelm Leibniz (1 646 – 1 716)*

Dice *Ince*:³ “*Todos nuestros vagos conocimientos sobre el nacimiento y el desarrollo de la ciencia de las ecuaciones diferenciales se resume en una fecha importante, el 11 de noviembre de 1 675, cuando por primera vez Leibniz asertó en un papel la ecuación: $\int y \cdot dy = \frac{1}{2} y^2$ ”.*

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable y depende de otra x , y se conoce la tasa de variación de y respecto de x para cambios muy pequeños de la variable x , lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x) \cdot dx$, entonces la determinación de y respecto de x se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la

³ *Ince*, E. L.: *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, 1927.

generalización. *Leibniz* descubre métodos de separación de variables de resolución de ecuaciones homogéneas de primer orden y de ecuaciones lineales de primer orden, utiliza en 1696 el cambio $y = z^{1-n}$, y mantiene correspondencia con otros matemáticos, en especial con los hermanos *Bernoulli*.

En este periodo fundamentalmente se centra el esfuerzo en la búsqueda de métodos particulares de resolución aplicables a diferentes tipos concretos de ecuaciones diferenciales. Se pueden considerar los trabajos de los hermanos *Jakob Bernoulli* (1 654 – 1 705) y *Johann Bernoulli* (1 667 – 1 748), y del hijo de *Johann*, *Daniel Bernoulli* (1 700 – 1 782). La familia *Bernoulli* tuvo, en tres generaciones, ocho matemáticos, de los que los tres ya citados fueron extraordinarios.



Figura 3: *Jakob Bernoulli* (1 654 – 1 705)

En 1 690 ***Jakob Bernoulli*** resuelve el problema de la isócrona y plantea el problema de la catenaria. El **problema de la braquistócrona**, curva por la que el tiempo de caída es mínimo, propuesto en 1 696 por ***Johann Bernoulli***, que es posible considerar como el origen del cálculo de variaciones, provocó discusiones entre ellos. *Daniel* asocia su nombre a la famosa ecuación de

Bernoulli de la mecánica de fluidos.

Jacob Bernoulli estudió teología, pero pronto se dedicó a estudiar a *Newton* y a *Leibniz*. Fue profesor de matemáticas en Basilea. Su hermano más joven, *Johann Bernoulli* estudió medicina y se doctoró con una tesis sobre la contracción de los músculos, aunque pronto se sintió fascinado por el cálculo. En 1695 fue profesor de matemáticas y física en Groningen, Holanda, y al morir su hermano, le sucedió como profesor en Basilea. *Daniel Bernoulli* estudió medicina como su padre y se doctoró con un trabajo sobre los pulmones. También como su padre fue profesor de matemáticas en San Petersburgo. Obtuvo diez premios de la Academia Francesa.

Los *Bernoulli* introdujeron los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales. Los primeros esfuerzos estuvieron dirigidos a reducir ecuaciones de primer orden a ecuaciones de variables separadas. *Leibniz* redujo la ecuación homogénea mediante la sustitución $y = u \cdot x$, y la lineal de primer orden mediante $y = u \cdot v$, y los *Bernoulli* redujeron a lineal la ecuación que hoy lleva su nombre. *Johann Bernoulli* utilizó factores integrantes y probó que la ecuación que hoy se denomina de *Euler* (pues *Euler* encontró la sustitución $x = e^t$) puede reducirse de orden multiplicando por un factor x^k .

Es interesante analizar las dificultades que encontraban en la solución de ecuaciones que hoy se consideran elementales, así como los logros que alcanzaron. A finales del siglo XVII se conocían muchos de los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior y las ecuaciones en derivadas parciales. En la tumba de *Jakob Bernoulli* aparece la espiral logarítmica y llevan su nombre la elástica de

Bernoulli y la lemniscata de *Bernoulli*. *Johann Bernoulli* resolvió las trayectorias ortogonales a una familia dada como un reto con los ingleses. Por ejemplo, *Johann Bernoulli* en 1694, al utilizar el método de separación de variables para integrar una ecuación diferencial, se dio cuenta de que en ocasiones, como ocurre en la ecuación diferencial $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$, se oculta la naturaleza de las soluciones, y que si se multiplica por un factor integrante adecuado, como se llamará más tarde, se obtiene una solución algebraica.

De forma simplificada se considera el **siglo XVIII** como el siglo de la **integración elemental** de las ecuaciones diferenciales. Éstas se convirtieron en el instrumento básico de investigación en problemas de mecánica, geometría diferencial y cálculo de variaciones⁴ y se relacionaron con la teoría de funciones de variable compleja y con las series trigonométricas. Aparecieron también algunos problemas físicos, como el problema de la cuerda vibrante, formulados en ecuaciones en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales encontrarán un gran número de aplicaciones durante la segunda mitad del siglo XVIII. Su estudio llegó a ser una de las disciplinas matemáticas más importantes debido a su utilización como herramienta fundamental en el campo científico y por la gran cantidad de problemas prácticos que con ellas se podían resolver. Los matemáticos más famosos del siglo XVIII contribuyeron enormemente al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Se pueden citar de una manera especial por la importancia de sus trabajos en este campo a *Euler* (1707 – 1783), *Clairaut* (1713 – 1765), *D'Alembert* (1717 – 1783), *Daniel Bernoulli* (1700 – 1782),

⁴ Guzmán, M. (1975): *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Alhambra.

Lagrange (1736 –1813) y *Laplace* (1749 – 1827). Se estudiaron los distintos tipos de ecuaciones diferenciales integrables por cuadraturas, se elaboraron los primeros procesos de aproximación y se introdujeron conceptos fundamentales dentro de la teoría como los de solución singular y solución general de una ecuación diferencial. Se estudiaron algunos tipos de ecuaciones de orden superior y se elaboraron los cimientos para una teoría geométrica de las ecuaciones en derivadas parciales.

Leonard Euler obtuvo importantes progresos en la teoría de ecuaciones diferenciales, que utilizó en la resolución de problemas de mecánica celeste y de balística. Sobre el trabajo de *Euler* en mecánica dijo *Lagrange* que era el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento. Con él, la teoría de las ecuaciones diferenciales se transforma en una disciplina independiente, con sus dos ramas, ecuaciones diferenciales ordinarias y derivadas parciales. Los resultados fueron recogidos en la magistral obra "*Institutiones calculi integralis*" en cuatro tomos, publicados los tres primeros entre 1768 y 1770 y el cuarto en 1794, siendo utilizado desde entonces como manual obligado para el estudio de matemáticas.



Figura 4: Leonhard Euler (1707 – 1783)

A él se deben varios cambios de variables, como aquellos que permiten reducir ecuaciones de segundo orden en ecuaciones de primer orden, y creó el concepto de factor integrante que proporciona la forma de integrar directamente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. En 1735 trabajó las ecuaciones diferenciales mediante series, en 1739 dio un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes encontrando una solución exponencial, dando en 1743 el método más general de la ecuación característica, y resolviendo en 1753 la ecuación no homogénea.

La teoría general de coeficientes variables se debe a *D'Alembert*, en 1765, y el método de variación de parámetros a *Lagrange* en 1776.



Figura 5: Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

Estudió la denominada “*Ecuación de Euler*” y algún caso particular de la ecuación de *Bessel*, (trabajada en un estudio más general por *F. W. Bessel* (1784 – 1846)), para lo que usó series de potencias. Por ejemplo, buscando la solución de $u''_{xx} + u = 0$, encontró la función: $2\cos x$, y la función: $e^{xi} + e^{-xi}$, llegando por desarrollos en serie a la convicción de que ambas funciones

coinciden, (de donde nacen las primeras ideas sobre como debe ser una función exponencial compleja).

Un problema en el que se interesaron los matemáticos del siglo XVIII fue el de encontrar el número de parámetros que determinan la solución de una ecuación diferencial. Una ecuación diferencial ordinaria de orden n escrita en forma explícita tiene una solución dependiente de n parámetros. Sin embargo se encontraron ejemplos de ecuaciones diferenciales en forma implícita que admitían soluciones con un número menor de parámetros, aunque, admitían también otras soluciones denominadas soluciones singulares. *Euler* probó que el número de parámetros necesarios en una ecuación diferencial lineal de orden n es exactamente igual a n .

El uso de factores integrantes, los métodos sistemáticos para resolver las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas, y obtener soluciones particulares y generales e incluso soluciones singulares, son algunas de las contribuciones de *Euler*, compartidas con *Daniel Bernoulli*, (que por ejemplo resolvió $y' + k \cdot y = f(x)$) y *D'Alembert*. *Daniel Bernoulli* y *Euler* proponen, al estudiar las oscilaciones de una barra, la ecuación diferencial de cuarto orden: $k^4 \cdot y^{(4)} = y$, la más alta hasta entonces. Contribuye al método de solución en series de potencias, a las series trigonométricas, y crea una primera discusión sistemática del cálculo de variaciones. Se debe a *Euler* el procedimiento numérico de resolución de ecuaciones diferenciales. Se fija en el método de las isoclinas $f(x, y) = cte.$, y para valores de x dados elige rectas verticales sobre las que se calculan pendientes, introduciendo así el método de las poligonales de *Euler* como una simplificación del método de las isoclinas.

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó tan pronto

como se conoció la relación inversa existente entre los procesos de diferenciación e integración. El problema de resolver ecuaciones en derivadas parciales era un campo abierto a los pioneros. *D'Alembert* tuvo intereses muy variados, pues publicó tratados sobre dinámica, música, el problema de los tres cuerpos, la precesión de los equinoccios, el movimiento en medios resistentes y las perturbaciones del movimiento lunar. El estudio de la cuerda vibrante le condujo a la ecuación en derivadas parciales: $u''_{tt} = u''_{xx}$, para la que dio en 1747, en las *Memoirs* de la Academia de Berlín, la solución $u = f(x + t) + g(x - t)$, donde f y g son, según *D'Alembert*, funciones arbitrarias que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. *Euler* dio en 1753 para la ecuación más general $u''_{tt} = a^2 \cdot u''_{xx}$, la solución $u = f(x + at) + g(x - at)$, y la interpretación es diferente pues *D'Alembert* no concebía que la solución no fuese continua, incluso con segundas derivadas continuas, mientras *Euler* mantenía que f y g eran completamente arbitrarias, pudiendo ser discontinuas.

La mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no eran sencillas de resolver mediante cuadraturas, y requerían ingeniosas sustituciones o algoritmos especiales para encontrar su solución. Se descubrieron familias de ecuaciones resolubles por artificios relativamente sencillos como las ecuaciones de *Bernoulli* ya comentadas. *Taylor* en 1715 descubre el fenómeno de las soluciones singulares. *Alexis Claude Clairaut* (1713 – 1765), precoz matemático que a los diez años estudiaba ya los textos de *L'Hôpital*, identificó la familia $y = xy' + f(y')$, que además de la solución general $y = cx + f(c)$ tiene una solución singular, siendo una de las primeras de este tipo que se encontraron. *D'Alembert* encontró la solución singular de la ecuación un poco más general: $y = xf(y') + g(y')$ que lleva su nombre. *Euler* considera una cierta

paradoja el hecho de que las soluciones singulares se obtengan “derivando” en vez de “integrando”. Y *Lagrange* en 1776 demuestra que la envolvente de una familia de soluciones de una ecuación diferencial, si existe, es también una solución, y es una solución singular. *Clairaut* observó que las derivadas parciales de segundo orden cruzadas de una función son iguales (hoy se conocen las condiciones suficientes para que esto ocurra), y utilizó este hecho en el familiar criterio de reconocimiento de las ecuaciones diferenciales exactas. Escribió obras de matemáticas aplicadas que se hicieron famosas.

Una de las ecuaciones diferenciales ordinarias más interesantes del siglo XVIII fue la ecuación que *D’Alembert* denominó de *Riccati*, y fue estudiada por muchos matemáticos como los *Bernoulli*.

Produjo problemas la imposibilidad de obtener soluciones explícitas para la ecuación de *Riccati*, que debe su nombre a *Jacopo Riccati* (1676 – 1754), matemático italiano que consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$, o la importante ecuación no lineal que lleva su nombre. Ya se habían encontrado ecuaciones cuya solución únicamente se puede obtener como series de potencias, como: $xy' = y^2$, y los *Bernoulli* habían iniciado la integración numérica sustituyendo derivadas por incrementos finitos.



Figura 6: *Jacopo Riccati* (1 676 – 1 754)

Daniel Bernoulli estudia en 1 724 valores de n para los que la ecuación de *Riccati* es integrable por separación de variables. *Euler* fue el primero en llamar la atención sobre que si se conoce una solución particular entonces, haciendo una sustitución, se convierte en una ecuación diferencial lineal, por lo que se puede hallar su solución general; o que si se conocen dos soluciones particulares entonces se puede obtener la solución general por medio de una simple cuadratura. En 1 841 *Liouville* demuestra que existen ecuaciones diferenciales sencillas que **no pueden resolverse por integración elemental**. La teoría de *Galois* cierra por radicales esta idea.

Lagrange (1 736 – 1 813) en su artículo “*Recherches sur la nature et la propagation du son*” (1 759) se mostró de acuerdo con que las soluciones de la ecuación diferencial deben ser continuas. Observó que es útil tratar ecuaciones de la forma $F(x, y, y') = 0$ y no siempre utilizar la variable x como independiente. En “*Nouvelles recherches sur la nature et propagation du son*” (1 761) transforma la ecuación en derivadas parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Obtuvo las técnicas que se denominan de los multiplicadores de *Lagrange*. También se debe a *Lagrange* la técnica que se conoce como de variación de parámetros o de constantes para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden n , o de un sistema, conociendo la solución general de la homogénea asociada. Otra de sus contribuciones es el cálculo de variaciones, cuyo nombre deriva de las notaciones usadas por *Lagrange* hacia 1 760. Trata de encontrar una relación funcional $y = f(x)$ para que una integral $\int_a^b g(x, y, y') \cdot dx$ tome un valor máximo o mínimo. Como casos particulares están los problemas sobre

isoperimetrías o de descenso más rápido. Hizo también importantes aportaciones a la mecánica analítica. El trabajo monumental de *Lagrange* “*Mecanique analytique*” contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, que hoy llevan su nombre, deduciendo las ecuaciones de la mecánica aplicando el principio de mínima acción (o cálculo de variaciones ya comentado).

En la misma época *Laplace* obtuvo y estudió la conocida ecuación que lleva su nombre, y que aparece continuamente en problemas de hidrodinámica, elasticidad y electromagnetismo, así como su famosa transformada que permite resolver numerosas ecuaciones lineales. El trabajo de cinco volúmenes “*Traité de mecanique céleste*” le valió el título de *Newton* de Francia.



Figura 7: Pierre Simon de Laplace (1 749 – 1 827)

Las posturas de *Lagrange* y *Laplace* proveen de dos filosofías distintas de las Matemáticas. Para *Laplace* la naturaleza era esencial y las Matemáticas una herramienta; mientras que para *Lagrange* las Matemáticas eran un arte que justificaba su propia existencia.

En *Boyce*⁵ se encuentra la siguiente afirmación de *N. Bowditch*: “No puedo encontrar una afirmación de *Laplace* “Así, es evidente”, sin tener la seguridad de que deberé emplear horas de trabajo intenso, para cubrir el abismo y averiguar y demostrar lo evidente que es”. *Mary Somerville* fue traductora y comentarista de esta obra, y con sus explicaciones profundas hizo posible que fuese comprendida.

Monge, más conocido por sus trabajos en geometría, también hizo aportaciones a las ecuaciones diferenciales que destacan por su visión geométrica. Estudió ecuaciones de primer y segundo orden mediante el método de las ecuaciones características. Introdujo transformaciones de contacto, con las que es posible reducir ecuaciones a otras cuya solución sea conocida. Observó que ecuaciones de la forma:

$$P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz = 0$$

que según *Euler* no tienen sentido cuando no existen familias de superficies que las satisfagan, pueden resolverse si se obtienen como soluciones variedades de orden inferior, (como curvas). Posteriormente fueron generalizadas a más dimensiones por *Pfaff*. Tanto ellas como sus generalizaciones a sistemas, tienen aplicaciones en campos como Termodinámica o Mecánica Clásica, por lo que posteriormente han sido estudiadas por *Grassmann*, *Frobenius*, *Lie*, *Darboux* y *Cartan*. El formalismo de formas diferenciales introducido por este último permite escribir de forma elegante el teorema de *Frobenius* que establece cuando un sistema general de ecuaciones de *Pfaff* admite factores integrantes.

⁵ Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa. (1ª edición). 1967. (10ª reimpresión) 1992.página 25.

Jacobi y *Abel* trabajaron sobre funciones elípticas. *Jacobi* descubrió un método, que se denomina de *Hamilton-Jacobi*, que permite integrar un sistema de ecuaciones canónicas de *Hamilton* por medio de una integral completa de una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Estudió un método que extiende el de *Charpit-Lagrange* a dimensiones superiores a dos, que hace comprender que el método anterior es una técnica para reducir la dimensionalidad de los problemas considerados si uno es capaz de encontrar cantidades conservadas en involución para el sistema de características, y que en particular esto reduce el problema a resolver ecuaciones donde aparecen jacobianos. También se deben a *Jacobi* las condiciones que llevan su nombre y que debe satisfacer un problema de cálculo de variaciones para que un extremal sea mínimo.

La influencia de *Gauss* en las ecuaciones diferenciales ordinarias es menor que en otras ramas de la Matemática, y a veces indirecta. Estudió ecuaciones hipergeométricas y funciones elípticas, e hizo también estudios en geometría diferencial o variable compleja que incidieron indirectamente en las ecuaciones diferenciales. Estudió también electromagnetismo y fluidos, por lo que se debe mencionar su teorema de la divergencia.

Durante la primera mitad del siglo XIX aparecen nuevas ideas generadas en parte para dar respuesta a problemas de física matemática, siendo los más notables los relacionados con las series de *Fourier*, y también en parte originados por la transformación general que experimentó el análisis matemático durante este periodo que dio lugar al planteamiento de nuevos enfoques dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales.

El punto de partida es el famoso trabajo sobre **la difusión del calor de J.**

B. Fourier (1768 – 1830) comenzó en 1807 y publicó en 1822, donde para obtener la solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

con distintas condiciones de contorno, *Fourier* desarrolló de forma sistemática el método de separación de variables, y llevando adelante las ideas de *D. Bernoulli* llegó a la representación de soluciones en series trigonométricas, indicando además que la clase de funciones que podían ser así representadas era muy amplia. “*Prueba*” la convergencia de sus series a las correspondientes funciones periódicas, utilizando razonamientos en muchos casos faltos de rigor, que hoy día, mediante la teoría de distribuciones se pueden formular correctamente.



Figura 8: Jean Baptiste Joseph *Fourier* (1768 – 1830)

Por entonces las tres grandes L (*Lagrange*, *Laplace* y *Legendre*) criticaron la memoria de *Fourier* por sus lagunas y vaguedad de razonamiento, y quizás esta sea la causa para que comenzara la época del rigor. El trabajo de *Fourier* desempeñó un papel catalizador en la nueva fundamentación del Análisis, pues suscitó cuestiones como las condiciones exactas de representabilidad de

funciones mediante series trigonométricas. El primer resultado riguroso en esta línea fue obtenido por *Dirichlet*, en 1 829, un año antes de la muerte de *Fourier*.

Con *Cauchy* comienza la **edad del rigor**, desde 1 820 a 1 870. Hacia 1810 se consideraba obvia la existencia de soluciones por desarrollo de series. *Cauchy* dice de forma clara que no todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que la serie sea convergente, e incluso si converge, que sea hacia la función deseada. *Cauchy* desarrolló, entre 1 820 y 1830 en sus cursos de la Escuela Politécnica de París, los conocidos métodos que permiten probar la **existencia de las soluciones** del problema de valor inicial $y' = f(x, y); y(x_0) = y_0$ que hoy se denomina *problema de Cauchy*, adaptando el método del polígono de *Euler* a sus objetivos. En un manuscrito recientemente encontrado dice: “la resolución del problema de valor inicial daría la solución general”. Se debe a *Cauchy* en 1 824 la idea básica del método de las aproximaciones sucesivas, mejorado por *Peano* en 1 890, presentado en forma más moderna y general en 1 890 por *E. Picard* (1 856 -1 941), y en 1 894 por *Lindelöf*. Considera *Cauchy* la ecuación integral equivalente: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z)) \cdot dz$ y la analiza por el método que hoy se conoce como el de las poligonales de *Euler*, aunque entonces él no lo conocía.

De 1 839 a 1 842 utilizó el método de la mayorante si $f(x, y)$ es analítica, lo que se aplica bien en el campo complejo. En 1 842 en la reunión semanal de la Academia, aplicó el método de la mayorante a las ecuaciones en derivadas parciales, base de lo que hoy se denomina teorema de *Cauchy-Kovaleskaya*. Extendió su teorema de existencia a ecuaciones de orden superior, y también a ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales de

primer orden en el campo complejo. Las técnicas son también aplicables a numerosas ecuaciones en derivadas parciales por lo que se debe recordar a la matemática rusa *Sofía Kovalenskaya* (1850 – 1891) por sus resultados para la resolución de ecuaciones con datos en forma normal sobre una superficie no característica, y el teorema que lleva el nombre de *Cauchy-Kovalevskaya* que demostró en 1874, teorema fundamental de existencia de una única solución analítica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en forma normal. *Kovalenskaya* presentó un ejemplo, sorprendente entonces, de una ecuación que no cumple las hipótesis del teorema y no posee solución analítica alguna.



Figura 9: *Sofía Kovalenskaya* (1850 – 1891)

Los teoremas de existencia tuvieron importancia no sólo desde un punto de vista teórico, sino también desde un punto de vista práctico, ya que permitieron justificar la aplicación de los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales a la física. Por otra parte los métodos utilizados en las demostraciones de estos teoremas proporcionaron algoritmos para obtener aproximaciones de la solución con el grado de exactitud deseada, así como para medir el error de la aproximación, por lo que sirvieron de fundamento para los procesos de integración numérica que fueron elaborados durante el siglo XIX.

Se debe a *Cauchy* la memoria sobre la propagación de ondas ópticas “*Mémoire sur la théorie des ondes*” que apareció en 1 815 precisamente cuando tomaba forma definitiva la teoría ondulatoria de la luz por obra de *Young* y de *Fresnel*, y el ser uno de los fundadores de la teoría matemática de la elasticidad. Son importantes los trabajos de *Cauchy* sobre funciones complejas, para tener en cuenta la relación entre variable compleja y la teoría de ecuaciones diferenciales, que no se manifiesta únicamente en las aplicaciones como la inversión de la transformada de *Laplace*, sino también en los estudios llevados a cabo por *Fuchs*, *Kummer*, *Riemann*, *Painlevé*, *Klein*, *Poincaré*, *Hilbert*, entre otros, sobre puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Cuando se abordaban problemas de la Física Matemática donde las condiciones iniciales no eran regulares (como por ejemplo, una cuerda sometida a un fuerte plegamiento, tratado por *Christoffel*, o la propagación de ondas planas con ondas de choque) la consideración de singularidades era inevitable.

Hacia 1 869 seguía sin resolverse el problema de la **unicidad** de una ecuación diferencial. En 1 854 *Briot* y *N. Bouquet* simplificaron la demostración de *Cauchy* y analizaron el caso en que $f(x, y)$ es singular en un punto del campo complejo, comprobando que el radio de convergencia es el máximo posible hasta que se alcanza la singularidad. El que la solución no sea única se contradice con la idea de *Laplace* de que es posible un conocimiento completo y se utiliza la aleatoriedad en el contexto de las ecuaciones diferenciales. *Peano* trató la existencia local de soluciones e introdujo las inecuaciones diferenciales probando que el ínfimo de las supersoluciones y el supremo de las subsoluciones son soluciones. *Picard*, al final de un largo artículo,

trabajando sobre las ecuaciones de segundo orden trató las aproximaciones sucesivas e impuso las condiciones de *Lipschitz*. La teoría de las sub y super soluciones, y de las inecuaciones, no es válida para sistemas. Se tienen entonces los métodos basados en la teoría de la integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(z, y(z)) \cdot dz.$$

Vallé-Poussin asoció a la ecuación diferencial la suma superior y la suma inferior. Este método admite alguna discontinuidad de la función f lo que es importante en control. *Caratheodory* en 1918 utilizó la integral de *Lebesgue*. *Lipschitz* fue el primero que abordó los criterios de unicidad, *Jordan* los simplificó y el método de *Perrón* de 1926 unificó y mejoró los métodos anteriores.

La formulación exacta del **concepto de independencia lineal de un sistema de funciones**, de tanto interés dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales, proviene de la segunda mitad del siglo XIX, en la que se obtuvo una condición para la independencia lineal en términos del determinante llamado wronskiano, que había introducido *H. Wronski* (1775 – 1853) en la primera mitad del siglo XIX.

Con la ecuación de *Euler* ya se observó que las soluciones son más irregulares que la propia ecuación. A *L. Fuchs* (1833 – 1902) se debe el concepto de sistema fundamental de soluciones y se debe también una nueva orientación en la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos, que pronto se transformó en una teoría analítica de ecuaciones diferenciales, ocupándose de las propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales, no necesariamente lineales, en el campo complejo. Las ecuaciones cuyas singularidades son todas regulares se denominan

fuchsianas, en ellas la rotación en torno al punto singular transforma una solución de un conjunto de soluciones linealmente independientes en una combinación lineal de las mismas. *Fuchs* observó hacia 1865 que en las ecuaciones no lineales las singularidades son móviles, por ejemplo: $y' = y^2$ tiene de solución $y = \frac{1}{x-c}$ cuya singularidad depende de la constante y por tanto del valor inicial. *Frobenius* en 1874 desarrolló en serie y probó la convergencia en los puntos singulares regulares. Se ocuparon también de este problema, entre otros, *Hilbert*, *Poincaré*, *Klein*, desarrollando *Painlevé* entre 1890 y 1906 una teoría general.

Riemann obtuvo la solución general de la ecuación hiperbólica no lineal de segundo orden de dos variables, para la que demostró que es posible reducirla siempre a una ecuación lineal de segundo orden, técnica que se emplea en el estudio de la dinámica de gases. Estudió también soluciones discontinuas para estas ecuaciones, y aunque anticipó el concepto de onda de choque, no obtuvo la solución correcta, debida a *Hugoniot*, pues realizó la hipótesis errónea de que la entropía es constante a lo largo de la discontinuidad. A él se debe el estudio del grupo de monodromía.

Los **problemas de contorno**, que aparecen en geometría diferencial, teoría de ecuaciones integrales y en física matemática (ecuaciones del calor y ondas), cuyas soluciones se obtienen mediante el método de variables separadas, dan lugar a los problemas conocidos con los nombres de *J. Sturm* (1803 – 1855) y *J. Liouville* (1809 – 1882).



Figura 10: J. Liouville (1809 – 1882)

Consisten en tratar de resolver una ecuación de la forma: $(Py)′ + Gy = 0$, donde P y G son funciones dependientes de x y de un parámetro λ , y suponiendo conocidos en dos puntos del eje x los valores de combinaciones lineales de $y(x)$ y de $y′(x)$. Especial interés presentan los teoremas de oscilación de *Sturm* que permiten examinar la oscilación de dos soluciones comparándola con otras como las de la ecuación elemental $y″ + \lambda y = 0$. Se caracterizan por la existencia de un parámetro λ con el que, para valores particulares que se denominan autovalores, el problema de contorno tiene soluciones no triviales. Los teoremas de *Sturm* permiten obtener soluciones de los problemas de *Sturm-Liouville* mediante las técnicas que se denominan de “tiro”, en la dirección de las primeras investigaciones en este área. La herramienta más poderosa ha sido la función de *Green*, y el uso que de ella hizo *Fredholm* a principios de siglo, demostrando que dicha función es analítica en el parámetro λ , excepto para los autovalores donde presenta polos, lo que permite de nuevo utilizar las potentes técnicas de variable compleja en el tratamiento de estos problemas.



Figura 11: Lejeune Dirichlet

El estudio de los problemas de contorno para la ecuación de *Laplace* y la formulación del principio de *Dirichlet* son de la segunda mitad del siglo XIX. El desarrollo de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior al primero se realizó en íntima conexión con problemas de física y en particular de elasticidad. Se desarrolló el cálculo de variaciones, aparecieron ejemplos de funciones que no satisfacen las ecuaciones de *Euler-Lagrange*. El carácter central del problema de *Dirichlet* asociado a la ecuación de *Laplace* hizo que se trabajase intensamente en su solución. Se desarrollaron las técnicas de la teoría de potencial y ecuaciones integrales para el estudio de ese problema. La generalización de los operadores diferenciales a funciones absolutamente continuas o derivables en casi todo punto hizo aparecer la noción de solución generalizada. Tienen su origen en el problema de *Dirichlet*, que inicialmente fue invalidado por *Weierstrass*, e influyó decisivamente en el desarrollo del análisis funcional y la topología, particularmente en la consideración de los espacios funcionales y en el concepto de compacidad.

La **teoría de distribuciones**, que tiene su origen en *Dirac*, *Heaviside* y

Sobolev, fue sistematizada por *Schwartz* y *Gelfand*. Estudiaron las aplicaciones a los problemas en ecuaciones en derivadas parciales. La idea más interesante es la sustitución del concepto de función por el de distribución, que viene a generalizar el de función. La clase de funciones admisibles consideradas por *Levi* es esencialmente lo que hoy se conoce como espacio de *Sobolev* H_2^1 , es decir, funciones integrables tales que su derivada en el sentido de las **distribuciones** pertenece también a L^2 . Algunos métodos de definición de soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales son:

- La sustitución de una ecuación diferencial por otro modelo de sistema físico. (*Lagrange, Riemann, Christoffel...*).
- La sustitución de varios límites por uno. (Derivadas de *Dini*).
- Diferenciación en casi todo punto. (*Lebesgue, Levi*, y sirvió para la introducción de los espacios de *Sobolev*).
- Método de las curvas y superficies de prueba. (Se parte del teorema de *Stokes*, y al integrar la ecuación diferencial ésta se convierte en una ecuación integro-diferencial por lo que se generaliza. Se emplea en la teoría del potencial).
- Método de las funciones test. (La ecuación diferencial se multiplica por una función y el resultado se integra por partes, con lo que el operador diferencial se transfiere a esta función test. Su origen está en el estudio de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. Es el método básico de la teoría de distribuciones).
- Método de las sucesiones. (Se define la solución generalizada como límite de una sucesión de soluciones clásicas: *Euler, Laplace*,

Sobolev, Schwartz...)

Una **ecuación integral**⁶ es una ecuación en la que aparece una función incógnita bajo un signo integral, y el problema de resolver dicha ecuación consiste en determinar esa función. Muchos problemas de la física matemática conducen a ecuaciones integrales. Los primeros problemas aislados tratados por este procedimiento se deben a *Laplace*, con su ecuación que recibe el nombre de transformada de *Laplace* y trabajaron en ellos *Poisson*, *Fourier*, *Abel*, *Liouville*, y *Neumann*. *Vito Volterra* (1 860 – 1 940), que fue el primer fundador de la teoría de las ecuaciones integrales, ideó un método para resolver las ecuaciones integrales del segundo tipo, y estudió las del primer tipo. *Erik Ivar Fredholm* (1 866 – 1 927) recogió las ideas de *Volterra* y las utilizó para continuar resolviéndolas, y usó la analogía entre estas ecuaciones y las ecuaciones algebraicas lineales para establecer el teorema de la alternativa que lleva su nombre.

David Hilbert (1 866 – 1 943) pensó que el estudio de las ecuaciones diferenciales tenía interés para la teoría de integrales definidas, el desarrollo de funciones arbitrarias en serie, la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la teoría del potencial y el cálculo de variaciones. Estableció la teoría espectral general para núcleos simétricos y demostró el teorema del eje principal generalizado para las formas cuadráticas simétricas, en el que aparecen las autofunciones y los autovalores, por lo que encontró que se podía generalizar un producto escalar entre funciones. Demostró el teorema que se conoce como de *Hilbert-Schmidt*, que demuestra que una función puede expresarse como un desarrollo en serie de las autofunciones. Hizo un tratamiento de las formas

⁶ Kline, M. (1972): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. (Vol. I, II y III). Alianza.

cuadráticas infinitas, probando que toda forma cuadrática acotada y con continuidad completa puede transformarse mediante una transformación ortogonal única en una suma infinita de cuadrados siendo los coeficientes los autovalores. Aplicó estas formas cuadráticas a las ecuaciones integrales.

Definió sistema ortogonal completo de funciones, y demostró la desigualdad generalizada de *Bessel* que es equivalente a la completitud. Transformó la ecuación integral en un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas que se resuelve calculando los coeficientes de *Fourier* de una función, por lo tanto, si el sistema tiene solución única, la ecuación integral también la tiene. Probó que la ecuación tiene una única solución para toda función, si el valor del parámetro no coincide con ningún autovalor, o si coincide, tiene solución si se dan unas condiciones de ortogonalidad. Aplicó estos resultados al problema de *Sturm-Liouville*, que relacionó con la función de *Green*. Esta función se utiliza para resolver problemas físicos y técnicos, por ejemplo en dinámica de gases, convirtiendo ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales. Seguidores de esta obra son: *Schmidt, Riesz, Fischer, Weyl*. *Riesz* y *Fischer* probaron la correspondencia biunívoca entre las funciones de cuadrado integrable y las sucesiones de cuadrado sumable de sus coeficientes de *Fourier*. Las funciones son consideradas puntos de un espacio de *Hilbert*.

Otras direcciones son los resultados de regularidad de *Bernstein* y *Gevrey*. Las ecuaciones que se utilizan en la física matemática son estudiadas por *Hilbert, Volterra* y *Hadamard* entre otros, y de ello arranca la teoría de los espacios de *Hilbert* y el análisis funcional, lo que permite formular de manera abstracta muchos problemas, recibiendo un importante impulso con los trabajos

de *Banach*. El **análisis funcional** se desarrolló a partir de la introducción de los espacios de funciones de *Hilbert*, y de la obra de *Banach* que proporcionó instrumentos que se han aplicado en las ecuaciones diferenciales, como los operadores compactos o la teoría espectral, o como el análisis de las desigualdades a priori.

Se ha puesto de manifiesto que en muchos campos de la matemática se utilizan transformaciones u operadores que actúan sobre funciones: el operador diferencial, el operador integral, el operador lineal L en ecuaciones diferenciales, o una ecuación integral que actúan sobre una función para producir otra. El **análisis funcional** tiene como idea estudiar estos operadores dentro de una formulación abstracta de una teoría general de operadores actuando sobre clases de funciones. Se puede considerar a las funciones como puntos de un espacio por lo que el operador transforma puntos en puntos con lo que se tiene entonces una generalización de las transformaciones geométricas. Si el operador transforma una función en un número real o complejo entonces se llama un funcional, reservándose el nombre de operador exclusivamente a los que transforman funciones en funciones.

Los antecedentes de la **teoría abstracta de funcionales** se encuentran en *Riemann*, *Giulio Ascoli* (1 843 – 1 896) y *Cesare Arzelà*. *Hadamard* y *Borel* ya lo sugirieron. La inició *Volterra* con su trabajo sobre cálculo de variaciones. *Maurice Fréchet* unificó las ideas de los antecesores y aplicando las ideas de la teoría de conjuntos de *Cantor* formuló los conceptos para espacios de funciones. Introdujo los espacios métricos y la norma, y conceptos como continuidad, diferencial y diferenciabilidad de un funcional. *Charles Albert Fischer* (1 884 – 1 922) mejoró las definiciones. Y las formulaciones finales

fueron realizadas por *Elizabeth le Sturgeon* (1 881 – 1 971) para obtener las condiciones necesarias para que un funcional admita un mínimo y se pueda utilizar en el cálculo de variaciones. *Leonida Tonelli* (1 885 – 1 946) se propuso reemplazar los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales por teoremas de existencia para minimizar integrales curvas, utilizando asiduamente el concepto de semicontinuidad inferior.

La primera tentativa de elaborar una **teoría abstracta de** funcionales y **operadores lineales** fue hecha por *E. H. Moore* que intentó un planteamiento axiomático. *Hilbert* consideró una función dada por sus coeficientes de *Fourier* con respecto a una sucesión ortonormal de funciones, pero no llegó a considerar esos coeficientes como coordenadas de un punto del espacio, ni usar un lenguaje geométrico. Este paso lo dieron *Schmidt* y *Fréchet*, con lo que las funciones son puntos de un espacio de dimensión infinita que se denomina *espacio de Hilbert*. Se introdujeron los conceptos de norma y producto escalar, y se obtuvo la desigualdad de *Bessel*, la de *Schwarz* y la desigualdad triangular para las normas. *Schmidt* y *Fréchet* observaron, en 1 907, que el espacio de las funciones de cuadrado sumable L^2 tiene una geometría análoga a la del espacio de las sucesiones formadas por los coeficientes de *Fourier*, y utilizando la correspondencia biunívoca del teorema de *Riesz-Fischer* se definió una distancia en L^2 , y se comprobó que L^2 es un espacio completo. Para los espacios L^p , introducidos por *Riesz*, que también son completos, se probó el teorema de representación que lleva su nombre.

La parte central del análisis funcional se ocupa de la teoría abstracta de los operadores que aparecen en las ecuaciones diferenciales e integrales; esta teoría unifica la teoría de autovalores para ecuaciones diferenciales e integrales

y para transformaciones lineales. Si el núcleo es simétrico, el operador es autoadjunto. Para operadores autoadjuntos arbitrarios los autovalores son todos reales, y las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Hasta ahora se ha definido la norma partiendo de un producto escalar. *Stefan Banach* (1 892 – 1 945), *Hahn*, *Helly* y *Wiener* trabajaron sobre normas. *Banach* construyó un espacio dotado de una norma que en general no está definida sobre un producto escalar, que es un espacio vectorial normado y completo. Una diferencia entre los espacios de *Banach* y los de *Hilbert* es que en los primeros (que no sean también de *Hilbert*) no se puede hablar de ortogonalidad. Espacios de *Banach* son los espacios L^p , los espacios de funciones continuas, los espacios de funciones medibles acotadas, siempre que se defina una norma adecuada. Estudió los operadores sobre estos espacios y los utilizó para la resolución de ecuaciones integrales formulados de una forma abstracta. En 1 929 introdujo *Banach* el concepto de espacio dual o adjunto de un espacio de *Banach*, que es el espacio de todos los funcionales lineales continuos acotados sobre el espacio dado.

La idea de espacios de funciones y operadores parecía la abstracción por la abstracción, pero como dijo *Weyl*, fue *favor de la fortuna* que fuese el instrumento adecuado para la mecánica cuántica, en la que los autovalores son los niveles de energía de un electrón en un átomo, y las autofunciones los correspondientes estados cuánticos estacionarios del sistema, y la diferencia entre dos autovalores proporciona la frecuencia de los cuantos de luz emitida, definiendo el espectro de radiación de la substancia. En 1 926 *Erwin Schrödinger* presentó su teoría cuántica basada en ecuaciones diferenciales.

Esta aplicación estimuló el trabajo en la teoría abstracta en espacios de *Hilbert* y operadores, tarea que emprendió *John von Neumann* en 1927, que ofreció un tratamiento axiomático y un buen número de resultados sobre operadores lineales, donde la integración se entiende generalmente en el sentido de *Lebesgue-Stieljes*. Se continuó aplicando el análisis funcional al problema generalizado de los momentos, a la mecánica estadística, a los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones en derivadas parciales, a los teoremas del punto fijo, en el cálculo de variaciones, en la teoría de representación de grupos continuos compactos, entre otros.

Dos nuevas direcciones merecen la atención, una relacionada con la **teoría de grupos** y otra con la mecánica celeste y la astronomía. *F. Klein* señaló en 1872 que las diversas geometrías pueden caracterizarse por su grupo de transformaciones. *S. Lie* las aplicó en 1873 a las ecuaciones diferenciales. Si una ecuación diferencial permanece invariante al efectuar una transformación continua entonces se dice que admite ese grupo de transformaciones, y clasificó las ecuaciones diferenciales por sus grupos de transformaciones. Se aplican con éxito las nuevas ideas del álgebra al estudio de las ecuaciones diferenciales por *Picard* en 1883 y 1887. Se creó una teoría de estructura de ecuaciones diferenciales lineales probando *Vessiot* que una ecuación diferencial lineal de orden superior al primero no es resoluble por cuadraturas. La construcción de una teoría general de resolución por cuadraturas resulta imposible, al ser pocas las ecuaciones que pueden resolverse así. Los trabajos de *Lie* cerraron este tipo de problemas.

La mecánica celeste ya fue estudiada por *Lagrange*, *Laplace*, *Hamilton* y *Jacobi*, que proveen de una teoría planetaria con el problema de los tres

cuerpos, el uso sistemático del método de las perturbaciones de *Hanser*. Las soluciones de *Delaunay* siguen siendo la mejor prueba para evaluar un nuevo sistema de álgebra simbólica. Las ecuaciones de *Hill* de 1877 modelizan el movimiento de la luna y *Adams* y *Le Verrier* teorizaron en 1845/46 sobre la existencia de Neptuno. Surgió el problema de la estabilidad de sistemas y de control, como el control de la máquina de vapor de *Watt*, o el diseño de control de *Airy*, astrónomo real, para seguir a las estrellas. *Maxwell* en “*On Governors*” relacionó las ideas básicas de las nociones de estabilidad con las raíces del polinomio característico.

La geometría, con el estudio de la geometría diferencial, las geometrías no euclideas y la topología, incide en la física matemática, donde aún hoy se trabaja estableciendo condiciones para las soluciones de las ecuaciones. Interesa saber el comportamiento de las soluciones en todo su dominio, lo que se denominó la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La **teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales** fue creada simultáneamente por *Poincaré* (1854 – 1912) y *Liapunov* (1857 – 1918). La contribución más importante en este campo del siglo XIX se debe a *H. Poincaré* que introdujo la

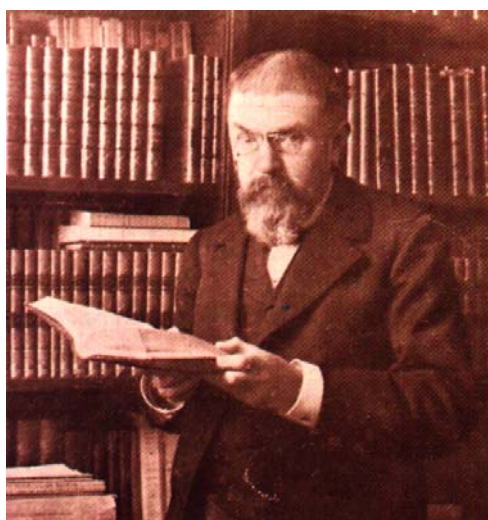


Figura 12: Henri Poincaré (1854 – 1912)

topología al estudiar las propiedades de las trayectorias.

Henri Poincaré fue ingeniero de minas, y su tesis de doctorado fue un trabajo sobre ecuaciones diferenciales, sobre teoremas de existencia, lo que contribuyó al estudio de las funciones automorfas (se observa de nuevo la relación entre ecuaciones diferenciales ordinarias y la variable compleja). Sus cursos en la Sorbona trataban temas tan distintos como capilaridad, elasticidad, termodinámica, óptica, electricidad, telegrafía, astronomía, cosmogonía... abriendo nuevas ramas de la Matemática. *Poincaré* pensaba que para saber si el sistema solar es estable y conocer si un cuerpo permanece en un lugar del cielo, o se escapa, no tiene sentido iniciar el estudio cuantitativo si no se conoce antes el comportamiento de las soluciones, por lo que hace falta un estudio cualitativo. *Poincaré* se propuso averiguar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de dos ecuaciones en todo el plano, y hacerlo sin integrar las ecuaciones, utilizando únicamente las propiedades de las funciones.

Definió punto singular de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ como un punto que anula a $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$. Clasificó los puntos singulares, estudiando el comportamiento de las soluciones con respecto a estos puntos. Se deben a él las técnicas geométricas de análisis de un espacio de fases, donde en un sistema autónomo bidimensional se visualizan las soluciones como curvas paramétricas y al eliminar el parámetro se representan las trayectorias; se deben también a él también el estudio del caso lineal con los focos, nodos, puntos de silla y centros, y el caso más general, el estudio local en los puntos críticos, en los puntos de silla o en los centros; la definición de índice de un punto singular, y las propiedades globales de los puntos singulares, el estudio de ciclos límites (órbitas cerradas

que corresponden a trayectorias periódicas) y el teorema de *Poincaré-Bendixon*. *Poincaré* estudió las soluciones sobre un toro. También estudió las singularidades de ecuaciones no lineales en el campo complejo, e introdujo y sistematizó los desarrollos asintóticos que hoy se llaman de *Poincaré*, aunque ya habían sido usados cincuenta años antes por *Stokes*.

Estudió las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes racionales para las que obtuvo una sorprendente generalización de las funciones elípticas. Comprobó que ciertas funciones que se pueden obtener a partir de cocientes de dos soluciones independientes de la ecuación lineal de segundo orden, admiten grupos de transformaciones análogos a los de las funciones elípticas, pero que son un subgrupo lineal de las transformaciones de *Möbius*, grupos estrechamente relacionados con los grupos cristalográficos en el espacio de *Lobatchewsky*. Estudió también condiciones para que las ecuaciones diferenciales tengan integrales algebraicas. Muchas de estas técnicas fueron usadas en el estudio de los problemas de la mecánica clásica y en particular en el problema de los tres cuerpos. En su obra "*Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*" introdujo la idea de reducir los hamiltonianos a formas canónicas, y descubrió la compleja estructura que pueden tener las variedades estables e inestables de iteraciones de aplicaciones en problemas de mecánica clásica, anticipándose en los desarrollos en lo que hoy se denomina teoría del caos, intuyendo muchas de las dificultades de la teoría de perturbaciones. *I. Bendixson* prosiguió estos trabajos hacia 1901.

De forma independiente se tienen los trabajos de la escuela rusa. Las investigaciones de *Liapunov*, discípulo de *Chebichev*, surgieron de la

astronomía. Buscaba figuras en equilibrio de un fluido en rotación diferentes del elipsoide. Se ocupó también de la estabilidad del equilibrio y del movimiento de un sistema mecánico determinado por un número finito de parámetros. Estos estudios se utilizaron en la investigación de las oscilaciones de sistemas físicos y mecánicos. Su tesis doctoral trató sobre el problema general de la estabilidad de los movimientos. Se deben a él el primer método de *Liapunov*, que se basa en escribir la solución en forma de serie, y el método directo o segundo método de *Liapunov* que se utiliza en los sistemas físicos disipativos. La escuela rusa se caracterizó por una eficaz organización entre matemáticos, físicos e ingenieros.

Los trabajos de *Poincaré* y *Liapunov* pasaron inadvertidos durante un tiempo.

Una teoría cualitativa abstracta de los sistemas dinámicos fue desarrollada por *G. D. Birkhoff* (1884 – 1944). *George Birkhoff* fue el mejor discípulo de *Poincaré*. Para analizar los sistemas dinámicos distinguía entre sistemas constantes, periódicos, casi-periódicos, recurrentes, estables de *Poisson*, centrados... La noción abstracta de sistema dinámico se debe a *Whitney* (1918), que sin necesidad de usar ecuaciones diferenciales, define así: Un **sistema dinámico** es un par (X, f) donde X es un espacio topológico y f una función continua de $S \times X \rightarrow X$ tal que $f(0, x) = x$; $f(t+s, x) = f(t, f(s, x))$, donde S es un semigrupo, usualmente \mathbf{N} , \mathbf{Z} o \mathfrak{R} .

Es interesante comentar la demostración de los teoremas ergódicos de *Von Neumann* y *Birkhoff*, el desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos y sus muchas aplicaciones tanto dentro de otras ramas de la Matemática, como en otras ciencias y técnicas, como las dinámicas caóticas, que ya fueron

anticipadas por *Hadamard*. Por poner un ejemplo, se puede comentar que los estudios sobre el sistema de *Lorenz* y su atractor, llevan a *Feigenbaum* a mostrar la universalidad existente en la cascada de bifurcaciones mediante el doblamiento de periodos que lleva su nombre.

Los problemas más importantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se han centrado en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, de los ciclos límites, en el comportamiento global y asintótico de las trayectorias en un entorno de los puntos críticos y ciclos límites, en la teoría de bifurcaciones y en los conceptos de estabilidad estructural. La noción de estabilidad estructural fue introducida por *Andronov* y *Pontryagin* en 1937. De forma intuitiva se puede explicar que un sistema dinámico es estructuralmente estable cuando una variación pequeña de las ecuaciones induce una transformación de las trayectorias que apenas se diferencia de las anteriores, con lo que se tendrá la misma estructura de puntos críticos y ciclos límites. *Andronov* y *Pontryagin* estudiaron las condiciones de estabilidad estructural en un sistema de dimensión dos. *Andronov* conectó la práctica de sus problemas con diodos, con las teorías de *Poincaré*, relacionando los resultados del oscilador de *Van der Pol* con los ciclos límites de *Poincaré*. Hacia 1960 se sintetizaron las dos grandes escuelas.

CAPÍTULO 7

Ecuaciones diferenciales en el mundo físico.

Integración elemental

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen el objetivo natural del análisis matemático y son una disciplina fundamental para analizar, desde la óptica de las Matemáticas, fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos o de ingeniería. El estudio de problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales ha motivado la creación, y posterior desarrollo, de partes muy significativas del Análisis Matemático.

La obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva determinada, fue uno de los problemas que se planteaban los matemáticos hasta finales del siglo XVII cuando tuvo lugar el nacimiento del cálculo diferencial. A partir de los descubrimientos de Newton y Leibniz, el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a cualquier curva pasó a ser un problema resuelto, ya que se contaba con una poderosa herramienta para calcularla. Sin embargo surgió también el problema inverso que resultó ser mucho más difícil de resolver. Se trataba de calcular la curva, conocidas las ecuaciones de las rectas tangentes en cada uno de sus puntos, es decir, lo que en la actualidad se conoce como la resolución o integración de una ecuación diferencial de primer orden. Este problema se generalizó al resolver una ecuación diferencial de orden n .

Los primeros métodos de resolución, tales como la separación de variables o los factores integrantes, surgieron antes de finales del siglo XVII. Durante el siglo XVIII se desarrollaron otros métodos más sistemáticos, pero pronto fue evidente que eran pocas las ecuaciones que podían resolverse mediante estas reglas. Los matemáticos se dieron cuenta de que era inútil intentar descubrir nuevos procedimientos para resolver todas las ecuaciones diferenciales y sin embargo sí parecía fructífero investigar si una ecuación diferencial concreta tenía solución, determinar si era única y analizar algunas de sus propiedades.

Este cambio de perspectiva coincidió con la época del rigor, que comenzó a partir del siglo XIX con los trabajos de Cauchy. Por otra parte se desarrollaron métodos numéricos que permiten calcular, con la exactitud deseada, la solución numérica de una ecuación diferencial de primer orden, con una condición inicial fijada, siempre que verifique unas determinadas condiciones de regularidad, y estos métodos se pueden aplicar a problemas concretos, sin que importe si es o no posible resolver la ecuación diferencial en términos de funciones elementales.

Pasados dos siglos resulta evidente que no se pueden obtener resultados muy generales, en lo que se refiere a determinar las soluciones de una ecuación diferencial, excepto para unos pocos tipos muy concretos entre los que están las ecuaciones diferenciales lineales. Esto ha motivado que los métodos numéricos sigan siendo un elemento indispensable para resolver problemas técnicos.

La finalidad básica de las ecuaciones diferenciales es analizar el proceso de cambio en el mundo físico. En el estudio de los fenómenos naturales

aparecen las variables relacionadas con los índices de cambio mediante las leyes generales de la naturaleza que rigen estos fenómenos. Cuando estas relaciones se expresan matemáticamente el resultado es, casi siempre, una ecuación diferencial y por esta razón aparecen de forma constante en problemas científicos y técnicos.

7.1. NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

7.1.1. Primeras definiciones

Definición 7.1.1:

Una **ecuación diferencial ordinaria** es la que establece una relación entre una variable independiente x , la función buscada $f(x)$ y una o varias derivadas de esta función f' , f'' , f''' , ..., $f^{(n)}$, lo que equivale, con $y = f(x)$, a una expresión de la forma $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Definición 7.1.2:

Cuando la función $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, depende de varias variables independientes entonces la ecuación se denomina **ecuación en derivadas parciales**.

A partir de ahora se denominará simplemente ecuaciones diferenciales a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 7.1.2:

Se denomina **orden** de una ecuación diferencial al orden de la derivada superior que interviene en la expresión.

Definición 7.1.3:

Una ecuación diferencial de orden n se dice **lineal** si es de orden uno respecto a la función y , y a todas sus derivadas.

Toda ecuación diferencial lineal $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ se puede expresar de la forma $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = g(x)$, o bien como:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = g(x),$$

ya que si es de orden n se sabe que $p_0 \neq 0$.

En general p_0, p_1, \dots, p_n son funciones definidas en un intervalo de la recta real. Cuando estas funciones son constantes se dice que la ecuación diferencial lineal tiene coeficientes constantes.

Si el término $g(x) = 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina **homogénea**. En caso contrario, es decir, si $g(x) \neq 0$, se llama **no homogénea** o **completa**.

7.1.2. Soluciones**Definición 7.1.5:**

Una **solución** de una ecuación diferencial es una función que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Si una solución de una ecuación diferencial es una función explícita, se dice que es una **solución explícita**. Análogamente si la función solución está dada en forma implícita se dice que es una **solución implícita**.

Definición 7.1.6:

La **solución general** de la ecuación diferencial de orden n :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

es una función $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ que depende de n constantes C_1, C_2, \dots, C_n

de modo que:

a) La función φ satisface la ecuación diferencial para todos los valores de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

b) Suponiendo que existen condiciones iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n)}(x_0) = y^{(n)}_0 \end{array} \right.$$

Se pueden elegir las constantes C_1, C_2, \dots, C_n para que la función:

$$\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

satisfaga estas condiciones, suponiendo que $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n)}_0$ pertenecen al dominio de existencia de la solución.

Una relación $\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ que define la solución general de forma implícita se denomina **integral general** de la ecuación diferencial.

Definición 7.1.7:

Una **solución particular** de una ecuación diferencial es la que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

Definición 7.1.8:

Una **curva integral** es la gráfica de una solución particular de una ecuación diferencial.

Definición 7.1.9:

Una **solución singular** es una función que satisface la ecuación diferencial y que sin embargo no se obtiene de la solución general para ningún valor de las constantes.

La envolvente del haz de curvas integrales determinado por las gráficas

de las soluciones particulares es una solución singular.

Definición 7.1.10:

Resolver o **integrar** una ecuación diferencial de orden n supone calcular la solución general, si no se han dado condiciones iniciales y cuando éstas existen hallar la solución particular que las satisfaga.

La más sencilla de las ecuaciones diferenciales es la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = g(x)$, siendo $y = \varphi(x)$ la función que se quiere calcular.

Esta ecuación se resuelve fácilmente, integrando la función $g(x)$, como $\varphi(x) = \int g(x)dx + C$, siempre que la integral indefinida tenga solución, es decir, pueda expresarse mediante funciones utilizando los métodos de cálculo integral.

7.1.3. Campos de direcciones. Curvas integrales. Isoclinas

Sea $F(x, y, y') = 0$ una ecuación diferencial de primer orden que se puede expresar de la forma $y' = f(x, y)$. Esta función asocia a cada punto del plano (x, y) donde está definida la función $f(x, y)$ el valor de y' , que es la pendiente o coeficiente angular de la tangente a la curva integral en ese punto. Por lo tanto la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ determina un **campo de direcciones**.

El campo de direcciones definido por la terna (x, y, y') se representa como un conjunto de segmentos; cada uno de ellos pasa por el punto (x, y) y tiene como pendiente y' .

Resolver una ecuación diferencial se puede interpretar entonces como calcular una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo de direcciones en ese punto. Para facilitar este cálculo se introducen las isoclinas.

Definición 7.1.11:

Se denomina **isoclina** al lugar geométrico de los puntos del plano en los que las tangentes a las curvas integrales tienen la misma dirección.

La familia de isoclinas de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ está determinada por la ecuación $f(x, y) = k$, siendo k un parámetro.

Dibujando la familia de isoclinas para valores de k próximos entre sí, es posible trazar de forma aproximada las curvas integrales de la ecuación diferencial.

La isoclina $f(x, y) = 0$ informa de donde pueden estar situados los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales.

También se puede calcular el lugar geométrico de los puntos de inflexión, calculando y'' e igualando a 0: $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'$. Por lo tanto, los puntos de

inflexión, si existen, estarán situados en la curva definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x, y) = 0.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.1.1: La ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$ se dice que es de orden 2 o de segundo orden y la ecuación $y' + x \cdot y = x^2$ es una ecuación diferencial de primer orden. Ambas son lineales; $y'' - y' - 6y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes y la ecuación $y' + x \cdot y = x^2$ es una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes no constantes.

Ejemplo 7.1.2: En la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$ la función $y = e^{3x}$ es una solución, ya que $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$ y al sustituir se verifica que $9e^{3x} -$

$$3e^{3x} - 6e^{3x} = 0.$$

La función $y = e^{-2x}$ es también una solución ya que $y' = -2e^{-2x}$, $y'' = 4e^{-2x}$ y al sustituir se verifica que $4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$. Además si C y C' son números reales se comprueba que la función $y = C e^{3x} + C' e^{-2x}$ también es solución de la ecuación.

Ejemplo 7.1.3: La función $x \cdot y = \log(y) + C$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y' \cdot (1 - x \cdot y) = y^2$, ya que derivando la función se obtiene que $x \cdot y' + y = (y' / y)$ y por tanto $y' = -y / (x - 1/y) = y^2 / (1 - x \cdot y)$.

Ejemplo 7.1.4: La función $y = \text{sen } x + C$ es la solución general en la ecuación diferencial $y' = \cos x$. Si además se añade la condición inicial $y(0) = 1$, la función $y = \text{sen } x + 1$ es una solución particular y su gráfica, una curva integral.

Ejemplo 7.1.5: La ecuación diferencial $y^2 \cdot (1 + y'^2) = 4$ tiene por solución general $(x + C)^2 + y^2 = 4$ que gráficamente es una familia de circunferencias con centro en el eje de abscisas y radio 2.

La solución particular que pasa por el punto $(0, 2)$ es la que resulta de sustituir C por 0 en la ecuación general, cuya gráfica, o curva integral, es la circunferencia de radio 2 y centro el origen de coordenadas.

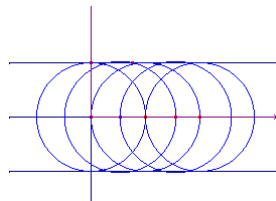


Figura 7.1: Solución general y solución singular.

La envolvente de la familia de curvas integrales está formada por las rectas $y = 2$ e $y = -2$. Estas funciones verifican la ecuación diferencial: $y' = 0 \Rightarrow y^2 = 4$. Sin embargo no se obtienen de la solución general por lo que son

soluciones singulares.

Ejemplo 7.1.6: Estudiar las isoclinas de la ecuación diferencial $y' = x + 1$.

La familia de isoclinas está determinada por la ecuación $x + 1 = K$ que representa una familia de rectas paralelas al eje de ordenadas; $K = 0$ se verifica para $x = -1$. En esta recta es donde pueden estar situados los máximos y mínimos de las curvas integrales.

También se conoce que para $K = 1$ la isoclina es el eje de ordenadas y para $K = -1$, la recta $x = -2$. Por otra parte $y'' = 0$ no tiene solución. Por todo ello la integral general de la ecuación parece de manera aproximada que está formada por parábolas que tienen su vértice en la recta $x = -1$, y son paralelas entre sí, es decir, son de la forma:

$$y - C = m \cdot (x + 1)^2, \text{ donde } m = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 7.1.7: Buscar la integral de la ecuación diferencial $y' = x - y$ trazando las isoclinas.

La familia de isoclinas está definida por la ecuación: $x - y = k \Rightarrow y = x - k$, que es un conjunto de rectas paralelas de pendiente 1. La recta $y = x$, que se obtiene para $k = 0$, divide al plano en dos partes, en cada una de las cuales la derivada tiene el mismo signo. Si $k = -1/2$ se tiene la recta $y = x + 1/2$ y cuando $k = 1/2$, la recta $y = x - 1/2$, luego las curvas integrales al cortar a la recta $y = x$ pasan de decreciente a creciente, por lo que en esta recta están sus puntos mínimos.

Los puntos de inflexión, si existen, estarán situados en la recta $y = x - 1$, que es la isoclina que se obtiene para $k = 1$. Como también es una curva integral, por ser solución de la ecuación diferencial, no la cortan las otras curvas integrales, y por tanto éstas no tienen puntos de inflexión. Además $y = x$

– 1 divide al plano en dos partes. Las curvas integrales que están por encima de ella son cóncavas hacia arriba, ya que $y'' > 0$ y tienen un punto mínimo en la recta $y = x$. Por otra parte las curvas integrales situadas por debajo de la recta $y = x - 1$ no tienen punto mínimo y son cóncavas hacia abajo.

Ejercicios

7.1. Comprobar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = 2 + \sqrt{1+x^2}$ de la ecuación diferencial: $(-1 - x^2)y' + x \cdot y = 2x$.

b) $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$ de la ecuación diferencial $y \cdot y' = x - 2x^3$.

c) $y = e^{\arcsen x}$ de la ecuación diferencial $x \cdot y' = y \cdot \operatorname{tg}(\ln y)$.

7.2. Verificar que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = \ln(C + e^x)$ de la ecuación diferencial $y' = e^{x-y}$.

b) $y = \sqrt{x^2 - Cx}$ de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2) \cdot dx - 2x \cdot y \cdot dy = 0$.

c) $y = x \cdot (C - \ln |x|)$ de la ecuación diferencial $(x - y)dx + x dy = 0$.

7.3. Comprobar si las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $e^{-y} - Cx = 1$ de la ecuación diferencial $x \cdot y' + 1 = e^y$.

b) $y^2 + 2Cx = C^2$ de la ecuación diferencial $y \cdot (y')^2 + 2x \cdot y' - y = 0$.

c) $x = y \cdot \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) dt$ de la ecuación diferencial $y = x \cdot y' + y^2 \cdot \operatorname{sen} x^2$.

7.4. Dibujar de forma aproximada las curvas integrales de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método de las

isoclinas:

- a) $y' = 2x - y.$
- b) $y' = y - x^2 + 2x - 2.$
- c) $y' \cdot (x - 1) = y + 1.$

7.2. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

7.2.1. Crecimiento, desintegración y reacciones químicas

Una reacción química se denomina reacción de primer orden si en ella una molécula se descompone en otras espontáneamente, y el número de moléculas en que se descompone en una unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas existentes. Si se considera una sustancia cuya masa se descompone en función del tiempo según una función $m = m(t)$, la velocidad de descomposición viene dada por la derivada de $m(t)$ respecto de t .

Si se supone que esta velocidad es directamente proporcional a la masa se tiene que: $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, (siendo $k > 0$ el coeficiente de proporcionalidad). Es una ecuación diferencial de primer orden y al resolverla se obtiene la función $m(t)$.

La solución general de esta ecuación viene dada por: $\ln m = -kt + \ln C$, o bien, $m(t) = C e^{-kt}$.

Para determinar la constante C se supone que se conoce la masa en el instante inicial $t = 0$ y que tiene un valor m_0 , de lo que resulta que $C = m_0$ y por

lo tanto $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$.

La constante k se denomina constante de rapidez ya que su valor indica una medida de la velocidad a la que se realiza la reacción.

Existen pocas reacciones químicas de primer orden. La más importante de ellas es la desintegración radiactiva.

La función $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ permite determinar el valor de la constante k a partir de datos recogidos experimentalmente. Así, si se sabe que de una sustancia se ha desintegrado el r % de su masa inicial en un tiempo t_0 , al

sustituir estos datos en la ecuación se tiene que: $\left(1 - \frac{r}{100}\right)m_0 = m_0 \cdot e^{-kt_0}$, y

despejando k se obtiene que: $k = \frac{-1}{t_0} \cdot \ln\left(1 - \frac{r}{100}\right)$.

Es usual expresar la descomposición de un elemento radiactivo en función de su vida media, es decir, el tiempo necesario para que una cantidad dada del elemento se reduzca a la mitad. Llamando T a la vida media de un determinado elemento y sustituyendo r por 50 en la ecuación anterior se tiene que $T \cdot k = \ln 2$, lo que permite calcular T a partir del valor de k .

El conocimiento de la vida media de los elementos radiactivos que hay en la naturaleza se utiliza para asignar fechas a acontecimientos que ocurrieron hace mucho tiempo. Los isótopos de uranio y de plomo permitieron determinar la fecha aproximada de sucesos que habían ocurrido hace varios miles de millones de años; paralelamente, el descubrimiento de un isótopo radiactivo del carbono con una vida media de 5 600 años ha permitido determinar la fecha de otros eventos más recientes y ha sido un instrumento indispensable en Geología y Arqueología.

7.2.2. Cuerpos en caída libre y con resistencia

Se supone ahora que desde una cierta altura se deja caer un cuerpo de masa m , sobre el que actúa, además de la fuerza de gravedad, la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, y se quiere calcular la velocidad de caída.

Sea $v = v(t)$ la velocidad que se quiere determinar, $\frac{dv}{dt}$ su aceleración y k el coeficiente de proporcionalidad tal que la fuerza de resistencia del aire $F_r = k \cdot v$.

Por la segunda ley de Newton se sabe que $m \cdot \frac{dv}{dt} = F$, siendo F la fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta fuerza es la resultante de dos fuerzas, la de gravedad y la de resistencia del aire. Por lo tanto se obtiene $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea que relaciona una función desconocida v y su derivada. Resolver esta ecuación significa encontrar una función $v = v(t)$ que la satisfaga.

Se puede comprobar que la función $v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ verifica la ecuación para todo valor de la constante C .

Para saber cuál de estas funciones es la buscada es preciso imponer una condición más como puede ser, por ejemplo, la velocidad del cuerpo en el momento inicial $t = 0$, que se denomina v_0 .

Así, sustituyendo $t = 0$ y $v = v_0$ se obtiene que $v_0 = C + \frac{mg}{k}$, y por lo tanto

$C = v_0 - \frac{mg}{k}$. Así se determina la constante C , siendo la función $v(t)$:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k} \right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Se observa que si la resistencia del aire no existe, es decir $k = 0$, la ecuación diferencial es $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g$. La solución general es ahora $v(t) = g \cdot t + C$, y si se impone la condición inicial $t = 0$ y $v = v_0$, la solución particular obtenida es: $v(t) = v_0 + g \cdot t$.

Si $y = y(t)$ es la función que indica la distancia del cuerpo a partir de una altura dada, se tiene que $v(t) = \frac{dy}{dt}$; al integrar esta ecuación:

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_2,$$

donde C_2 representa el valor de $y(t)$ en el instante $t = 0$, al que se puede llamar y_0 o posición inicial. Por tanto:

$$y(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

Cuando el cuerpo parte del reposo en la posición inicial $y_0 = 0$ lo que implica que $v_0 = 0$, entonces:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v(t) = g \cdot t. \end{cases}$$

Eliminando t entre estas dos ecuaciones se obtiene la expresión:

$$v = \sqrt{2g \cdot y},$$

que relaciona la velocidad alcanzada con la distancia recorrida en la caída.

7.2.3. Movimiento pendular

Se supone un punto material de masa m suspendido de un punto fijo, que se mueve por la acción de la gravedad a lo largo de un arco de circunferencia que está en un plano vertical. Despreciando el rozamiento y la resistencia del aire se pretende calcular la ecuación del movimiento en función del tiempo.

Se consideran unos ejes de coordenadas cuyo origen está en el punto inferior de la circunferencia y el eje de abscisas es tangente en este punto. Sea L la longitud del radio de la circunferencia, t el tiempo y s la longitud del arco a partir del origen hasta un punto P , de forma que si P está a la derecha del origen es $s > 0$ y si está a la izquierda, $s < 0$.

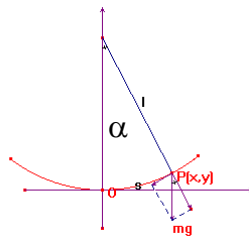


Figura 7.2: Movimiento pendular

Se pretende determinar la función $s = s(t)$.

La fuerza de gravedad $F = m \cdot g$ se descompone en dos: la componente normal, que se elimina por la reacción de la curva, y la tangencial que produce el movimiento $F_t = -m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$, siendo α el ángulo que forma la dirección de la componente normal con la de la fuerza de gravedad.

Así, la función del movimiento $s = s(t)$ verifica la siguiente ecuación:

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha,$$

siendo α igual a s/L :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \cdot \text{sen} \frac{s}{L},$$

Al integrar esta ecuación por métodos que se estudiarán en el *capítulo 9*, se comprobará en el *ejemplo 9.3.3* que se obtiene:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gL \cdot \cos \frac{s}{L} + C.$$

Para determinar la constante C se impone la siguiente condición: Si s_0 es la longitud máxima que describe el punto P , en ese momento la velocidad es cero, es decir $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0} = 0$, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que $C = -2gL \cdot \cos \frac{s_0}{L}$, y la ecuación queda de la forma:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g \cdot L \cdot \cos \frac{s}{L} - 2g \cdot L \cdot \cos \frac{s_0}{L}.$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas de transformación de sumas en productos se obtiene que:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gL \left(\text{sen}\left(\frac{s+s_0}{2L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{s_0-s}{2L}\right)\right).$$

Como esta ecuación no es posible integrarla se supone que el ángulo $\frac{s_0}{L}$ es pequeño y por tanto $\frac{s}{L}$ también lo es. Los ángulos $\frac{s+s_0}{2L}$ y $\frac{s-s_0}{2L}$ no son superiores a $\frac{s_0}{L}$ por lo que en este caso es posible aproximarlos sustituyendo el seno por el arco. De este modo se obtiene:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gL \left(\frac{s+s_0}{2L} \cdot \frac{s_0-s}{2L}\right)$$

o bien

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \sqrt{s_0^2 - s^2}.$$

Integrando esta ecuación se tiene que:

$$\arcsen\left(\frac{s}{s_0}\right) = \sqrt{\frac{g}{L}}t + k.$$

Si se supone que para $t = 0$ entonces $s = 0$, se obtiene que $k = 0$ y por lo tanto: $s = s_0 \cdot \text{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t$ es una solución aproximada de la ecuación diferencial inicial.

Se observa que el punto P se puede considerar como el extremo de un péndulo que efectúa oscilaciones armónicas. Si el periodo T es el tiempo necesario para una oscilación completa, entonces para $s = s_0$, se tiene $\text{sen}\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{T}{4} = 1$ luego $\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, que no depende de la amplitud de la oscilación s_0 , pero sólo es válida para valores pequeños del ángulo α . El péndulo volverá a estudiarse, con un punto de vista diferente, en el capítulo 12, apartado 12.4.2, donde se estudia como un sistema dinámico.

7.2.4. La cicloide. La curva braquistócrona

Se unen dos puntos A y B colocados a distinta altura por un hilo por el que se deja deslizar una bola esférica, supuestamente sin rozamiento. El problema consiste en determinar la forma del hilo para que el tiempo que tarda la bola en ir de A hasta B , sin otra fuerza que la gravedad, sea el mínimo.

Se conoce que la luz va de un punto a otro siguiendo el camino que requiere el menor tiempo; esta ley se conoce como *Principio del menor tiempo*

de Fermat, y por esta razón se estudia lo que ocurre cuando un rayo de luz atraviesa medios de distinta densidad.

Si se supone que el rayo de luz pasa de un punto A hasta un punto O con una velocidad v_1 y después pasa a un medio menos denso en el que va de O a B con una velocidad mayor v_2 , el tiempo total que invierte en su desplazamiento viene dado por $t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$. (En la figura

7.3 están representados los valores de a , b y c).

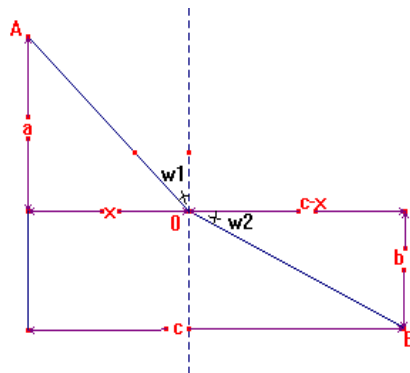


Figura 7.3: Rayo de luz

Sea $w_1 = \arctg(x/a)$ y $w_2 = \arctg((c-x)/b)$. Como el rayo de luz selecciona su desplazamiento de forma que el tiempo t sea el mínimo,

entonces $\frac{dt}{dx} = 0$, por lo que:

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}},$$

o bien

$$\frac{\text{sen} w_1}{v_1} = \frac{\text{sen} w_2}{v_2}.$$

Si se supone que el rayo de luz entre A y B pasa por infinitas capas cada

vez más delgadas y menos densas de forma que la velocidad del rayo aumenta de forma continua entre A y B , se tiene que la trayectoria para pasar de A a B en el menor tiempo posible debe verificar que $\frac{\text{sen } w}{v} = K$ (constante).

Llamando $\alpha = \pi/2 - w$ se tiene que:

$$\text{sen } w = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

En el apartado 7.2.3 se demostró la relación: $v^2 = 2gy$. Combinando estos tres resultados se obtiene que la ecuación de la curva braquistocrona debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$y \cdot (1 + (y')^2) = C.$$

Sustituyendo y' por $\frac{dy}{dx}$ y considerando a x como función de y se obtiene

que:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Si se llama $\text{tg } \beta = \sqrt{\frac{y}{C-y}} \Rightarrow \text{tg}^2 \beta = \frac{y}{C-y} \Rightarrow \sec^2 \beta = \frac{C}{C-y}$ y por tanto:

$$y = C \cdot \text{sen}^2 \beta \Rightarrow dy = 2C \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta \cdot d\beta,$$

Al sustituir este resultado en $dx = \text{tg } \beta \cdot dy$, se tiene que:

$$dx = 2C \cdot \text{sen}^2 \beta \cdot d\beta = C \cdot (1 - \cos 2\beta) \cdot d\beta.$$

Al integrar esta ecuación con respecto a β se obtiene:

$$x = (C/2) \cdot (2\beta - \text{sen } 2\beta) + C'.$$

Para determinar C' se impone la condición de que la curva pase por el origen de coordenadas, es decir, que $x = y = 0$ cuando $\beta = 0$. Se tiene entonces que $C' = 0$ y por lo tanto:

$$x = (C/2) \cdot (2\beta - \operatorname{sen} 2\beta) \text{ e } y = C \operatorname{sen}^2 \beta = (C/2) \cdot (1 - \cos 2\beta).$$

Llamando $r = C / 2$ y $\theta = 2\beta$, se obtiene que:

$$\begin{cases} x = r \cdot (\theta - \operatorname{sen} \theta), \\ y = r \cdot (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r cuando rueda, sin rozamiento, a lo largo del eje de abscisas.

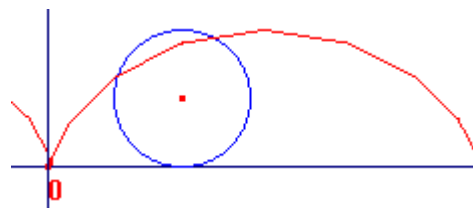


Figura 7.4: Cicloide

Esta curva tiene propiedades geométricas y físicas muy interesantes: así, por ejemplo, la longitud de un arco de cicloide es cuatro veces el diámetro de la circunferencia que lo genera y el área entre un arco y el eje de abscisas es tres veces el área del círculo generador.

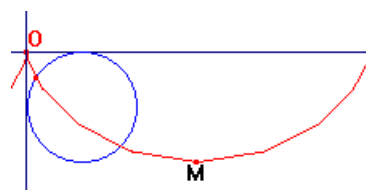


Figura 7.5: La cicloide es tautócrona

En cuanto a las propiedades físicas la más importante es que es una curva tautócrona, lo que significa que considerando el arco de cicloide simétrico con respecto al eje de abscisas de la figura anterior, el tiempo que tarda una bola que se desliza sin rozamiento por la curva desde el centro de coordenadas

O hasta M , punto mínimo de la curva de coordenadas $(\pi r, -2r)$, es el mismo que necesita para llegar hasta ese punto si la soltamos en cualquier punto intermedio de la curva entre O y M . La demostración de esta propiedad se plantea como un ejercicio (*ejercicio 7.7*).

7.2.5. Circuitos eléctricos simples. Oscilaciones en resortes

Circuitos eléctricos simples

Se considera un circuito eléctrico formado por una fuerza electromotriz E que impulsa una carga eléctrica y produce una corriente de intensidad I en el circuito. El circuito tiene además una resistencia R que se opone a la corriente. Por la ley de Ohm se sabe que $E_R = R \cdot I$. Un inductor de inductancia L , que se opone a cualquier cambio en la corriente, tal que $E_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$. Y un condensador de capacitancia C , que almacena una carga Q y se opone a la entrada de una carga adicional $E_C = \frac{1}{C} \cdot Q$.

Aplicando la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas en un circuito cerrado es igual a cero, se obtiene:

$$E - E_R - E_L - E_C = 0,$$

o bien

$$E - R \cdot I - L \cdot \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \cdot Q = 0,$$

que se puede expresar por:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{1}{C} \cdot Q = E.$$

Como la intensidad de la corriente I es la rapidez de flujo de la carga, se

tiene $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$.

Sustituyendo esta expresión y considerando Q como la función incógnita se tiene:

$$L \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t),$$

ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Oscilaciones en resortes

Se considera un bloque de masa m sujeto al extremo de un resorte, sobre el que un dispositivo amortiguador ejerce una fuerza de resistencia, y además, existe una fuerza externa que actúa sobre la masa del resorte.

Se supone que la fuerza de elasticidad del resorte es proporcional al desplazamiento y la fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad del movimiento.

Sea $y(t)$ la función que indica el desplazamiento del bloque en función del tiempo, m la masa del resorte, k la constante de rigidez del resorte, b la constante de amortiguación del medio y $g(t)$ la fuerza externa. Se tiene que la fuerza elástica del resorte $F_E = -k y(t)$, siendo $k > 0$ y la fuerza de amortiguación $F_A = b y'(t)$.

Imponiendo que en el punto de equilibrio el peso del bloque se compense con las otras fuerzas, se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento de las oscilaciones amortiguadas forzadas:

$$m \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = g(t),$$

que es una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes.

Se observa la similitud que existe entre esta ecuación y la obtenida para los circuitos eléctricos. En particular se tienen las siguientes correspondencias:

La masa m se corresponde en el circuito con la inductancia L . La constante b de amortiguación se corresponde con la resistencia R , la constante de rigidez del resorte k , con la inversa de la capacitancia $\frac{1}{C}$, el desplazamiento del resorte $y(t)$ con la carga del condensador $Q(t)$, y la fuerza externa $g(t)$ con la fuerza electromotriz $E(t)$.

Esta semejanza entre los sistemas mecánicos y los eléctricos supone una identificación entre las soluciones de ambos sistemas. Cuando la fuerza electromotriz, en los circuitos eléctricos, o la fuerza externa, en el movimiento oscilatorio, es una función periódica pueden aparecer fenómenos de resonancia que se estudiarán detalladamente después de resolver estas ecuaciones.

7.2.6. Dinámica de poblaciones

Ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*

Lotka y *Volterra* propusieron este sistema que modeliza un ecosistema formado por conejos y zorros, con sus interacciones, (o por róbalos y peces rueda, que son comidos por los róbalos, en un lago):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + fxy \end{cases}$$

donde las constantes a , b , c y f son positivas.

Sin presas, (x) , las rapaces, (y) , por falta de alimento, disminuirían en número. Y sin las rapaces, las que sirven de presa, al no tener enemigos, aumentarían. Este sistema no se puede resolver en términos elementales, pero por procedimientos que se estudian posteriormente en el *capítulo 9, apartado*

9.3.3, se obtiene:

$$\frac{(a - b \cdot y)dy}{y} = \frac{-(c - f \cdot x)dx}{x}.$$

Integrando esta ecuación se tiene la solución: $y^a \cdot e^{-by} = kx^{-c} \cdot e^{fx}$.

7.2.7. La catenaria

Un ejemplo de gran importancia histórica es el estudio de la forma que toma un hilo flexible homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

Sea $M(0, b)$ el punto más bajo del hilo y $P(x, y)$ un punto cualquiera. La sección MP del hilo está equilibrada por las siguientes fuerzas:

- La tensión T , que actúa a lo largo de la tangente al punto P y forma un ángulo α con el eje de abscisas.
- La tensión H en el punto M que es paralela al eje de abscisas.
- El peso del hilo, paralelo al eje de ordenadas, y cuyo módulo es $s \cdot p$, siendo s la longitud del arco MP y p el peso específico del hilo.

Al descomponer T en sus dos componentes se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} T \cdot \cos \alpha = H \\ T \cdot \sin \alpha = s \cdot p \end{cases}$$

Si se dividen estas igualdades se tiene que: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{s \cdot p}{H}$, y llamando:

$$a = \frac{H}{p} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{a}.$$

Si se supone que la ecuación de la curva es $y = f(x)$ se tiene que $y' = \frac{s}{a}$.

Al derivar respecto de x ambos miembros de la igualdad: $y'' = \frac{1}{a}s'$. Teniendo

en cuenta que $s' = \sqrt{1+(y')^2}$ se obtiene la ecuación:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2},$$

que es la ecuación diferencial de la catenaria.

En el *capítulo 9, apartado 9.3.1* se estudia con detalle la forma de integrar esta ecuación.

Al integrar esta ecuación y al imponer la condición de que pase por el punto $M(0, b)$ se tiene la solución particular:

$$y = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}) + b - a.$$

Si la ordenada del punto M es a , la ecuación se simplifica:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

7.2.8. Ecuación diferencial de una familia de curvas

Dada una familia de curvas planas $y = \varphi(x, C)$ que dependen de un parámetro C , se puede buscar la ecuación diferencial que las define, es decir, la ecuación diferencial que tiene como solución general a la familia de curvas $y = \varphi(x, C)$. En efecto, al derivar con respecto de x se tiene $y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, C)$.

Eliminando el parámetro entre las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x, C) \\ y' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, C) \end{aligned} \right\}$$

se obtiene $F(x, y, y') = 0$, que es la ecuación diferencial buscada ya que expresa una propiedad común de todas las curvas de la familia.

Si la familia viene expresada por una función implícita respecto de y , es decir, está definida por una ecuación de la forma $\phi(x, y, C) = 0$, la ecuación diferencial de la familia $F(x, y, y') = 0$ resulta de eliminar el parámetro C entre las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y, C) &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

En el caso de que la familia de curvas dependa de n parámetros, es decir, esté definida por $\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ con C_i parámetros $1 \leq i \leq n$, derivando respecto a x n veces y eliminando los n parámetros entre la ecuación de la familia y las obtenidas, se llega a una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

que es la ecuación diferencial de la familia n -paramétrica dada, de manera que $\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ es la solución general de la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.2.1: Deducir la ley del movimiento rectilíneo de un punto material que se desplaza con una aceleración constante a , si en el instante $t = t_0$ se tiene que el espacio recorrido es y_0 y su velocidad es v_0 .

El problema se reduce a resolver la ecuación diferencial de segundo orden $y''(t) = a$, siendo $y(t)$ la función que determina el espacio en función del tiempo y a una constante. Es suficiente integrar dos veces dicha ecuación.

Al integrar una vez se obtiene que: $y'(t) = a \cdot t + C$, y al imponer la condición $v(t_0) = v_0$ se calcula el valor de C : $C = v_0 - a \cdot t_0$. Por lo tanto:

$$y'(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0.$$

Se vuelve a integrar dicha ecuación:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot t + C_1.$$

Al sustituir las condiciones iniciales se obtiene que $C_1 = y_0 - v_0 \cdot t_0$, y por tanto:

$$y(t) = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + y_0.$$

Ejemplo 7.2.2: Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:

$$x^2 - y^2 = C \cdot x.$$

Se deriva esta ecuación con respecto a x y se obtiene $2x - 2y \cdot y' = C$ eliminando C entre estas dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 - Cx = 0 \\ 2x - C - 2y \cdot y' = 0 \end{array} \right\}$$

resulta la ecuación diferencial $x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot y' = 0$ que define la familia de hipérbolas equiláteras del enunciado del problema.

Ejercicios

- 7.5. Está nevando con regularidad. A las 12 de la mañana sale una máquina quitanieves que durante la primera hora recorre 2 km y durante la segunda 1 km. Si se supone que la cantidad de nieve que quita la máquina es uniforme, de modo que su velocidad de avance es inversamente proporcional a la altura de la nieve, ¿a qué hora comenzó a nevar?
- 7.6. El diámetro de una bola de naftalina que era inicialmente de 2.5 cm, al cabo de un mes se ha reducido a la mitad. Suponiendo que su evaporación es proporcional a su superficie, ¿cuánto tardará en

desaparecer?

7.7. Sea r el radio de la circunferencia de la figura, y la curva, la cicloide que se obtiene a partir de dicha circunferencia.

Si una bola se desliza, sin rozamiento, desde el punto O hasta el punto M .

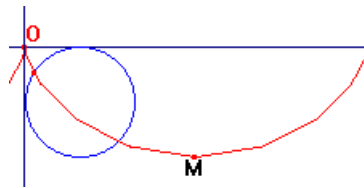


Figura 7.6: Cicloide . Ejercicio 7.7.

a) Demostrar que el tiempo que tarda en llegar la bola desde $O(0, 0)$ al

punto $M(\pi r, -2r)$ es $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

b) Comprobar que si P es un punto intermedio de la curva entre O y M

el tiempo que tarda la bola en llegar de P a M es también $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

7.8. Calcular las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas.

a) $x^2 - y^2 = C \cdot x$.

b) $y = C \cdot e^{\frac{x}{c}}$.

c) $y = e^x \cdot (C_1 x + C_2)$.

d) $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$.

7.3. INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Si en esta expresión es posible despejar y' se obtiene:

$$y' = f(x, y).$$

Otra forma de expresar una ecuación diferencial de primer orden es:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0.$$

La solución general de una ecuación diferencial es una función:

$$y = \varphi(x, C),$$

que satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de C .

7.3.1. Ecuaciones diferenciales con variables separadas

Definición 7.3.1:

Una ecuación diferencial de la forma $g(y) \cdot y' = f(x)$ se denomina **ecuación diferencial de variables separadas** ya que se puede expresar como:

$$g(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx.$$

Su solución general se obtiene integrando ambos términos:

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx + C.$$

Ecuaciones diferenciales reducibles a este tipo

Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$f_1(x) \cdot g_2(y) \cdot dx = f_2(x) \cdot g_1(y) \cdot dy$$

en las que cada miembro de la igualdad se descompone en factores que

dependen sólo de x o sólo de y , se reducen fácilmente a ecuaciones de variables separadas. Así se obtiene:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy,$$

que tiene como solución general

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy + C.$$

Al pasar dividiendo a $f_2(x)$ y a $g_2(y)$ se pueden perder soluciones particulares que anulen a estas funciones.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.1: Resolver la ecuación $4y \cdot y' + x = 0$.

Esta ecuación se puede expresar como $4y \cdot dy = -x \cdot dx$, que tiene por

solución general $\frac{4y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = C'$, que para $C' > 0$

representa una familia de elipses centradas en el origen de coordenadas.

Ejemplo 7.3.2: Integrar la ecuación diferencial $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ y encontrar la solución particular que pasa por el punto $(0, 0)$.

Esta ecuación se puede expresar de la forma: $y \cdot dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$, de

donde al integrar se obtiene la solución general:

$$\frac{y^2}{2} = \text{Ln}(1 + e^x) + C.$$

Para encontrar una solución particular que pase por el punto $(0, 0)$ se sustituye $x = 0$ e $y = 0$ en la solución general y se obtiene $C = -\text{Ln}(2)$.

La solución particular buscada es:

$$y^2 = \text{Ln} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^2.$$

Ejercicios

7.9. Calcular la solución general de la ecuación:

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0.$$

7.10. Resolver la ecuación $y' = e^y \cdot \text{sen}(x)$ y calcular la solución particular que pase por el punto $(0, 0)$.

7.11. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$y' \cdot \cos x = (\text{sen } x + x \cdot \sec x) \cot g y$$

7.12. Dada la ecuación diferencial $\sqrt{1+x^2} y' = x \cdot e^{-y}$, encontrar la solución general.

7.13. Calcular la familia de curvas que verifican que la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos sea igual a la ordenada del punto de tangencia.

7.3.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 7.3.2:

Una función $f(x, y)$ es una función **homogénea** de grado n en las variables x e y si $f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y)$.

Así, la función $f(x, y) = x^3 + x \cdot y^2 - x^2 \cdot y$ es una función homogénea de grado tres y la función $g(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ es una función homogénea de grado cero.

Definición 7.3.3:

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se denomina **ecuación diferencial homogénea** si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero.

En este caso se puede expresar de la forma $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ y al hacer el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$ la ecuación se reduce a otra ecuación diferencial que tiene las variables separadas. En efecto, al derivar $y = z \cdot x$ se obtiene que:

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z, \text{ por lo tanto: } x \cdot \frac{dz}{dx} = g(z) - z, \text{ de forma que: } \frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Si la ecuación diferencial está expresada de la forma:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$$

la ecuación es una **ecuación diferencial homogénea** si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

También en este caso haciendo el cambio $y = z \cdot x$ la ecuación se reduce a otra ecuación diferencial de variables separadas.

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

en la que las rectas:

$$\begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ s: a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

no son paralelas y f es una función continua, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea.

Se puede suponer que c o c' son distintos de cero, ya que si $c = 0$ y $c' = 0$

la ecuación es ya homogénea.

El método para transformar esta ecuación en una ecuación diferencial homogénea consiste en trasladar el origen de coordenadas al punto de intersección de estas rectas.

Esto se consigue haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k, \end{cases}$$

siendo (h, k) las coordenadas del punto de intersección.

Con este cambio la ecuación se convierte en una ecuación diferencial homogénea en las variables x_1 e y_1 : $y' = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a'x_1 + b'y_1}\right)$. Se obtiene la solución al resolver esta ecuación y deshacer el cambio de variable.

Si las rectas r y s son paralelas, existe un valor t tal que $a' = t \cdot a$ y $b' = t \cdot b$ de manera que la ecuación diferencial se puede expresar de la forma:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{t(ax + by) + c'}\right).$$

Llamando $z = a \cdot x + b \cdot y$ la ecuación se reduce a una ecuación diferencial de variables separadas.

En efecto $z' = a + b \cdot y'$, de donde $y' = \frac{z'}{b} - \frac{a}{b}$, que al sustituirlo en la ecuación se tiene:

$$\frac{z'}{b} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{t \cdot z + c'}\right).$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.4: Resolver $y' = \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$.

Esta ecuación diferencial se transforma en:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

Se hace el cambio de variables: $z = \frac{y}{x}$, por lo se tiene que: $y = z \cdot x$, al

derivar: $y' = z' \cdot x + z$, y al sustituir en la ecuación se tiene: $z' \cdot x + z = z + \frac{1}{z}$.

Se separan variables:

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}.$$

Se integra:

$$z^2 = 2(\ln x + \ln C).$$

Se deshace el cambio se obtiene la solución general:

$$y^2 = x^2 \cdot \ln(x^2 \cdot C^2).$$

Ejemplo 7.3.5: Resolver la ecuación diferencial: $(3y - x) \cdot y' = 3x - y - 4$.

Esta ecuación diferencial es reducible a homogénea. El punto de intersección de las rectas $3y - x = 0$ y $3x - y - 4 = 0$ es el punto $(3/2, 1/2)$. Se trasladan los ejes a ese punto con el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x_1 + 3/2 \\ y = y_1 + 1/2 \end{cases}$$

Al sustituirlo en la ecuación se tiene que:

$$(3y_1 - x_1) \cdot y_1' = 3x_1 - y_1.$$

Por tanto:

$$y_1' = \frac{3x_1 - y_1}{3y_1 - x_1}$$

es una ecuación diferencial homogénea.

Al hacer el cambio de variables: $z = \frac{y_1}{x_1}$ se obtiene la ecuación de

variables separadas:

$$\frac{\frac{1}{3} - z}{z^2 - 1} dz = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Al integrar se obtiene como solución general:

$$x_1^3 \cdot (z + 1)^2 \cdot (z - 1) = C.$$

Al deshacer los cambios de variable:

$$(x + y - 2)^2 \cdot (y - x + 1) = C,$$

que es la solución general de la ecuación inicial.

Ejemplo 7.3.6: Integrar $(2x - 4y + 5) \cdot y' = x - 2y + 3$.

En esta ecuación diferencial las rectas $2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ son paralelas, por lo tanto haciendo el cambio de variable $z = x - 2y$ se tiene que $z' = 1 - 2y'$ y al sustituir en la ecuación se obtiene $(2z + 5) \cdot (1 - z') = 2(z + 3)$ que tiene como solución general $z^2 + 5z = -x + C$. Al deshacer el cambio da lugar a:

$$(x - 2y)^2 + 6x - 10y = C,$$

que es la solución general de la ecuación inicial.

Ejemplo 7.3.7: Resolver la ecuación $(1 - x^2 \cdot y^2) \cdot y' = 2x \cdot y^3$ haciendo el cambio $y = u^r$ para un valor de r que la transforme en ecuación diferencial homogénea.

Algunas veces una ecuación se puede reducir a homogénea haciendo el cambio $y = u^r$. Consiste en asignar a y grado r , a y' grado $r - 1$ y a x grado 1, y

comprobar si para algún valor de r la ecuación es homogénea.

Al hacer el cambio $y = u^r$ se tiene: $(1 - x^2 \cdot u^{2r}) \cdot r \cdot u^{r-1} \cdot u' = 2x \cdot u^{3r}$ o bien:

$$(u^{r-1} - x^2 \cdot u^{3r-1}) \cdot r \cdot u' = 2x \cdot u^{3r}.$$

Para que sea homogénea se debe verificar que

$$r - 1 = 2 + 3r - 1 = 3r + 1$$

y esto se cumple para $r = -1$.

Haciendo el cambio $y = u^{-1}$ se tiene la ecuación:

$$(u^{-2} - x^2 \cdot u^{-4}) \cdot (-1) \cdot u' = 2x \cdot u^{-3}$$

o bien

$$(x^2 - u^2) \cdot u' = 2x \cdot u,$$

que es una ecuación diferencial homogénea que se resuelve entonces

haciendo el cambio $z = \frac{u}{x}$. Al separar variables e integrar se obtiene como

solución:

$$\frac{x(z^2 + 1)}{z} = C,$$

y al sustituir z por $\frac{1}{x \cdot y}$, se tiene la solución general de la ecuación diferencial

dada:

$$1 + x^2 \cdot y^2 = C \cdot y$$

Ejercicios

7.14. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x^2 - y^2) \cdot y' = x \cdot y.$$

7.15. Resolver la ecuación diferencial:

$$x \cdot (x^2 - 6y^2) \cdot dy = 4y \cdot (x^2 + 3y^2) \cdot dx.$$

7.16. Dada la ecuación diferencial $x \cdot (x + y) \cdot dy = (x^2 + y^2) \cdot dx$, encontrar la solución general.

7.17. Reducir a homogéneas las siguientes ecuaciones diferenciales y encontrar la solución general:

a) $y' = (x + y)^2$

b) $x^2 \cdot y' = (2x - y + 1)^2$

c) $(x - y)^2 \cdot y' = (x - y + 1)^2$.

7.18. Resolver la ecuación $(x + y + 1) \cdot dx + (2x + 2y - 1) \cdot dy = 0$.

7.3.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 7.3.4:

Una ecuación diferencial $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ se denomina **ecuación diferencial exacta** si el primer miembro de la ecuación es la diferencial total de una función $U(x, y)$, de forma que:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = M \cdot dx + N \cdot dy.$$

Teorema 7.3.1:

La ecuación $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si y sólo si:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración:

Si la ecuación es una ecuación diferencial exacta, entonces existe una función $U(x, y)$ tal que $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ y $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$, por el teorema

de Schwarz se sabe que las segundas derivadas parciales cruzadas de la

función $U(x, y)$, cuando existen y son continuas, coinciden, es decir:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x}$$

y por tanto

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

lo que prueba que la condición es necesaria para que la ecuación sea diferencial exacta.

Esta condición también es suficiente ya que permite encontrar una función $U(x, y)$ que satisface la definición. En efecto, al integrar con respecto de x :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \text{ y se tiene que: } U(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y),$$

siendo $g(y)$ la constante de integración que puede ser una función de y . Al derivar esta igualdad con respecto a y e igualar el resultado a la función $N(x, y)$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y) = N(x, y),$$

y por lo tanto:

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx,$$

se integra respecto a y : $g(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) dy$. De esta forma

queda determinada la función $U(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y)$.

Del mismo se puede comenzar el proceso, teniendo en cuenta que

$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$, integrando respecto a y , para determinar la función:

$$U(x, y) = \int N(x, y) dy + f(x). \quad \square$$

Este teorema proporciona una condición para detectar con facilidad las

ecuaciones diferenciales exactas. Además la demostración describe un método para calcular la solución general de dicha ecuación.

Corolario 7.3.2:

La solución general de la ecuación diferencial exacta $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es de la forma $U(x, y) = C$, siendo $U(x, y)$ la función que verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

$$a) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \text{ y } \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y),$$

$$b) U(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \text{ con } g(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx \right) dy ,$$

$$c) U(x, y) = \int N(x, y)dy + f(x) \text{ con } f(x) = \int \left(M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)dy \right) dx .$$

La equivalencia entre las condiciones a) y b) es consecuencia inmediata del teorema anterior y, mediante una demostración similar a la realizada en este teorema, se podría demostrar que a) y c) también son equivalentes.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.8: Resolver $e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0$.

Para calcular la solución general de la ecuación $e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0$, primero se comprueba que la ecuación dada es una ecuación diferencial

exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial e^{-y}}{\partial y} = \frac{\partial(2y + x e^{-y})}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}$.

Para encontrar la solución se agrupan términos: $e^{-y} \cdot dx - x \cdot e^{-y} \cdot dy - 2y \cdot dy = 0$ y se obtiene $d(x \cdot e^{-y}) - d(y^2) = 0$; por lo tanto la solución general es:

$$x \cdot e^{-y} - y^2 = C.$$

Ejemplo 7.3.9: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(3x^2 + 6x \cdot y^2) \cdot dx + (6x^2 \cdot y + 4y^3) \cdot dy = 0.$$

Se comprueba que la ecuación es una ecuación diferencial exacta pues:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x \cdot y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12x \cdot y.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6x \cdot y^2 \Rightarrow U(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2 \cdot y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 \cdot y + 4y^3 = 6x^2 \cdot y + g'(y),$$

por tanto $g'(y) = 4y^3$, e integrando:

$$g(y) = y^4 + C,$$

de donde:

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2 \cdot y^2 + y^4 + C = 0.$$

Ejemplo 7.3.10: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x \cdot y^2 - 1) \cdot dx + y \cdot (x^2 + 3) \cdot dy = 0.$$

Se comprueba que la ecuación es una ecuación diferencial exacta pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y \cdot (x^2 + 3) \Rightarrow U(x, y) = \int y(x^2 + 3) dy = (x^2 + 3) \frac{y^2}{2} + f(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x \cdot y^2 - 1 = x \cdot y^2 + f'(x),$$

por tanto $f'(x) = -1$, e integrando:

$$f(x) = -x + C,$$

se obtiene la solución general:

$$U(x, y) = (x^2 + 3) \frac{y^2}{2} - x + C = 0.$$

Ejemplo 7.3.11: Resolver $(2x + \frac{1}{y})dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0$.

Se comprueba que la ecuación diferencial $(2x + \frac{1}{y})dx + (\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0$ es

$$\text{exacta: } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x + \frac{1}{y})}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad \text{que coincide con} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

Se agrupan términos:

$$2x dx + (\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy) + \frac{1}{y} dy = 0$$

de donde se obtiene la solución:

$$x^2 + \frac{x}{y} + \ln y = C.$$

Ejercicios

7.19. Comprobar que la ecuación diferencial:

$$(x^3 + x \cdot y^2) \cdot dx + (x^2 \cdot y + y^3) \cdot dy$$

es una ecuación diferencial exacta y calcular su solución general.

7.20. Dada la ecuación: $(3x^2 + 2y \cdot \text{sen } 2x) \cdot dx = -2(\text{sen}^2 x + 3y^2) \cdot dy$,

comprobar que es una ecuación diferencial exacta y calcular su solución general.

7.21. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$x \cdot y^3 \cdot dx + (\frac{3}{2} x^2 \cdot y^2 - 1) \cdot dy = 0.$$

7.3.4. Factores integrantes

Definición 7.3.5:

Un **factor integrante** de una ecuación diferencial es una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicar la ecuación diferencial por $\mu(x, y)$, se transforma en una ecuación diferencial exacta.

Sea $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ una ecuación diferencial que no es diferencial exacta y sea $\mu(x, y)$ el posible factor integrante. Se impone que $\mu \cdot M \cdot dx + \mu \cdot N \cdot dy = 0$ sea una ecuación diferencial exacta, para lo que es necesario y suficiente que se verifique la igualdad:

$$\frac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x},$$

es decir:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x},$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

y al dividir por μ los dos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \cdot N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (7.3.1)$$

Por lo tanto toda función $\mu(x, y)$ que verifique esta condición es un factor integrante de la ecuación inicial.

La obtención de un factor integrante para una ecuación diferencial puede ser muy complicado puesto que la condición anterior es una ecuación en derivadas parciales que puede ser difícil de resolver. Sin embargo existen situaciones especiales en las que se puede calcular un factor integrante sin demasiada dificultad.

Factores integrantes que dependen exclusivamente de la variable x o de y

Si se supone que la ecuación diferencial admite un factor integrante $\mu(x)$ que depende sólo de la variable x , entonces $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y la condición (7.3.1)

queda de la forma:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $\mu(x)$.

Para que exista este factor integrante, el segundo miembro de la ecuación anterior debe depender sólo de x .

$$\text{Sea } h(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}, \text{ entonces } \mu(x) = e^{\int h(x) dx}.$$

De forma análoga, para que la ecuación diferencial admita un factor integrante $\mu(y)$, es decir, que dependa sólo de y , entonces $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y la condición (7.3.1) queda de la forma:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $\mu(y)$.

Para que exista este factor integrante, el segundo miembro de la ecuación anterior debe depender sólo de y .

$$\text{Sea } k(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}, \text{ entonces } \mu(y) = e^{\int k(y) dy}.$$

Se pueden buscar también factores integrantes que dependan de x y de y , como una combinación lineal: $\mu(ax + by)$, o como un producto de potencias de ambas variables: $\mu(x^f \cdot y^s)$. En el *ejemplo 7.3.13* se muestra como resolver una ecuación diferencial buscando un factor integrante de la forma: $\mu(ax + by)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.12: Resolver la ecuación $(1 - x \cdot y) \cdot dx + (1 - x^2) \cdot dy = 0$.

Esta ecuación diferencial no es exacta ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = -x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2x$.

Se calcula:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x + 2x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Como esta función depende sólo de x la ecuación admite un factor integrante $\mu(x)$ que depende sólo de x , que resulta de resolver la ecuación:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln(\mu(x)) = (-1/2) \ln(1 - x^2) \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Se multiplica la ecuación inicial por el factor integrante:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx - \frac{x \cdot y}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx + y \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta que tiene como solución general:

$$\arcsen(x) + y \cdot \sqrt{1 - x^2} = C.$$

Ejemplo 7.3.13: Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 - y^2 + 1) \cdot dx + (x^2 - y^2 - 1) \cdot dy = 0,$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de una combinación lineal de x e y .

Sea $z = ax + by$ y sea $\mu = \mu(z)$ el factor integrante buscado.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot N \right) \frac{d}{dz} (\ln \mu).$$

Se calculan estas derivadas:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b$$

y se sustituyen en la ecuación:

$$\frac{d}{dz} (\ln \mu) = \frac{2x + 2y}{b(x^2 - y^2 + 1) - a(x^2 - y^2 - 1)} = \frac{2(x + y)}{x^2(b - a) - y^2(b - a) + b + a}.$$

$$\text{Para } a = 1 \text{ y } b = -1, \text{ se tiene } z = x - y \Rightarrow \frac{d}{dz} (\ln \mu) = \frac{x + y}{y^2 - x^2} = \frac{1}{y - x} = \frac{-1}{z},$$

se integra $\ln(\mu) = -\ln(z)$ y por tanto $\mu = \frac{1}{z} = \frac{1}{x - y}$.

Se multiplica la ecuación inicial por $\frac{1}{x - y}$:

$$(x + y) \cdot dx + \frac{dx}{x - y} + (x + y) \cdot dy - \frac{dy}{x - y} = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta que se puede expresar por

$d\left(\frac{(x + y)^2}{2}\right) + d(\ln |x - y|) = 0$ y por lo tanto su solución general es:

$$\frac{(x + y)^2}{2} + \ln |x - y| = C.$$

Ejercicios

7.22. Integrar la ecuación diferencial:

$$(2x \cdot y + x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3}) \cdot dx + (x^2 + y^2) \cdot dy = 0,$$

sabiendo que existe un factor integrante que depende sólo de x .

7.23. Resolver la ecuación diferencial $\frac{y}{x} \cdot dx + (y^3 - \ln x) \cdot dy = 0$,

sabiendo que tiene un factor integrante que depende sólo de y .

7.24. Integrar la ecuación diferencial $(y^2 - x \cdot y) \cdot dx + x^2 \cdot dy = 0$ sabiendo que existe un factor integrante que es función de $x \cdot y^2$.

7.25. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$x \cdot y^3 \cdot dx + (x^2 \cdot y^2 - 1) \cdot dy = 0.$$

$$(\text{Solución: } \frac{x^2 \cdot y^2}{2} - \ln y = K)$$

7.26. Demostrar que toda ecuación de la forma:

$$y \cdot f(x, y) \cdot dx + x \cdot g(x, y) \cdot dy = 0,$$

en la que la f y g son funciones del producto $x \cdot y$ admite un factor

integrante $\mu(x, y) = \frac{1}{xy(f(x, y) - g(x, y))}$. Aplicar este resultado a la

resolución de la ecuación:

$$x^3 \cdot y^4 \cdot dx - (x^2 \cdot y - x^4 \cdot y^3) \cdot dy = 0.$$

7.27. La ecuación diferencial $2x \cdot y \cdot dy + (x^2 - y^2 - 1) \cdot dx = 0$ admite como solución general la familia de curvas $x^2 + y^2 - Cx + 1 = 0$. Calcular un factor integrante de la ecuación

7.3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 7.3.6:

Una ecuación diferencial de primer orden es una **ecuación diferencial**

lineal si es lineal respecto a la variable y y respecto a su derivada y' , lo que significa que es una expresión de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones cualesquiera, que se suponen continuas en la región en la que se pretende integrar la ecuación.

Si $q(x) = 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina **ecuación diferencial lineal homogénea**. Si $q(x) \neq 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina **no homogénea** o **completa**.

En el *capítulo 10* se estudian las ecuaciones diferenciales lineales de orden n , de las que éstas son un caso particular cuando $n = 1$, y entonces se demostrará que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n , y que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea tiene estructura de espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el de las soluciones de su ecuación diferencial homogénea. Pero por su interés, tanto histórico como práctico, se estudian ahora algunos métodos de solución de estas ecuaciones.

Métodos de resolución

Las ecuaciones lineales, y en particular las de primer orden, que son las estudiadas en este capítulo, representan un tipo especial de ecuaciones diferenciales para las que, casi siempre, resulta fácil encontrar la solución general, y quizás por esta misma razón existen distintos procedimientos para calcularla. El primer método estudiado consiste en encontrar un factor integrante del mismo modo que se calculaba en el apartado anterior, en el

segundo se realiza un cambio de variable y el tercero supone un método general que se volverá a utilizar con las ecuaciones diferenciales lineales de orden n .

Método 1º: Factor integrante

La ecuación $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ se puede expresar:

$$(p(x) \cdot y - q(x)) \cdot dx + dy = 0,$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, se tiene que $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ que depende sólo de

x , y por lo tanto existe siempre un factor integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$. Al multiplicar la ecuación lineal por $\mu(x)$ resulta ser una ecuación diferencial exacta cuya solución general está determinada.

Método 2º: Cambio de variable

Otra forma de resolver una ecuación lineal no homogénea es suponer $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, de donde resulta que $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Se sustituye en la ecuación:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p \cdot u \cdot v = q \Rightarrow u' \cdot v + u(v' + p \cdot v) = q.$$

Se calcula v de forma que sea una solución, distinta de cero, de la ecuación $v' + p \cdot v = 0$: $v(x) = Ke^{-\int p(x) dx}$ y se elige la solución particular para $K = 1$.

Se determina $u(x)$ solución general de la ecuación $u' \cdot v = q$:

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx$$

de donde la solución general de la ecuación inicial es:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\int \frac{q(x)}{v(x)} dx + C \right) \cdot v(x) = v(x) \int \frac{q(x)}{v(x)} + C v(x)$$

Se observa que esta solución no varía si en lugar de tomar $v(x) = e^{-\int p(x) dx}$ se toma $v(x) = K e^{-\int p(x) dx}$ con $K \neq 0$.

Método 3º: Variación de las constantes

Un método de resolución, generalizable a ecuaciones diferenciales lineales de orden n , consiste en encontrar la solución general de la ecuación homogénea $y_H(x)$ y una solución particular de la ecuación completa $y_P(x)$. El siguiente teorema demuestra que $y_H(x) + y_P(x)$ es una solución de la ecuación completa.

Teorema 7.3.3

Sea $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ una ecuación diferencial lineal con $p(x)$ y $q(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) . Si $y_H(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea $y' + p(x) \cdot y = 0$ e $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea, entonces $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ es la solución general de la ecuación completa.

Demostración:

Si $y_H(x)$ es solución de la ecuación homogénea entonces verifica que $y'_H(x) + p(x) \cdot y_H(x) = 0$.

Si $y_P(x)$ es solución de la ecuación completa entonces verifica que $y'_P(x) + p(x) \cdot y_P(x) = q(x)$.

Efectivamente $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ es la solución general de la ecuación completa ya que $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = (y'_H(x) + y'_P(x)) + p(x) \cdot (y_H(x) + y_P(x)) = y'_H(x) + p(x) \cdot y_H(x) + y'_P(x) + p(x) \cdot y_P(x) = q(x)$. \square

Solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea:

La ecuación $\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y$ es de variables separadas por lo que si se expresa como $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, se integra, se obtiene $\ln(y) = -\int p(x)dx + K$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada viene expresada por:

$$y_H(x) = Ke^{-\int p(x)dx}.$$

Solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

Uno de los métodos para obtener una solución particular de la ecuación completa es el denominado **método de variación de las constantes**. Consiste en considerar la constante de integración de la solución de la ecuación lineal homogénea como una función, que se calcula imponiendo la condición de que sea solución de la ecuación completa.

Si $y_P(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ entonces:

$$y'_P(x) = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot (-p(x)) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

y sustituyendo en la ecuación $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ se tiene que:

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot (-p(x)) \cdot e^{-\int p(x)dx} + p(x) \cdot C(x) e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x) = q(x) e^{\int p(x)dx};$$

integrando esta expresión:

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx,$$

De esta forma se obtiene:

$$y_P(x) = C(x) e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx,$$

que es una solución particular de la ecuación completa.

La solución general es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.14: Resolver $x \cdot y' + (1 - x) \cdot y = x \cdot e^x$.

Se divide la ecuación diferencial por x para expresarla de la forma:

$$y' + \frac{1-x}{x}y = e^x.$$

Paso 1º: Se resuelve la ecuación homogénea asociada $y' + \frac{1-x}{x}y = 0$,

$$y_H(x) = e^{-(\ln x - x) + C} = K e^{-\ln x + x} = K \frac{e^x}{x}.$$

Paso 2º: Se busca una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, de la forma $y_P(x) = C(x) \frac{e^x}{x}$. Para ello se sustituye en la ecuación

completa:

$$C'(x) \cdot \frac{e^x}{x} + C(x) \cdot \frac{e^x x - e^x}{x^2} + \frac{1-x}{x} \cdot C(x) \frac{e^x}{x} = e^x.$$

Como los dos últimos sumandos del primer miembro de la ecuación anterior son iguales y de distinto signo, se simplifica:

$$C'(x) \frac{e^x}{x} = e^x.$$

Integrando se obtiene:

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación completa es:

$$y_P(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^x}{x} = \frac{x \cdot e^x}{2}.$$

Paso 3º: La solución general de la ecuación completa es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = K \frac{e^x}{x} + \frac{x \cdot e^x}{2} = e^x \left(\frac{K}{x} + \frac{x}{2} \right).$$

Ejemplo 7.3.15: Integrar $y' = \frac{1}{e^y - x}$.

La ecuación diferencial anterior se puede expresar como $\frac{dx}{dy} + x = e^y$, que

es una ecuación diferencial lineal respecto de x considerada esta variable como función de y . En general, una ecuación que se pueda expresar de la forma $\frac{dx}{dy} + x \cdot r(y) = s(y)$ se resuelve por el mismo método considerando a x como una función de y .

Paso 1º: La solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_H(y) = K \cdot e^{-y}.$$

Paso 2º: Una solución particular de la no homogénea $x_P(y) = C(y) \cdot e^{-y}$, por tanto $x'(y) = C'(y) \cdot e^{-y} - C(y) \cdot e^{-y}$, al sustituir en la ecuación completa anulando términos opuestos se obtiene $C'(y) \cdot e^{-y} = e^y \Rightarrow C'(y) = e^{2y} \Rightarrow C(y) = \frac{e^{2y}}{2}$. Por lo

tanto una solución particular de la ecuación completa:

$$x_P(y) = \frac{e^{2y}}{2} \cdot e^{-y} = \frac{e^y}{2}.$$

Paso 3º: La solución general de la ecuación completa:

$$x(y) = K e^{-y} + \frac{e^y}{2}.$$

Ejemplo 7.3.16: Resolver la ecuación diferencial lineal $y' + \frac{y}{x} = 3\cos(2x)$

buscando un factor integrante.

El factor integrante que transforma esta ecuación lineal en una ecuación diferencial exacta es $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$.

Expresándola de la forma $dy + \left(\frac{y}{x} - 3\cos(2x)\right)dx = 0$ y multiplicándola

por x se tiene: $(y - 3x \cdot \cos(2x)) \cdot dx + x \cdot dy = 0$.

Llamando $M(x, y) = y - 3x \cdot \cos(2x)$ y $N(x, y) = x$ se tiene $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, por

lo que es una ecuación diferencial exacta que se puede expresar como:

$$x \cdot dy + y \cdot dx - 3x \cdot \cos(2x) dx = 0.$$

Al integrar se obtiene:

$$x \cdot y - 3 \int x \cos(2x) dx = K.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$x \cdot y - \frac{3x \sin(2x)}{2} - \frac{3 \cos(2x)}{4} = K.$$

Ejemplo 7.3.17: Integrar la ecuación diferencial lineal $y' = y \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$ realizando el cambio de variable $y = u \cdot v$.

Si $y = u \cdot v$ se tiene que $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Se sustituye en la ecuación:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot \operatorname{tg} x = \cos x \Rightarrow u' \cdot v + u(v' - v \cdot \operatorname{tg} x) = \cos x.$$

Se calcula v de forma que sea una solución, no nula, de la ecuación:

$$v' - v \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow v(x) = K e^{\int \operatorname{tg} x dx} = K \cdot \sec x.$$

Para $K = 1 \Rightarrow v(x) = \sec x$.

Se determina $u(x)$ solución de la ecuación:

$$u' \cdot v = \cos x \Rightarrow u' \cdot \sec x = \cos x \Rightarrow$$

$$u(x) = \int \frac{\cos x}{\sec x} dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C \right) \cdot \sec x$$

Ejercicios

7.28. Resolver la ecuación $y' + 2x \cdot y = 2x \cdot e^{-x^2}$.

7.29. Calcular la solución particular de la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

que verifique la condición inicial $y(\pi) = 0$.

7.30. Calcular la solución general de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos(y) + \operatorname{sen}(2y)}.$$

7.31. Resolver la ecuación diferencial lineal $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \sec^2 x$.

7.32. Hallar la familia de curvas tales que el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas, la recta tangente a la gráfica de una función en un punto y la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de tangencia sea constante e igual a a^2 .

7.3.6. Algunas ecuaciones diferenciales especiales

Ecuación de *Bernoulli*

Definición 7.3.7:

La **ecuación de Bernoulli** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n,$$

con $p(x)$ y $q(x)$ funciones dadas y $n \neq 0$ y $n \neq 1$.

Para $n = 0$ esta ecuación es una ecuación diferencial lineal y para $n = 1$ la ecuación es una ecuación diferencial de variables separadas.

Esta ecuación se reduce a una ecuación diferencial lineal dividiendo los términos de la ecuación por y^n , y haciendo el cambio $z = y^{-n+1}$.

Al dividir por y^n , se obtiene: $y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{-n+1} = q(x)$. Al hacer el cambio de variables $z = y^{-n+1}$ se tiene que $z' = (-n + 1) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Al sustituir en la ecuación:

$$\frac{z'}{-n+1} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + (-n+1) \cdot p(x) \cdot z = (-n+1) \cdot q(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal. Resolviéndola y deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución general.

Otra forma de resolverla consiste en sustituir $y(x)$ por $u(x) \cdot v(x)$, método que ya se estudió para resolver las ecuaciones diferenciales lineales.

Ecuación de Ricatti

Definición 7.3.8:

La **ecuación de Ricatti** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = r(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + p(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones dadas.

En general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales, excepto en ciertos casos particulares, por ejemplo:

Si $r(x) = 0$, entonces la ecuación es una ecuación diferencial lineal.

Si $p(x) = 0$, la ecuación es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Se puede determinar la solución general de la ecuación a partir de soluciones particulares. Si se conoce una solución particular $y_1(x)$, entonces haciendo el cambio:

$$y(x) = y_1(x) + u(x),$$

la ecuación se transforma en una ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\begin{aligned} y' &= y_1' + u' = r(x) \cdot (y_1 + u)^2 + q(x) \cdot (y_1 + u) + p(x) = \\ &(r(x) \cdot y_1^2 + q(x) \cdot y_1 + p(x)) + r(x) \cdot u^2 + r(x) \cdot 2u \cdot y_1 + q(x) \cdot u. \end{aligned}$$

Al ser y_1 es una solución particular y verificar la ecuación, se tiene que:

$$u' = r(x) \cdot u^2 + r(x) \cdot 2u \cdot y_1 + q(x) \cdot u = r(x) \cdot u^2 + (r(x) \cdot 2 \cdot y_1 + q(x)) \cdot u.$$

La ecuación que resulta $u' = r(x) \cdot u^2 + (2 \cdot r(x) \cdot y_1 + q(x)) \cdot u$, es una ecuación diferencial de Bernoulli y se resuelve realizando el cambio $w = u^{1-2} = u^{-1}$.

Por lo tanto, directamente, cuando en la ecuación de Ricatti se conoce una solución particular y_1 , el cambio de variable:

$$y(x) = y_1(x) + w^{-1}(x) \Rightarrow w = \frac{1}{y - y_1},$$

la transforma en una ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x) \cdot y_1 + q(x)) \cdot w = r(x)$$

Si se conocen dos soluciones particulares y_1 e y_2 de la ecuación de Ricatti, se puede reducir mediante un cambio de variables adecuado a una ecuación diferencial lineal homogénea.

En efecto, si y_1 es una solución de la ecuación de Ricatti, entonces el cambio de variables $w = \frac{1}{y - y_1}$ la transforma en la ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x) \cdot y_1 + q(x)) \cdot w = r(x).$$

Si y_2 es otra solución de la ecuación de Ricatti, entonces $w_2 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ es

solución de la ecuación anterior, y el cambio:

$$z = w - w_2 = \frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1},$$

transforma la ecuación de Riccati en la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$z' + (2r(x) \cdot y_1 + q(x)) \cdot z = 0,$$

como consecuencia inmediata del *teorema 7.3.3*.

Por último, si se conocen tres soluciones particulares y_1 , y_2 e y_3 , entonces:

$$w_2 = \frac{1}{y_2 - y_1} \text{ y } w_3 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x) \cdot y_1 + q(x)) \cdot w = r(x).$$

La solución general se puede obtener directamente a partir de ella, al verificar que:

$$w = C(w_2 - w_3) + w_2.$$

Al sustituir:

$$\frac{1}{y - y_1} = C \left(\frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1} \right) + \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

Ecuación de *Lagrange*

Definición 7.3.9:

La **ecuación de Lagrange** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y = x \cdot p(y') + q(y'),$$

lineal con respecto a x e y .

Para resolver una ecuación diferencial de este tipo se realiza el cambio $y' = t$, por tanto $dy = t \cdot dx$. Al sustituir este cambio en la ecuación diferencial se reduce a otra que considerando x en función de t es lineal. Al resolverla se

obtiene la solución general en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} x = r(t, C) \\ y = r(t, C)p(t) + q(t) \end{array} \right\}.$$

La ecuación de Lagrange puede tener soluciones singulares de la forma:

$$y = p(x_0) \cdot x + q(x_0),$$

siendo x_0 una raíz de la ecuación $x_0 = p(x_0)$

Ecuación de Clairaut

Definición 7.3.10:

La **ecuación de Clairaut** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y = x \cdot y' + q(y').$$

Es por tanto un caso especial de la ecuación de Lagrange y su método de resolución es esencialmente el mismo, es decir, mediante el cambio $y' = t$.

La solución general obtenida es: $y = C \cdot x + q(C)$

Igual que la ecuación de Lagrange, también puede tener soluciones singulares que resultan de eliminar el parámetro t entre las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \cdot t + q(t) \\ x + q'(t) = 0. \end{array} \right.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.18: Resolver la ecuación $3x \cdot y' - 2y = x^3 \cdot y^2$.

Se observa que es una ecuación de Bernouilli. Al realizar el cambio $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ se obtiene:

$$3x \cdot (u' \cdot v + u \cdot v') - 2u \cdot v = x^3 \cdot u^2 \cdot v^2 \Rightarrow 3x \cdot u' \cdot v + u(3x \cdot v' - 2v) = x^3 \cdot u^2 \cdot v^2.$$

Al resolver $3x \cdot v' - 2v = 0$ se obtiene la solución $v(x) = x^{2/3}$.

Sustituyendo en $3x \cdot u' \cdot v^3 = x^3 \cdot u^{-2}$ se obtiene: $3u' \cdot x^3 = x^3 \cdot u^{-2} \Rightarrow 3u^2 \cdot u' = 1$.

Integrando: $u^3 = x + C \Rightarrow u(x) = (x + C)^{1/3}$. Al deshacer el cambio:

$$y(x) = (x + C)^{1/3} \cdot x^{2/3}.$$

Ejemplo 7.3.19: Integrar $y = x \cdot y' + (y')^2$.

Se observa que es una ecuación de Clairaut. Al hacer el cambio $y' = t$ se obtiene $y = x \cdot t + t^2$.

Al diferenciar: $t \cdot dx = t \cdot dx + x \cdot dt + 2t \cdot dt \Rightarrow dt \cdot (x + 2t) = 0$.

Igualando a 0 el primer factor de esta ecuación se tiene que:

$$dt = 0 \Rightarrow t = C.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y = C \cdot x + C^2$$

que es un haz de rectas dependientes del parámetro C .

Igualando a 0 el segundo factor se tiene que $x = -2t$. Eliminando t entre esta ecuación y la ecuación $y = x \cdot t + t^2$ resulta una solución singular, la

parábola $y = -\frac{x^2}{4}$, que es la envolvente del haz de rectas determinado por la

solución general.

Ejemplo 7.3.20: Resolver la ecuación diferencial:

$$x \cdot y' - y = \frac{2x}{x^4 - 1} \cdot (y^2 - x^2),$$

sabiendo que admite soluciones particulares de la forma $y = ax + b$.

Es una ecuación diferencial de Ricatti. Al imponer que $y = ax + b$ sea solución se obtiene que $y = x$ es una solución. Se hace el cambio $z = y - x$, con lo que la ecuación se transforma en una ecuación de Bernoulli:

$$x \cdot z' = \frac{2x}{x^4 - 1} z^2 + \left(\frac{4x^2}{x^4 - 1} + 1 \right) z.$$

Con el cambio $w = 1/z$ se transforma en una ecuación lineal:

$$-x \cdot w' = \left(\frac{4x^2}{x^4 - 1} + 1 \right) w + \frac{2x}{x^4 - 1}.$$

Al resolverla se obtiene:

$$w = C \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} + \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

Deshaciendo los cambios se tiene finalmente la solución buscada:

$$y = x + \frac{x(x^2 - 1)}{C(x^2 + 1) + 1}.$$

Ejemplo 7.3.21: Resolver la ecuación diferencial $y = 2x \cdot y' + \operatorname{sen} y'$.

Se observa que es una ecuación de Lagrange. Para resolverla se realiza el cambio $y' = t$ y se obtiene la ecuación $y = 2x \cdot t + \operatorname{sen} t$.

Diferenciando: $t \cdot dx = 2t \cdot dx + 2x \cdot dt + \cos t \cdot dt$.

Agrupando términos:

$$t \cdot dx = -2x \cdot dt - \cos t \cdot dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{t} x - \frac{\cos t}{t}$$

que es una ecuación diferencial lineal considerando x como función de t .

Resolviéndola se obtiene la solución:

$$x(t) = C \cdot t^2 - t^1 \cdot \operatorname{sen} t - t^2 \cdot \cos t,$$

y sustituyendo este valor en y se tiene que:

$$y(t) = 2C \cdot t^1 - \operatorname{sen} t - 2t^1 \cdot \cos t.$$

La solución general de la ecuación en forma paramétrica es $(x(t), y(t))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = Ct^2 - t^1 \cdot \operatorname{sen} t - t^2 \cdot \cos t \\ y(t) = 2Ct - \operatorname{sen} t - 2t \cdot \cos t \end{array} \right.$$

$$y(t) = 2Ct^{-1} - \operatorname{sen} t - 2t^{-1} \cdot \cos t$$

Ejercicios

7.33. Resolver la ecuación diferencial: $x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln x$.

7.34. Dada la ecuación diferencial $3x \cdot y' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$, calcular la solución

general.

7.35. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$2 \operatorname{sen} x \cdot y' + y \cdot \cos x = y^3 \cdot (x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x).$$

7.36. Integrar la ecuación diferencial $2y = x \cdot y' + y' \cdot \ln y'$.

7.37. Resolver la ecuación diferencial: $y' \cdot (x^3 + x^2) + y^2 - 3x^2 \cdot y - 4x^3 = 0$

sabiendo que admite soluciones polinómicas de grados uno y dos. Si

$y = \varphi(x)$ es la solución tal que $-1 = \varphi(-1)$, calcular $\varphi(2)$. (Solución:

$$\varphi(2) = 2)$$

7.3.7. Trayectorias ortogonales

Sea una ecuación de la forma $\phi(x, y, C) = 0$ donde C es un parámetro que puede tomar distintos valores. Cada valor de C determina una curva en el plano de manera que dando a C todos los valores posibles se obtiene un haz de curvas, que queda definido por la ecuación anterior.

Definición 7.3.10:

Dada una familia uniparamétrica de curvas: $\phi(x, y, C) = 0$, se denominan **trayectorias isogonales** de la familia al haz de curvas en el que cada elemento corta a las curvas de la familia dada bajo un ángulo constante.

Cuando el ángulo que forman vale $\frac{\pi}{2}$, las trayectorias se denominan

trayectorias ortogonales.

Si se suponen dos cargas eléctricas iguales en dos puntos fijos del plano y una tercera carga que se desplaza en ese plano bajo la acción de las dos primeras, el movimiento de la carga libre sigue una trayectoria que corta perpendicularmente a las líneas equipotenciales del campo creado por las dos primeras cargas.

Este fenómeno es general: en un campo gravitatorio, térmico, electromagnético, ..., las curvas de nivel y las líneas de flujo se cortan ortogonalmente; por esta razón es importante tener un procedimiento para calcular el haz de curvas formado por las trayectorias ortogonales a las curvas de otra familia dada.

La solución general de una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ es una familia uniparamétrica de curvas $\phi(x, y, C) = 0$.

Recíprocamente, en el apartado 7.2.8 de este capítulo se ha desarrollado un método para calcular la ecuación diferencial de un haz de curvas $\phi(x, y, C) = 0$, que consiste en eliminar el parámetro C entre la ecuación que define el haz y la que resulta de derivar con respecto a x esta ecuación. Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \text{Eliminando } C \text{ en } \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = 0 \end{array} \right\} \text{ se obtiene } F(x, y, y') = 0.$$

Dada la familia de curvas $\phi(x, y, C) = 0$ que tiene por ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, se tiene que y' es el coeficiente angular de las tangentes a las curvas de la familia, por lo tanto la pendiente de las tangentes de las trayectorias ortogonales es $-\frac{1}{y'}$ y la ecuación diferencial que las define

$F(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$. Al integrar, la solución general $\phi_1(x, y, K) = 0$ determina el haz

de trayectorias ortogonales de la familia dada.

Trayectorias isogonales

Si se pretende calcular el haz de curvas que cortan con un ángulo fijo α a las curvas de una familia dada $\phi(x, y, C) = 0$, cuya ecuación diferencial es $F(x, y, y') = 0$, existen dos familias de soluciones ya que las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de la familia que se quieren calcular pueden ser $\text{tg}(\beta + \alpha)$ o $\text{tg}(\beta - \alpha)$ donde $\text{tg} \beta = y'$.

Como $\text{tg}(\beta + \alpha) = \frac{\text{tg}\beta + \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\alpha}$ y $\text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\beta \cdot \text{tg}\alpha}$ para $m = \text{tg}(\alpha)$ se

tiene $\text{tg}(\beta + \alpha) = \frac{y'+m}{1-my'}$ y $\text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{y'-m}{1+my'}$, por lo tanto las dos familias de

trayectorias isogonales están determinadas por las ecuaciones diferenciales

$F(x, y, \frac{y'+m}{1-my'})$ y $F(x, y, \frac{y'-m}{1+my'})$ y se calculan resolviendo estas ecuaciones.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.22: Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de rectas que pasan por el origen definida por $y = Cx$.

Se calcula su ecuación diferencial eliminando k entre las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} y - Cx = 0 \\ -C + y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - y' \cdot x = 0.$$

Sustituyendo y' por $\frac{-1}{y'}$ se obtiene la ecuación diferencial de las

trayectorias ortogonales:

$$y + \frac{1}{y'}x = 0 \Rightarrow y \cdot y' + x = 0 \Rightarrow y \cdot dy = -x \, dx,$$

cuya solución general es:

$$x^2 + y^2 = K, (K > 0),$$

que son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y constituyen la familia de las trayectorias ortogonales de la familia de rectas $y = Cx$.

Ejemplo 7.3.23: Hallar las familias de curvas que cortan al haz de rectas $y = Cx$ bajo un ángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Eliminando C , entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = Cx \\ y' = C, \end{cases}$$

se obtiene la ecuación diferencial del haz de rectas $y = y'x$.

Sea $m = \operatorname{tg}(\alpha)$, sustituyendo y' por $\frac{y'+m}{1-my'}$ se obtiene la ecuación

diferencial de la familia buscada:

$$y = \frac{y'+m}{1-my'} \cdot x \Rightarrow y \cdot (1-my') = x \cdot (y' + m) \Rightarrow y' \cdot (x + my) = y - xm,$$

ecuación homogénea cuya solución general es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ke^{-\frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

Análogamente sustituyendo y' por $\frac{y'-m}{1+my'}$ se obtiene la ecuación

diferencial:

$$y' \cdot (x - my) = y + xm,$$

cuya solución general es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ke^{\frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

Estas dos familias de curvas expresadas en forma polar son: $\rho = Ke^{-\frac{\theta}{m}}$ y,

$\rho = Ke^{\frac{\theta}{m}}$ es decir, están formadas por espirales logarítmicas.

Ejercicios

7.38. Calcular las trayectorias ortogonales al haz de curvas $y^2 = 4C \cdot x$.

7.39. Dada la familia de curvas $y = C \cdot e^{-x^2}$, calcular el haz de las trayectorias ortogonales.

7.40. Calcular las trayectorias isogonales que cortan con un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes al haz de circunferencias $x^2 + y^2 = C$.

7.41. Hallar el haz de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $e^x \cdot \cos y = C$.

7.3.8. Envoltente de un haz de curvas

Definición 7.3.11:

Se denomina **envoltente** de un haz de curvas a una curva que verifica que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva del haz.

Ecuación de la envoltente de un haz de curvas

Sea $\phi(x, y, C) = 0$ la ecuación que define un haz de curvas dependientes del parámetro C , y sea $y = \varphi(x)$ la envoltente de dicho haz donde $\varphi(x)$ es una función que se supone derivable.

Sea $P(x, y)$ un punto de la envoltente. Como por definición este punto

pertenece a una curva del haz para un determinado valor de C , viene determinado por la ecuación $C = C(x, y)$, que verifica la ecuación del haz. Es decir: $\phi(x, y, C(x, y)) = 0$

Para calcular el coeficiente angular de la tangente a la curva del haz en el punto $P(x, y)$, se deriva con respecto a x la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial y} y' = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \phi}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0$$

El coeficiente angular de la tangente a la curva del haz que pasa por el punto $P(x, y)$ se deduce de la ecuación $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = 0$ ya que en esta curva C es constante.

Se supone que $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$ (en caso contrario $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$ y se consideraría x como función de y).

El coeficiente angular de la envolvente en el punto P ha de ser el mismo por lo que tiene que verificar que $\frac{\partial \phi}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \right) = 0$.

Como la función $C(x, y)$ no es constante $\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0$ y por lo tanto se verifica que $\frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0$.

La ecuación de la envolvente resulta de eliminar el parámetro C entre las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{array} \right\} \quad (7.3.2)$$

Sin embargo no toda solución de este sistema es una envolvente del haz ya que si una cierta función $y = \alpha(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de los

puntos singulares del haz de curvas, es decir, de los puntos que verifican

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \text{ entonces las coordenadas de estos puntos también verifican}$$

las ecuaciones (7.3.2).

En efecto, como las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro C , si $x = p(C)$ e $y = q(C)$, se verifica que:

$$\phi(p(C), q(C), C) = 0,$$

derivando esta expresión con respecto a C se tiene que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dp}{dC} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dq}{dC} + \frac{\partial \phi}{\partial C} = 0,$$

por lo que $\frac{\partial \phi}{\partial C} = 0$ y se verifican las ecuaciones (7.3.2).

Por lo tanto, al obtener una curva que verifica estas ecuaciones hay que determinar si es la envolvente o si es el lugar geométrico de los puntos singulares o bien si es una combinación de ambas cosas.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para que una curva solución del sistema (7.3.2) sea envolvente del haz.

Teorema 7.3.4:

Sea $\varphi(x, y)$ una curva solución del sistema $\left. \begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{array} \right\}$ donde la

función $\phi(x, y, C)$ verifica las siguientes condiciones.

a) Las derivadas parciales $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ existen y están acotadas

b) $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$ o bien $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\varphi(x, y)$ es la envolvente del haz de curvas definido por la

ecuación $\phi(x, y, C) = 0$.

Sin embargo estas condiciones no son necesarias, es decir una función solución de (7.3.2) puede ser envolvente del haz y no cumplir alguna de las condiciones anteriores.

En general la ecuación que resulta de eliminar C en el sistema de ecuaciones (7.3.2) se denomina C -discriminante y la curva determinada por esta ecuación curva C -discriminante o CCD .

El C -discriminante contiene a la envolvente (E), al lugar geométrico de los puntos anodales (A) al cuadrado y al lugar geométrico de los puntos cuspidales o de retroceso (R) al cubo, es decir $\Delta_C = E \cdot A^2 \cdot R^3$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.24: Hallar la envolvente del haz de curvas definido por la ecuación $(x - C)^2 + y^2 - 4 = 0$.

Para calcular la envolvente de este haz de circunferencias de radio 2 con centro en el eje de abscisas se halla la curva C -discriminante que resulta de eliminar C en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} (x-C)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 2(x-C) = 0 \end{array} \right\}$$

y se obtienen las rectas $y = \pm 2$, que son la envolvente del haz, ya que las circunferencias no tienen puntos singulares.

Ejemplo 7.3.25: Calcular la envolvente del haz de curvas $y^2 - (x + C)^3 = 0$.

Para calcular la envolvente de esta familia se halla la curva C -discriminante, que resulta de eliminar C en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - (x + C)^3 = 0 \\ -3(x - C)^2 = 0 \end{array} \right\}$$

que tiene como solución la recta $y = 0$.

Como $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -3(x+C)^2 = 0$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y = 0$, la ecuación $y = 0$ representa

el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia. Pero a la vez la recta $y = 0$ es la envolvente de la familia, pues en cualquier punto $(-C, 0)$ tanto para la recta $y = 0$ como para $y = (x + C)^{3/2}$ sus coeficientes angulares son iguales.

Ejercicios

7.42. Calcular la envolvente del haz de curvas $y \cdot (C - x) = C^2$.

7.43. Hallar la envolvente de la familia de curvas $y = C \cdot e^x + \frac{1}{C}$.

7.44. Calcular la envolvente del haz de curvas $x^2 + C \cdot (x - 3y) + C^2 = 0$.

7.3.9. Soluciones singulares

Definición 7.3.12:

Una solución $y = \varphi(x)$ de una ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ se llama **singular** si verifica dicha ecuación, y además por cada uno de sus puntos $(x_0, \varphi(x_0))$ pasa también una solución particular de la ecuación diferencial que en ese punto tiene la misma tangente pero que no coincide con ella en un entorno suficientemente pequeño del punto.

Si la función $F(x, y, y')$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas

con respecto a x, y e y' cualquier solución singular verifica también que

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0.$$

La ecuación que se obtiene al eliminar y' entre esta ecuación y la ecuación inicial se denomina p -discriminante y la curva que determina curva p -

discriminante o abreviadamente *CPD*.

El p -discriminante contiene a la envolvente (E), al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (C) y al lugar geométrico de los puntos cuspidales o de retroceso (R), es decir $\Delta_p = E \cdot C^2 \cdot R$.

Entre estos lugares geométricos sólo la envolvente del haz de soluciones de la ecuación diferencial es una solución singular y el hecho de saber que esta curva es también C -discriminante facilita la obtención de la solución singular.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.26: Calcular las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y^2 - y \cdot y' + e^x = 0$.

Para hallar las soluciones singulares de esta ecuación, se calcula primero la *CPD* eliminando y' en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - y \cdot y' + e^x = 0 \\ 2y' - y = 0 \end{array} \right\}.$$

Se obtiene $y^2 = 4e^x$.

Se calcula la solución general de la ecuación diferencial despejando y en la ecuación y haciendo el cambio $y' = p$.

Se obtiene $x = \ln p + C$, por lo que la solución general en paramétricas viene dada por:

$$\left. \begin{array}{l} x = \ln p + C \\ y = p + \frac{e^x}{p} \end{array} \right\}.$$

Al eliminar el parámetro p se tiene que $y = e^x \cdot C^{-1} + C$.

Se calcula ahora la *CCD* de esta familia de curvas, eliminando C en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{e^x}{C} + C \\ -\frac{e^x}{C^2} + 1 = 0 \end{array} \right\}.$$

Se obtiene también $y^2 = 4e^x$.

Como las curvas $y = \pm 2 e^{x/2}$ son C -discriminantes y p -discriminantes, son la envolvente del haz de soluciones generales de la ecuación y por lo tanto son soluciones singulares.

Ejemplo 7.3.27: Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y^2 \cdot (2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$.

Para calcular las soluciones singulares de esta ecuación, se calcula la CPD eliminando y' en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y'^2 (2 - 3y)^2 = 4(1 - y) \\ 2y' (2 - 3y)^2 = 0 \end{array} \right\}$$

y se obtiene $(2 - 3y)^2 \cdot (1 - y) = 0$.

Se halla la solución general de la ecuación diferencial considerando x como función de y así $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2 - 3y}{\sqrt{1 - y}}$ y se obtiene:

$$x = y\sqrt{1 - y} + C,$$

que se puede expresar de la forma:

$$(x - C)^2 = y^2 \cdot (1 - y).$$

Se calcula la CCD de este haz de curvas eliminando C en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} (x - C)^2 = y^2(1 - y) \\ 2(x - C) = 0 \end{array} \right\}$$

de donde resulta $y^2 \cdot (1 - y) = 0$.

Comparando los resultados de la CPD y la CCD se tiene que el único

factor común es $(1 - y)$, por lo tanto $y = 1$ es la ecuación de la envolvente y una solución singular de la ecuación diferencial.

El factor $2 - 3y$ que está elevado a 2 en el p -discriminante, como no figura en el C -discriminante, representa el lugar geométrico de los puntos de contacto, que viene dado por la ecuación $2 - 3y = 0$

Por otra parte el factor y no figura en el p -discriminante y está elevado a 2 en el C -discriminante, luego la ecuación $y = 0$ representa el lugar geométrico de los puntos anodales.

Ejercicios

7.45. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y^2 - 4y = 0$.

7.46. Calcular las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y = x \cdot y' + y^2$, que tiene por solución general $y = Cx + C^2$.

7.47. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial:

$$y^2 \cdot y^2 + y^2 = 1,$$

sabiendo que tiene por solución general $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

7.3.10. Aplicaciones

Circuitos eléctricos

En el apartado 7.2.5 de este capítulo se estudió que en un circuito eléctrico formado por una fuerza electromotriz E que impulsa una carga eléctrica y produce una corriente de intensidad I , una resistencia R que se opone a la corriente, un inductor de inductancia L , que se opone a cualquier cambio en la corriente, y un condensador de capacitancia C , que almacena una

carga Q y se opone a la entrada de una carga adicional, aplicando la ley de Kirchhoff, se obtenía la ecuación diferencial:

$$L \cdot \frac{dl}{dt} + R \cdot I + \frac{1}{C} \cdot Q = E.$$

Cuando no existe condensador y E tiene un valor constante E_0 se tiene que $L \cdot \frac{dl}{dt} + R \cdot I = E_0$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con

variables separadas $L \cdot \frac{dl}{dt} = E_0 - R \cdot I$, luego $\frac{dl}{E_0 - RI} = \frac{dt}{L}$, e integrando:

$$-\ln(E_0 - RI) = \frac{Rt}{L} + K.$$

Si se sabe que en el instante $t = 0$, hay una corriente inicial I_0 , la constante K se puede determinar: $K = -\ln(E_0 - R \cdot I_0)$.

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\ln(E_0 - RI) = \frac{Rt}{L} - \ln(E_0 - R \cdot I_0) \Rightarrow E_0 - RI = (E_0 - RI_0)e^{-\frac{Rt}{L}},$$

despejando I se tiene:

$$I = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0 - RI_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Se observa que I tiene una parte constante $\frac{E_0}{R}$ y una parte transitoria

$\left(I_0 - \frac{E_0}{R} \right) e^{-\frac{Rt}{L}}$ que tiende a 0 para valores grandes de t , en cuyo caso límite se

verifica la ley de Ohm: $E_0 = R \cdot I$.

Cuando $I_0 = 0$, se verifica que $I = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$, y si $E_0 = 0$, entonces:

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}.$$

La curva tractriz

Sea T un punto que a partir del origen se desplaza a lo largo de la parte positiva del eje de ordenadas, y que arrastra a un punto P , que parte del eje de abscisas, a lo largo del plano con una cuerda de longitud a . La curva que describe el punto P se denomina **tractriz**.

Si inicialmente T está en el origen de coordenadas y la longitud de $PT = a$, P parte del punto $(a, 0)$.

En un punto $P(x, y)$ cualquiera de la curva $y = f(x)$ se verifica que:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

ecuación diferencial de primer orden que define la curva tractriz.

Integrando y aplicando que la curva pasa por el punto $(a, 0)$ se obtiene la ecuación:

$$y = a \cdot \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

La superficie obtenida al hacer girar esta curva en torno al eje de ordenadas es un modelo para la geometría no euclídea de Lobachevsky.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.28: Resolver la ecuación $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, que rige los procesos

de desintegración en reacciones químicas de primer orden (siendo $k > 0$ el coeficiente de proporcionalidad).

Esta ecuación de primer orden, que surgió en el apartado 7.2.1, es de variables separadas y por tanto $\frac{dm}{m} = -k \cdot dt$. Al integrar ambos miembros de la ecuación se obtiene $\ln m = -k \cdot t + \ln C$ y la solución general de esta ecuación viene dada por $m(t) = C \cdot e^{-kt}$.

Ejemplo 7.3.29: Resolver la ecuación diferencial $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v$.

Esta ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden, que surgió en el apartado 7.2.2, modeliza el proceso de caída de un cuerpo de masa m , sobre el que actúa, además de la fuerza de gravedad, la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, con coeficiente de proporcionalidad k .

La solución de la ecuación proporciona la velocidad, v , del cuerpo al caer.

Se resuelve primero la ecuación diferencial lineal homogénea asociada:

$m \cdot \frac{dv}{dt} + k \cdot v = 0$. Se separan las variables $\frac{dv}{v} = \frac{-k}{m} dt$. Se integra:

$$\ln v = \frac{-k}{m} t + \ln C \Rightarrow v_H(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Se busca una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea por el método de variación de constantes:

$$v_P(t) = C(x) \cdot e^{-\frac{k}{m} t}$$

y se sustituye en la ecuación:

$$m \cdot (C'(x) \cdot e^{-\frac{k}{m} t} + C(x) \cdot (-\frac{k}{m}) e^{-\frac{k}{m} t}) + kC(x) \cdot e^{-\frac{k}{m} t} = m \cdot g \Rightarrow$$

$$m \cdot C'(x) \cdot e^{-\frac{k}{m} t} = m \cdot g \Rightarrow C'(x) = g e^{\frac{k}{m} t},$$

integrando $C(x) = \frac{mg}{k} e^{\frac{k}{m}t}$ y la solución particular buscada es:

$$v_P(t) = \frac{mg}{k}.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Ejercicios

7.48. En la descomposición del azúcar de caña en una disolución de dextrosa y levulosa, la velocidad de transformación es proporcional a la cantidad de azúcar no descompuesta. Si m_0 es la cantidad de azúcar inicial, k el coeficiente de proporcionalidad y $m(t)$ la cantidad transformada en el tiempo t , expresado en minutos, se pide:

- Calcular la ecuación diferencial del proceso.
- El tiempo necesario para transformar todo el azúcar.

7.49. Demostrar que la tractriz es ortogonal a la familia de círculos de radio a y centros en el eje de ordenadas.

7.6. EJERCICIOS

7.50. Integrar la ecuación diferencial $y' = y \cdot |y|$, y hacer un esbozo de la gráfica de las curvas integrales.

7.51. Se supone que por el punto $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ pasa una curva integral y una isoclina de la ecuación $y' = f(x, y)$. Obtener la expresión del ángulo que forman ambas curvas.

7.52. Hallar la curva que pasando por el punto $(1, 1)$ es tal que, para

cada uno de sus puntos, la ordenada del punto de corte de la tangente con el eje OY y la abscisa del punto de corte de la normal con el eje OX , tienen el mismo valor.

- 7.53. Una curva pasa por el punto $(1, 1)$ y el producto de la abscisa de un punto cualquiera de la curva, por la ordenada del punto de corte de la tangente a la curva en dicho punto con el eje OY , vale siempre 3. Obtener el punto donde la curva corta a la recta $x = 2$.

(Solución: $-1/4$).

- 7.54. Determinar la curva que pasa por el punto $(5, 5)$ y es tal que la ordenada en cada punto P es igual a la distancia del origen a la recta normal a la curva en el punto P .

(Solución: $x^2 + y^2 = 10x$).

- 7.55. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y' = 2y^2 - xy$ (Solución: $y = \frac{x}{1 - Cx^2}$).

b) $(-x^2 + y^2)dy = 2xy dx = 0$ (Solución: $1 + x^2y^2 = Cy$).

c) $y' + y + y^2(\sen x + \cos x) = 0$ (Solución: $y = \frac{1}{Ce^x - \cos x}$).

d) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ (Solución: $y = (Cx^2 + x^2 \ln \sqrt{x})^2, y > 0$).

- 7.56. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que admiten un factor integrante que depende sólo de x o sólo de y :

a) $2xy^3 dx + (5x^2y^2 + 3) dy = 0$ (Sol: $\mu = y^2; x^2 \cdot y^5 + y^3 + C = 0$).

b) $-\sen y(\cos x + \sen x)dx + \cos x \cos y dy = 0$
(Sol: $\mu = e^{-x}; e^{-x} \cdot \cos x \cdot \sen y - C = 0$).

c) $(9y^2 - 4x) dx + 6xy dy = 0$ (Sol: $\mu = x^2; 3x^2y^2 - x^4 + C = 0$).

7.57. Integrar la ecuación diferencial $x \cdot y' - 2y = 2x$.

$$(Sol: y = Cx^2 + 2x).$$

7.58. Resolver la ecuación diferencial $y' - y = -2e^{-x}$.

$$(Sol: y = e^{-x} + Ce^x).$$

7.59. Integrar la ecuación diferencial: $x \cdot y' + y + x^2 \cdot y^2 = 0$.

$$(Sol: Cx \cdot y - x^2 \cdot y + 1 = 0).$$

7.60. Resolver la ecuación $\left(\frac{y^2}{x} - y\right)dx + xdy = 0$.

$$(Solución: \ln x = \frac{x}{y} + C)$$

7.61. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $e^x \cdot \cos y = C$.

$$(Solución: e^x \cdot \sen y = C).$$

7.62. Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = Cx^3$.

7.63. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2) \cdot dx - 2x \cdot y \cdot dy = 0$.

7.64. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $(x \cdot y' + y)^2 = y^2 \cdot y'$, sabiendo que su solución general es $y \cdot (C - x) = C^2$.

7.65. Dada la ecuación diferencial $y^2 - y \cdot y' + e^x = 0$, calcular sus soluciones singulares, sabiendo que la solución general de la ecuación es $y = Ce^x + \frac{1}{C}$.

7.66. Hallar las trayectorias ortogonales del haz de curvas $x^2 + y^2 + Cx = 0$.

CAPÍTULO 8

Existencia y unicidad de soluciones

En el capítulo anterior se han introducido las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y se han mostrado los procedimientos a seguir para obtener la solución de distintos tipos de ecuaciones diferenciales, en función de sus características específicas. En estos casos, la existencia de una solución se puede establecer directamente, resolviendo el problema y encontrando la función que verifica las condiciones pedidas. Sin embargo en el caso general no es siempre posible encontrar la solución de una ecuación diferencial y hay que recurrir a la utilización de métodos numéricos que permitan obtener valores aproximados de la solución que se busca. Pero para que estos métodos sean eficaces es preciso asegurar previamente la existencia y unicidad de la solución de lo que se conoce como un problema de valor inicial o problema de Cauchy.

Los teoremas de existencia y unicidad que se presentan en este capítulo garantizan, bajo determinadas condiciones de regularidad, la existencia y la unicidad de la solución sin necesidad de calcularla previamente.

En la *sección 1* se introduce lo que se conoce como problema de valor inicial, o problema de Cauchy, y se presentan conceptos básicos y resultados previos que se utilizarán a lo largo del capítulo. En la *sección 2* se presentan el

teorema de Cauchy-Peano, que garantiza bajo sus hipótesis la existencia de solución de un problema de Cauchy, y el teorema de Picard-Lindelöf, que asegura la unicidad de la solución.

En muchos casos interesa obtener la solución de un problema de valor inicial de forma local, es decir, en un entorno del punto en el que se da la condición inicial. En la *sección 3* se estudian las condiciones para la existencia y la unicidad de soluciones locales, así como la posibilidad de prolongar dichas soluciones a intervalos mas amplios. Cada sección termina con una amplia colección de ejemplos resueltos.

8.1. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMAS PREVIOS

8.1.1. Problema de Cauchy

Sea $f(x, \mathbf{y})$ una función continua, definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y con valores en \mathfrak{R}^n . Sea x_0 un punto del intervalo $[a, b]$. Se considera la ecuación diferencial $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ y el valor de la solución en el punto x_0 , $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$.

Definición 8.1.1:

Un **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy** consiste en la búsqueda de una función $\mathbf{y}(x)$ definida para los valores x del intervalo $[a, b]$, que sea solución de la ecuación diferencial $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$ en $[a, b]$, y que en un punto x_0 del intervalo $[a, b]$ tome el valor \mathbf{y}_0 .

El problema se puede representar de la forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]$$

El propósito de este capítulo es determinar bajo qué condiciones de regularidad para $f(x, y)$ se puede asegurar que el problema de valor inicial así planteado tiene solución y cuándo se puede asegurar que dicha solución es única.

Una primera observación es la siguiente:

Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]$$

es equivalente a encontrar una solución de la ecuación

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

En efecto, si existe una función $y(x)$ que sea solución del problema de Cauchy que se acaba de plantear, debe verificar que $y'(x) = f(x, y(x))$. Por tanto integrando esta expresión e imponiendo la condición $y(x_0) = y_0$ se tiene:

$$\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \Rightarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Recíprocamente, si se deriva la expresión anterior se tiene la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, y el valor de $y(x)$ en el punto x_0 es precisamente y_0 , ya que al tener los mismos límites de integración la integral se anula.

Para asegurar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]$$

tiene solución es suficiente, entonces, demostrar que existe una función $y(x)$ que verifica la ecuación integral.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Para encontrar una solución de esta ecuación se puede definir una transformación T sobre el conjunto de todas las funciones φ continuas en el intervalo $[a, b]$ en \mathfrak{R}^n , de manera que

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

Si existe una función φ tal que $T(\varphi) = \varphi$, es decir, si la transformación T tiene un punto fijo, φ es precisamente la solución del problema de Cauchy propuesto.

8.1.2. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo

No toda transformación tiene un punto fijo. Pero existen transformaciones

para las que se puede garantizar su existencia. Un ejemplo de ellas lo constituyen las transformaciones contractivas, que serán de utilidad para garantizar la existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Definición 8.1.2.

Sea T una aplicación definida de un espacio métrico E en sí mismo. T es una **aplicación contractiva** si existe α , $0 < \alpha < 1$, tal que para todo $x, y \in E$ se verifica que $d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$.

De la propia definición se deduce que una aplicación contractiva es continua. El siguiente teorema asegura la existencia de un punto fijo para las transformaciones contractivas.

Teorema 8.1.1: Teorema del punto fijo de una aplicación contractiva

Toda aplicación contractiva T definida de un espacio métrico completo E en sí mismo tiene un único punto fijo. Es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $T(x) = x$.

Demostración.

Sea $x_0 \in E$ un punto de partida. Si se aplica la transformación T sucesivamente se tiene: $T(x_0) = x_1$, $T(x_1) = x_2$, ..., $T(x_n) = x_{n+1}$...

La sucesión resultante es una sucesión de Cauchy, pues en efecto, se tiene que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Utilizando la propiedad triangular de la distancia se obtiene que la

distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión es

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + \dots + \alpha^n) \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(x_1, x_0).$$

Como α es menor que 1, para un valor de n suficientemente grande la distancia $d(x_{n+k}, x_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera; por tanto la sucesión es de Cauchy, y como E es un espacio métrico completo la sucesión es convergente.

Sea x el límite de la sucesión. Como T es continua

$$T(x) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Se tiene entonces que el límite de la sucesión es un punto fijo de T .

Sólo falta demostrar que es el único punto fijo de la transformación. Esto es así porque si existiera otro punto fijo z distinto de x , al ser T contractiva

$$d(x, z) = d(T(x), T(z)) \leq \alpha \cdot d(x, z) < d(x, z),$$

lo cual es una contradicción. Por tanto el punto fijo es único. \square

Una observación de interés es que la demostración anterior proporciona un camino para hallar el punto fijo de una transformación contractiva: basta aplicar la transformación a un punto arbitrario de E , volverla a aplicar de manera indefinida y calcular su límite.

8.1.3. Funciones equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà

El teorema de Ascoli-Arzelà, que se presenta a continuación, tiene una gran importancia por sus muchas aplicaciones. Entre ellas se utilizará en la *sección 8.2* para demostrar el teorema de existencia de Cauchy-Peano. Establece condiciones sobre una familia de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathfrak{R}^n$ bajo las cuales se puede asegurar que existe una subsucesión uniformemente convergente. Se presenta únicamente el enunciado del teorema, porque la demostración excede de los objetivos de este libro.¹

El teorema de Ascoli-Arzelà es de alguna manera similar, adaptado en este caso a funciones, al teorema de Bolzano-Weierstrass, que asegura que un conjunto infinito números reales contenido en un subconjunto de números reales cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente.

En las hipótesis del teorema de Ascoli-Arzelà aparecen los conceptos de acotación uniforme y equicontinuidad de una familia de funciones, que se enuncian a continuación.

Definición. 8.1.3.

Sea $\{\varphi_\alpha\}$ una familia de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathfrak{R}^n$ con valores en \mathfrak{R}^n . Se dice que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ está **uniformemente acotada** en E si existe un número real $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in A$ se verifica $|\varphi_\alpha(x)| \leq M$.

¹ La demostración se puede ver en M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Ed. Alhambra. 1975.

Ejemplos:

La sucesión $\varphi_n(x) = \cos nx$ está uniformemente acotada en \mathfrak{R} porque existe $M = 1$ tal que para todo $x \in \mathfrak{R}$ y todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $|\cos nx| \leq 1$.

En cambio, la sucesión $\varphi_n(x) = \frac{\cos nx}{x}$ está acotada en cada punto del intervalo $(0, 1)$, pero no está uniformemente acotada en $(0, 1)$.

Por último, la sucesión $\varphi_n(x) = n \cdot x$ no está acotada uniformemente ni puntualmente en $(0, 1)$.

Definición. 8.1.4 .

La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathfrak{R}^n$ es **equicontinua** en E si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in E$ situados entre sí a una distancia menor que δ , $|x_1 - x_2| < \delta$, y todo $\alpha \in A$ se verifica $|\varphi_\alpha(x_1) - \varphi_\alpha(x_2)| < \varepsilon$.

De la propia definición se deduce que la equicontinuidad exige que cada una de las funciones de la familia sea uniformemente continua en E , y que además para cada valor fijado de ε el valor de δ preciso sea el mismo para cada una de las funciones de la familia.

Ejemplos:

La sucesión $\varphi_n(x) = n \cdot x$ no es una familia equicontinua de funciones en el intervalo $[0, 1]$, y sin embargo cada una de las funciones $\varphi_n(x) = n \cdot x$ es uniformemente continua en $[0, 1]$.

La sucesión $\varphi_n(x) = x^n$ es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, pero no lo es en el intervalo $[0, 1]$. (Se demuestra en el *ejemplo 8.1.1*).

Se puede demostrar sin demasiada dificultad que si una sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ de funciones continuas converge uniformemente en un conjunto compacto $E \subset \mathfrak{R}$ a una función φ , entonces $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. (*Ejercicio 8.1*).

El teorema de Ascoli-Arzelà en cierta manera permite asegurar resultados en sentido inverso.

Teorema 8.1.2: Teorema de Ascoli-Arzelà

Sea A un conjunto de índices infinito, y sea $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones definidas en un conjunto acotado $E \subset \mathfrak{R}^n$ con valores en \mathfrak{R}^n tales que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es equicontinua y uniformemente acotada en E . Entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n(x)}\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$, que converge uniformemente en E .

8.1.4. Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz se denomina así porque fue introducida por R. Lipschitz en 1876. Garantiza a las funciones que la verifican un grado de regularidad intermedio entre la continuidad y la derivabilidad. Se presenta en este capítulo porque se utilizará como condición suficiente para asegurar la unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Definición 8.1.5.

Sea $f(\mathbf{x})$ una función definida en un subconjunto $D \subset \mathfrak{R}^n$, con valores en \mathfrak{R}^n . Se dice que $f(\mathbf{x})$ verifica la **condición de Lipschitz**, o que es **lipschitziana** en D , si existe una constante L tal que para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$,

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq L \cdot |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|.$$

Las funciones que verifican la condición de Lipschitz se llaman funciones **globalmente lipschitzianas** en D , o simplemente **lipschitzianas** en D .

La constante L se denomina **constante de Lipschitz** de la función en D .

La condición de Lipschitz puede ser una condición demasiado fuerte si lo que se estudia es un problema local. En estos casos es suficiente que se verifique una condición de Lipschitz local, que se define a continuación.

Definición 8.1.6.

Sea $f(\mathbf{x})$ una función definida en un subconjunto abierto $D \subset \mathfrak{R}^n$, con valores en \mathfrak{R}^n . Se dice que $f(\mathbf{x})$ es **localmente lipschitziana** en D si para cada rectángulo $R \subset D$ existe una constante L tal que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R$

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq L \cdot |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|.$$

De la propia definición se deduce que si una función $f(\mathbf{x})$ es lipschitziana (local o globalmente) en un dominio D , es continua en D . En sentido inverso, existen funciones continuas que no son lipschitzianas (*ejemplo 8.1.4*). La condición de Lipschitz es por tanto una condición mas fuerte que la continuidad.

En cuanto a su relación con la derivada, se puede medir sin mas que

tener en cuenta que la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable indica que el cociente incremental

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}, \quad x_1, x_2 \in D.$$

está acotado por la constante de Lipschitz L en todo el dominio D de definición de la función. Esto lleva a pensar que la condición de Lipschitz está directamente relacionada con el comportamiento de la derivada o las derivadas parciales de la función, si es que existen.

La condición de Lipschitz se utilizará en las *secciones 2 y 3* de este capítulo para funciones $f(x, y)$ definidas en un subconjunto D de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, que verifican la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable, y , (local o globalmente).

La siguiente proposición proporciona una condición suficiente para que una función verifique la condición de Lipschitz.

Proposición 8.1.3:

Si $f(x, y)$ es continua en $D \subset \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, existen las derivadas parciales respecto de la segunda variable y están acotadas en D , entonces $f(x, y)$ verifica la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.

Demostración:

Por simplificar se hace para $n = 1$, es decir, para $y \in \mathfrak{R}$.

Sea $M = \sup\left\{ \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| : (x, y) \in D \right\}$, y sean $(x, y_1), (x, y_2) \in D$. El teorema

del valor medio, considerada f como función de y , asegura que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial y} \right| \cdot |y_1 - y_2|, \quad y_1 \leq \xi \leq y_2.$$

Por tanto $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M \cdot |y_1 - y_2|$, para todo par de puntos (x, y_1) , $(x, y_2) \in D$. Se tiene entonces que $f(x, y)$ verifica la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz $L = M$. \square

Este resultado permite asegurar que si una función tiene derivadas parciales respecto de la segunda variable y están acotadas en un dominio D , es lipschitziana respecto de dicha variable en D . Esto tiene especial interés porque la condición de Lipschitz no es en muchos casos una propiedad fácil de verificar directamente de la definición.

No obstante, es preciso tener en cuenta que una función puede verificar la condición de Lipschitz y sin embargo no ser derivable. Así, por ejemplo, la función $f(x, y) = |y|$ es lipschitziana respecto de la segunda variable en todo \mathfrak{R}^2 , ya que para todo $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}$ y todo $x \in \mathfrak{R}$ se tiene que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|.$$

por lo que es lipschitziana respecto de la variable y en todo \mathfrak{R}^2 , con constante de Lipschitz $L = 1$. Pero no es derivable respecto de y en ningún punto de la recta $y = 0$.

Sin embargo se puede asegurar que si una función es lipschitziana respecto de la variable y en D , y existen sus derivadas parciales respecto de y en D , entonces las derivadas parciales necesariamente tienen que estar

acotadas en D .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.1.1: Demostrar que la familia $\varphi_n(x) = x^n$ es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, pero no lo es en el intervalo $[0, 1]$.

Es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ que verifiquen $|x_1 - x_2| < \delta$, y para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene que $|x_1^n - x_2^n| < \varepsilon$.

En efecto,

$$|x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2| \cdot |x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \leq |x_1 - x_2| \frac{n}{2^{n-1}} \leq |x_1 - x_2|$$

Basta entonces tomar $\delta = \varepsilon/2$ para que se verifique que $|x_1^n - x_2^n| < \varepsilon$.

No es equicontinua en el intervalo $[0, 1]$:

En efecto, para cada $x \in [0, 1]$, $|\varphi_n(1) - \varphi_n(x)| = 1 - x^n$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Para todo valor de δ , $0 < \delta < 1$, el punto $x = 1 - \delta/2$ es tal que

$|1 - x| < \delta$ y sin embargo $1 - x^n = 1 - (1 - \delta/2)^n > \varepsilon$, siempre que n sea suficientemente grande.

Ejemplo 8.1.2: Demostrar que $f(x) = x^2$ es lipschitziana en $[0, 1]$.

Sean $x_1, x_2 \in [0, 1]$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq 2 \cdot |x_1 - x_2|.$$

Por tanto, $f(x) = x^2$ es lipschitziana en $[0, 1]$, con constante de Lipschitz $L = 2$.

Ejemplo 8.1.3: Demostrar que $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ es localmente lipschitziana en \mathfrak{R} .

La condición $n > 1$ es necesaria, pues si $n = 1$, la función $f(x) = x$ es globalmente lipschitziana en \mathfrak{R} con constante de Lipschitz $L = 1$.

Sea $x_0 \in \mathfrak{R}$, y sea $I = [x_0 - r, x_0 + r]$. Dados $x_1, x_2 \in I$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2| \cdot |x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \leq |x_1 - x_2| \cdot n \cdot (x_0 + r)^{n-1} \leq L \cdot |x_1 - x_2|.$$

Por tanto, para cada punto $x_0 \in \mathfrak{R}$ y cada intervalo $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ se verifica la condición de Lipschitz con una constante $L = n \cdot (x_0 + r)^{n-1}$.

Es importante observar que la constante depende del punto x_0 y del tamaño del intervalo. Esto impide asegurar que la función sea globalmente lipschitziana en \mathfrak{R} . Y en efecto no lo es pues, si x_1 y x_2 son ≥ 0 , al ser

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2| \cdot |x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \geq |x_1 - x_2| \cdot n \cdot (\min(x_1, x_2))^{n-1},$$

el factor $(\min(x_1, x_2))^{n-1}$ se puede hacer todo lo grande que se quiera sin mas

que tomar x_1 y x_2 suficientemente alejados del origen.

Ejemplo 8.1.4: Demostrar que la función $f(x, y) = y^{1/3}$ no es lipschitziana respecto de la segunda variable en \mathfrak{R}^2 .

La función $f(x, y) = y^{1/3}$ es continua en \mathfrak{R}^2 pero no es lipschitziana en ningún rectángulo que tenga intersección no vacía con la recta $y = 0$. En efecto,

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| = |y_1^{1/3} - 0| = \frac{1}{|y_1^{2/3}|} |y_1|,$$

y el término $\frac{1}{|y_1^{2/3}|}$ no está acotado por ninguna constante en el rectángulo,

pues para valores de y_1 próximos a cero el valor tiende a infinito.

Ejemplo 8.1.5: Sea $f(x, y) = \min(|x|, y)$ para $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$. Demostrar que es lipschitziana respecto de y en todo \mathfrak{R}^2 .

La derivada parcial de f respecto de la variable y es 0 si $|x| < y$, vale 1 si $|x| > y$, y en $|x| = y$ no existe. Sin embargo la función es lipschitziana. En efecto:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq y_1, y_2 \\ |y_1 - |x|| & \text{si } y_1 \leq |x| \leq y_2 \\ ||x| - y_2| & \text{si } y_2 \leq |x| \leq y_1 \\ |y_1 - y_2| & \text{si } y_1, y_2 \leq |x| \end{cases}$$

En cada uno de los casos se verifica que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

y por tanto la función es lipschitziana respecto de y en todo \mathfrak{R}^2 con constante de Lipschitz $L = 1$.

Ejercicios

8.1. Demostrar que si una sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ de funciones continuas converge uniformemente en un conjunto compacto $E \subset \mathfrak{R}$ a una función φ , entonces $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua.

8.2. Estudiar si las siguientes sucesiones de funciones son equicontinuas o uniformemente acotadas en el intervalo $(0, 1)$.

a) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{x}$.

b) $f(x) = \operatorname{sen} n \cdot x$.

8.3. Estudiar si las funciones siguientes verifican la condición de Lipschitz (local o global) en \mathfrak{R} .

a) $f(x) = \cos x$.

b) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$.

8.4. Estudiar si las funciones siguientes verifican la condición de Lipschitz (local o global) respecto de la variable y .

a) $f(x, y) = 1 + y^2$.

b) $f(x, y) = 1 + x^2$.

c) $f(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}$.

$$d) f(x, y) = \frac{x}{1+y^2}.$$

8.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN. SOLUCIÓN GLOBAL

Sea $f(x, y)$ una función continua, definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y con valores en \mathfrak{R}^n . Sea x_0 un punto del intervalo $[a, b]$. Se plantea a continuación el estudio de las condiciones de regularidad de la función $f(x, y)$ bajo las cuales se puede asegurar que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, b]$$

tiene solución y cuándo se puede asegurar que la solución es única.

Se ha comprobado en la sección anterior que el problema es equivalente a la existencia de solución de la ecuación integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

8.2.1. Teorema de existencia global. Teorema de Cauchy-Peano

El Teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de solución si la

función $f(x, y)$ es continua y acotada en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$.

Teorema 8.2.1: Teorema de Cauchy-Peano

Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, x \in [x_0, b]$$

donde la función $f(x, y): [x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es **continua** y **acotada** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene al menos una solución.

Demostración:

Existen distintas demostraciones de este teorema. La que se presenta aquí se debe a Tonelli [1925]².

Se puede suponer por simplificar que el intervalo $[x_0, b] = [0, 1]$.

La demostración se basa en la construcción de una sucesión de funciones y necesita el Teorema de Ascoli-Arzelà.

La primera función de la familia es constante: $y_1(x) = y_0, 0 \leq x \leq 1$.

La segunda función se define como:

² Esta demostración se ha obtenido de la que aparece en el libro: M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Editorial Alhambra. 1975.

$$y_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y_0 + \int_0^{x-1/2} f(s, y_2(s)) ds & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Se puede observar que la función $y_2(x)$ es constante en la primera mitad del intervalo, y en la segunda mitad se define a partir de los valores de $y_2(x)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

De manera sucesiva, para definir $y_k(x)$ se divide el intervalo $[0, 1]$ en k subintervalos del mismo tamaño, y en cada uno de ellos se define $y_k(x)$ a partir de los valores ya definidos en el subintervalo anterior, de la forma:

$$y_k(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ y_0 + \int_0^{x-1/k} f(s, y_k(s)) ds & \text{si } \frac{i}{k} \leq x \leq \frac{i+1}{k}, i = 1, 2, \dots, k-1 \end{cases}$$

Como la función $f(x, y)$ está acotada en $[0, 1] \times \mathfrak{R}^n$, existe M tal que:

$$|f(x, y)| \leq M \text{ en } [0, 1] \times \mathfrak{R}^n.$$

Se tiene entonces que las funciones $y_k(x)$ que se acaban de definir están uniformemente acotadas en $[0, 1]$, pues para todo k y todo $x \in [0, 1]$ se verifica que $|y_k(x)| \leq |y_0| + M$.

Además, para todo par $x_1, x_2 \in [0, 1]$ y todo $k \in \mathbf{N}$, se tiene

$$|y_k(x_1) - y_k(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|,$$

y por tanto la sucesión de funciones $\{y_k(x)\}$ es equicontinua.

El teorema de Ascoli-Arzelà asegura que existe una subsucesión $\{y_{k^*}(x)\}$ que converge uniformemente a una función $y(x)$ en $[0, 1]$. Cada una de las funciones de la subsucesión se puede escribir de la forma

$$y_{k^*}(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y_{k^*}(s)) ds - \int_{x-1/k^*}^x f(s, y_{k^*}(s)) ds.$$

Al hacer tender k^* a ∞ la parte de la izquierda de la igualdad tiende a $y(x)$.

Teniendo en cuenta que la función f es continua y que la convergencia de $y_{k^*}(x)$ a la función $y(x)$ es uniforme, se tiene, para todo $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x f(s, y_{k^*}(s)) ds \rightarrow \int_0^x f(s, y(s)) ds.$$

Como la función f está acotada:

$$\left| \int_{x-1/k^*}^x f(s, y_{k^*}(s)) ds \right| \leq M \cdot \frac{1}{k^*} \rightarrow 0.$$

Se tiene entonces que para todo $x \in [0, 1]$:

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(s, y(s)) ds,$$

con lo cual la función $y(x)$, límite de la subsucesión $y_{k^*}(x)$, es solución del problema de Cauchy propuesto. \square

8.2.2. Teorema de existencia y unicidad global. Teorema de Picard–Lindelöf

El teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de solución del problema de Cauchy propuesto. Pero no asegura la unicidad: pueden existir distintas funciones que verifiquen el mismo problema de Cauchy.

El teorema de Picard–Lindelöf resuelve el problema de la unicidad de solución si la función $f(x, \mathbf{y})$ verifica además una condición mas fuerte que la requerida en las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano: la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.

Teorema 8.2.2: Teorema de Picard–Lindelöf

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, b]$$

donde la función $f(x, \mathbf{y}): [x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es **continua** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$ y verifica la **condición de Lipschitz** respecto de la segunda variable en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$, es decir, existe una constante L tal que para todo $x \in [x_0, b]$ y todo $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathfrak{R}^n$ se verifica que $|f(x, \mathbf{y}_1) - f(x, \mathbf{y}_2)| \leq L \cdot |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución.

Demostración:

Se considera el espacio vectorial $E = \mathcal{C}([x_0, b], \mathfrak{R}^n)$ de las funciones continuas en el intervalo $[x_0, b]$. Dadas dos funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, se define la

distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{e^{-K(x-x_0)} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x \in [x_0, b]\},$$

siendo K una constante fija tal que $K > L$. Se puede demostrar fácilmente que es una distancia y que el espacio vectorial E con esta distancia es completo. Se tiene entonces que E es un espacio métrico completo.

Se define ahora sobre E la aplicación T tal que dada la función $\varphi \in E$,

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

$T(\varphi)$ es también una función continua definida en el intervalo $[x_0, b]$, y por tanto pertenece a E .

Entonces, si $\varphi_1, \varphi_2 \in E$,

$$\begin{aligned} e^{-K(x-x_0)} \cdot |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| &\leq \int_{x_0}^x e^{-K(x-x_0)} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| \cdot ds = \\ &\int_{x_0}^x e^{-K(x-s)} \cdot e^{-K(s-x_0)} \cdot |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| \cdot ds \leq L \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)} \cdot ds \\ &\leq \frac{L}{K} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$d(T(\varphi_1), T(\varphi_2)) = \sup\{e^{-K(x-x_0)} \cdot |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x \in [x_0, b]\} \leq \frac{L}{K} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como $K > L$, la aplicación es contractiva y tiene un único punto fijo que es

la única solución del problema de valor inicial propuesto. \square

Observación: Si el problema de Cauchy es de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [a, x_0]$$

el teorema anterior se verifica también y el razonamiento sigue siendo válido.

Únicamente hay que modificar la definición de distancia

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{e^{-K(x_0-x)} \cdot |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x \in [x_0, b]\},$$

para que las acotaciones sigan siendo válidas.

Como ya se ha comentado en la *sección 1* de este capítulo, la condición de Lipschitz en muchos casos no es fácil de determinar. La *proposición 8.1.3* asegura que la condición de Lipschitz se verifica si existe la derivada respecto de la variable y , y está acotada. Se tiene entonces demostrado el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Corolario 8.2.3:

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, b]$$

donde la función $f(x, y): [x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es **continua** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$ y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

existe y es continua en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución.

Este teorema tiene utilidad pues aunque es más restrictivo que el teorema de Picard-Lindelöf, suele ser más fácil demostrar la continuidad de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ que probar directamente que se verifica la condición de Lipschitz.

8.2.3. Iterantes de Picard

El teorema de Picard-Lindelöf proporciona también un método para obtener la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [x_0, b]$$

El procedimiento se conoce como **método de las aproximaciones sucesivas** o de las **iterantes de Picard**. Se comienza tomando una función arbitraria $\varphi_0(x)$ del espacio métrico $E = \mathcal{C}([x_0, b], \mathfrak{R}^n)$, que verifique la condición inicial del problema, por ejemplo $\varphi_0(x) \equiv y_0$, y se aplica la transformación:

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds.$$

Se tiene entonces:

$$\varphi_1(x) = T\varphi_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds.$$

La función $\varphi_2(x)$ se obtiene de la misma forma, a partir de $\varphi_1(x)$, y en general:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Se genera así una sucesión de funciones $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... que verifican la condición inicial del problema pero en principio no verifican la ecuación diferencial. Si después de un número finito de pasos, por ejemplo p , se tiene que $\varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x)$, entonces la función $\varphi_p(x)$ es solución del problema de Cauchy propuesto. En caso contrario el proceso es infinito y hay que obtener entonces el punto fijo de la transformación, es decir, la función φ que verifica que $T\varphi = \varphi$, calculando el límite de la sucesión.

Observación:

La condición de Lipschitz garantiza que la transformación

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

es contractiva y por tanto existe un único punto fijo que es la solución del problema de Cauchy propuesto. Pero esta transformación está perfectamente definida si la función $f(x, y)$ es continua y está acotada, aunque no sea lipschitziana, es decir, si verifica las hipótesis del teorema de existencia de Cauchy-Peano. Cabe entonces pensar si partiendo de una función continua definida en el intervalo correspondiente, la sucesión de funciones obtenida como resultado de aplicar sucesivamente la transformación T converge a la solución del problema. En general esto no es cierto, como se puede ver en el *ejemplo 8.2.4*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.2.1: Estudiar si es posible aplicar los teoremas de existencia y unicidad al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$.

La función $f(x, y) = y$ es continua en \mathfrak{R}^2 . Además para todo par de puntos $(x, y_1), (x, y_2)$ de \mathfrak{R}^2 se verifica que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2|$. Se tiene entonces que f es lipschitziana con constante $L = 1$, y por tanto por el teorema de Picard–Lindelöf se puede asegurar que el problema tiene una única solución definida en toda la recta real.

Ejemplo 8.2.2: Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sea $\varphi_0(x) = 1$. Se construye a partir de φ_0 la sucesión φ_n de funciones definidas mediante la transformación:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1 ds = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

⋮

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\right) ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Se tiene entonces que la sucesión de funciones φ_n así construida coincide con la sucesión de las sumas parciales de la serie que define la función $y(x) = e^x$. Por consiguiente, la sucesión $\varphi_n(x)$ converge a la función $y(x) = e^x$, que es la solución del problema de Cauchy propuesto.

Ejemplo 8.2.3: Estudiar si es posible aplicar los teoremas de existencia y unicidad al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para asegurar la existencia y la unicidad de solución.

La función $f(x, y) = y^2$ es continua en \mathfrak{R}^2 . Para ver si es lipschitziana se toma un par de puntos (x, y_1) y (x, y_2) arbitrarios de \mathfrak{R}^2 . Se tiene que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2|$$

El valor de $|y_1 + y_2|$ crece indefinidamente si los valores de y_1 e y_2 crecen.

Por tanto la función $f(x, y) = y^2$ no es lipschitziana en \mathbb{R}^2 y no se puede aplicar el teorema de Picard–Lindelöf para asegurar la existencia y unicidad de solución. Tampoco se puede aplicar el teorema de Cauchy-Peano, puesto que la función $f(x, y) = y^2$, aunque es continua en \mathbb{R}^2 , no está acotada en \mathbb{R}^2 .

Esto no quiere decir, sin embargo, que el problema no tenga solución en ningún intervalo de la recta real que contenga al origen, o que no sea única. En el *ejemplo 8.3.1.* de la siguiente sección de este capítulo se estudia de nuevo este problema de manera local, y se demuestra que existe una única solución definida en un intervalo I de la recta real centrado en 0.

Ejemplo 8.2.4: Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}, (x,$

$$y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \text{ siendo } f(x, y) = \begin{cases} 2x, y \leq 0 \\ 2x - \frac{4y}{x}, 0 < y < x^2 \\ -2x, x^2 \leq y \end{cases}$$

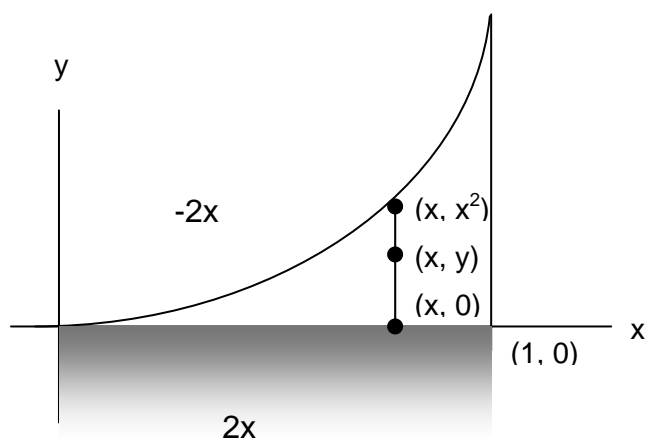


Figura 8.1: Gráfica de la función del *ejemplo 8.2.4.*

- a) Comprobar que verifica las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano.
- b) Aplicar el método de las iterantes de Picard, con $\varphi_0(x) = 0$, y estudiar si

la sucesión resultante es convergente o contiene alguna subsucesión que converja a la solución del problema de Cauchy propuesto.

c) Demostrar que no es lipschitziana.

d) Demostrar que el problema tiene una única solución.

a) La función $f(x, y)$ es continua y está acotada en $[0, 1] \times \mathfrak{R}$. Existe entonces al menos una solución.

b) Las iterantes de Picard se construyen a partir de $\varphi_0(x) = 0$.

$$\varphi_1(x) = \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x 2s ds = x^2,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x f(s, s^2) ds = \int_0^x -2s ds = -x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x f(s, -s^2) ds = \int_0^x 2s ds = x^2,$$

⋮

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f(s, (-1)^n s^2) ds = \int_0^x (-1)^{n+1} 2s ds = (-1)^{n+1} x^2.$$

La sucesión de las iterantes de Picard así construida, $\varphi_n(x) = (-1)^{n+1} x^2$, no es convergente. Contiene dos subsucesiones convergentes, $\varphi_{2n}(x) = -x^2$, y $\varphi_{2n+1}(x) = x^2$, pero ninguna de las funciones x^2 o $-x^2$ es solución de la ecuación diferencial.

c) Como la sucesión φ_n no es convergente, la función $f(x, y)$ no puede ser lipschitziana, ya que si lo fuera, la transformación que genera la sucesión φ_n sería contractiva y por tanto convergería a un punto fijo.

d) Sin embargo, aunque $f(x, y)$ no sea lipschitziana, como $f(x, y)$ es decreciente respecto de la segunda variable, el problema así planteado tiene una única solución. En efecto si existieran dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, del problema propuesto, se podría definir la función

$$h(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2 \geq 0, \quad h(0) = 0.$$

Se tiene entonces:

$$h'(x) = 2(y_1(x) - y_2(x)) \cdot (y_1'(x) - y_2'(x)) = 2(y_1(x) - y_2(x)) \cdot (f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))) \leq 0,$$

por ser f decreciente respecto de la segunda variable.

Como $h(0) = 0$ y su derivada es menor o igual que 0, entonces necesariamente $h(x) \leq 0$. Por consiguiente, $h(x) = 0$, y entonces $y_1(x) = y_2(x)$. Se puede comprobar fácilmente que la solución buscada es

$$y(x) = \frac{x^2}{3}.$$

Ejercicios

8.5. Sea $f(x, y) = \min(|x|, y)$ para $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$. Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución, para todo (x_0, y_0) .

- 8.6. Demostrar que existe una función $f(x)$ continua en el intervalo $[0, 1]$, tal que verifica la ecuación:

$$f(x) = \int_0^x s^2 \operatorname{sen} f(s) ds.$$

Estudiar si la solución es única.

- 8.7. Deducir condiciones sobre $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ para que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tenga una única solución, para $(x_0, y_0) \in R = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

- 8.8. Aplicar el método de las Iterantes de Picard para obtener la solución del problema

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en $x \in [0, 2]$, y comparar las aproximaciones sucesivas con la solución exacta obtenida directamente.

8.3. PROBLEMA DE CAUCHY. SOLUCIÓN LOCAL

8.3.1. Teorema de existencia y unicidad local de soluciones

Los teoremas anteriores se pueden aplicar a problemas de valor inicial en los que la función $f(x, y)$ está definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y es suficientemente buena en todo su dominio de definición. Sin embargo, en muchas ocasiones la función $f(x, y)$ que aparece en una ecuación diferencial no está definida en toda la región $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$, o no es suficientemente buena en todo el dominio, pero sí lo es en un subconjunto que contenga al punto (x_0, y_0) . En este caso los teoremas de esta sección aseguran, bajo las correspondientes condiciones de regularidad, la existencia y unicidad de solución en un intervalo centrado en el punto x_0 . El razonamiento se presenta para $n = 1$ por una mayor simplicidad, pero los resultados son válidos para todo n .

Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en el que la función

$f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathfrak{R}^2$. Al ser continua en un conjunto compacto, está acotada. Sea M una cota de la función:

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in R\}.$$

Se supone también que el valor M representa una cota superior para las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones $y(x)$ del problema de valor inicial en cada punto (x, y) de R .

Se define el intervalo $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, siendo α tal que $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

La amplitud del intervalo, α , se escoge de esta manera con el fin de poder asegurar que la gráfica de la solución buscada esté contenida entre las rectas

$$y - y_0 = \pm M \cdot (x - x_0).$$

Esto es cierto porque por una parte la pendiente de la solución que se busca debe ser menor o igual que M , y por otra las dos rectas anteriores cortan a los lados $y_0 \pm b$ precisamente en los puntos $x_0 \pm \frac{b}{M}$.

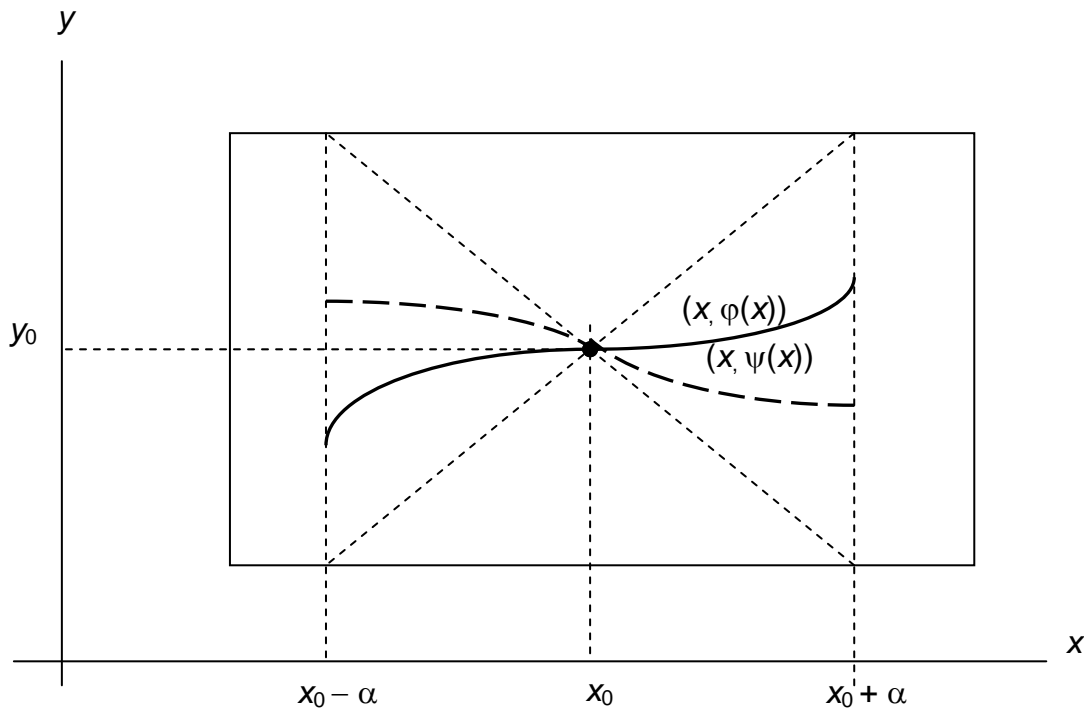


Figura 8.2: Región definida para una solución local de un problema de valor inicial

El intervalo así definido verifica que si $x \in I$, la gráfica de la solución que pasa por el punto (x_0, y_0) está contenida en la región de la figura formada por los dos triángulos unidos por un vértice común en el punto (x_0, y_0) .

Sea ahora E el espacio de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, tales que su gráfica está contenida en la región

formada por los dos triángulos de la *figura 8.2*, es decir,

$$E = \{\varphi(x) \in \mathcal{C}(I): y_0 - M \cdot (x - x_0) \leq \varphi(x) \leq y_0 + M \cdot (x - x_0)\}.$$

Se puede comprobar sin dificultad que el conjunto E así definido es un espacio métrico completo con la distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

El espacio métrico E así definido se va a utilizar para garantizar, bajo las hipótesis correspondientes, la existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial.

Teorema 8.3.1: Teorema de existencia y unicidad local

Sea D un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^2 . Se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $(x_0, y_0) \in D$. Si la función $f(x, y)$ está definida en D , es continua en D y es localmente Lipschitziana respecto de la segunda variable en D , con constante de Lipschitz L , existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y existe una única función $\varphi(x)$ definida en I que es solución del problema de valor inicial propuesto.

Demostración:

Sea R un rectángulo con centro en el punto (x_0, y_0) , $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $R \subset D$. Sea E el espacio métrico completo de las funciones continuas definidas en el intervalo $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$, tales que:

$$E = \{\varphi(x) \in \mathcal{C}(I): y_0 - M(x - x_0) \leq \varphi(x) \leq y_0 + M(x - x_0)\},$$

Se define sobre E la aplicación T tal que dada la función $\psi \in E$,

$$T\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi(s)) ds.$$

Se observa que $T\psi$ es también una función definida y continua en el intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Además se tiene que:

$$T\psi(x) \leq y_0 + \int_{x_0}^x M ds = y_0 + M(x - x_0)$$

$$T\psi(x) \geq y_0 - \int_{x_0}^x M ds = y_0 - M(x - x_0).$$

Por tanto, si $\psi \in E$, $T\psi$ también pertenece a E y T es entonces una aplicación que transforma el conjunto E en sí mismo. Si se demuestra que T es contractiva, el *teorema 8.1.1* asegura la existencia de un único punto fijo φ de la transformación:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds,$$

que es precisamente la única solución del problema de valor inicial propuesto.

Para probar el teorema basta entonces demostrar que la transformación

T es contractiva.

Sean φ_1 y $\varphi_2 \in E$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} d(T\varphi_1, T\varphi_2) &= \sup_{x \in I} |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))) \cdot ds \right| \\ &\leq \sup_{x \in I} \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \cdot ds \leq L \cdot \sup_{x \in I} \left[\sup_{s \in I} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \cdot \int_{x_0}^x ds \right] = \\ &L \cdot \alpha \cdot d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

La aplicación es pues contractiva si $L \cdot \alpha < 1$. Basta entonces elegir α de manera que se verifique que $\alpha < \min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M})$, y el teorema está demostrado sin mas que tomar $h = \alpha$. \square

Se puede también en el caso local sustituir la condición de Lipschitz local a través de la *proposición 8.1.4*, por la existencia y continuidad de la derivada parcial de f respecto de y , obteniéndose un teorema mas restrictivo, pero en cambio mas fácil de aplicar.

Corolario 8.3.2: **Existencia y unicidad local**

Sea D un subconjunto abierto de \mathfrak{R}^2 . Se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $(x_0, y_0) \in D$. Si la función $f(x, y)$ está definida en D , y las funciones f y $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ son **continuas** en D , entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y existe una única función $\varphi(x)$ definida en I que es solución del problema de valor inicial propuesto.

8.3.2. Teorema de existencia local de soluciones

Si en el *teorema 8.3.1* se elimina la condición de Lipschitz no se puede garantizar la unicidad, pero si se puede asegurar la existencia de la solución.

Teorema 8.3.3: Teorema de existencia local

Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en R , existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y existe una función $\varphi(x)$ que es solución del problema de valor inicial para todo $x \in I$.

La demostración de este teorema excede el nivel de este libro.³

8.3.3. Prolongación de soluciones

Para terminar se considera el problema de la prolongación de una solución de un problema de Cauchy. Los teoremas anteriores aseguran la existencia y unicidad o la existencia de solución en un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. La pregunta ahora es si la solución se puede extender a un intervalo mas amplio que el intervalo I .

³ La demostración de este teorema puede verse en los libros: 1) M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Ed. Alhambra. 1975. 2) C. Fernández y J. M. Vegas. Ecuaciones diferenciales II. Ed. Pirámide. 1996.

Definición 8.3.1:

Sea $\varphi(x)$ una solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, definida

en un intervalo I_φ de la recta real que contiene al punto x_0 . La función $\psi(x)$ es una **prolongación** de $\varphi(x)$ si $\psi(x)$ es también solución del problema de valor inicial en un intervalo I_ψ que contiene propiamente a I_φ , ($I_\varphi \subset I_\psi$, $I_\varphi \neq I_\psi$) y $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I_\varphi$.

Definición 8.3.2:

Sea $\varphi(x)$ una solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en el

intervalo I_φ . Se dice que $\varphi(x)$ es una **solución maximal** si **no** existe ninguna prolongación de $\varphi(x)$.

El teorema que se enuncia a continuación asegura que si se verifican las condiciones del *teorema 8.3.1*, el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene una única solución maximal.

Teorema 8.3.4.

Sea $f(x, y)$ una función definida, continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable en un conjunto abierto D contenido en $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$.

Si $(x_0, y_0) \in D$, el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene una única

solución maximal, definida en un intervalo abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, en el que h depende de los valores de x_0 y de y_0 .⁴

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.3.1: Estudiar si existe solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases} \text{ y si es única. Estudiar la situación para distintos valores iniciales}$$

del problema.

La función $f(x, y) = y^{2/3}$ es continua en todo \mathfrak{R}^2 y por tanto es continua en todo rectángulo centrado en el punto $(0, 0)$. El *teorema 8.3.3* garantiza entonces la existencia de solución en un intervalo de la forma $[-h, h]$.

Una solución es la función nula $y(x) = 0$, que pasa por el punto $(0, 0)$, está definida en todo \mathfrak{R} y es solución en \mathfrak{R} de la ecuación diferencial $y' = y^{2/3}$.

La ecuación diferencial $y' = y^{2/3}$ es una ecuación de variables separables. La solución general se puede calcular fácilmente y es de la forma

$$y = \frac{1}{3^3} (x + C)^3.$$

Si en esta expresión se impone la condición $y(0) = 0$, se tiene que la constante C tiene que ser 0. Entonces la función $y = \frac{x^3}{3^3}$ verifica la ecuación y es también solución del problema de Cauchy propuesto.

⁴ La demostración de este teorema puede verse en el libro: C. Fernández y J. M. Vegas.

La solución no es única. Existen pues al menos dos soluciones diferentes del problema.

En realidad se puede decir que existen infinitas soluciones del problema, que se pueden expresar de la forma siguiente: dadas dos constantes arbitrarias, $C_1 \leq 0$ y $C_2 \geq 0$, las funciones definidas de la forma

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^3}(x - C_1)^3, & x \leq C_1 \\ 0, & C_1 < x \leq C_2 \\ \frac{1}{3}(x - C_2)^3, & x > C_2 \end{cases}$$

son todas ellas soluciones del problema de Cauchy propuesto.

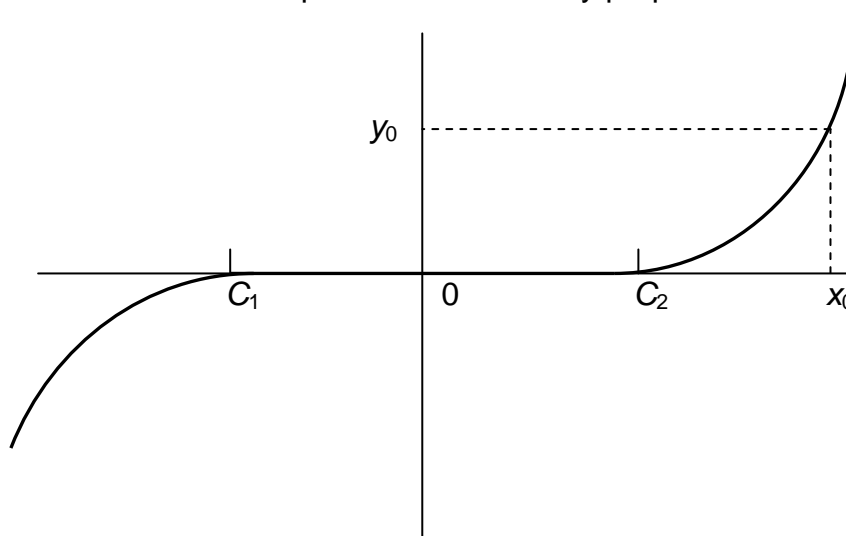


Figura 8.3: Gráfica de la solución del ejemplo 8.3.1.

Se tiene esta misma situación si se sustituye en la condición inicial el punto $(0, 0)$ por un punto de la forma $(x_0, 0)$. Para cada uno de estos puntos el problema de valor inicial correspondiente tiene infinitas soluciones.

Sin embargo, si se considera ahora el problema $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en el que y_0

tiene un valor distinto de 0, este problema tiene una única solución que al llegar al eje x se puede ramificar en distintas soluciones.

La razón por la cual la situación es distinta si en la condición inicial (x_0, y_0) el valor y_0 es cero o es distinto de cero es la siguiente:

Si y_0 es distinto de cero se puede escoger un rectángulo centrado en (x_0, y_0) de manera que no contenga ningún punto del eje x :

$$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b], \text{ con } b = |y_0|/2.$$

Se tiene entonces que para todo $(x, y) \in R$

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{2}{3y^{1/3}} \right| \leq \left| \frac{2^{4/3}}{3y_0^{1/3}} \right| = K.$$

Como la derivada parcial de f respecto de y está acotada en R , el *corolario 8.3.2* asegura que existe una única solución del problema de Cauchy definida en un intervalo centrado en el punto x_0 , $[x_0 - h, x_0 + h]$.

En cambio, si y_0 es igual a cero, cualquier rectángulo R centrado en $(x_0, 0)$ contiene puntos del eje x . Si se toman $(x, 0)$ y $(x, y) \in R$, se tiene que:

$$\frac{|f(x, 0) - f(x, y)|}{|y|} = \frac{|y^{2/3}|}{|y|} = \frac{1}{|y|^{1/3}},$$

que no está acotado por ninguna constante en R , pues para puntos muy próximos al eje x este cociente crece indefinidamente. La función f no es pues

lipschitziana en R .

Ejemplo 8.3.2: Estudiar si existe solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En el *ejemplo 8.2.3* se ha comprobado que la función $f(x, y) = y^2$ es continua en \mathfrak{R}^2 pero no es lipschitziana en \mathfrak{R}^2 . Sin embargo se puede abordar el problema de manera local, estudiando el comportamiento de la función en un rectángulo centrado en el punto $(0, 1)$.

Sea por ejemplo $R = [-1, 1] \times [0, 2]$, donde $a = b = 1$. Sean (x, y_1) y (x, y_2) dos puntos arbitrarios de R .

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leq 4|y_1 - y_2|.$$

Se tiene entonces que f es lipschitziana en el rectángulo R , con constante de Lipschitz $L = 4$. El teorema de existencia y unicidad local asegura que existe una única solución definida en el intervalo $I = [-\alpha, \alpha]$.

Para determinar el valor de α hay que calcular una cota de la función en R . Como $f(x, y) = y^2$ es continua en R , está acotada en R . El máximo valor que toma en R lo alcanza cuando y es igual a 2. Por tanto:

$$M = \text{Sup}\{|f(x, y)|: f(x, y) \in R\} = 4.$$

Entonces $\alpha < \min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}) = \min(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ tiene entonces una única solución válida en el intervalo } [-\alpha, \alpha] \subset$$

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Ejemplo 8.3.3: Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar

la única solución del problema de Cauchy del *ejemplo 8.3.2*: $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Las iterantes de Picard asociadas a este problema son las siguientes:

Se define la primera como la condición inicial $\varphi_0(x) = 1$, y a partir de ella se generan las demás:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1^2 ds = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s)^2 ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63},$$

⋮

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(s))^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

La sucesión de funciones φ_n así construida se aproxima a la sucesión de las sumas parciales de la serie geométrica. Por tanto φ_n converge a la serie geométrica. Como $|x| < 1$, $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$, la sucesión

$\varphi_n(x)$ converge a la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$, que es la única solución del problema

de Cauchy propuesto en el intervalo $[-\alpha, \alpha] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Observación:

Se podría haber empezado por cualquier otra función que verifique la condición inicial del espacio métrico E definido al comienzo de la sección. Así, por ejemplo, se puede tomar $\varphi_0(x) = 1 + x^2$, que verifica la condición inicial, pues $\varphi_0(0) = 1$, y además $|\varphi_0'(x)| = |2x| \leq 2 < 4$.

A partir de ella se generan las demás:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + s^2)^2 ds = 1 + x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5},$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \frac{2s^3}{3} + \frac{s^5}{5}\right)^2 ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + 4\frac{x^5}{15} + \dots$$

⋮

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(s))^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

La sucesión obtenida tiene también como límite la serie geométrica, y por tanto converge a la misma función que la sucesión anterior.

Si se hubiera tomado $\varphi_0(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 ds = 1 + \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{1-x},$$

y se obtiene directamente el punto fijo de la transformación.

Ejemplo 8.3.4: Prolongar la solución $y(x) = \frac{1}{1-x}$ del problema de Cauchy

obtenida en el *ejemplo 8.3.3*: $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

La función $y(x) = \frac{1}{1-x}$ es la única solución del problema de Cauchy

$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ en el intervalo $[-\alpha, \alpha] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Se trata ahora de extender la

solución a un intervalo mayor. Para ello se observa que en el punto de abscisa

$x = \frac{1}{4}$ la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$ sigue siendo solución del problema de valor inicial,

y alcanza el valor $y(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$.

Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3} \end{cases}$ y se repite el proceso

seguido en el *ejemplo 8.3.2*.

Se puede tomar por ejemplo el rectángulo $R^* = [-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}] \times [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$,

centrado en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{4}{3})$ con $a = b = 1$.

Entonces $M = \sup \{|f(x, y)|: f(x, y) \in R^*\} = \frac{49}{9}$, y la constante de Lipschitz

en R^* es $L = \sup \{|y_1 + y_2| : (x, y_1), (x, y_2) \in R^*\} = \frac{14}{3}$.

Ahora debe ser $\alpha^* < \frac{1}{L} = \frac{3}{14}$ y $\alpha^* \leq \min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}) = \min(1, \frac{9}{49}, \frac{3}{14}) = \frac{9}{49}$
 $< \frac{3}{14}$. Por lo tanto $\alpha^* = \frac{9}{49}$, y se puede entonces prolongar la solución a la

derecha del intervalo inicial al intervalo $I^* = [\frac{1}{4} - \frac{9}{49}, \frac{1}{4} + \frac{9}{49}] = [\frac{13}{196}, \frac{85}{196}]$,

con lo cual se tiene la solución extendida al intervalo:

$$I \cup I^* = [-\alpha, \frac{85}{196}] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{85}{196}].$$

Si se repite el proceso en cada uno de los extremos del intervalo se puede seguir prolongando la solución, tanto a la derecha como a la izquierda del intervalo.

En este caso como la solución obtenida es la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$, que tiene una asíntota en $x = 1$, la solución se podrá prolongar por la derecha hasta llegar a $x = 1$. Por la izquierda en cambio se puede prolongar hasta $-\infty$.

El problema de valor inicial propuesto tiene entonces una solución maximal definida en el intervalo $(-\infty, 1)$

Ejemplo 8.3.5: Estudiar la existencia y unicidad de la solución del

problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ siendo $f(x, y) = \begin{cases} y, & x \geq 0 \\ \frac{2y}{x}, & x < 0 \end{cases}$.

La función $f(x, y)$ así definida no es continua en los puntos de \mathfrak{R}^2

situados en el eje y , y en particular en el punto correspondiente a la condición inicial, $(0, 1)$. Por tanto, los teoremas de existencia y unicidad no pueden asegurar la existencia de solución en ningún intervalo centrado en $x_0 = 0$.

Estudiando directamente el problema se puede comprobar que no existe solución.

En efecto, en $x \geq 0$, la solución general de $y' = y$ es $y = Ce^x$. La solución que pasa por el punto $(0, 1)$ es la que resulta de tomar $C = 1$, es decir, $y(x) = e^x$.

Si se estudia ahora lo que sucede para valores de $x < 0$, $y' = \frac{2y}{x}$ es una ecuación diferencial de variables separables, que tiene como solución general $y = Cx^2$. Estas soluciones son tales que al tomar valores próximos a cero tienden a cero. Se tiene entonces que ninguna de las soluciones obtenidas en la región $x < 0$ pasa por el punto $(0, 1)$. Se recuerda que la solución de una ecuación diferencial debe ser siempre una función continua y derivable.

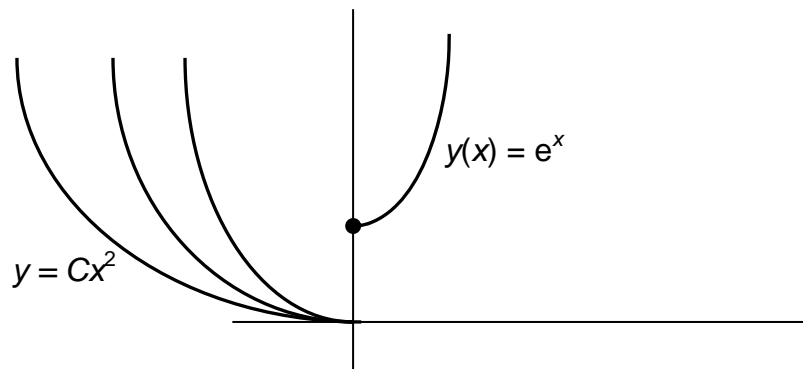


Figura 8.4: Gráfica de las soluciones del ejemplo 8.3.5.

Ejemplo 8.3.6: Estudiar la existencia y unicidad del problema
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

siendo la función $f(x, y)$ la misma que en el *ejemplo 8.3.5*:

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x \geq 0 \\ \frac{2y}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

El problema propuesto es similar al anterior, pero la condición inicial es diferente. Los teoremas de existencia y unicidad por tanto tampoco pueden asegurar aquí la existencia de solución en ningún intervalo centrado en $x_0 = 0$.

Estudiando directamente el problema con la condición inicial $(0, 0)$ se tiene que para valores de $x < 0$, la solución general de la ecuación $y' = \frac{2y}{x}$ es $y = Cx^2$, y todas estas soluciones pasan por el punto $(0, 0)$.

En $x \geq 0$, la solución general de $y' = y$ es $y = Ce^x$. La solución que pasa por el punto $(0, 0)$ es la que resulta de tomar $C = 0$, es decir, $y(x) = 0$. Existen entonces en este caso infinitas soluciones del problema propuesto, definidas como:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ Ce^x, & x < 0. \end{cases}$$

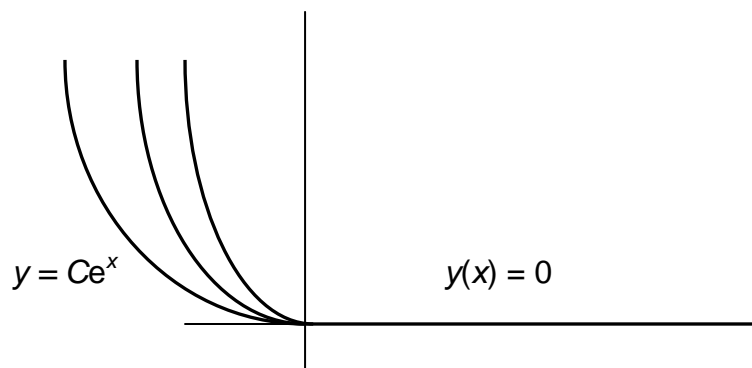


Figura 8.5: Gráfica de las soluciones del ejemplo 8.3.6.

Este ejemplo demuestra que la continuidad de la función $f(x, y)$ es una condición suficiente, pero no necesaria, para la existencia de solución.

Ejemplo 8.3.7: Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ para $y_0 = 0, 1, -1$. Calcular en cada caso

las correspondientes soluciones de manera explícita y encontrar los intervalos máximos en los que están definidas.

La función $f(x, y) = 2x \cdot y^2$ es continua en \mathfrak{R}^2 y su derivada parcial respecto de la variable y es la función $\partial f(x, y)/\partial y = 4x \cdot y$, que también es continua en \mathfrak{R}^2 . Por tanto, ambas están acotadas en cualquier rectángulo de \mathfrak{R}^2 . El *teorema 8.3.2* asegura entonces que existe una única solución definida en algún intervalo centrado en el origen.

La ecuación diferencial $y' = 2x \cdot y^2$ es una ecuación de variables separables. Se puede entonces calcular fácilmente la solución general:

$$y = \frac{-1}{x^2 + C}.$$

Se tiene además que la función $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}$ es también solución de la ecuación diferencial.

La solución que pasa por el punto $(0, 0)$ es la función $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}$, que es por tanto prolongable a toda la recta real.

La solución que pasa por el punto $(0, 1)$ es la función $y = \frac{1}{1-x^2}$, que es

prolongable al intervalo $(-1, 1)$.

Por último, la solución que pasa por el punto $(0, -1)$ es la función

$y = \frac{-1}{1+x^2}$, definida para todo $x \in \mathfrak{R}$, y es por tanto prolongable a toda la recta

real.

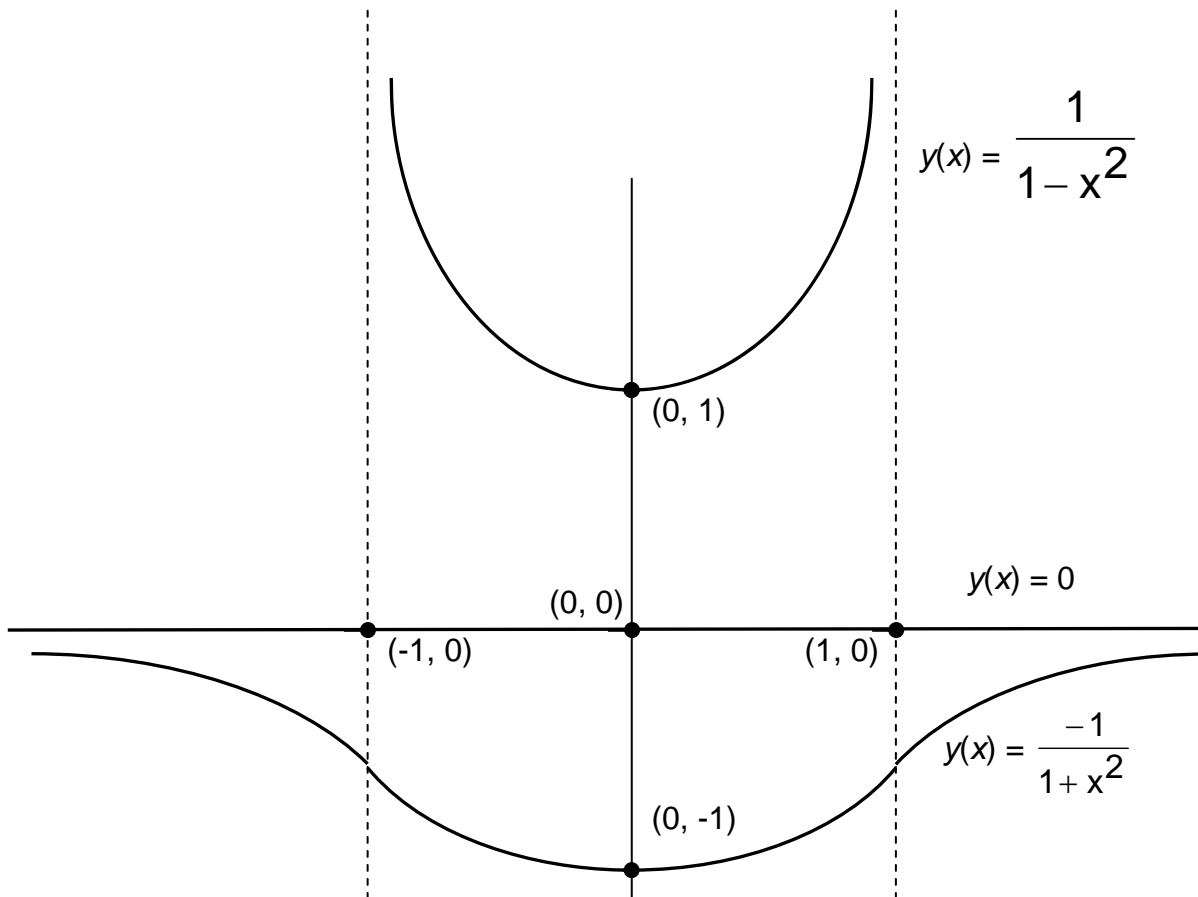


Figura 8.6: Gráfica de las soluciones del ejemplo 8.3.7.

Ejercicios

- 8.9. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial :

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \text{ donde } a_{ij} \in \mathfrak{R},$$

$$y_1(0) = a_1; y_2(0) = a_2; \dots y_n(0) = a_n.$$

8.10. Estudiar si existe solución, y si es única, del problema de valor

inicial $\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ en el rectángulo $R = [-1, 1] \times [0, 2]$. Determinar el

intervalo de existencia y unicidad local que asegura el teorema.

8.11. Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar la

única solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

8.12. Prolongar la solución del problema de Cauchy obtenida en el ejercicio anterior. ¿Tiene una solución maximal?

8.13. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de

valor inicial $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, así como el máximo intervalo en el que

están definidas las soluciones, siendo

a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$

b) $(x_0, y_0) = (0, 1)$

c) $(x_0, y_0) = (1, 0)$

8.14. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de

valor inicial $\begin{cases} y' = 3xy^{1/3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$. Calcular explícitamente la solución y

obtener el intervalo máximo en el que está definida.

8.4. EJERCICIOS

8.15. Demostrar que el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tiene solución, pero no es única.

8.16. Demostrar que el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2(1 + 3x^2)y^{1/2} \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

tiene como única solución la función $y(x) = (x + x^3)^2$ definida en el intervalo $(0, \infty)$. Estudiar si se puede prolongar la solución para valores $x \leq 0$.

8.17. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de

valor inicial $\begin{cases} y' = 2(1 + 3x^2)y^{1/2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$.

8.18. Obtener para cada valor de (x_0, y_0) las soluciones del problema

de valor inicial $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(x_0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$. Esbozar gráficamente las

soluciones y estudiar para cada una de ellas el intervalo máximo al que se pueden prolongar.

8.19. Estudiar para los distintos valores de x_0 , y_0 , la existencia y unicidad de solución de los problemas de valor inicial, así como el máximo intervalo en el que están definidas las soluciones.

$$\text{a) } \begin{cases} y' = 6x^2 y^{1/2} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y' = \sqrt{y^2 - 9}, & |y_0| \geq 3. \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

8.20. Demostrar que la función $f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ y^{2/3} \operatorname{sen} \frac{1}{y}, & y \neq 0 \end{cases}$ no es

localmente lipschitziana en ningún rectángulo que contenga al punto $(0, 0)$. Demostrar que sin embargo, el problema de valor

inicial $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$ tiene una única solución.

8.21. Estudiar la existencia y unicidad de solución de los siguientes problemas de valor inicial. Calcular explícitamente las soluciones y obtener el intervalo máximo en el que están definidas.

$$\text{a) } \begin{cases} y' = 6xy^{2/3} \\ y(2) = 27. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y' = x^{1/2} y \\ y(1) = e^{-2/3}. \end{cases}$$

$$8.22. \text{ Sea } f(x,y) = \begin{cases} y \log \frac{1}{y} & \text{si } y \in (0, \infty) \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}, x \in [0, 1]$$

a) Demostrar que f es continua pero no es localmente lipschitziana respecto de la variable y .

b) Demostrar que el problema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = c \end{cases}$ tiene una única solución,

para cualquier valor de $c \in \mathfrak{R}$.

CAPÍTULO 9.

Ecuaciones diferenciales de orden superior.

Transformada de Laplace

El objetivo de este capítulo es introducir las ecuaciones diferenciales de orden superior y los sistemas, analizando métodos generales, teoremas, aplicaciones y la forma de pasar de unas a otros y viceversa. En los dos capítulos siguientes se estudiará todo lo referente a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Es habitual emplear la transformada de *Laplace* para resolver sistemas y ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos de coeficientes constantes, siendo un método muy eficiente para simplificar los problemas.

La transformada de *Laplace* permite obtener soluciones explícitas en problemas con valores iniciales, y es especialmente útil cuando el término no homogéneo bien es discontinuo a trozos o es *impulsivo* o bien es periódico. También resuelve ecuaciones integrales y algunas ecuaciones en derivadas parciales. En concreto, convierte ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes en problemas algebraicos donde se incorporan de forma automática las condiciones iniciales, y permite transformar algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La transformada de Laplace es una de las denominadas transformaciones integrales, es decir, operadores que transforman una función en otra por medio de una integral. La conveniencia de su definición resulta de la analogía que la relaciona con las series de potencias. Si se considera que la análoga de una serie de potencias es una cierta integral impropia, en la que se sustituye la variable x por una exponencial se tendrá la transformada de *Laplace*, que puede por tanto interpretarse como *análoga continua* a una serie de potencias, y si éstas tienen tanta importancia en análisis cabe esperar que la transformada también **la** tenga.

Además de por sus muchas aplicaciones, la transformada de *Laplace* tiene estrechas relaciones con partes importantes de la matemática pura, y tiene interés en otras ramas de las matemáticas aplicadas. En Probabilidad y Estadística la transformada de *Laplace* de una distribución de probabilidad se denomina función característica, y es muy útil para estudiar funciones de distribución de sumas de variables aleatorias independientes, y por ejemplo, es habitual usar la transformada de *Laplace* para demostrar el teorema central del límite.

En las *secciones 1 y 2* de este capítulo se definen y se relacionan las ecuaciones diferenciales de orden superior con los sistemas de ecuaciones diferenciales, estudiando los teoremas de existencia y unicidad, en la *sección 3* se estudian métodos para reducir el grado de una ecuación diferencial en casos particulares y en la *sección 4* se introduce la transformada de Laplace. Al final de esta sección se desarrollan las aplicaciones de la transformada como procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones, y como método para resolver problemas concretos de física y de

ingeniería.

9.1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

9.1.1. Ejemplos

En esta sección se consideran ecuaciones diferenciales de orden superior al primero expresadas en la forma $y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ o bien $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con n variables dependientes y una única variable independiente, pueden expresarse por: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ donde ahora \mathbf{y} e \mathbf{y}' representan vectores de \mathfrak{R}^n .

Ejemplos muy clásicos de estas ecuaciones surgen con frecuencia al modelar problemas físicos o técnicos. Entre ellos están:

Las ecuaciones que modelizan **la caída de los cuerpos**:

Caída libre $m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg$

Caída con resistencia $m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$

Estas ecuaciones fueron comentadas en el *capítulo 7, apartado 7.2.2.*

Para resolverlas se expresaban en función de $v(t) = \frac{dy}{dt}$ y quedaban de la

forma $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g$ para la caída libre y $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v^2$ para la caída con

resistencia. Ambas son ecuaciones diferenciales de primer orden, y después de resolverlas y calcular $v(t)$, por integración se obtenía $y(t)$.

Se verá más adelante en la *sección 3* que este método se puede generalizar y cuando se tiene una ecuación diferencial en la que no aparece la variable independiente, aunque sí sus derivadas, el cambio de variable $v(t) = \frac{dy}{dt}$ reduce una unidad el grado de la ecuación.

De esta forma se resuelve la ecuación de la catenaria $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$

que se obtuvo en el *capítulo 7* y que se resolverá en éste.

En la ecuación del **movimiento armónico simple** $\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0$, $k > 0$, no aparece la variable dependiente y suponiendo que la solución tiene inversa y es derivable, se puede expresar y' en función de y , de forma que el cambio de variable $y' = u(y)$ reduce también el grado de la ecuación una unidad y se obtiene $u'(y) u(y) = -k^2 y$. Integrando se obtiene $u(y)$ y a partir de esta función la solución.

Se estudiará también en la *sección 3* este método de reducción de orden aplicable a la ecuación que permite calcular la **velocidad de escape de un**

cohete: $\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \frac{R^2}{y^2}$ y la **ecuación de Van der Pol:** $y'' - a(1 - y^2) \cdot y' + y = 0$

Utilizando un método similar se resuelven ecuaciones del tipo:

$$y' \cdot y'' = 2$$

$$y' \cdot y'' + (y')^2 = 0.$$

Existen también otras muchas ecuaciones a las que no se les puede aplicar los métodos anteriores de reducción de orden, por lo que tiene especial importancia la transformada de Laplace como método para resolver ecuaciones

diferenciales. En general permite resolver ecuaciones lineales como la ecuación de los **circuitos eléctricos**: $L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + R \cdot \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t)$ o la equivalente de las **oscilaciones con resortes** $m \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = g(t)$. Estas ecuaciones que se plantearon en el *capítulo 7* serán resueltas por otros métodos en el siguiente capítulo suponiendo que las funciones $E(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas. Cuando esto no ocurre, y estas funciones tienen discontinuidades de salto finito, el procedimiento más adecuado para resolverlas es mediante la transformada de Laplace.

En general, cuando una de las funciones que intervienen en la ecuación diferencial no es continua, pero sí continua a trozos, el primer método que conviene ensayar es el de la transformada de Laplace.

Aplicaciones de este tipo se presentan, por ejemplo, para resolver el problema de una **viga empotrada**, que tiene por ecuación: $E \cdot I \cdot \frac{d^4 y}{(dx)^4} = w(x)$, siendo E el módulo de la elasticidad, I el momento de inercia y $w(x)$ una función continua a trozos.

Por otra parte existen ecuaciones cuyas soluciones no se pueden resolver mediante funciones elementales; algunas de ellas tienen mucha importancia en aplicaciones físicas, como son las **ecuaciones de Legendre y Bessel**.

Ecuación de Legendre: $(1 - x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + p \cdot (p + 1) \cdot y = 0$, con p constante.

Ecuación de Bessel: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - p^2) \cdot y = 0$, siendo $p \geq 0$ constante.

Las soluciones de estas ecuaciones están expresadas en series de potencias y se estudiarán detenidamente en el *capítulo 10*.

También los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecen de forma

constante en las aplicaciones. En algunos de ellos como en el **sistema de ecuaciones de Lotka-Volterra** que ya se planteó en el *capítulo 7* y que tiene por ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

un adecuado cambio de variable permite resolverlo con facilidad ya que en ninguna de las ecuaciones aparece la variable dependiente.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede transformarse fácilmente en un sistema de primer orden sin más que añadir más variables. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Así, por ejemplo el movimiento de una partícula en el espacio mediante la segunda ley de *Newton*: $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, se representa mediante el siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} m \cdot x''(t) = F_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ m \cdot y''(t) = F_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ m \cdot z''(t) = F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

Este sistema de la segunda ley de *Newton* se puede escribir como un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas introduciendo las velocidades v_1 , v_2 , v_3 como tres nuevas variables.

Otro caso particular son los **sistemas lineales**, que se estudiarán más detenidamente en el *capítulo 11*. Un ejemplo es el sistema que determina el movimiento de dos masas m_1 y m_2 , sobre las que actúan tres resortes de constantes k_1 , k_2 , k_3 y dos fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ que está expresado por

el sistema:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t) \end{cases}$$

Cuando los coeficientes del sistema son constantes, como en el ejemplo anterior, existe un procedimiento general para calcular las soluciones. Sin embargo la mayor parte de los sistemas que aparecen en las aplicaciones no son lineales y ha sido necesario desarrollar métodos más sofisticados para resolverlos.

9.1.2. Conceptos previos

Es sencillo saber si una función dada $y(x)$ es **solución**, o no, de una ecuación diferencial, pues basta calcular las derivadas, sustituir en la ecuación diferencial y ver si se obtiene una identidad. Sin embargo resolver una ecuación diferencial de orden superior es todo un desafío pues, en general, no hay métodos generales para llegar a ella. Este capítulo contiene un enfoque elemental considerando métodos por reducción.

Definición 9.1.1:

Una **ecuación diferencial de orden n** es la que establece una relación entre una variable independiente x , la función buscada $y(x)$ y las derivadas de esta función hasta el orden n , lo que equivale, con $y = y(x)$, a una expresión de la forma $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Cuando es posible despejar $y^{(n)}$, se obtiene: $y^{(n)}(x) = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

Definición 9.1.2:

Un **sistema de k ecuaciones diferenciales de orden n** se puede

expresar mediante una función vectorial F , de la forma $F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$, donde la función buscada $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ y las derivadas de esta función $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$, son funciones vectoriales de la variable independiente.

Definición 9.1.3:

Un **sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden** se puede expresar mediante una función vectorial F , de la forma $F(x, f(x), f'(x)) = 0$, donde la función buscada $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ y su derivada $f'(x)$ son funciones vectoriales de la variable independiente.

Cuando es posible despejar $y' = f'(x)$ el sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= g_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) &= g_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n'(x) &= g_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

Definición 9.1.4:

La **solución general** del sistema de n ecuaciones diferenciales (9.1.1), esta formada por n funciones $\varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, que dependen de n constantes C_1, C_2, \dots, C_n y satisfacen las ecuaciones del sistema para todos los valores de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

Suponiendo que existen condiciones iniciales: $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$, se pueden elegir las constantes C_1, C_2, \dots, C_n para que las funciones $\varphi_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n), 1 \leq k \leq n$, satisfagan estas condiciones.

Definición 9.1.5:

Una **solución particular** del sistema de n ecuaciones diferenciales (9.1.1)

está formada por las n funciones de la solución general para valores concretos de las constantes C_1, C_2, \dots, C_n .

9.1.3. Reducción de ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones

El procedimiento para expresar una ecuación diferencial de orden n como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden consiste en añadir más variables que se identifican con las derivadas de la variable dependiente.

Se considera la ecuación $y^{(n)}(x) = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$. (9.1.2)

Se realiza un cambio de notación llamando:

$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, de donde se obtiene $y'_n = y^{(n)}$. (9.1.3)

Por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x) \\ y'_2(x) = y_3(x) \\ \dots \\ y'_n(x) = g(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (9.1.4)$$

Si se busca una solución particular de la ecuación diferencial que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$, entonces en el sistema se buscan soluciones particulares que verifiquen $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$.

Una ecuación diferencial de orden superior se puede considerar, por tanto, un caso especial de sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Recíprocamente si y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones del sistema (9.1.1) derivando la primera ecuación con respecto a x :

$$y_1'' = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Sustituyendo las derivadas y_1', y_2', \dots, y_n' por sus expresiones en el sistema (9.1.1) se obtiene $y_1''(x) = G_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

Derivando esta expresión con respecto a x y sustituyendo del mismo modo, se halla $y_1'''(x) = G_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

Repitiendo el proceso hasta la derivada de orden n se calcula:

$y_1^{(n)}(x) = G_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, de esta forma se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = G_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1''(x) = G_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}(x) = G_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (9.1.5)$$

De las $n - 1$ primeras ecuaciones se calculan y_2, y_3, \dots, y_n en función de x , la función y_1 y sus derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x) = h_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3(x) = h_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) = h_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \end{array} \right. \quad (9.1.6)$$

Introduciendo estas expresiones en la última ecuación de (9.1.5) se obtiene la ecuación diferencial de orden n :

$$y_1^{(n)}(x) = H(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (9.1.7)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene la solución general $y_1(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ y calculando sus derivadas y sustituyendo en (9.1.6) se determinan y_2, y_3, \dots, y_n como funciones de x, C_1, C_2, \dots, C_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_2(x) = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots \\ y_n(x) = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{array} \right. \quad (9.1.8)$$

Cuando se buscan soluciones particulares en el sistema que verifican las condiciones iniciales $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$, se sustituyen estos valores en (9.1.8) y se calculan los parámetros C_1, C_2, \dots, C_n .

La afirmación de que el sistema y la ecuación son equivalentes se entiende en el sentido siguiente: Si $y(x)$ es una solución de la ecuación (9.1.2) entonces las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ definidas por (9.1.3) satisfacen el sistema (9.1.4). Y a la inversa, si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ satisfacen el sistema (9.1.1) entonces $y(x) = y_1(x)$ es una solución de la ecuación (9.1.7).

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.1.1: Expresar mediante un sistema de ecuaciones de primer orden la ecuación diferencial: $y'' - x^2 \cdot y' - x \cdot y = 0$

En esta ecuación $y'' = x^2 \cdot y' + x \cdot y$.

Llamando $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$, se tiene $y_2'(x) = y''(x)$.

Se tiene el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = x^2 \cdot y_2(x) + x \cdot y_1(x). \end{array} \right.$$

Ejemplo 9.1.2: Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = y_2(x) + 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) + 1 \end{array} \right.$$

Derivando la primera ecuación con respecto a x : $y_1''(x) = y_2'(x)$, y al sustituirlo en la segunda: $y_1''(x) = y_1(x) + 1$, siendo la ecuación buscada:

$$y_1''(x) - y_1(x) - 1 = 0.$$

Ejemplo 9.1.3: Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = y(x) - 2z(x) + 2x \end{cases}$$

Se deriva la primera ecuación respecto a x : $y''(x) = y'(x) + z'(x) + 1$, se sustituye $y'(x)$ y $z'(x)$ por sus expresiones en el sistema:

$$y''(x) = (y(x) + z(x) + x) + (y(x) - 2z(x) + 2x) + 1 \Rightarrow$$

$$y''(x) = 2y(x) - z(x) + 3x + 1.$$

Se despeja $z(x)$ en la primera ecuación del sistema: $z(x) = y'(x) - y(x) - x$, y se sustituye en la última ecuación: $y''(x) = 2y(x) - (y'(x) - y(x) - x) + 3x + 1$, con lo que se obtiene la ecuación buscada:

$$y''(x) = 3y(x) - y'(x) + 4x + 1.$$

Ejemplo 9.1.4: Dada la ecuación diferencial $y'' + 4y - 4x = 0$, su sistema asociado es: $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = -4y_1(x) + 4x \end{cases}$. Comprobar que la solución general de

dicho sistema es $\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \\ y_2(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + 1 \end{cases}$ y a partir de ella

obtener la solución de la ecuación diferencial.

Se comprueba que la solución verifica las dos ecuaciones del sistema:

$$y_1'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + 1 \Rightarrow y_1'(x) = y_2(x)$$

$$y_2'(x) = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x = -4(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x) + 4x \Rightarrow$$

$$y_2'(x) = -4y_1(x) + 4x$$

Por lo tanto $(y_1(x), y_2(x))$ es la solución general del sistema.

Al reducir la ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones se ha considerado $y_1(x) = y(x)$, por lo que la función $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + x$ es la solución de la ecuación diferencial.

Ejercicios

9.1. Expresar mediante un sistema de ecuaciones de primer orden la ecuación diferencial: $y''' = y'' - x^2 \cdot (y')^2$.

9.2. Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = -4y(x) - 3z(x) + 2x \end{cases}$$

9.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES

La relación establecida entre los sistemas de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden superior permiten relacionar los teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones y de los sistemas.

Los teoremas de existencia y unicidad se pueden adaptar tanto a los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, como a las ecuaciones diferenciales lineales de orden n , obteniéndose los siguientes resultados, fáciles de aplicar desde un punto de vista práctico

9.2.1. Teoremas de existencia y unicidad para sistemas

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (9.2.1)$$

Si para un valor de la variable independiente x_0 se asignan valores determinados a las funciones incógnitas, se obtienen las condiciones iniciales:

$$y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n. \quad (9.2.2)$$

Se tiene entonces planteado un problema de valor inicial.

Teorema 9.2.1: Teorema de existencia para sistemas de primer orden

Si las funciones f_1, f_2, \dots, f_n son continuas en una región B del espacio $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, y si (x_0, b_1, \dots, b_n) pertenece al interior de B , entonces existe un entorno de x_0 en el que el sistema (9.2.1) tiene una solución que verifica las condiciones iniciales (9.2.2).

En el *capítulo 8* se han estudiado distintos teoremas que garantizan la unicidad de las soluciones, en los que se imponen condiciones suficientes a las funciones f_k , como ser funciones lipchizianas respecto de las variables y_j . El teorema que se va a enunciar, es un teorema de condiciones suficientes, aunque no necesarias, mucho más sencillas de aplicar en la práctica:

Teorema 9.2.2: Teorema de unicidad para sistemas de primer orden

Si las funciones f_1, f_2, \dots, f_n y las derivadas parciales $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$, son continuas en una región B del espacio $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, y si (x_0, b_1, \dots, b_n) pertenece al interior de B , entonces existe un entorno de x_0 en el que el sistema (9.2.1) tiene una única solución que verifica las condiciones iniciales (9.2.2).

Las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad de

soluciones se han estudiado en el *capítulo 8*. Se recuerda que el *teorema 8.2.1* de *Cauchy-Peano* garantiza la existencia de la solución en un cierto entorno imponiendo la continuidad de la función f . La continuidad de f no es suficiente para garantizar la unicidad de las soluciones, por lo que se debe imponer alguna condición adicional. El teorema de *Picard-Lindelöf* garantiza la unicidad de la solución añadiendo nuevas condiciones como la lipschitzianidad de f respecto las variables y_k . Este teorema prueba no sólo la existencia y unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial sino también la continuidad de la solución respecto de las condiciones iniciales.

Para demostrar el teorema anterior se utiliza el *corolario 8.1.4* del *capítulo 8*, que garantiza la existencia y unicidad de las soluciones imponiendo condiciones suficientes (aunque no necesarias) como la continuidad de la función f y de sus derivadas parciales respecto de las variables y_k .

9.2.2. Teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de orden n

Los siguientes teoremas para las ecuaciones diferenciales de orden n son una consecuencia de los anteriores.

Teorema 9.2.3: Teorema de existencia para ecuaciones diferenciales de orden n

Si en la ecuación diferencial $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ la función f es continua en una región B del espacio $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, y si (x_0, b_1, \dots, b_n) pertenece al interior de B , entonces existe un entorno de x_0 en el que se puede garantizar la existencia de una solución $y(x)$ de la ecuación que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, y''(x_0) = b_3, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$.

Teorema 9.2.4: Teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales de orden n

Si en la ecuación diferencial $y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ la función f , y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ son continuas en una región B del espacio $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, y si (x_0, b_1, \dots, b_n) pertenece al interior de B , entonces existe un entorno de x_0 en el que se puede garantizar la existencia de una única solución $y(x)$ de la ecuación que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, y''(x_0) = b_3, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.2.1: Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para un sistema lineal de coeficientes constantes: $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, con las condiciones iniciales: $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$.

En este caso las funciones f_k son:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ \dots, \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + b_n(x). \end{array} \right.$$

Cuando $b_1(x), \dots, b_n(x)$ son funciones continuas en $(a, b) \subset \mathfrak{R}$ entonces $f_k(x)$ son funciones continuas en $B = (a, b) \times \mathfrak{R}^n$.

Las derivadas parciales coinciden con los coeficientes a_{kj} , que al ser funciones constantes son siempre funciones continuas en todo $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$. Al imponer n condiciones iniciales en un punto $x_0 \in (a, b)$, el teorema de unicidad permite garantizar la existencia y unicidad de la solución en el dominio de

continuidad de las funciones $b_k(x)$. Si B coincide con $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$ se puede asegurar la existencia y unicidad de solución en todo punto de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$.

Ejemplo 9.2.2: Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para el problema de valor inicial: $y^{(n)} = P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y + G(x)$, con las condiciones iniciales: $y(x_0) = b_1, y'(x_0) = b_2, y''(x_0) = b_3, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n$.

En este caso $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y + G(x)$. Si $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ y $G(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y x_0 pertenece a ese intervalo, entonces se puede garantizar la existencia de solución en el intervalo (a, b) .

Además las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ coinciden con $P_k(x)$

por lo que son continuas en un abierto (a, b) y se puede garantizar la unicidad de la solución al imponer n condiciones iniciales en un punto $x_0 \in (a, b)$. Es decir, si $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ y $G(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y x_0 pertenece a ese intervalo, entonces se puede garantizar la existencia de una única solución en el intervalo (a, b) del problema de valor inicial propuesto.

Ejercicios

9.3. Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para la ecuación de

Legendre: $(1 - x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + p \cdot (p + 1) = 0$, siendo p constante.

9.4. Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para la ecuación de

Bessel: $(x - x_0)^2 \cdot y'' - (x - x_0) \cdot y' + (x^2 - p^2) \cdot y = 0$, siendo $p \geq 0$ constante.

9.3. MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN EN CASOS PARTICULARES

En los capítulos 10 y 11 siguientes se estudia la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n y los sistemas lineales. La teoría de ecuaciones diferenciales de orden n no lineales es bastante difícil pero existen algunos casos especiales en los cuales es posible simplificar la ecuación general de orden n no lineal, como por ejemplo, cuando la variable independiente x , o bien la variable dependiente y , no aparece explícitamente en la ecuación. En esos casos es siempre posible reducir el orden de la ecuación diferencial.

9.3.1. Ecuaciones en las que falta la función incógnita

El caso más sencillo para reducir el orden de una ecuación diferencial de orden n es el de **las ecuaciones que no dependen de la variable dependiente y** , aunque sí de sus derivadas. Para reducirla a ecuaciones de orden $n - 1$ se define una nueva variable $u(x) = y'(x)$.

Así, si una ecuación diferencial es de la forma $y^{(n)} = F(x, y', \dots, y^{(n-1)})$, el cambio de variable $u(x) = y'(x)$ reduce el orden de la ecuación en una unidad.

Efectivamente si $\frac{dy}{dx} = u$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ y $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ y la ecuación

que resulta, $u^{(n-1)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-2)})$, es de orden $n - 1$.

Análogamente si en la ecuación diferencial falta la función y y sus derivadas hasta el orden k , realizando el cambio de variable $u(x) = \frac{d^k y}{dx^k}$ se

reduce el orden de la ecuación en k unidades.

Como ejemplo clásico de utilización de este método se resuelve la ecuación de la catenaria que se estudió en el *capítulo 7*.

La catenaria

Esta curva tiene la forma que adopta un hilo flexible homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la catenaria, p es el peso del hilo, H la componente horizontal de la tensión del hilo, $M(0, b)$ el punto más bajo de la curva y $a = \frac{H}{p}$, entonces la ecuación de la catenaria es:

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$$

Haciendo el cambio de variable $y'(x) = u(x)$ se obtiene $u'(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + u^2}$ que se integra por separación de variables:

$$\ln |u + \sqrt{1 + u^2}| = \frac{x}{a} + C.$$

Al aplicar la condición inicial $u(0) = 0$ se obtiene: $\ln |u + \sqrt{1 + u^2}| = \frac{x}{a}$, y al

despejar la función $u(x)$ resulta: $u(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$, que al integrar de nuevo

se obtiene: $y(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + K.$

Al imponer la condición de que pase por el punto $M(0, b)$ se tiene la solución particular:

$$y(x) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + b - a = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b - a.$$

Si la ordenada del punto M es a la ecuación se simplifica:

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

9.3.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente

También se puede reducir el orden si la ecuación de partida **no depende** de manera explícita **de la variable independiente**, pues localmente y en los puntos en que y' sea distinto de cero, donde se puede aplicar el teorema de la función implícita, se puede utilizar como variable independiente la y , y como nueva variable dependiente $y' = u$, con lo que realizando los cambios, se observa que la derivada de orden k únicamente depende de u y de sus derivadas de orden $k-1$, por lo que se logra reducir el orden como se pretendía.

Ejemplos clásicos en los que se aplica este método son la ecuación del movimiento armónico simple, el cálculo de la velocidad de escape en el movimiento de un cohete y la ecuación de *Van der Pol*.

El movimiento armónico simple

Se considera la ecuación del movimiento armónico simple $y'' + k^2 \cdot y = 0$ con $k > 0$. Se supone que existe una solución $y = \varphi(x)$ que en un intervalo (a, b) tiene función inversa derivable $x = \varphi^{-1}(y)$, por lo tanto $y' = \varphi'(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(y))$ por lo que y' puede expresarse como una función de y . Si se escribe $\varphi'(\varphi^{-1}(y)) = u(y)$ se tiene que $y' = u(y)$, entonces $y'' = u'(y) \cdot y' = u'(y) \cdot u(y)$. Al sustituirlo en la ecuación diferencial se tiene que $u'(y) \cdot u(y) = -k^2 \cdot y$, que equivale a decir que

$\frac{1}{2}(u^2(y))' = -k^2 y$. Integrando respecto a y se obtiene que $u^2(y) = -k^2 \cdot y^2 + C$. Ya que la constante C es una suma de cuadrados se puede expresar por $C = k^2 \cdot A^2$, siendo A una constante. Al sustituir: $u^2(y) = -k^2 \cdot y^2 + k^2 \cdot A^2 \Rightarrow u(y) = k\sqrt{A^2 - y^2}$.

Sustituyendo y' por $u(y)$ se tiene una ecuación de primer grado con variables separadas. Al integrarla se obtiene como solución $\arcsen \frac{y}{A} = Kx + B$, $\Rightarrow y = A \cdot \text{sen}(Kx + B) = A \cdot \text{sen}(Kx) \cdot \cos B + A \cos(Kx) \cdot \text{sen} B$, lo que se puede expresar como:

$$y = C_1 \cdot \text{sen}(Kx) + C_2 \cdot \cos(Kx), \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

Si se imponen las condiciones iniciales: $y_0 = \varphi(x_0)$ e $y_1 = \varphi'(x_0)$, para encontrar una solución particular $y = \varphi(x)$ tal que en un punto x_0 verifique dichas condiciones, siendo y_0, y_1 valores cualesquiera, basta con determinar las constantes C_1 y C_2 que verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 \cdot \text{sen}(Kx_0) + C_2 \cdot \cos(Kx_0) \\ y_1 = k \cdot C_1 \cdot \cos(Kx_0) - k \cdot C_2 \cdot \text{sen}(Kx_0) \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es $-k \neq 0$, el sistema tiene solución única y por lo tanto existe una única solución de la ecuación diferencial que verifica las condiciones iniciales.

Movimiento de un cohete. Velocidad de escape

Si se dispara un cohete en dirección vertical desde la superficie de la Tierra, la ecuación del movimiento después de quemar el combustible es:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \frac{R^2}{y^2},$$

siendo $y(t)$ la distancia del cohete al centro de la Tierra.

Como en la ecuación no aparece la variable t , llamando $v(y) = y'$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v,$$

sustituyendo en la ecuación se obtiene la ecuación de primer orden:

$$v \cdot \frac{dv}{dy} = -g \frac{R^2}{y^2}.$$

Separando las variables e integrando:

$$\frac{v^2}{2} = g \cdot \frac{R^2}{y} + C.$$

Suponiendo que cuando se acaba el combustible $v = v_0$ e $y \approx R$, se

calcula $C = -g \cdot R + \frac{v_0^2}{2}$, al sustituirlo en la ecuación se obtiene:

$$v^2 = 2g \cdot \frac{R^2}{y} - 2g \cdot R + \frac{v_0^2}{2},$$

que indica la velocidad de escape o velocidad mínima necesaria para que un cohete salga de la atracción gravitatoria terrestre.

Ecuación de Van der Pol

La ecuación de *Van der Pol* se presenta en el estudio de los circuitos eléctricos. La ecuación diferencial que la define es:

$$y'' - a \cdot (1 - y^2) \cdot y' + y = 0.$$

En la ecuación no aparece la variable t . Se hace el cambio $v(y) = y'$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$v \cdot \frac{dv}{dy} - a \cdot (1 - y^2) \cdot v + y = 0.$$

Si se supone que la derivada de v respecto de y es una constante k se obtiene:

$$v = \frac{y}{a(1 - y^2) - k}.$$

9.3.3. Reducción de orden en sistemas autónomos

En el *capítulo 12* se estudiarán con más detenimiento los sistemas dinámicos y, entre ellos, los sistemas autónomos.

Definición 9.3.1:

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es **autónomo** si en sus ecuaciones no aparece de forma explícita la variable independiente.

La idea subyacente al método que permite resolver estos sistemas es similar a la expuesta anteriormente para reducir el orden de una ecuación diferencial en la que no aparece la variable dependiente.

El sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$, se puede reducir a la ecuación diferencial de

primer orden: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$.

Como ejemplo clásico de utilización de este método, se resuelve el sistema que se planteó en el *capítulo 7* para las ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*.

Ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*

En el capítulo 7, apartado 7.2.6 se estudiaron las ecuaciones que *Lotka* y *Volterra* propusieron para modelizar un ecosistema formado por conejos y zorros, con sus interacciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

donde las constantes a , b , c y d son positivas.

Este sistema no se puede resolver en términos elementales, pero por el procedimiento anterior se obtiene:

$$\frac{(a - b \cdot y)dy}{y} = \frac{-(c - d \cdot x)dx}{x},$$

que es una ecuación lineal de variables separadas. Al resolverla se tiene:

$$y^a \cdot e^{-by} = kx^{-c} \cdot e^{dx}.$$

La barca en el río

Una barca entra en el río en el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con una velocidad b con relación al agua. Suponiendo que las rectas $x = 0$ y $x = c$ son las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad uniforme a en la dirección negativa del eje de ordenadas, se pretende determinar la trayectoria de la barca.

Al escribir las componentes de la velocidad de la barca se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -b \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} = -a + b \sin \theta \end{cases}$$

Utilizando el procedimiento anterior para resolver este sistema se tiene

que $\frac{dy}{dx} = \frac{-a + b \operatorname{sen} \theta}{-b \cos \theta} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx}$, ecuación de primer orden que es

homogénea y cuya solución es $c^{\frac{a}{b}}(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{\frac{a}{b}+1}$.

El destino de la barca depende de la relación entre a y b .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.3.1: Resolver la ecuación diferencial: $(y''')^2 + x \cdot y''' - y'' = 0$.

En la ecuación no aparecen ni la variable y ni su derivada por lo tanto realizando el cambio de variable $u = y''$ se reduce el orden dos unidades:

$(u')^2 + x \cdot u' - u = 0$ que es una ecuación de primer orden de Clairaut.

Con el cambio $u' = t$ se tiene $u = t^2 + x \cdot t$. Diferenciando y simplificando:

$(2t + x) \cdot dt = 0$, luego $t = C$ y $u = C^2 + x \cdot C$, y por lo tanto:

$$y' = C^2 x + C \frac{1}{2} x^2 + K_1.$$

Integrando se tiene la solución:

$$y(x) = \frac{C}{6} x^3 + \frac{C^2}{2} x^2 + K_1 x + K_2.$$

Ejemplo 9.3.2: Integrar la ecuación diferencial: $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

La ecuación no contiene a la variable x , por lo que se realiza el cambio u

= y' : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dy} \cdot u$, sustituyendo en la ecuación:

$$u \frac{du}{dy} + u^2 = 2e^{-y}.$$

Un nuevo cambio $z = u^2$ la transforma en lineal:

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}.$$

Su solución general es $z = 4e^{-y} + Ce^{-2y}$. Deshaciendo los cambios:

$$(y')^2 = 4e^{-y} + Ce^{-3y} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{4e^{-x} + Ce^{-2x}}$$

Separando variables e integrando:

$$x + K = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4e^x + C}$$

La solución general de la ecuación es:

$$(x + K)^2 = e^y + \frac{C}{4}.$$

Ejemplo 9.3.3: Resolver la ecuación diferencial del movimiento pendular

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \cdot \text{sen} \frac{s}{L},$$

La ecuación no contiene a la variable independiente t , por lo que se

realiza el cambio $u = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds} \cdot u$, se sustituye:

$$\frac{du}{ds} \cdot u = -g \cdot \text{sen} \frac{s}{L}$$

por lo que al separar variables:

$$u \cdot du = -g \cdot \text{sen} \frac{s}{L} ds,$$

que al integrarla se obtiene:

$$\frac{u^2}{2} = g \cdot L \cdot \cos \frac{s}{L} + C,$$

por lo tanto:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gL \cdot \cos \frac{s}{L} + C.$$

Ejercicios

9.5. Resolver la ecuación diferencial $2 \cdot y'' - (y')^2 + 4 = 0$.

9.6. Integrar la ecuación diferencial $y \cdot y'' - (y')^3 = 0$.

9.7. Determinar las condiciones sobre a y b para que en la trayectoria de la

barca, que se expresaba por $c^{\frac{a}{b}}(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{\frac{a}{b}+1}$, permitan que la barca llegue a la otra orilla. ¿Dónde llegará?

9.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades y aplicaciones de una de las transformaciones integrales, *la transformada de Laplace*, donde una función dada f , que depende de la variable x , se transforma en otra función F , que depende de otra variable, s , por medio de una integral. La idea consiste en transformar un problema para f en otro más sencillo para F , seleccionado de forma apropiada el núcleo y los límites de integración. A modo de comparación intuitiva se puede poner el ejemplo de cómo los logaritmos transforman unos números en otros en los que las operaciones se simplifican. En nuestro caso lo que se transforman son funciones

La transformada de Laplace va a permitir desarrollar un método de resolución de ecuaciones diferenciales con valores iniciales donde, sin previamente determinar la solución general, directamente se transforma en un problema algebraico que depende de los valores iniciales, del que una vez resuelto mediante manipulaciones algebraicas, se obtiene la solución. Este

método es especialmente adecuado cuando alguna de las funciones que intervienen en la ecuación es una función continua a trozos.

9.4.1. Definición, condiciones de existencia y primeras propiedades

Definición 9.4.1:

Una **transformación integral** es una relación de la forma:

$$\mathbf{T}\{f\} = \int_a^b K(s, x) \cdot f(x) \cdot dx.$$

Cuando esta integral existe es una función $F(s)$ de la variable s . Se dice, entonces que la función $F(s)$ es la **transformada** de $f(x)$, y se denomina **núcleo de la transformación** a la función $K(s, x)$.

Un tipo particular de transformación integral es la transformada de Laplace de núcleo $K(s, x) = e^{-sx}$, con $a = 0$ y b infinito.

Definición 9.4.2:

Dada una función f definida para $x \geq 0$, se define como su **transformada de Laplace**, que se denota $\mathbf{L}\{f(x)\}$ a una función $F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-sx} f(x) dx =$

$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$, siempre que la integral sea convergente con $s \in \mathfrak{R}$.

La variable s puede ser compleja, pero para nuestro estudio sólo se necesita considerar valores reales de s , aunque algunas integrales o demostraciones resultan más simples en el campo complejo. Si la integral anterior se interpreta en el campo complejo estaría definida para todos los valores complejos tales que $Re(s) > c$, y utilizando el teorema de Morera es sencillo deducir bajo que condiciones $\mathbf{L}\{f(x)\}$ es analítica en dicha región.

A veces lo que se ha definido como transformada de Laplace se denomina *unilateral*, especialmente cuando es necesario estudiar la transformada de Laplace *bilateral* en cuya definición cambia el límite de integración inferior de la integral, que en vez de 0 es $-\infty$ y por tanto ambas transformadas coinciden para funciones $f(x)$ definidas en el semieje real positivo.

Definición 9.4.3:

Una función $f(x)$ es de **orden exponencial** c si existen constantes reales $c, M > 0$ tales que $|f(x)| \leq M \cdot e^{cx}$.

En la siguiente proposición se expresan dos resultados sobre la definición anterior.

Proposición 9.4.1:

a) Si una función $f(x)$ es de orden exponencial c entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \cdot f(x) = 0, \forall s > c.$$

b) Toda función acotada es de orden exponencial.

El primer resultado es una consecuencia inmediata de la definición ya que

$$|e^{-sx} \cdot f(x)| \leq M \cdot e^{(c-s)x} \text{ que tiende a cero cuando } s > c.$$

El segundo también es evidente ya que una función acotada es de orden exponencial para todo $c > 0$, pues $|f(x)| \leq M \leq M \cdot e^{cx}$.

Definición 9.4.4:

Una función $f(x)$ es **continua a trozos** en un intervalo $[a, b]$ si tiene un número finito de discontinuidades de primera especie, es decir, de salto finito.

Teorema 9.4.2:

Si $f(x)$ es una función continua a trozos en el intervalo $[0, a]$, $\forall a > 0$ y $f(x)$

es de orden exponencial c , entonces la transformada de Laplace de $f(x)$, $F(s)$, existe para $s > c$.

Demostración:

Si $f(x)$ es de orden exponencial c entonces $|f(x)| \leq M e^{cx}$ y por tanto

$$|e^{-sx} \cdot f(x)| \leq M e^{-(s-c)x}.$$

$$|F(s)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x) dx \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-sx} \cdot f(x)| dx \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} dx$$

Si $s - c < 0$ entonces, cuando x tiende a $+\infty$, $-(s - c)x$ tiende a $+\infty$ y la integral impropia es divergente. Pero si $s - c > 0$ entonces, cuando x tiende a $+\infty$, $-(s - c)x$ tiende a $-\infty$, $e^{-(s-c)x}$ tiende a uno y la integral impropia es convergente y vale $\frac{M}{s - c}$.

Por consiguiente, para todo $s > c$ la integral $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x) dx$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente, lo que indica que $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ existe para todo $s > c$. \square

Corolario 9.4.3:

Si $f(x)$ es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial c , entonces su transformada de Laplace, $F(s)$, cuando s tiende a infinito tiende a cero.

Es una consecuencia inmediata de que $|F(s)| \leq \frac{M}{s - c}$.

El *teorema 9.4.2* demuestra que la continuidad a trozos y ser de orden exponencial son condiciones suficientes para que exista la transformada de Laplace de una función. Pero estas condiciones no son necesarias; así por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no es continua a trozos ya que tiene un salto

infinito en $x = 0$ y sin embargo existe su transformada de Laplace:

Transformada de Laplace de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Sea } \mathbf{L}\{f(x)\} = \mathbf{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx$$

Se hace el cambio de variable $s \cdot x = t$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} s^{-1} dt = s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Al realizar el cambio $t = u^2$ se tiene:

$$F(s) = 2 s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot du.$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se obtiene:

$$\mathbf{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad \square \quad (9.4.1)$$

Para garantizar la existencia de la transformada se supone que, salvo precisión aparte, todas las funciones consideradas verifican las condiciones del *teorema 9.4.2*.

Primeras propiedades:

Proposición 9.4.4: Linealidad

La transformada de *Laplace* es un operador lineal:

$$\mathbf{L}\{a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\} = a \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} + b \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la linealidad de la integral, pues:

$$\mathbf{L}\{a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} (af(x) + bg(x)) dx = a \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx +$$

$$b \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = a \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} + b \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}. \quad \square$$

Proposición 9.4.5: Cambio de escala

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y $k > 0$ entonces:

$$\mathbf{L}\{f(kx)\} = \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{s}{k}\right).$$

Demostración:

$$\mathbf{L}\{f(kx)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(kx) dx,$$

al hacer el cambio de variable $kx = t$, se obtiene:

$$\mathbf{L}\{f(kx)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \cdot e^{-s \frac{t}{k}} f(t) dt = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{k} t} f(t) dt = \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{s}{k}\right). \quad \square$$

Transformada de Laplace de algunas funciones

1. Transformada de las funciones constantes

Si $f(x) = k$, $k \in \mathfrak{R}$, entonces $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} k dx = \frac{k}{s}$. Por lo

tanto:

$$\mathbf{L}\{k\} = \frac{k}{s}, \quad \forall s > 0.$$

2. Transformadas de las funciones trigonométricas $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$

$$\text{Si } f(x) = \text{sen } x \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} \text{sen } x dx = \frac{e^{-sx} (-s \cdot \text{sen } x - \text{cos } x)}{s^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \forall s > 0$$

$$\text{Si } f(x) = \text{cos } x \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} \text{cos } x dx = \frac{e^{-sx} (\text{sen } x - s \cdot \text{cos } x)}{s^2 + 1} \Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \forall s > 0$$

$$\text{Por lo tanto } \mathbf{L}\{\text{sen } x\} = \frac{1}{s^2 + 1} \text{ y } \mathbf{L}\{\text{cos } x\} = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \forall s > 0.$$

Aplicando la *proposición 9.4.5* de cambio de escala se tiene también:

$$\mathbf{L\{sen\ kx\} = \frac{k}{s^2 + k^2}} \text{ y } \mathbf{L\{cos\ kx\} = \frac{s}{s^2 + k^2}}, \forall s > 0.$$

3. Transformada de la función exponencial

$$\text{Si } f(x) = e^{ax} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \left. \frac{e^{-(s-a)x}}{-(s-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \forall s > a$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}}, \forall s > a.$$

Para una función exponencial de base $b > 0$, se tiene:

$$\mathbf{L\{b^{ax}\} = L\{(e^{\ln b})^{ax}\} = L\{e^{(a \ln b)x}\} = \frac{1}{s-a \ln b}}, \forall s > a \ln b.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.1: Calcular las transformadas de Laplace de las funciones $f(x)$

$= \text{sen}(7x)$ y $g(x) = \text{cos}(8x)$.

Al ser $\mathbf{L\{sen\ x\} = \frac{1}{s^2+1}}$, $\forall s > 0$, al aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L\{sen(7x)\} = \frac{1}{7} \frac{1}{\left(\frac{s}{7}\right)^2 + 1} = \frac{7}{s^2 + 7^2}}, \forall s > 0.$$

Al ser $\mathbf{L\{cos\ x\} = \frac{s}{s^2+1}}$, $\forall s > 0$, al aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L\{cos(8x)\} = \frac{1}{8} \frac{\frac{s}{8}}{\left(\frac{s}{8}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 8^2}}, \forall s > 0.$$

Ejemplo 9.4.2: Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = \text{senh}\ x$.

$$\mathbf{L}\{\sinh x\} = \mathbf{L}\left\{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}\{e^x\} - \mathbf{L}\{e^{-x}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad \forall s > 1.$$

Ejemplo 9.4.3: Calcular la transformada de Laplace de $f(x) = \sinh(kx)$, $k > 0$.

Por el ejemplo anterior se sabe que $\mathbf{L}\{\sinh x\} = \frac{1}{s^2 - 1}$, $\forall s > 1$, por lo que al

aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L}\{\sinh(kx)\} = \frac{1}{k} \frac{1}{\left(\frac{s}{k}\right)^2 - 1} = \frac{k}{s^2 - k^2}, \quad \forall s > 1.$$

Ejemplo 9.4.4: Demostrar que $\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, y aplicar este resultado para

calcular la transformada de Laplace de $p(x) = x^2 - 2x + 3$.

Se demuestra por inducción sobre n :

La fórmula es cierta para $n = 0$ ya que $\mathbf{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.

Supuesta cierta para $n - 1$, es decir $\mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$, se utiliza este

resultado para calcular $\mathbf{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx$.

Se integra por partes y se obtiene:

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx = \left. \frac{-x^n \cdot e^{-sx}}{s} \right]_0^\infty + \int_0^\infty n \frac{e^{-sx}}{s} x^{n-1} dx =$$

$$\frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-sx} x^{n-1} dx = \frac{n}{s} \mathbf{L}\{x^{n-1}\}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción, $\mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$ se obtiene:

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n}{s} \mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \frac{n}{s} \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Se utiliza este resultado y la linealidad de la transformada:

$$\mathbf{L}\{p(x)\} = \mathbf{L}\{x^2\} - 2\mathbf{L}\{x\} + 3\mathbf{L}\{1\} = \frac{2!}{s^3} - 2\frac{1!}{s^2} + 3\frac{1}{s} = \frac{3s^2 - 2s + 2}{s^3}.$$

Ejercicios

9.8. Demostrar que $\mathbf{L}\{\cosh x\} = \frac{s}{s^2 - 1}$, $\forall s > 1$.

9.9. Verificar que $\mathbf{L}\{\cosh(kx)\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$, $\forall s > 1$.

9.10. Calcular $\mathbf{L}\{\cos^2 x\}$.

9.11. Hallar la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}$.

9.12. Calcular la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\frac{3}{s^2} - \frac{6}{s^2 + 9}$.

9.13. Hallar la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\frac{3s + 5}{s^2 + 7}$.

9.4.2. La función de Heaviside y la delta de Dirac

Para modelar señales y en general funciones que pueden estar encendidas o apagadas se usa la **función de Heaviside** o función salto, o función escalón unidad, ya que al multiplicar una función de *Heaviside* por otra función, ésta queda apagada hasta un valor determinado lo que permite también expresar las funciones definidas a trozos.

Definición 9.4.5:

Se denomina función escalón unidad o **función de Heaviside** a la

$$\text{definida por } u_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}.$$

En ocasiones se denomina a esta función utilizando la letra H en honor al

$$\text{ingeniero Heaviside, } H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}.$$

Sea $u(x) = u_0(x)$; esta función en el intervalo $[0, \infty)$ coincide con la función constante 1. A partir de ella, y mediante una traslación, se puede expresar $u_a(x)$, es decir, $u_a(x) = u(x - a)$.

Transformada de Laplace de la función de Heaviside

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} u_a(x) dx = \int_a^{\infty} e^{-sx} dx = \left. \frac{e^{-sx}}{-s} \right|_a^{\infty} = \frac{e^{-sa}}{s}, \forall s > 0.$$

$$\text{Si } a \leq 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} u_a(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{s}, \forall s > 0.$$

Por lo tanto:

$$\text{Si } a > 0 \text{ entonces } \mathbf{L}\{u_a(x)\} = \frac{e^{-sa}}{s},$$

$$\text{Si } a \leq 0 \text{ entonces } \mathbf{L}\{u_a(x)\} = \frac{1}{s}, \text{ definidas para todo } s > 0.$$

$$\text{En particular si } a = 0, \text{ entonces } \mathbf{L}\{u(x)\} = \frac{1}{s}, \text{ definida para todo } s > 0.$$

Distribución delta de Dirac

La delta de Dirac se utiliza para representar fuerzas externas de gran magnitud aplicadas durante un intervalo de tiempo muy breve, es decir, aplicadas en un instante.

En términos matemáticos se puede definir como el límite de una sucesión de funciones definidas en intervalos que contengan a un determinado punto a cuya longitud tiende a cero, de manera que la integral de cada una de ellas

vale 1. Este límite no es una función, sino una distribución, (ver el *capítulo de historia de las ecuaciones diferenciales*), ya que la sucesión de funciones en cada punto distinto de a tiende a cero mientras que en a tiende a infinito, mientras que se impone que la integral valga uno.

De manera formal se puede definir como:

Definición 9.4.6:

La **delta de Dirac** es una distribución δ_a , $a \in \mathfrak{R}$ definida por:

1. $\delta_a(x) = 0$, $x \neq a$.

2. $\delta_a(a) = \infty$.

3.
$$\int_b^c \delta_a(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in [b, c] \\ 0 & \text{si } a \notin [b, c] \end{cases}$$

Si se define $\delta(x) = \delta_0(x)$, entonces se observa que: $\delta_a(x) = \delta(x - a)$.

Transformada de Laplace de la delta de Dirac

Para todo $a > 0$ se considera la función $p_h(x) = u_a(x) - u_{a+h}(x)$, $h > a$. Esta función se anula en todos los puntos excepto en el intervalo $[a, a + h)$ que toma el valor 1. Para que en este intervalo tome el valor $\frac{1}{h}$, se considera la función

$$q_h(x) = \frac{1}{h}(u_a(x) - u_{a+h}(x)). \text{ De esta forma } \int_0^{\infty} q_h(x) dx = 1, \text{ se tiene que el límite}$$

de las funciones $q_h(x)$ cuando h tiende a 0^+ es $\delta_a(x)$.

Se calcula la transformada de Laplace de la función $q_h(x)$:

$$\mathbf{L}\{q_h(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} q_h(x) dx = \frac{1}{h} \cdot \int_a^{a+h} e^{-sx} dx = \frac{-1}{sh} (e^{-s(a+h)} - e^{-sa}).$$

Se calcula el límite cuando h tiende a 0^+ :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-sa}(1 - e^{-sh})}{sh} = e^{-sa} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{se^{-sh}}{s} = e^{-sa}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L\{\delta_a(x)\} = e^{-sa},}$$

para todo $s > 0$ y

$$\mathbf{L\{\delta(x)\} = 1.}$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.5: Calcular las transformadas de Laplace de las funciones $f(x)$

$$= \frac{|x-a|}{x-a} \text{ y } g(x) = \frac{|x+a|}{x+a} \text{ para } a > 0.$$

$$\mathbf{L\left\{\frac{|x-a|}{x-a}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{|x-a|}{x-a} dx = \int_0^a e^{-sx} (-1) dx + \int_a^\infty e^{-sx} dx = \frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^a +}$$

$$\frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_a^\infty = \frac{e^{-sa} - 1}{s} + \frac{e^{-sa}}{s} = \frac{2e^{-sa} - 1}{s}, s > 0.$$

$$\mathbf{L\left\{\frac{|x+a|}{x+a}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{|x+a|}{x+a} dx = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}, s > 0.}$$

Ejemplo 9.4.6: Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) =$

$E[x]$ (parte entera de x) definida en $[0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{L\{E[x]\} = \int_0^\infty e^{-sx} E(x) dx} &= \int_1^2 e^{-sx} dx + 2 \int_2^3 e^{-sx} dx + 3 \int_3^4 e^{-sx} dx + \dots + \\ n \int_n^{n+1} e^{-sx} dx + \dots &= \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_1^2 + 2 \cdot \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_2^3 + 3 \cdot \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_3^4 + \dots + n \cdot \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_n^{n+1} + \dots = \\ &= \frac{-1}{s} (e^{-2s} - e^{-s} + 2e^{-3s} - 2e^{-2s} + 3e^{-4s} - 3e^{-3s} + \dots + e^{-(n+1)s} - e^{-ns} + \dots) = \\ &= \frac{1}{s} (e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \dots + e^{-ns} + \dots) = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1}^\infty e^{-ns} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{s(e^s - 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{E[x]\} = \frac{1}{s(e^s - 1)}.$$

Ejemplo 9.4.7: Expresar mediante la función de Heaviside la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y calcular su transformada.

La función $f(x)$ se puede expresar por $f(x) = 2u_3(x) = 2u(x-3)$, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = 2\mathcal{L}\{u(x-3)\} = 2\frac{e^{-3s}}{s}.$$

Ejercicios

9.14. Comprobar que la función de Heaviside se puede expresar por:

$$u_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{|x-a|}{x-a} + \frac{1}{2} & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Calcular su transformada utilizando esta expresión.

9.15. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x+2|}{x+2}$.

9.16. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = x - E[x]$ definida en $[0, \infty)$.

9.17. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1 & 0 \leq x < 2 \\ -3 & 2 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$,

Expresar mediante la función de Heaviside, $u(x)$, la función $f(x)$ y calcular su transformada de Laplace.

9.4.3. Teoremas de traslación y transformada de una función periódica

Teoremas de traslación

Teorema 9.4.6: **Primer teorema de traslación**

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ entonces $F(s - a)$

es la transformada de la función $g(x) = e^{ax} \cdot f(x)$, es decir,

$$\mathbf{L\{e^{ax} \cdot f(x)\} = F(s - a).}$$

Demostración:

$$\text{Si } F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x) dx \text{ entonces } \mathbf{L\{e^{ax} \cdot f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{ax} f(x) dx =}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} \cdot f(x) dx = F(s - a). \quad \square$$

Teorema 9.4.7: **Segundo teorema de traslación**

La transformada de Laplace de la función $f(x - a) \cdot u_a(x)$ es igual a e^{-sa} por

la transformada de Laplace de $f(x)$, es decir,

$$\mathbf{L\{f(x - a) \cdot u_a(x)\} = e^{-sa} \cdot L\{f(x)\}.$$

Demostración:

$$\text{La función } f(x - a) \cdot u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ f(x - a) & \text{si } x \geq a \end{cases}, \text{ por lo que:}$$

$$\mathbf{L\{f(x - a) \cdot u_a(x)\} = \int_a^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x - a) dx ,}$$

haciendo el cambio $x = t + a$:

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} \cdot f(t) dt = e^{-sa} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = e^{-sa} \cdot \mathbf{L\{f(x)\}}. \quad \square$$

Otra forma de expresar este teorema es:

$$\mathbf{L}\{g(x) \cdot u_a(x)\} = e^{-sa} \cdot \mathbf{L}\{g(x+a)\},$$

ya que $\mathbf{L}\{g(x) \cdot u_a(x)\} = \int_a^\infty e^{-sx} \cdot g(x) dx$, haciendo el cambio $x = t + a$:

$$\mathbf{L}\{g(x) \cdot u_a(x)\} = \int_0^\infty e^{-s(t+a)} \cdot g(t+a) dt = e^{-sa} \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t+a) dt = e^{-sa} \cdot \mathbf{L}\{g(x+a)\}. \quad \square$$

Transformada de una función periódica

Proposición 9.4.8:

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo T ; se supone que $f(x)$ es continua a trozos en $(nT, (n+1)T)$ y tiene límites finitos en los extremos de este intervalo; entonces:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx.$$

Demostración:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx.$$

Para cada $n \geq 0$ se hace el cambio de variable $u = x - nT$ en la integral

$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx$. Se tiene:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^T e^{-s(u+nT)} f(u+nT) du = e^{-snT} \int_0^T e^{-su} f(u) du.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \right) \cdot \int_0^T e^{-su} f(u) du.$$

La expresión $\sum_{n=0}^\infty e^{-snT}$ es una serie geométrica de razón e^{-sT} . Para $s > 0$

se tiene $e^{-Ts} < 1$, por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}},$$

de lo que se deduce que:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx. \quad \square$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.8: Comprobar que $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \text{sen}(bx)\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ y que

$$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \text{cos}(bx)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \forall s > 0.$$

$\mathbf{L}\{\text{sen}(bx)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}$, $\forall s > 0$, aplicando el *teorema 9.4.6* se tiene que

$$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \text{sen}(bx)\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \forall s > 0.$$

Análogamente $\mathbf{L}\{\text{cos}(bx)\} = \frac{s}{s^2 + b^2}$, $\forall s > 0$, por el *teorema 9.4.6*:

$$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \text{cos}(bx)\} = \frac{s}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \forall s > 0.$$

Ejemplo 9.4.9: Calcular la función $f(x)$ cuya transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}.$$

La función $F(s)$ se puede expresar por:

$$\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Por el primer teorema de traslación:

$$\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} = \mathbf{L}\{e^{-x} \cdot \text{cos}(2x)\}, \quad \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = \mathbf{L}\{e^{-x} \cdot \text{sen}(2x)\}$$

Al aplicar la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que la función cuya transformada es $F(s)$ es $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} e^{-x} \cdot \sin(2x)$.

Ejemplo 9.4.10: Expresar mediante la función de Heaviside y calcular la

transformada de Laplace de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 2x-3 & x \in [1,\infty) \end{cases}$.

$$f(x) = (2x - 3) \cdot u_1(x) = (2x - 3) \cdot u(x - 1).$$

Se aplica el segundo teorema de traslación:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\{f(x)\} &= \mathbf{L}\{(2x - 3) \cdot u(x - 1)\} = \mathbf{L}\{(2(x - 1) - 1) \cdot u(x - 1)\} = e^{-s} \cdot (2\mathbf{L}\{x\} - \mathbf{L}\{1\}) \\ &= e^{-s} \cdot \left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 9.4.11: Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x)$

periódica de periodo $T = 2$ definida en $[0, \infty)$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x-2 & x \in [1,2) \end{cases}$.

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\int_0^1 x e^{-sx} dx + \int_1^2 (x - 2) e^{-sx} dx \right)$$

Estas dos integrales se calculan por partes:

$$\int_0^1 x e^{-sx} dx = \frac{1 - (s + 1)e^{-s}}{s^2},$$

$$\int_1^2 (x - 2) e^{-sx} dx = \frac{-e^{-2s} - (s - 1)e^{-s}}{s^2},$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{-e^{-2s} - (s + 1 + s - 1)e^{-s} + 1}{s^2} \right) = \frac{1 - 2se^{-s} - e^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}.$$

Ejercicios

9.18. Calcular la función $f(x)$ cuya transformada de Laplace es $F(s) =$

$$\frac{2}{s^2 + 10s + 41}.$$

9.19. Hallar la función $f(x)$ conociendo que su transformada de Laplace es $F(s)$

$$= \frac{s - 5}{s^2 - 6s + 13}.$$

9.20. Hallar la transformada de Laplace de la función $f(x) = \text{sen}x \cdot u(x - 2\pi)$.

9.21. Expresar mediante la función de Heaviside y calcular la transformada de

$$\text{Laplace de la función } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x-3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

9.22. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica $f(x) = \frac{|\text{sen}x|}{\text{sen}x}$.

9.23. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo T

$$= 2, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 1 & x \in [1, 2) \end{cases}.$$

9.4.4. Transformadas de derivadas e integrales

La transformada de Laplace tiene una especial importancia para la resolución de ecuaciones diferenciales porque, como se verá a continuación, transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, con lo cual se puede calcular fácilmente la transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial y, utilizando el proceso inverso, obtener la solución buscada.

Para poder usar la transformada para resolver problemas de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones es necesario, entonces, encontrar la relación entre la transformada de una función y la de su función derivada.

Transformada de una derivada

Proposición 9.4.9:

Si $f(x)$ es derivable hasta el orden n y $f(x)$ y sus derivadas son de orden exponencial entonces:

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Demostración:

Se demuestra por inducción sobre n .

Para $n = 1$:

$$\mathbf{L}\{f'(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx,$$

integrando por partes:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = e^{-sx} \cdot f(x) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

por ser $f(x)$ de orden exponencial $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} f(x) = 0$; por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f'(x)\} = s \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} - f(0^+),$$

que verifica la hipótesis de inducción.

Se supone cierta para $n - 1$, es decir:

$$\mathbf{L}\{f^{(n-1)}(x)\} = s^{n-1} \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-2} \cdot f(0^+) - s^{n-3} \cdot f'(0^+) - \dots - f^{(n-2)}(0^+),$$

y se comprueba que se verifica para n :

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n)}(x) dx.$$

Al integrar por partes:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n)}(x) dx = e^{-sx} \cdot f^{(n-1)}(x) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f^{(n-1)}(x) dx$$

aplicando que $f^{(n-1)}(x)$ es de orden exponencial $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} f^{(n-1)}(x) = 0$, se tiene:

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(x)\} = -f^{(n-1)}(0^+) + s \mathbf{L}\{f^{(n-1)}(x)\}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+). \quad \square$$

Esta propiedad es muy importante ya que permite asegurar que la transformada de Laplace transforma derivadas en productos, lo que va a hacer posible transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, y resolverla a mediante simples operaciones algebraicas.

Además cuando $f(0^+) = f'(0^+) = \dots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$ la fórmula se simplifica y se obtiene que $\mathbf{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot \mathbf{L}\{f(x)\}$

Si la transformada de una derivada proporciona un producto, cabe esperar que la transformada de una integral, operación inversa de la derivada, proporcione una división.

Transformada de una integral

Proposición 9.4.10:

Si $f(x)$ es continua a trozos y de orden exponencial entonces $\int_0^x f(t) \cdot dt$ es

de orden exponencial y verifica:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t) \cdot dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{L}\{f(x)\}.$$

Demostración:

$\int_0^x f(t) \cdot dt$ es de orden exponencial ya que al serlo $f(t)$ se cumple que:

$$\left| \int_0^x f(t) \cdot dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| \cdot dt \leq M \int_0^x e^{ct} \cdot dt \leq M' e^{cx}.$$

Para calcular su transformada:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t) \cdot dt\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(t) dt\right) dx,$$

se integra por partes:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(t) dt\right) dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \int_0^x f(t) dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(x) \cdot e^{-sx} dx.$$

Al aplicar que $\int_0^x f(t) dt$ es de orden exponencial, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \int_0^x f(t) dt = 0, \text{ se tiene que:}$$

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t) \cdot dt\right\} = \frac{1}{s} \mathbf{L}\{f(x)\}. \quad \square$$

Si el límite inferior de la integral no es 0 sino $a > 0$, ésta se puede

expresar como: $\int_a^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^a f(t) dt$. Como $\int_0^a f(t) dt$ es una constante

k y $\mathbf{L}\{k\} = \frac{k}{s}$, $s > 0$, se tiene que:

$$\mathbf{L}\left\{\int_a^x f(t) \cdot dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} - \frac{1}{s} \cdot \int_0^a f(t) dt.$$

Proposición 9.4.11:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y $F(s)$ es derivable hasta el orden n , entonces:

$$\mathbf{F}^n(s) = (-1)^n \cdot \mathbf{L}\{x^n \cdot f(x)\}.$$

Demostración:

Se demuestra por inducción.

Se comprueba primero que $F'(s) = (-1) \cdot \mathbf{L}\{x \cdot f(x)\}$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

derivando con respecto a s :

$$F'(s) = \int_0^{\infty} (-x) \cdot e^{-sx} f(x) dx = (-1) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} (x \cdot f(x)) dx = F'(s) = (-1) \cdot \mathbf{L}\{x \cdot f(x)\}:$$

Supuesto cierto que $F^{(n-1)}(s) = (-1)^{n-1} \cdot \mathbf{L}\{x^{n-1} \cdot f(x)\}$, al derivar con respecto a s

en $F^{(n-1)}(s) = (-1)^{n-1} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} (x^{n-1} \cdot f(x)) dx$, se obtiene que:

$$F^{(n)}(s) = (-1)^{n-1} \cdot \int_0^{\infty} (-x) \cdot e^{-sx} (x^{n-1} \cdot f(x)) dx,$$

por lo tanto $F^{(n)}(s) = (-1)^n \cdot \mathbf{L}\{x^n \cdot f(x)\}$. \square

Corolario 9.4.12:

La transformada de Laplace de la función $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ es la función:

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior ya que $\mathbf{L}\{x^n\} =$

$$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} (\mathbf{L}\{1\}) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \square$$

Este resultado ya se había demostrado de otra forma en el *ejemplo 9.4.4*.

Proposición 9.4.13:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y existe la

transformada de $\frac{f(x)}{x}$ entonces:

$$\int_s^\infty F(t)dt = \mathbf{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}.$$

Demostración:

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ y $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$, por la proposición

9.4.11 se obtiene: $\frac{d}{ds}(\mathbf{L}\{g(x)\}) = (-1) \cdot \mathbf{L}\{x \cdot g(x)\} = (-1) \cdot \mathbf{L}\{f(x)\}$, es decir, $G'(s) =$

$-F(s)$; integrando esta expresión entre s e ∞ :

$$\int_s^\infty G'(t)dt = -\int_s^\infty F(t)dt \Rightarrow G(s) - \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \int_s^\infty F(t)dt.$$

Al ser $G(s)$ la transformada de Laplace de una función por el *corolario*

9.4.3 $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$, por lo tanto $G(s) = \int_s^\infty F(t)dt$. \square

Proposición 9.4.14:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$, entonces:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^\infty F(s)ds,$$

siempre que estas dos integrales sean convergentes.

Demostración:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx.$$

Integrando respecto a s se tiene que:

$$\int_0^\infty F(s)ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx ds.$$

Cambiando el orden de integración:

$$\int_0^\infty F(s)ds = \int_0^\infty f(x) \left(\int_0^\infty e^{-sx} ds \right) dx.$$

Como $\int_0^{\infty} e^{-sx} ds = \frac{1}{x}$ para $x, s > 0$ se tiene que:

$$\int_0^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx. \quad \square$$

Esta fórmula se utiliza para calcular el valor de ciertas integrales que no se pueden resolver por otros métodos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.12: Sabiendo que $\mathbf{L}\{e^x \cdot f(x)\} = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$. Calcular:

a) $\mathbf{L}\left\{\frac{e^{3x}f(x)}{x}\right\},$

b) $\mathbf{L}\{x \cdot f(x)\}.$

a) Si $F(s) = \mathbf{L}\{f(x)\}$ entonces $\mathbf{L}\{e^x \cdot f(x)\} = F(s - 1) = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1}$ por lo tanto

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow \mathbf{L}\{e^{3x} \cdot f(x)\} = F(s - 3) = \frac{1}{(s - 3)^2 + 1}$$

por la *proposición 9.4.13*:

$$\mathbf{L}\left\{\frac{e^{3x}f(x)}{x}\right\} = \int_s^{\infty} \frac{1}{(t - 3)^2 + 1} dt = \arctg(t - 3) \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg(s - 3).$$

b) $\mathbf{L}\{x \cdot f(x)\} = -F'(s)$ por lo tanto: $\mathbf{L}\{x \cdot f(x)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$

Ejemplo 9.4.13: Utilizar la transformada de Laplace para calcular el valor de la integral $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx.$

Ya que $\mathbf{L}\{\text{sen}x\} = \frac{1}{s^2 + 1}$, utilizando el resultado de la *proposición 9.4.14*, se

tiene que $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + 1} = \operatorname{arctgs}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicios

9.24. Sabiendo que $\mathbf{L}\{e^x \cdot f(x)\} = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 1}$. Calcular a) $\mathbf{L}\left\{\frac{f(3x)}{x}\right\}$, b) $\mathbf{L}\{f(3x)\}$.

9.25. Calcular la transformada de Laplace de $f(x) = \frac{1}{x} (\cos ax - \cos bx)$.

9.26. Utilizar la transformada de Laplace para demostrar que:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) - \operatorname{arctg} s.$$

9.4.5. La convolución

La convolución aparece en numerosos contextos. Una interpretación habitual en la teoría de sistemas lineales es la siguiente: Si $g(x)$ mide el efecto de un sistema lineal independiente del tiempo cuando dicho sistema recibe un impulso en $x = 0$, la convolución mide el efecto de suministrar al sistema un impulso $f(x)$ distribuido a lo largo del tiempo. Es decir, la convolución se presenta en aplicaciones en las que el comportamiento del sistema no sólo depende de su estado en ese instante, sino también de su historia pasada.

Definición 9.4.9:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas definidas para todo $x \geq 0$ se define convolución de f y g , y se notará $f * g$, a la función definida por:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

La convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación

ordinaria, pero no es cierto que $f * 1$ sea igual a f .

Propiedades de la convolución

1. Conmutativa: $f * g = g * f$.

Demostración:

En $(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ se hace el cambio de variable $u = x - t$:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_x^0 f(u)g(x-u)(-1)du = \int_0^x g(x-u)f(u)du = (g * f)(x), \text{ por}$$

lo tanto $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ para todo $x \geq 0$. \square

2. Asociativa: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

3. Distributiva: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Definición 9.4.9:

Se dice que θ es una **función nula** si $\int_0^x \theta(t)dt = 0$ para todo $x > 0$.

Es evidente que la función idénticamente 0 es una función nula, pero también son nulas las funciones que sólo tienen un número finito de valores distintos de cero o un número infinito pero numerable. De estas funciones sólo la idénticamente cero es continua.

4. Si $\theta(x) = 0 \forall x \Rightarrow f * \theta = \theta * f = \theta$

Las demostraciones de que se verifican estas tres últimas propiedades se proponen como ejercicios.

En el siguiente teorema se observa como la convolución, que es una operación integral, se convierte mediante la transformada de Laplace en un producto, que es una operación algebraica.

Teorema 9.4.15: Transformada de Laplace y convolución

El producto de las transformadas de Laplace de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ coincide con la transformada de la convolución de f y g , es decir:

$$\mathbf{L\{f(x)\} \cdot L\{g(x)\} = L\{(f * g)(x)\}.$$

Demostración:

Si $F(s) = L\{f(x)\}$ y $G(s) = L\{g(x)\}$ entonces

$$F(s) \cdot G(s) = \left(\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du \right) =$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(t+u)} f(t) g(u) dt du = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-s(t+u)} f(t) dt \right) g(u) du.$$

Se realiza el cambio de variable $x = t + u$, para un valor fijo de u , se tiene:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_u^{\infty} e^{-sx} f(x-u) dx \right) g(u) du =$$

$$\int_0^{\infty} \int_u^{\infty} e^{-sx} f(x-u) dx g(u) du.$$

La integración se realiza en la mitad del primer cuadrante xu que verifica $x \geq u$, al invertir el orden de integración $0 \leq u \leq x$, por lo tanto:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^x e^{-sx} f(x-u) g(u) du \right) dx =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_0^x f(x-u) g(u) du \right) dx = L\{(f * g)(x)\},$$

de donde resulta que:

$$F(s) \cdot G(s) = L\{(f * g)(x)\}. \quad \square$$

El *teorema 9.4.15* permite obtener una función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ se puede expresar como un producto $G(s) \cdot H(s)$ de dos funciones que son transformadas de funciones conocidas, de forma que si $G(s) = L\{g(x)\}$ y $H(s) = L\{h(x)\}$, entonces $f(x) = (g * h)(x)$.

Para aplicar la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales, sistemas con coeficientes constantes y ecuaciones integrales, es necesario un método que permita calcular la transformada inversa.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.14: Calcular la convolución de la función $f(x) = \cos x$ con la función $g(x)$ cuya transformada es $G(s) = \frac{1}{s-1}$.

Si $G(s) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow g(x) = e^x$, por lo tanto:

$$(f * g)(x) = \cos x * e^x = \int_0^x \cos(x-t) \cdot e^t dt,$$

al integrar se obtiene:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x + e^x).$$

Ejemplo 9.4.15: Si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$.

Calcular $L\{(f * g)(x)\}$.

$$L\{f(x)\} = \int_0^a \frac{1}{a} e^{-sx} dx = \frac{1 - e^{-as}}{as}$$

$$L\{g(x)\} = \int_0^a a \cdot e^{-sx} dx = \frac{a(1 - e^{-as})}{s}$$

Por el teorema 9.4.15:

$$L\{(f * g)(x)\} = L\{f(x)\} \cdot L\{g(x)\} = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}.$$

Ejercicios

9.27. Sean $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ y $j(x) = \cos x$. Calcular:

a) $(f * f)(x)$, b) $(f * g)(x)$, c) $(g * g)(x)$, d) $(f * h)(x)$, e) $(j * j)(x)$.

9.28. Calcular la convolución de la función $f(x)$ cuya transformada es $F(s) =$

$$\frac{1}{(s+1)^2} \text{ con } g(x) = e^{2x}.$$

9.29. Demostrar las propiedades asociativa, distributiva y de la función idénticamente cero de la convolución.

9.4.6. La transformada inversa

Para que la transformada tenga utilidad es necesario que exista algún procedimiento para hallar la inversa de la misma. La transformada inversa es también un operador lineal y puede no ser única, aunque no puede diferir sobre un intervalo de longitud positiva puesto que sólo puede ser diferente en puntos aislados. Ahora bien, la transformada inversa de una función continua sí es única, como se prueba en el teorema siguiente, y éste es el tipo de solución que buscamos en muchas aplicaciones.

Teorema 9.4.16:

Si dos funciones continuas y de orden exponencial, $f(x)$ y $g(x)$, definidas en $[0, \infty)$, tienen la misma transformada de Laplace entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0$.

Demostración:

Si $\mathbf{L}\{f(x)\} = \mathbf{L}\{g(x)\}$ entonces $\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx$, por lo

tanto $\int_0^{\infty} e^{-sx}(f(x) - g(x)) dx = 0$, luego $e^{-sx}(f(x) - g(x))$ es una función nula, como es continua es idénticamente cero, por lo que $e^{-sx}(f(x) - g(x)) = 0$ para todo $x \geq 0$, entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$. \square

Este teorema garantiza la unicidad de la transformada para funciones continuas lo que va a permitir resolver problemas que se simplifican mediante esta transformación y obtener la solución a partir de su transformada.

Notación

Por convenio se suele utilizar la misma letra, pero en mayúsculas, para expresar la transformada inversa de una función: Así: $\mathbf{L}\{f(x)\} = F(s)$; $\mathbf{L}\{g(x)\} = G(s)$; $\mathbf{L}\{y(x)\} = Y(s)$...

Transformadas inversas de funciones racionales

Sea $F(s) = \mathbf{L}\{f(x)\}$ y $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, siendo $p(s)$ y $q(s)$ polinomios sin raíces

comunes y $\text{grado}(q(s)) > \text{grado}(p(s))$, ya que por el *corolario 9.4.3* debe verificarse que $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Para calcular $\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$ se descompone $\frac{p(s)}{q(s)}$ en suma de fracciones

simples. Según el tipo de raíces de la ecuación $q(s) = 0$ se pueden considerar los siguientes casos:

Caso 1º: Las raíces de $q(s) = 0$ son reales y simples.

En este caso las fracciones simples son de la forma $\frac{A}{s-a}$ y como $\mathbf{L}\{e^{ax}\} =$

$$\frac{1}{s-a}, s > 0, \text{ se tiene que } \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-a}\right\} = A e^{ax}.$$

Caso 2º: Las raíces de $q(s) = 0$ son reales y múltiples.

Si a es una raíz múltiple la fracción correspondiente en la descomposición es de la forma $\frac{A}{(s-a)^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Utilizando la expresión $\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ y el *primer teorema de la traslación*

9.4.6: $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot f(x)\} = F(s-a)$, se obtiene que $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot x^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, por lo que

$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$. Se verifica que:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-a)^m}\right\} = \frac{A}{(n-1)!} \cdot e^{ax} \cdot x^{n-1}.$$

Caso 3º: Las raíces de $q(s) = 0$ son complejas y simples.

Si $a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas la fracción correspondiente en la descomposición es de la forma $\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2}$ que se puede expresar:

$$\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2} = \frac{M(s-a)+Ma+N}{(s-a)^2+b^2} = M \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2} + \frac{Ma+N}{b} \cdot \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

De las igualdades: $\mathbf{L}\{\cos bx\} = \frac{s}{s^2+b^2}$, $\mathbf{L}\{\sin bx\} = \frac{b}{s^2+b^2}$, y del primer

teorema de traslación, se deduce que:

$$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \cos bx\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad \mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \sin bx\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2},$$

se obtiene entonces:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax} \cdot \cos bx$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax} \cdot \sin bx$$

por lo tanto

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2}\right\} = M e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{Ma+N}{b} e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx.$$

Caso 4º: Las raíces de $q(s) = 0$ son complejas y múltiples.

Sin considerar el caso general se calcula la inversa de tres tipos de funciones que aparecen con mucha frecuencia:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2}, \quad G(s) = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} \quad \text{y} \quad H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}.$$

$F(s)$ se puede descomponer en un producto de funciones de transformada conocida:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2}$$

Al ser $\mathbf{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ y $\mathbf{L}\{\operatorname{sen} ax\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$, y al aplicar el *teorema*

de la convolución 9.5.15 se obtiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a} (\cos ax * \operatorname{sen} ax) = \frac{1}{a} \int_0^x \cos a(x-t) \operatorname{sen}(at) dt =$$

$$\frac{1}{2a} \int_0^x (\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ax - 2at)) dt.$$

Basta entonces resolver la integral:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a} x \cdot \operatorname{sen} ax.$$

Para calcular la transformada inversa de $G(s) = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$ se utiliza el

resultado anterior, es decir:

$$\frac{1}{2a} \cdot \mathbf{L}\{x \cdot \operatorname{sen} ax\} = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2},$$

al tener en cuenta que $\mathbf{L}\{(x \cdot \text{sen } ax)'\} = s \cdot \mathbf{L}\{x \cdot \text{sen } ax\} - 0$, se tiene:

$$\frac{1}{2a} \cdot \mathbf{L}\{(x \cdot \text{sen } ax)'\} = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2},$$

por lo tanto:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a} (\text{sen } ax + ax \cdot \text{cos } ax).$$

Para calcular la transformada inversa de $H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$ se vuelve a

utilizar el teorema de la convolución descomponiendo la función en un producto de funciones de transformada conocida.

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2},$$

ya que $\mathbf{L}\{\text{sen } ax\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$, se tiene que:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a^2} (\text{sen } ax * \text{sen } ax) = \frac{1}{a^2} \int_0^x \text{sen } a(x-t) \text{sen } (at) dt =$$

$$\frac{-1}{2a^2} \int_0^x (\text{cos } ax - \text{cos}(ax - 2at)) dt,$$

resolviendo la integral:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \text{sen } ax - x \cdot \text{cos } ax\right).$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.16: Calcular la transformada inversa de la función $F(s) =$

$$\frac{s}{s^3 - s^2 + s - 1}.$$

Se factoriza el denominador: $s^3 - s^2 + s - 1 = (s - 1) \cdot (s^2 + 1)$; por lo tanto:

$$\frac{s}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1},$$

se utiliza que:

$$\mathbf{L}\{e^x\} = \frac{1}{s-1} \text{ y } \mathbf{L}\{\cos x\} = \frac{s}{s^2+1}, \text{ se tiene que:}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^3 - s^2 + s - 1}\right\} = \cos x * e^x = \int_0^x \cos(x-t) \cdot e^t dt,$$

al integrar se obtiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^3 - s^2 + s - 1}\right\} = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x).$$

Ejemplo 9.4.17: Calcular $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4 + s^2}\right\}$ utilizando el producto de

convolución.

$$\mathbf{L}\{(f * g)(x)\} = \mathbf{L}\{f(x)\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{s+1}{s^4 + s^2} = \frac{s+1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1},$$

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \Rightarrow f(x) = 1 + x,$$

$$\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow g(x) = \operatorname{sen} x.$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4 + s^2}\right\} = (f * g)(x) = \int_0^x (1+x-t) \cdot \operatorname{sen} t dt.$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4 + s^2}\right\} = 1 + x - \cos x - \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 9.4.18: Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a & \text{si } x > a \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$.

Calcular $(f * g)(x)$.

En el ejemplo 9.4.15 se había calculado $\mathbf{L}\{(f * g)(x)\} = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}$, por lo

tanto es suficiente calcular la transformada inversa de esta función.

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}\right\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2}\right\} + \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\},$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x;$$

Por el teorema 9.4.7 se tiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2}\right\} = (x - a) \cdot u(x - a),$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\} = 4 \cdot \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{(2s)^2}\right\} = 2(2 \cdot \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{(2s)^2}\right\}).$$

Aplicando ahora el teorema de traslación 9.4.7 y la proposición 9.4.5 para

$$k = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\} = 2\left(\frac{x}{2} - a\right) \cdot u(x - 2a) = (x - 2a) \cdot u(x - 2a).$$

Por lo tanto:

$$(f * g)(x) = x - 2(x - a) \cdot u(x - a) + (x - 2a) \cdot u(x - 2a), \quad \forall x > 0$$

Ejercicios

9.30. Calcular $\mathbf{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2\right\}$.

9.31. Sabiendo que $\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{s^2}$ y $\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{e^{-sx}}{s^2 + 1}$. Calcular $(f * g)(x)$ de dos

formas distintas:

- a) Calculando $f(x)$ y $g(x)$ y aplicando la definición de convolución.
- b) Descomponiendo en fracciones simples el producto $\mathbf{L}\{f(x)\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}$ y calculando la transformada inversa de cada sumando de la descomposición.

9.4.7. Aplicaciones

1. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

Las características esenciales del método para resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformada de Laplace son las siguientes:

Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace a los dos miembros de la ecuación diferencial.

Paso 2: Resolver el problema algebraico despejando la transformada de la función solución de la ecuación

Paso 3: Calcular la transformada inversa de la función obtenida.

Este procedimiento es especialmente útil en ecuaciones lineales completas, no homogéneas, cuando la función $b(x)$, que determina que la ecuación sea no homogénea, es una función continua a trozos, que se puede expresar mediante la función de *Heaviside*, o es la distribución delta de Dirac.

Así, si se aplica la transformada de Laplace a una ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = b(x)$$

se obtiene:

$$\mathbf{L}\{y''(x) + py'(x) + qy(x)\} = \mathbf{L}\{b(x)\} \Rightarrow \mathbf{L}\{y''(x)\} + p\mathbf{L}\{y'(x)\} + q\mathbf{L}\{y(x)\} = \mathbf{L}\{b(x)\}$$

Las transformadas de las derivadas de $y(x)$ se pueden expresar en función de $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}$. Llamando $B(s)$ a $\mathbf{L}\{b(x)\}$ se tiene:

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + p(s \cdot Y(s) - y(0)) + qY(s) = B(s)$$

Se despeja $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{B(s) + (p+s)y(0) + y'(0)}{s^2 + ps + q}.$$

Al aplicar la transformada inversa se obtiene:

$$y(x) = \mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

Para poder aplicar este método es necesario que $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ y $b(x)$ tengan transformada de Laplace, lo que se verifica siempre que exista la transformada de $b(x)$ y para esto es suficiente que $b(x)$ sea una función continua, o continua a trozos, y de orden exponencial.

También se puede aplicar la transformada de *Laplace* a ecuaciones que no tienen coeficientes constantes siempre que exista la transformada de las funciones que intervienen en la ecuación.

Con este método se obtiene una representación integral de las soluciones de la ecuación de *Airy*: $y'' = x \cdot y$. Para resolver este problema es conveniente hacer previamente el cambio de variable de x por $-x$ para evitar crecimientos más rápidos que el exponencial. La transformada de Laplace proporciona una representación integral de las funciones de *Airy* en el eje real negativo que es válida en todo el campo complejo mediante prolongación analítica.

2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace también se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. El procedimiento es similar al que se ha expuesto para resolver ecuaciones diferenciales.

Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones del sistema.

Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones algebraico para despejar las transformadas de las soluciones del sistema.

Paso 3: Calcular las transformadas inversas de las funciones obtenidas.

También en este caso cuando se conocen las condiciones iniciales no es necesario obtener primero la solución general y a partir de ella la solución particular que verifica dichas condiciones, ya que se incorporan de forma automática en las soluciones.

Este método se puede aplicar no sólo a los sistemas lineales de primer orden sino también a los de orden superior.

3. Resolución de ecuaciones integrales

Las buenas propiedades de la transformada de *Laplace* al actuar sobre la convolución permiten también resolver ecuaciones integrales.

El método es similar al estudiado para ecuaciones y sistemas lineales. Así, por ejemplo, para resolver la ecuación integral:

$$a \cdot y(x) + \int_0^x g(x-t) \cdot y(t) \cdot dt = f(x)$$

se sigue el siguiente procedimiento:

Paso 1º: Aplicar la transformada a la ecuación:

$$aL\{y(x)\} + L\{g(x)\} \cdot L\{y(x)\} = L\{f(x)\}.$$

Paso 2º: Despejar la transformada de la función incógnita:

$$L\{y(x)\} = \frac{L\{f(x)\}}{a + L\{g(x)\}},$$

Paso 3º: Calcular la transformada inversa.

Esta técnica se utiliza para obtener la expresión la curva tautócrona, que

es un caso particular del problema mecánico de Abel, y consiste en determinar la ecuación de la curva que adopta un hilo por el que se desliza sin fricción, hacia abajo, por la acción de su peso, una bola de masa m , a partir de una función dada que expresa el tiempo de bajada. En nuestro caso para calcular la ecuación de la curva tautócrona se supone que esta función es constante.

4. La curva tautócrona

Dado un hilo en forma de curva suave y un bola de masa m que parte del reposo y se desliza sin rozamiento hacia el origen de coordenadas bajo la acción de su propio peso, se trata de encontrar la ecuación de la curva para la que el tiempo de descenso, cualquiera que sea el punto de la curva en el que se coloca la bola, sea constante.

Sea $P(x, y)$ el punto de partida y $Q(z, u)$ cualquier punto intermedio. Si la forma del hilo viene dada por la función $y = y(x)$, el tiempo total de descenso $t(y)$ será una función que depende de la altura inicial y que se considera constante $t(y) = t_0$.

Para pasar de P a Q aplicando el principio de conservación de la energía

se tiene que: $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot (y - u)$. La velocidad es $v = \frac{ds}{dt}$, por lo tanto $\frac{ds}{dt} =$

$-\sqrt{2g(y-u)} \Rightarrow dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-u)}}$. Aplicando que $ds = s'(u) \cdot du$ e integrando se

obtiene:

$$t(y) = \int_0^y \frac{s'(u) du}{\sqrt{2g(y-u)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{s'(u) du}{\sqrt{y-u}}.$$

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación:

$$\mathbf{L}\{t(y)\} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \mathbf{L}\left(\int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{y-u}}\right) \quad (9.4.2)$$

La integral $\int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{y-u}}$ es la convolución de las funciones $s'(y)$ y $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, utilizando (9.4.1) y el teorema de la convolución:

$$\mathbf{L}\{(s' * g)(y)\} = \mathbf{L}\{s'(y)\} \cdot \mathbf{L}\{g(y)\} = \mathbf{L}\{s'(x)\} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Se sustituye este resultado en (9.4.2) y se obtiene:

$$\mathbf{L}\{s'(y)\} = \sqrt{\frac{2gs}{\pi}} \mathbf{L}\{t(y)\} \quad (9.4.3)$$

La función $t(y)$ es constante, $t(y) = t_0$, por lo que $\mathbf{L}\{t(y)\} = \frac{t_0}{s}$, por lo que:

$$\mathbf{L}\{s'(y)\} = \sqrt{\frac{2gs}{\pi}} \cdot \frac{t_0}{s} = \sqrt{2g} \cdot \frac{t_0}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} = k \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \text{ siendo } k = \sqrt{2g} \cdot \frac{t_0}{\pi}.$$

Se calcula la transformada inversa: $s'(y) = k \cdot \sqrt{\frac{1}{y}}$.

$$\text{Como } s'(y) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \Rightarrow \frac{k^2}{y} = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}} \Rightarrow x =$$

$$\int \sqrt{\frac{k^2 - y}{y}} dy.$$

Se hace ahora el cambio de variable $y = k^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha$:

$$x = 2k^2 \int \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \frac{k^2}{2} (2\alpha + \text{sen } 2\alpha) + C,$$

se expresa y en función de 2α : $y = \frac{k^2}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$.

Se impone la condición de que la curva pase por el origen (0, 0) por lo

que se obtiene que $C = 0$.

Llamando $r = \frac{k^2}{2}$ y $\theta = 2\alpha$ se tiene:

$$\begin{cases} x = r(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y = r(1 - \operatorname{cos}\theta), \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que rueda bajo la recta $y = 2r$.

El radio está determinado por la constante t_0 ya que $r = \frac{k^2}{2} = g \cdot \frac{t_0^2}{\pi^2}$. Por

tanto, si una cicloide está generada por una circunferencia de radio r entonces

el tiempo constante de descenso es: $t_0 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.19: Resolver la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$, con $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, utilizando la transformada de Laplace.

Paso 1: Calcular la transformada de Laplace de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$:

$$[s^2 \mathbf{L}\{y\} - s \cdot y(0) - y'(0)] - [s \cdot \mathbf{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathbf{L}\{y\} = 0.$$

Se sustituyen los valores iniciales $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, se obtiene:

$$(s^2 - s - s) \cdot \mathbf{L}\{y\} - s + 1 = 0.$$

Paso 2: Despejar $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}$:

$$Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}.$$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa \mathbf{L}^{-1} , para calcular la función $y(x)$ a partir de $\mathbf{L}\{y(x)\}$:

Al observar que $\mathbf{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$ se deduce que la solución buscada es:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}\right)e^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)e^{-x}.$$

Ejemplo 9.4.20: Resolver la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2y = r(x)$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$, con $r(x) = 1$ en $0 < x < 1$, y cero en el resto.

Se resuelve aplicando la transformada de Laplace:

Paso 1: Calcular la transformada de Laplace de la ecuación:

Como $r(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} = 1 - u(x-1) \Rightarrow \mathbf{L}\{r(x)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$, por lo que:

$$s^2 \cdot \mathbf{L}\{y(x)\} + 3s \cdot \mathbf{L}\{y(x)\} + 2\mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{1-e^{-s}}{s} \Rightarrow$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 3s \cdot Y(s) + 2Y(s) = (s^2 + 3s + 2) \cdot Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

Paso 2: Despejar $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}$:

$$Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} = (1-e^{-s}) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} \right).$$

Paso 3: Calcular la función $y(x)$ a partir de $\mathbf{L}\{y(x)\}$:

Si $\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$ entonces $g(x) = \frac{1}{2} - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

Por el *teorema 9.4.7*, $y(x) = g(x) - g(x-1) \cdot u(x-1)$, por lo que:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} & 0 \leq x < 1 \\ (e-1)e^{-x} - \frac{e^2-1}{2}e^{-2x} & x \geq 1 \end{cases}.$$

Ejemplo 9.4.21: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} 2y_1'(x) + y_2'(x) - y_2(x) &= x \\ y_1'(x) + y_2'(x) &= x^2 \end{aligned} \right\} \text{ con } y_1(0) = 1 \text{ e } y_2(0) = 0.$$

Paso 1: Aplicar al sistema la transformada de Laplace:

$$\left. \begin{aligned} 2L\{y_1'(x)\} + L\{y_2'(x)\} - L\{y_2(x)\} &= L\{x\} \\ L\{y_1'(x)\} + L\{y_2'(x)\} &= L\{x^2\} \end{aligned} \right\}$$

Si $L\{y_1(x)\} = Y_1(s)$ y $L\{y_2(x)\} = Y_2(s)$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2(s \cdot Y_1(s) - 1) + s \cdot Y_2(s) - 0 - Y_2(s) = \frac{1}{s^2} \\ s \cdot Y_1(s) - 1 + s \cdot Y_2(s) - 0 = \frac{2}{s^3} \end{cases}$$

Paso 2: Despejar $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$:

Se resuelve este sistema:

$$s \cdot Y_1(s) = 1 - s \cdot Y_2(s) + \frac{2}{s^3}.$$

Al sustituir en la primera ecuación y despejar $Y_2(s)$ se obtiene:

$$Y_2(s) = \frac{4 - s}{s^3(s + 1)},$$

que se descompone en fracciones simples:

$$Y_2(s) = \frac{-5}{s+1} + \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3},$$

Se despeja Y_1 :

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} - Y_2(s) + \frac{2}{s^4},$$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa L^{-1} , para obtener la solución pedida:

$$\begin{cases} y_1(x) = 5e^{-x} - 4 + 5x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \\ y_2(x) = -5e^{-x} + 5 - 5x + 2x^2. \end{cases}$$

Ejemplo 9.4.22: Calcular la solución particular de la ecuación diferencial

$x \cdot y'' + 2y' + x \cdot y = \text{sen } x$, que verifica $y(0) = 0$.

Paso 1: Aplicar la transformada a la ecuación diferencial:

$$\mathbf{L}\{x \cdot y''\} + \mathbf{L}\{2y'\} + \mathbf{L}\{x \cdot y\} = \mathbf{L}\{\text{sen } x\}.$$

Si $\mathbf{L}\{y(x)\} = Y(s)$ entonces $\mathbf{L}\{y'(x)\} = s \cdot Y(s) - y(0) = s \cdot Y(s)$,

$$\mathbf{L}\{y''(x)\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot Y(s) - y'(0),$$

$$\mathbf{L}\{x \cdot y''(x)\} = -\frac{d}{ds} (s^2 \cdot Y(s) - y'(0)) = -(2s \cdot Y(s) + s^2 \cdot Y'(s))$$

$$\mathbf{L}\{x \cdot y(x)\} = -Y'(s) \text{ y } \mathbf{L}\{\text{sen } x\} = \frac{1}{s^2 + 1},$$

sustituyendo en la ecuación:

$$-(2s \cdot Y(s) + s^2 \cdot Y'(s)) + 2s \cdot Y(s) + (-Y'(s)) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$Y'(s)(-s^2 - 1) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

por tanto:

$$Y'(s) = \frac{-1}{(s^2 + 1)^2} \Rightarrow Y(s) = \mathbf{L}\{x \cdot y(x)\} = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}.$$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa:

$$x \cdot y(x) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \frac{1}{2} (\text{sen } x - x \cdot \cos x)$$

La solución particular buscada es:

$$y(x) = \frac{1}{2x} (\text{sen } x - x \cdot \cos x).$$

Ejemplo 9.4.23: Calcular la función $g(x)$ que verifica la siguiente ecuación

$$\text{integral: } g(x) = 3 \text{sen } x + 2 \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt.$$

Paso 1: Calcular la transformada de la ecuación:

$$\mathbf{L}\{g(x)\} = \mathbf{L}\{3 \text{sen } x\} + 2\mathbf{L}\left\{ \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt \right\}.$$

Por la definición de convolución $\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt = \cos x * g(x)$.

Por el teorema 9.4.15, $\mathbf{L}\left\{\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt\right\} = \mathbf{L}\{\cos x\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}$.

Paso 2: Despejar $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$.

Sustituyendo este resultado $\mathbf{L}\{g(x)\} = 3\mathbf{L}\{\sin x\} + 2(\mathbf{L}\{\cos x\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\})$.

Calculando transformadas:

$$G(s) = \frac{3}{s^2+1} + 2\left(\frac{s}{s^2+1} \cdot G(s)\right) \Rightarrow (s^2 + 1) G(s) = 3 + 2s \cdot G(s) \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{3}{(s-1)^2}.$$

Paso 3: Aplicar \mathbf{L}^{-1} .

$$g(x) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}.$$

Aplicando el primer teorema de traslación se obtiene la solución buscada:

$$g(x) = 3x \cdot e^x.$$

Ejercicios

9.32. Resolver la ecuación $x \cdot y'' + (3x - 1) y' - (4x + 9) \cdot y = 0$, con $y(0) = y'(0) = 0$.

9.33. Resolver la ecuación $x \cdot y' - 4y - x \cdot y = -6x \cdot e^x$ con $y(0) = y'(0) = 0$.

9.34. Resolver el sistema $\begin{cases} y_1''(x) + y_1(x) - y_2(x) = 0 \\ y_2''(x) + y_2(x) - y_1(x) = 0 \end{cases}$ con las condiciones iniciales

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, y_1'(0) = -2 \text{ e } y_2'(0) = 1.$$

9.35. Resolver la ecuación $y' + y = f(x)$, con $y(0) = 0$ utilizando la transformada de Laplace sabiendo que $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.

9.36. Resolver la ecuación $y'' + 16y = f(x)$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, utilizando la

transformada de Laplace sabiendo que $f(x) = \cos(4x)$ si $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$ si $x > \pi$.

9.37. Calcular la convolución de la función $f(x)$ con $g(x) = \cos x$, sabiendo que

$$f(x) \text{ verifica la ecuación integral } f(x) = \operatorname{sen} x \cdot u(x - \pi) - 2 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt.$$

9.5. EJERCICIOS

9.38. Integrar la ecuación diferencial $y'' = (y')^3 + y'$.

$$(\text{Solución: } y = \operatorname{arcsen}(C_1 e^x) + C_2)$$

9.39. Resolver la ecuación diferencial $y \cdot y'' = 2(y')^2 - 2y'$.

$$(\text{Solución: } y = C, y = \frac{1}{C_2} \operatorname{tg}(C_2 \cdot x + C_1))$$

9.40. Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y \cdot y'' + (y')^2 = y^2$.

$$(\text{Solución: } y^2 = C_1 \operatorname{senh}(\sqrt{2}x + C_2))$$

9.41. Integrar la ecuación diferencial $y \cdot y'' + (y')^2 = 2$.

$$(\text{Solución: } y^2 = 2x^2 + C_1 x + C_2)$$

9.42. Sabiendo que $\mathbf{L}\{e^x \cdot f(x)\} = \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$, calcular $\mathbf{L}\{x \cdot f(2x)\}$ y $f(2x)$.

$$(\text{Solución: } \mathbf{L}\{x \cdot f(2x)\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right) \text{ y } f(2x) = \frac{1}{2x} (1 - e^{-4x}))$$

9.43. Demostrar que $\mathbf{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right\} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s^2 + 4}{s^2}\right)$.

9.44. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = u(x-1) \cdot e^{-2x+2} \cdot \text{sen } 3(x-3).$$

$$(\text{Solución: } \mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{3e^{-s}}{(s+2)^2 + 9})$$

9.45. Hallar $\mathbf{L}\{e^{-x} \cdot f(2x)\}$ sabiendo que $\mathbf{L}\{x \cdot f(x)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

$$(\text{Solución: } \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(s+1)^2 + 4}{(s+1)^2} \right))$$

9.46. Si $\mathbf{L}\{f(x)\} = \text{arctg}(\frac{1}{s})$. Calcular la función $f(x)$.

$$(\text{Solución: } f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}).$$

9.47. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo $2T$

$$\text{tal que } f(x) = \begin{cases} \pi & x \in [0, T) \\ -\pi & x \in [T, 2T) \end{cases}$$

9.48. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo $2T$

$$\text{tal que } f(x) = \begin{cases} 2T & x \in [0, T) \\ 2x - 2T & x \in [T, 2T) \end{cases}$$

9.49. Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}x} \cdot \text{sen } hx \cdot \text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{8}$.

9.50. Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$$(\text{Solución: } \mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{\sqrt{s^2+1}}{s^2+1})$$

9.51. Calcular la integral $\int_0^{\infty} \frac{2\text{sen}^2 x \cdot \text{sen } 2x}{x^2} dx$.

(Solución: $\ln(4)$)

9.52. Calcular la transformada inversa de la función $F(s) = \frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}$, sabiendo que

$$\mathbf{L} \left\{ \frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi x}} \right\} = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}.$$

$$(\text{Solución: } \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}} \right\} = \left\{ \frac{\cos 2\sqrt{ax}}{\sqrt{\pi x}} \right\} .$$

9.53. Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y'' + (3x - 1) \cdot y' - (4x + 9) \cdot y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

$$(\text{Solución: } y(x) = \frac{k}{2!} \cdot e^x \cdot x^2).$$

9.54. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales: $\begin{cases} 3y_1' + 2y_1 + y_2' = 1 \\ y_1' + 4y_2' + 3y_2 = 0 \end{cases}$ con

las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 0$.

$$(\text{Solución: } y_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{5} - \frac{3e^{-\frac{6}{11}x}}{10}, y_2(x) = \frac{e^{-x}}{5} - e^{-\frac{6}{11}x}.)$$

9.55. Calcular la función $f(x)$ que verifica la siguiente ecuación integral:

$$f(x) = 3x^2 - e^{-x} - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

$$(\text{Solución: } f(x) = 3x^2 - x^3 + 1 - 2e^{-x})$$

9.56. Hallar la función $f(x)$ que verifica la siguiente ecuación integral:

$$e^{-x} = f(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt.$$

$$(Solución: f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{-x})$$

9.57. Resolver la ecuación $y''(x) + 2y(x) = \delta(x - 2\pi)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$(Solución: y(x) = \cos x + u(x - 2\pi) \cdot \sin(x - 2\pi))$$

9.58. Calcular la solución de la ecuación $y'(x) + 2y(x) = f(x)$, con $y(0) = 0$, siendo

$$f(x) = e^{-2(x-2)} \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \text{ y } f(x) = 0 \text{ si } x > 2.$$

$$(Solución: y(x) = x \cdot e^{-2(x-2)} - u_2(x) \cdot (x - 2) \cdot e^{-2(x-2)}).$$

9.59. Resolver la ecuación $y''(x) + a^2 y(x) = \delta(x)$, con $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$.

$$(Solución: y(x) = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax)$$

9.60. La ecuación diferencial de la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie es:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + Ri = E(t). \text{ Determinar } i(t), \text{ cuando } i(0) = 0 \text{ y } E(t) \text{ es la función}$$

$$\text{periódica de periodo 2 definida por } E(t) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x \in [1,2) \end{cases}$$

$$(Solución: \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - e^{-\frac{R(t-n)}{L}}) u(t-n))$$

CAPÍTULO 10.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este capítulo se estudian las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Desde que se comenzaron a estudiar las ecuaciones diferenciales ha resultado evidente que es difícil obtener resultados muy generales que permitan obtener las soluciones de un tipo determinado de ecuación. Una excepción a esta carencia de una teoría general para resolver ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y en particular de las que tienen coeficientes constantes.

En una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea, el conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n , por lo que basta encontrar n soluciones linealmente independientes para obtener la solución general. El conjunto de soluciones de cualquier ecuación diferencial lineal de orden n completa tiene estructura de espacio afín, que tiene como espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada. En consecuencia, si se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada, para tener la solución general de la ecuación completa es suficiente encontrar un punto de ese espacio afín, es decir, una solución particular de esta ecuación.

Pero incluso en este caso, a veces, resulta difícil encontrar n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea. Solamente en el caso más sencillo, en el que los coeficientes de la ecuación son constantes, existe un método general que permite calcular las soluciones en función de los coeficientes de la ecuación.

Si los coeficientes de la ecuación diferencial son funciones analíticas se pueden obtener soluciones en forma de series de potencias, y resolver de esta forma muchas ecuaciones particulares, como las ecuaciones de *Legendre* y *Bessel*, que tienen una importancia especial por sus múltiples aplicaciones en problemas relativos a vibraciones de membranas, flujos de calor y propagación de corrientes eléctricas.

Como en el caso general, las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior no siempre pueden ser resueltas explícitamente en términos de funciones elementales conocidas, por lo que resulta necesario determinar las condiciones para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución.

El capítulo comienza, en la *Sección 1*, con algunas ideas sobre operadores lineales que permiten simplificar la notación en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales, y se explicitan los teoremas de existencia y unicidad de soluciones. En la *Sección 2ª* se estudia la estructura algebraica de las soluciones de una ecuación diferencial lineal. Un estudio algebraico permite determinar las soluciones de una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes en la *Sección 3ª*.

En las secciones siguientes se proponen varios métodos para resolver la ecuación no homogénea y algunos casos particulares en los que resulta fácil

resolver la ecuación con coeficientes no constantes. En la *Sección 6ª* se resuelven algunas ecuaciones especiales mediante desarrollos en series de potencias y se termina el capítulo con la *Sección 7ª* en la que se presentan distintas aplicaciones de estas ecuaciones a la mecánica, a la electrónica y, en general, a la física.

10.1. CONCEPTOS PREVIOS

Definición 10.1.1:

Una ecuación diferencial de orden n se denomina **lineal** si es lineal respecto a la variable dependiente y , y a todas sus derivadas hasta el orden n , de modo que se puede expresar de la forma:

$$P_0(x) \cdot y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x) \quad (10.1.1)$$

donde P_0, P_1, \dots, P_n son funciones definidas en un intervalo (a, b) de la recta real.

Definición 10.1.2:

Se denomina **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy** de la ecuación diferencial de orden n (10.1.1), al problema que consiste en encontrar una solución $\varphi(x)$ de la ecuación diferencial que verifique n condiciones iniciales $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, siendo $x_0 \in (a, b)$, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} números reales cualesquiera.

Definición 10.1.3:

Si las condiciones que debe verificar la solución están definidas en dos o

más puntos diferentes el problema se denomina **problema de contorno** de una ecuación diferencial.

10.1.1. El operador diferencial D

El estudio de estas ecuaciones se puede simplificar utilizando una notación con operadores.

Definición 10.1.2:

Sea \mathfrak{F} una familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (a, b) de la recta real. Se define el **operador diferencial D** como una aplicación de \mathfrak{F} en \mathfrak{F} tal que $\forall f \in \mathfrak{F}, D(f) = \frac{df}{dx}$.

Definición 10.1.3:

Dado el operador D, se define $D^2 = D \circ D$ como la composición de aplicaciones, de forma que $D^2(f) = (D \circ D)(f) = D(D(f))$.

Con esta definición se tiene que D^2 está determinado por $D^2(f) = \frac{d^2f}{dx^2}$, y

análogamente el operador D^n queda determinado por $D^n(f) = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Sea $P(x)$ una función definida en el intervalo (a, b) . El producto $P \cdot D^n$ es un operador determinado en \mathfrak{F} de forma natural por $P \cdot D^n(f) = P \cdot \frac{d^n f}{dx^n}$ tal que,

$$\forall x \in (a, b), P \cdot \frac{d^n f}{dx^n}(x) = P(x) \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

En particular si $P(x)$ es una función constante $P(x) = k, k \in \mathfrak{R}$, el operador

$k \cdot D^n$, queda determinado por $(k \cdot D^n)(f) = k \cdot (D^n(f))$ tal que, $\forall x \in (a, b)$, $(k \cdot D^n)(f(x)) = k \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, es decir, el segundo miembro de esta igualdad es el producto de un

número k por la derivada n -ésima de una función.

Propiedades del operador D

$$D^n \cdot D^m = D^{n+m}.$$

El operador D es lineal, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f, g \in \mathfrak{F} \text{ se verifica que } D(f+g) = D(f) + D(g). \\ \forall f \in \mathfrak{F}, \forall k \in \mathfrak{R} \text{ se verifica que } D(k \cdot f) = k \cdot D(f). \end{array} \right.$$

10.1.2. El operador lineal L

Definición 10.1.4:

Sea \mathfrak{F} una familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (a, b) de la recta real y $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ funciones definidas en dicho intervalo. Se denomina **operador lineal**:

$$L = P_0 \cdot D^n + P_1 \cdot D^{n-1} + \dots + P_n$$

a un operador definido en \mathfrak{F} , tal que $\forall f \in \mathfrak{F}$, $L(f) = P_0 \cdot f^{(n)} + P_1 \cdot f^{(n-1)} + \dots + P_n \cdot f$.

Propiedades del operador L

El operador L es lineal, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f, g \in \mathfrak{F} \text{ se verifica que } L(f+g) = L(f) + L(g) \\ \forall f \in \mathfrak{F}, \forall k \in \mathfrak{R} \text{ se verifica que } L(k \cdot f) = k \cdot L(f). \end{array} \right.$$

La linealidad de L se extiende por inducción a una combinación lineal de n

funciones de modo que
$$L\left(\sum_{i=1}^n k_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i L(f_i)$$

Utilizando el operador $L = P_0 \cdot D^n + P_1 \cdot D^{n-1} + \dots + P_n$ la ecuación diferencial lineal de orden n , $P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x)$, se puede expresar de la forma $L(y) = G(x)$.

Si G es la función nula la ecuación diferencial lineal de orden n anterior se denomina **homogénea**; en caso contrario se denomina **no homogénea** o **completa**.

La ecuación completa $L(y) = G(x)$ tiene asociada la ecuación homogénea definida mediante el mismo operador, así $L(y) = 0$ es la **ecuación homogénea asociada** a la ecuación completa.

El orden de la ecuación anterior $L(y) = G(x)$, que es también el del operador, está determinado por el valor de n . Los puntos en los que la función $P_0(x)$ se anula se denominan **puntos singulares** de la ecuación. Estos puntos introducen dificultades en su resolución y requieren un tratamiento especial por lo que a partir de ahora se supone que $P_0(x) \neq 0$ en el intervalo (a, b) . En este caso se puede dividir toda la ecuación por $P_0(x)$ y expresarla de la forma:

$$y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x).$$

El operador lineal asociado L está definido por:

$$L = D^n + P_1 \cdot D^{n-1} + \dots + P_n.$$

Cuando los operadores tienen coeficientes constantes las propiedades del operador D permiten realizar operaciones entre ellos utilizando las mismas reglas que en el caso de operaciones con polinomios. A continuación se

estudian las características especiales de estos operadores.

10.1.3. Operadores con coeficientes constantes

Sean A y B dos operadores con coeficientes constantes definidos por:

$$A = a_0 \cdot D^n + a_1 \cdot D^{n-1} + \dots + a_n \text{ con } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ constantes y}$$

$$B = b_0 \cdot D^n + b_1 \cdot D^{n-1} + \dots + b_n \text{ con } b_0, b_1, \dots, b_n \text{ constantes}$$

Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ se dice que los operadores A y B son de orden n .

La suma $A + B$, el producto $A \cdot B$ y el producto por escalares $k \cdot B$ son también operadores con coeficientes constantes; además se verifican todas las propiedades que tienen las operaciones con polinomios. Para probar esta afirmación se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre los operadores con coeficientes constantes de orden n y los polinomios de grado n , que conservan estas operaciones.

Al operador con coeficientes constantes A se le asocia un polinomio p_A definido por $p_A(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n$ que se denomina su **polinomio característico**.

Teorema 10.1.1:

Sean A y B operadores con coeficientes constantes de orden n y p_A y p_B sus polinomios característicos, entonces $A = B \Leftrightarrow p_A = p_B$.

Demostración:

Si $p_A = p_B$ los dos polinomios tienen el mismo grado y los mismos coeficientes por lo que los operadores A y B también tienen el mismo orden y los mismos coeficientes y por lo tanto $A(f) = B(f), \forall f \in \mathfrak{F}$.

Por otra parte si $A = B$ entonces $A(f) = B(f)$, $\forall f \in \mathfrak{F}$. Tomando $f(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathfrak{R}$, se tiene $A(e^{\alpha x}) = p_A(\alpha) \cdot e^{\alpha x}$ y $B(e^{\alpha x}) = p_B(\alpha) \cdot e^{\alpha x}$ por lo que $p_A(\alpha) = p_B(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ y por lo tanto $p_A(x) = p_B(x)$. \square

De forma similar se pueden demostrar las siguientes propiedades que muestran que la correspondencia entre operadores y polinomios conserva las operaciones:

Propiedades:

1. $p_{A+B} = p_A + p_B$.
2. $p_{A \cdot B} = p_A \cdot p_B$.
3. $p_{\alpha A} = \alpha \cdot p_A$, $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Como consecuencia de todo lo dicho hasta ahora se tiene que el problema de resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes $A(y) = 0$ se puede reducir a un problema algebraico, que consiste simplemente en factorizar el polinomio característico, $p_A(x)$.

10.1.4. Teorema de existencia y unicidad

Teorema 10.1.2: Teorema de existencia y unicidad

Sea un problema de valor inicial o problema de Cauchy: $L(y) = y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x)$, con las condiciones iniciales, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ con $x_0 \in (a, b)$, y sean P_1, P_2, \dots, P_n, G , funciones **continuas** en el intervalo abierto (a, b) . Entonces existe una única función $\varphi(x)$ que es solución de la ecuación diferencial $L(y) = G(x)$ y verifica las condiciones iniciales: $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Este teorema se obtiene como corolario del teorema de existencia más general, y se demuestra como consecuencia del *teorema 9.2.1* y *9.2.2* del *capítulo 9*.

La condición de continuidad de las derivadas parciales se verifica por el hecho de ser P_1, P_2, \dots, P_n funciones continuas.

Si no es un problema de Cauchy, sino que es un problema de contorno con las condiciones definidas en a y b , la situación es muy diferente ya que aunque P_1, P_2, \dots, P_n y G , sean funciones continuas en el intervalo abierto (a, b) un problema de contorno puede tener solución o no tenerla, y en el caso en que exista solución ésta puede ser única o ser múltiple.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.1.1: Expresar la ecuación diferencial $y'' + 3x \cdot y' - 2y = 0$ utilizando el operador D .

Utilizando el operador D la ecuación diferencial se expresa de la forma:

$$(D^2 + 3x \cdot D - 2)(y) = 0.$$

Ejemplo 10.1.2: Demostrar que la ecuación diferencial $y'' + 2x \cdot y' + y = 2e^x \cdot (1 + x) + 2x \cdot \cos x$, tiene una solución única que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

La ecuación diferencial es lineal, además $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 1$ y $G(x) = 2e^x(1 + x) + 2x \cdot \cos x$, son funciones continuas en $(-\infty, \infty)$ por lo tanto aplicando el *teorema 10.1.2* de existencia y unicidad, existe una única solución que verifica que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Se puede comprobar, derivando y sustituyendo en la ecuación, que esta solución es $y(x) = e^x + \sin x$

Ejemplo 10.1.3: Comprobar que $y_1(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + (x^2 + 2) \cdot y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

$$y_1'(x) = \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x \Rightarrow y_1''(x) = 2\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x.$$

Al sustituir en la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 \cdot (2\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x) - 2x \cdot (\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x) + (x^2 + 2) \cdot x \cdot \operatorname{sen} x &= (2x^2 - \\ 2x^2) \cdot \cos x + (-x^3 - 2x + (x^2 + 2) \cdot x) \cdot \operatorname{sen} x &= 0. \text{ Además se verifica que } y_1(0) \\ &= 0 \text{ e } y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

También $y_2(x) = 0 \Rightarrow y_2'(x) = 0 \Rightarrow y_2''(x) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot y_2'' - 2x \cdot y_2' + (x^2 + 2) \cdot y_2 = 0$, con $y_2(0) = 0$ e $y_2'(0) = 0$. La solución de este problema de valor inicial no es única.

En la ecuación diferencial expresada de la forma: $y'' - \frac{2}{x} \cdot y' + \frac{x^2 + 2}{x^2} y = 0$,

se tiene que las funciones $P_1(x) = -\frac{2}{x}$ y $P_2(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$ no son continuas en $x =$

0, por lo tanto el *teorema 10.1.2* sólo garantiza la existencia de una única solución en intervalos que no contengan el punto 0.

Ejercicios

10.1. Expresar mediante el operador D las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + 2y = x \cdot \ln x$

b) $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + (x^2 + 2) \cdot y = 0$.

10.2. Demostrar que si A y B son dos operadores con coeficientes

constantes de orden n y p_A y p_B sus polinomios característicos, entonces se verifican las siguientes propiedades.

$$\text{a) } p_{A+B} = p_A + p_B. \quad \text{b) } p_{A \cdot B} = p_A \cdot p_B. \quad \text{c) } p_{\alpha A} = \alpha \cdot p_A, \alpha \in \mathfrak{R}.$$

10.3. Sean A y B dos operadores con coeficientes constantes cuyos polinomios característicos no tienen raíces comunes y $C = A \cdot B$. Demostrar que toda solución f de la ecuación diferencial $C(f) = 0$ se puede expresar por $f = f_1 + f_2$ siendo f_1 y f_2 funciones que verifican las ecuaciones $A(f_1) = 0$ y $B(f_2) = 0$.

10.4. Comprobar que las funciones $y(x) = C \cdot x^2 + x + 3$, $C \in \mathfrak{R}$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 6$, con las condiciones iniciales $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$. Indicar porqué la solución no es única.

10.2. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

10.2.1. Dependencia e independencia lineal. Wronskiano

Definición 10.2.1:

Dado un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ definidas en un intervalo (a, b) se dice que son **linealmente dependientes** en el intervalo (a, b) , si existen n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **no todas nulas**, tales que: $\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + \dots + \alpha_n \cdot y_n = 0$,

$\forall x \in (a, b)$.

Si por el contrario se verifica que esta identidad solamente se cumple cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, entonces se dice que las funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son **linealmente independientes** en el intervalo (a, b) .

Definición 10.2.2:

Dado un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ derivables hasta el orden $n - 1$, se denomina **wronskiano** de estas funciones y se denota por $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ a la función definida por el siguiente determinante:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}_1(x) & y^{(n-1)}_2(x) & \dots & y^{(n-1)}_n(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 10.2.1:

Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son linealmente dependientes en el intervalo (a, b) , entonces su wronskiano en ese intervalo es la función nula.

Demostración:

Este teorema se prueba a partir de los conocimientos de álgebra lineal ya que si las funciones son linealmente dependientes una de ellas y_i se puede expresar como combinación lineal de las otras y por la linealidad de las derivadas, la columna i -ésima del determinante se puede expresar como una combinación lineal de las otras columnas, lo que supone que el determinante es cero. \square

Esta condición no es suficiente ya que pueden existir funciones linealmente independientes cuyo wronskiano sea la función nula, como se

observa en el *ejemplo 10.2.4*. Sin embargo si las funciones linealmente independientes son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$, entonces se puede asegurar que su wronskiano no se anula en ningún punto del intervalo (a, b) . Este resultado, que se demuestra en los siguientes teoremas, es una de las conclusiones del *corolario 10.2.6*.

10.2.2. Estructura de las soluciones de la ecuación homogénea

En los siguientes teoremas se supone que $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y $L(y) = y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$.

Teorema 10.2.2:

Si y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b) ; entonces, dadas n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , la función $\sum_{k=1}^n c_k y_k$ es también solución de $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b) .

Demostración:

Las funciones $y_k, 1 \leq k \leq n$, son soluciones de la ecuación diferencial y por tanto verifican $L(y_k) = 0$. Como el operador L es lineal se tiene que:

$$L\left(\sum_{k=1}^n c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k L(y_k) = 0. \quad \square$$

Teorema 10.2.3:

Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ y son linealmente independientes en el intervalo (a, b) , entonces su

wronskiano en ese intervalo no es la función nula.

Demostración:

Se demuestra el teorema por reducción al absurdo, por lo que se supone que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = 0, \forall x \in (a, b)$.

Para un punto determinado $x_0 \in (a, b)$ se considera el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las variables c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c_k y_k(x_0) = 0 \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k'(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{array} \right.$$

Como el determinante de los coeficientes de las incógnitas, que es el wronskiano, es igual a cero, el sistema tiene infinitas soluciones, en particular existen c_1, c_2, \dots, c_n , no todos nulos, que son solución del sistema. Con estos valores se determina una función $\alpha(x)$, definida por:

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x), \forall x \in (a, b).$$

Esta función es solución de la ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$ por ser una combinación lineal de soluciones de esta ecuación y además $\alpha(x_0) = 0$, $\alpha'(x_0) = 0, \dots, \alpha^{(n-1)}(x_0) = 0$, por lo que en el punto x_0 la función α y sus derivadas hasta la de orden $n - 1$ coinciden con la función nula, que también es solución

de $L(y) = 0$, y por el teorema de unicidad de soluciones $\alpha(x) = 0, \forall x \in (a, b)$,

luego $\sum_{k=1}^n c_k y_k(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, lo que contradice que las funciones $y_1, y_2,$

..., y_n sean linealmente independientes en (a, b) . \square

En las hipótesis de este teorema no sólo existe un punto $x \in (a, b)$, tal que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0$ sino que $\forall x \in (a, b), W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0$. Este resultado se demostrará en el siguiente teorema, cuya prueba necesita el siguiente lema:

Lema 10.2.4:

Sean y_1, y_2, \dots, y_n funciones derivables hasta el orden n , entonces la derivada de su wronskiano es:

$$W'[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Lo que equivale a decir que las primeras $n - 1$ filas coinciden con las de $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ y en la última fila se han sustituido las derivadas de orden $n - 1$ por las de orden n .

Demostración:

Sea $\Delta(x)$ la función definida por el determinante de la igualdad anterior. La demostración de que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \Delta(x)$ se hace por inducción sobre n .

Para $n = 2$ es evidente, ya que $W[y_1, y_2] = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$ y por lo tanto

$$W[y_1, y_2] = y_1' \cdot y_2'' + y_1 \cdot y_2''' - y_1'' \cdot y_2 - y_1' \cdot y_2' = y_1 \cdot y_2''' - y_1'' \cdot y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Supuesto cierto para $n - 1$ se demostrará para n .

Sea Δ_{ij} el adjunto del elemento de la fila i y la columna j en el wronskiano.

Desarrollando por los elementos de la fila n se tiene que:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = y_1^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,2} + \dots + y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,n}.$$

$$\text{Derivando: } W[y_1, y_2, \dots, y_n] = y_1^{(n)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{(n)} \cdot \Delta_{n,2} + \dots + y_{n-1}^{(n)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{(n)} \cdot \Delta_{n,n} + y_1^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,1} + y_2^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,2} + \dots + y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,n-1} + y_n^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,n}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción:

$$\Delta'_{n,1} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_2^{(n-3)} & y_3^{(n-3)} & \dots & y_n^{(n-3)} \\ y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

y en general $\Delta'_{n,j}$ es un determinante similar en el que figura la columna correspondiente a y_1 y falta la de y_j , luego $y_1^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,1} + y_2^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,2} + \dots + y_{n-1}^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,n-1} + y_n^{(n-1)} \cdot \Delta'_{n,n} = 0$ por ser el desarrollo de un determinante en el que la fila n y la $n - 1$ son iguales, por lo tanto:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = y_1^{(n)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{(n)} \cdot \Delta_{n,2} + \dots + y_{n-1}^{(n)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{(n)} \cdot \Delta_{n,n}.$$

Se observa que los adjuntos de los elementos de la fila n del wronskiano coinciden con los adjuntos de los elementos de la fila n en el determinante Δ luego $W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \Delta$. \square

Teorema 10.2.5:

Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en un intervalo (a, b) , entonces su wronskiano en ese intervalo o es la función nula o no se anula en ningún punto de dicho intervalo.

Demostración:

Si y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de $L(y) = 0$ se verifica que:

$$y_i^{(n)} + P_1(x) \cdot y_i^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y_i' + P_n(x) \cdot y_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Multiplicando cada una de estas expresiones por $\Delta_{n,i}$, adjunto del elemento de la fila n y la columna i del wronskiano, y sumándolas, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n y_i^{(n)} \cdot \Delta_{n,i} + \sum_{i=1}^n P_1(x) \cdot y_i^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,i} + \dots + \sum_{i=1}^n P_{n-1}(x) \cdot y_i' \cdot \Delta_{n,i} + \sum_{i=1}^n P_n(x) \cdot y_i \cdot \Delta_{n,i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^{(n)} \cdot \Delta_{n,i} + P_1(x) \cdot \sum_{i=1}^n y_i^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,i} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot \sum_{i=1}^n y_i' \cdot \Delta_{n,i} + P_n(x) \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta_{n,i} = 0$$

Por el lema anterior se conoce que:

$$\sum_{i=1}^n y_i^{(n)} \cdot \Delta_{n,i} = W[y_1, y_2, \dots, y_n]' \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n y_i^{(n-1)} \cdot \Delta_{n,i} = W[y_1, y_2, \dots, y_n],$$

además si $0 \leq k \leq n-2$, $\sum_{i=1}^n y_i^{(k)} \cdot \Delta_{n,i} = 0$ ya que se puede expresar como un

determinante en el que la fila k y la fila n son iguales. Sustituyendo estos resultados se tiene que:

$$W'[y_1, y_2, \dots, y_n](x) + P_1(x) \cdot W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = 0, \text{ o bien: } W'(x) + P_1(x) \cdot W(x) = 0,$$

una ecuación diferencial lineal de primer orden que tiene por solución:

$$W(x) = C e^{-\int p_1(t) dt}.$$

Como la exponencial no se anula, se tiene que $W(x) = 0$ sólo cuando C es igual a 0, luego $W(x)$ o es la función nula o no se anula en ningún punto del intervalo (a, b) . \square

Como conclusión de los teoremas anteriores se tiene el siguiente corolario:

Corolario 10.2.6:

Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b) , las tres condiciones siguientes son equivalentes:

- a) Las funciones y_1, \dots, y_n son linealmente independientes en (a, b) .
- b) Existe un $x \in (a, b)$ tal que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ es distinto de cero.
- c) Para todo $x \in (a, b)$ se verifica que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ es distinto de cero.

Es evidente que $a) \Rightarrow b)$ por el *teorema 10.2.3*, y $b) \Rightarrow a)$ por el *teorema 10.2.1*, además $b) \Rightarrow c)$ por el *teorema 10.2.5* y la implicación $c) \Rightarrow b)$ es trivial.

La hipótesis de que las funciones y_i sean soluciones de $L(y) = 0$ no es soslayable. Por ejemplo $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x \cdot |x|$ son funciones linealmente independientes en el intervalo $(-a, a)$ y sin embargo existen puntos en los que $W[y_1, y_2] = 0$ y otros donde $W[y_1, y_2] \neq 0$

Definición 10.2.3:

Se denomina **conjunto fundamental de soluciones** de la ecuación diferencial homogénea de orden n , $L(y) = 0$, en un intervalo (a, b) , a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en (a, b) .

Teorema 10.2.7:

Siempre existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n , $L(y) = 0$, en el intervalo (a, b) .

Demostración:

Sea $x_0 \in (a, b)$. Por el teorema de existencia de soluciones se sabe que para todo k desde 0 hasta $n - 1$, existen funciones $y_k(x)$ que son solución de la ecuación diferencial y son tales que cada una de ellas verifica la condición inicial siguiente: $y_k^{(k)}(x_0) = 1$ y $y_k^{(j)}(x_0) = 0$ si $j \neq k$.

Las funciones y_0, y_1, \dots, y_{n-1} son linealmente independientes. En efecto sean c_0, c_1, \dots, c_{n-1} n constantes tales que $c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_{n-1} y_{n-1} = 0, \forall x \in (a, b)$. Al derivar esta expresión $n - 1$ veces y sustituir en cada una de estas n expresiones x por x_0 se verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k(x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k'(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

.....

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k^{(n-1)}(x_0) = 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0.$$

En consecuencia, las n funciones son linealmente independientes y por lo tanto forman un conjunto fundamental de soluciones. \square

Teorema 10.2.8:

Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n $L(y) = 0$, en el intervalo (a, b) , entonces toda solución φ de esta ecuación se puede expresar de la forma $\varphi =$

$$\sum_{k=1}^n c_k y_k, \text{ donde } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ son constantes.}$$

Demostración:

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones, φ una solución de la ecuación $L(y) = 0$ y x_0 un punto del intervalo (a, b) , entonces por el *corolario 10.2.6*, $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$.

Se determina $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(x_0)$, y se considera el siguiente sistema de n ecuaciones en las incógnitas c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n c_k y_k(x_0) = \varphi(x_0) \\ \sum_{k=1}^n c_k y'_k(x_0) = \varphi'(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n c_k y_k^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0). \end{array} \right.$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0)$ es distinto de cero, el sistema tiene solución única, es decir existen c_1, c_2, \dots, c_n constantes que verifican las n ecuaciones y por el *teorema 10.1.2* de unicidad

de la solución: $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k y_k$. \square

Teorema 10.2.9:

Sea Σ el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n , $L(y) = 0$; entonces Σ tiene estructura de **espacio vectorial de dimensión n** .

Demostración:

El *teorema 10.2.2* garantiza la linealidad de las soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, y además se verifican los axiomas de espacio vectorial. En este espacio funcional un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial, que existe como resultado del *teorema 10.2.7*, es una base de este espacio vectorial ya que por el *teorema 10.2.8* cualquier solución se puede expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto fundamental de soluciones que por definición son funciones linealmente independientes. Además cada solución no puede depender de más de n constantes, ya que en este caso sería solución de una ecuación diferencial de grado mayor que n . \square

Corolario 10.2.10:

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n , $L(y) = 0$, en el intervalo (a, b) . La **solución general** de esta ecuación, $\varphi(x)$, se puede expresar de la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x).$$

10.2.3. Estructura de las soluciones de la ecuación completa

En este apartado se demuestra que la solución general de una ecuación diferencial lineal completa se puede obtener a partir de una solución particular

de ésta y la solución general de la ecuación homogénea, resultado que ya se estudió para las ecuaciones lineales de primer orden y que tiene gran importancia como método para resolver ecuaciones no homogéneas. Para ello se estudia que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden superior completa tiene estructura de espacio afín, siendo su espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

Teorema 10.2.11:

Sean $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), G(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y sea $L(y) = y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$. Si y_1, y_2, \dots, y_n son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b) y φ_P es una solución cualquiera de la ecuación no homogénea $L(y) = G(x)$, entonces para toda solución φ de esta ecuación, existen n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , tales que φ puede expresarse por:

$$\varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^n c_k y_k$$

Demostración:

Sea φ una solución arbitraria de la ecuación $L(y) = G(x)$. Como φ_P también es solución se tiene que ambas funciones verifican la ecuación, por lo que $L(\varphi_P) = G$ y $L(\varphi) = G$. Por la linealidad de L se verifica que $L(\varphi - \varphi_P) = G(x) - G(x) = 0$, y por lo tanto $\varphi - \varphi_P$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Por el *teorema 10.2.8* existen n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , tales que $\varphi -$

$$\varphi_P = \sum_{k=1}^n c_k y_k \Rightarrow \varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^n c_k y_k, \text{ de donde se deduce que la solución } \varphi \text{ de}$$

la ecuación no homogénea se puede expresar como la suma de una solución particular de ésta más la solución general de la homogénea. \square

Teorema 10.2.12:

Sean $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), G(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y sea $L(y) = y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$. El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal completa $L(y) = G(x)$ tiene estructura de **espacio afín** de dimensión n construido sobre el espacio vectorial de soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

Sea Σ el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea que por el *teorema 10.2.9* tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n y Γ el conjunto de soluciones de la ecuación completa.

La aplicación $h: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Sigma$, definida por $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$ estructura a Γ como espacio afín ya que:

$$\text{Si } \varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma \Rightarrow L(\varphi_2 - \varphi_1) = L(\varphi_2) - L(\varphi_1) = G - G = 0 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 \in \Sigma.$$

Además se verifican los axiomas de espacio afín:

$$1^\circ \forall \varphi_1 \in \Gamma \text{ y } \forall \psi \in \Sigma, \exists \varphi_2 \in \Gamma, \text{ tal que } h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 = \psi.$$

Basta tomar $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi$. Es claro que $\varphi_2 \in \Gamma$ ya que $L(\varphi_2) = L(\varphi_1 + \psi) = L(\varphi_1) + L(\psi) = G + 0 = G$.

2° Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Gamma$ entonces $h(\varphi_1, \varphi_2) + h(\varphi_2, \varphi_3) = h(\varphi_1, \varphi_3)$ lo que se verifica ya que $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_1$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.2.1: Estudiar la dependencia o independencia lineal del

conjunto de funciones $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Estas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ya que si la igualdad $\alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \dots + \alpha_{n+1} \cdot x^n = 0$, se verifica para todos los valores de x , entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.

Ejemplo 10.2.2: Demostrar que el conjunto de funciones $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}\}$ donde k_1, k_2, k_3 , son números reales todos ellos distintos entre sí, es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
 W[e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}] &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_1 x} & k_3 e^{k_1 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_1 x} & k_3^2 e^{k_1 x} \end{vmatrix} = \\
 &= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot e^{k_3 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot e^{k_3 x} (k_2 - k_1) \cdot (k_3 - k_1) \cdot (k_3 - k_2).
 \end{aligned}$$

Como k_1, k_2, k_3 , son números todos ellos distintos, entonces $W[e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}] \neq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$; por lo tanto las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 10.2.3: Demostrar que el conjunto de funciones $\{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x\}$ es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

Se supone que existen dos números reales α_1, α_2 tales que $\alpha_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \alpha_2 e^{\alpha x} \operatorname{cos} \beta x = 0$; dividiendo la igualdad por $e^{\alpha x}$, se obtiene $\alpha_1 \operatorname{sen} \beta x + \alpha_2 \operatorname{cos} \beta x = 0$. Si se toma el valor $x = 0$ se tiene que $\alpha_2 = 0$ y por lo tanto $\alpha_1 \operatorname{sen} \beta x = 0$. Como la función $\operatorname{sen} \beta x$ no es la función cero, resulta que $\alpha_1 = 0$ y por lo tanto las funciones consideradas son linealmente

independientes.

Ejemplo 10.2.4: Estudiar la dependencia o independencia lineal de las funciones y_1 e y_2 definidas por:

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-1, 0) \\ 0 & x \in [0, 1) \end{cases} \text{ e } y_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 0) \\ x^2 & x \in [0, 1) \end{cases}$$

Las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en el intervalo $(-1, 1)$ y sin embargo su wronskiano es la función cero, por lo tanto $\{y_1, y_2\}$ no pueden ser soluciones de una misma ecuación diferencial lineal de orden dos.

Ejemplo 10.2.5: ¿Pueden ser $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$ soluciones de la ecuación $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) = 0$, $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas, en el intervalo $(0, 2)$? ¿Y en el intervalo $(-6, -1)$?

Las funciones f y g son linealmente independientes. Por otra parte su wronskiano $W[f, g](x) = e^x(x - 1)$ se anula en $x = 1$, por lo que no pueden ser soluciones de una ecuación diferencial lineal en el intervalo $(0, 2)$ que contiene a $x = 1$, y sí podrían serlo en $(-6, -1)$ que no lo contiene.

Ejercicios

- 10.5. Demostrar que $\{e^{ax}, x \cdot e^{ax}, \dots, x^{n-1} \cdot e^{ax}\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes en \mathfrak{R} .
- 10.6. Verificar si el conjunto de funciones $\{\ln x, x \cdot \ln x, x^2 \cdot \ln x\}$ es linealmente independiente en \mathfrak{R}^+ .
- 10.7. Comprobar si las siguientes funciones $\varphi(x)$ son solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' + y = 0$; $\varphi(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$.

b) $y'' - y = 0$; $\varphi(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$.

c) $y'' + y = 1$; $\varphi(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + 1$.

d) $y'' - y = e^{2x}$; $\varphi(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + \frac{e^{2x}}{3}$.

10.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

10.3.1. Ecuación característica. Autovalores

Una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes se puede expresar de la forma $L(y) = 0$ siendo $L(y) = y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y$, con p_1, p_2, \dots, p_n constantes

Para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea $L(y) = 0$, se buscan soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$, de donde $y' = \lambda e^{\lambda x}$, y en general $y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$. Al sustituir estas funciones en la ecuación se obtiene que:

$$(\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

y como $e^{\lambda x} \neq 0$ se debe verificar que:

$$\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0.$$

Definición 10.3.1:

Se denomina **ecuación característica** de $L(y) = 0$ a la ecuación:

$$\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0$$

y **polinomio característico** al polinomio que la define.

Por lo tanto $y = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación $L(y) = 0$ si y sólo si λ es raíz de su ecuación característica.

Definición 10.3.2:

Se denominan **autovalores** o **valores propios** de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ a las raíces de su ecuación característica.

Los autovalores se denominan **simples** o **múltiples** con el mismo criterio que las correspondientes raíces de la ecuación característica, siendo el orden de multiplicidad de un autovalor múltiple el orden de la raíz correspondiente.

El teorema fundamental del álgebra asegura que esta ecuación tiene n autovalores que pueden ser reales o complejos y simples o múltiples y es precisamente esta clasificación de los autovalores la que determina los distintos tipos de solución de la ecuación diferencial. La diferenciación entre autovalores reales y complejos sólo es necesario realizarla cuando se buscan soluciones reales de la ecuación diferencial.

10.3.2. Discusión de las soluciones

Caso 1: Los autovalores son reales y simples.

Se supone que la ecuación característica tiene n raíces reales y simples, que son los autovalores de la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Entonces el operador L puede expresarse como un producto de n operadores de la siguiente forma:

$$L = (D - \lambda_1) \cdot (D - \lambda_2) \cdots (D - \lambda_n).$$

Un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ viene dado por $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, ..., $y_n(x) = e^{\lambda_n x}$, y por tanto la solución general es una combinación lineal de estas funciones:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x}.$$

Caso 2: Los autovalores son reales y alguno de ellos es múltiple

Si se supone que sólo existe un autovalor múltiple λ , con orden de multiplicidad s , el operador L puede expresarse como un producto de operadores de la siguiente forma $L = (D - \lambda)^s \cdot L_s(D)$.

Las soluciones de la ecuación $L_s(D) = 0$ están determinadas como en el caso anterior. Para buscar soluciones de la ecuación $(D - \lambda)^s(y) = 0$, se prueba con funciones de la forma $y(x) = g(x) \cdot e^{\lambda x}$, siendo $g(x)$ una función por determinar.

Para demostrar lo que sigue se necesita un lema previo:

Lema 10.3.1:

Sea $y(x)$ una función compleja con derivadas continuas hasta el orden m , entonces se verifica que $(D - \lambda)^m(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = e^{\lambda x} \cdot D^m(y(x))$, siendo λ constante.

Demostración:

Se probará por inducción sobre m .

Para $m = 0$ es evidente. Supuesto cierto para $m - 1$, se tiene que:

$$(D - \lambda)^m(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = (D - \lambda) \cdot (D - \lambda)^{m-1}(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = (D - \lambda) \cdot (e^{\lambda x} \cdot D^{m-1}(y(x))) =$$

$$e^{\lambda x} \cdot D^m(y(x)). \quad \square$$

Se debe verificar que $(D - \lambda)^s(g(x) \cdot e^{\lambda x}) = 0$ por lo que $e^{\lambda x} \cdot D^s(g(x)) = 0$, y como $e^{\lambda x} \neq 0$ resulta que $D^s(g(x)) = 0$, por lo tanto una solución para $g(x)$ es un polinomio de grado $s - 1$.

Las s soluciones linealmente independientes buscadas de la ecuación $(D - \lambda)^s(y) = 0$ pueden ser:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}, y_3(x) = x^2 e^{\lambda x}, \dots, y_s(x) = x^{s-1} e^{\lambda x},$$

y la solución general es de la forma:

$$\varphi_s(x) = (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \dots + C_s \cdot x^{s-1}) e^{\lambda x}.$$

Por otra parte si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-s}$ son los autovalores simples, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ estará formado por

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}, y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, y_s(x) = x^{s-1} e^{\lambda_1 x}, y_{s+1}(x) = e^{\lambda_2 x},$
 $y_{s+2}(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_{n-s} x}$, ya que son n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial de orden n .

Por lo tanto la solución general es una combinación lineal de estas funciones:

$$\psi(x) = \left(\sum_{k=1}^s C_k x^{k-1} \right) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=1}^{n-s} C_{s+k} e^{\lambda_k x}.$$

Cuando las funciones que son solución de la ecuación diferencial pueden ser funciones con valores complejos la discusión general estaría terminada, los siguientes casos sólo son necesarios cuando se buscan soluciones reales.

Teniendo en cuenta que una ecuación polinómica que tiene una raíz

compleja $\alpha + \beta i$ también tiene su conjugada $\alpha - \beta i$ y con objeto de simplificar la notación, los siguientes casos que se discuten se van a reducir a considerar dos autovalores complejos que pueden ser simples o múltiples.

Caso 3: Dos autovalores complejos simples

Sean $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ los autovalores complejos. Un conjunto fundamental de soluciones en el plano complejo es $z_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $z_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}$, pero si z_1 y z_2 son soluciones linealmente independientes también lo son sus combinaciones lineales $y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ e $y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i}$, y por lo tanto $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$, que son funciones reales, forman un conjunto fundamental de soluciones reales y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x.$$

Caso 4: Dos autovalores complejos múltiples de orden s

Sean $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ los autovalores complejos de orden de multiplicidad s . Utilizando los resultados de los dos casos anteriores se tiene que un conjunto fundamental de soluciones está formado por:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, y_2(x) = x e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \dots, y_s(x) = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_{s+1}(x) = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x, y_{s+2}(x) = x e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x, \dots, y_{2s}(x) = x^{s-1} e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x) = \left(\sum_{k=1}^s C_k x^{k-1} \right) e^{\alpha x} \cos \beta x + \left(\sum_{k=1}^s C_{s+k} x^{k-1} \right) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.3.1. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Primero se calculan sus autovalores, es decir, las raíces de su ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, que son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^x, e^{2x}\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$$\psi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Ejemplo 10.3.2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$ y encontrar la solución particular que verifique que $y(0) = y'(0) = 1$.

Su ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, sólo tiene un autovalor $\lambda = -1$ de orden dos.

Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^{-x}, x e^{-x}\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación es $\psi(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

La solución particular que verifica las condiciones iniciales es:

$$\psi(x) = e^{-x} + 2x e^{-x},$$

ya que $\psi(0) = C_1$ y $\psi'(0) = -C_1 + C_2$, luego $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$.

Ejemplo 10.3.3: Integrar la ecuación diferencial $y''' + 6y' + 20y = 0$.

Se escribe su ecuación característica, $\lambda^3 + 6\lambda + 20 = 0$, y sus autovalores $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + 3i$ y $\lambda_3 = 1 - 3i$. Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^{-2x}, e^x \cdot \cos 3x, e^x \cdot \sen 3x\}$ y por lo tanto la solución general de la

ecuación viene expresada por:

$$\psi(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \cos 3x + C_2 e^x \cdot \text{sen } 3x.$$

Ejemplo 10.3.4: Resolver $y^{vi} + y^{iv} - y'' - y = 0$.

Esta ecuación tiene como ecuación característica es $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$, que tiene dos autovalores reales simples $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y dos complejos $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ de orden dos.

Un conjunto fundamental de soluciones esta formado por $\{e^x, e^{-x}, \cos x, \text{sen } x, x \cdot \cos x, x \cdot \text{sen } x\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación viene dada por:

$$\psi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \cdot \text{sen } x + C_5 \cdot x \cdot \cos x + C_6 \cdot x \cdot \text{sen } x.$$

Ejemplo 10.3.5: Buscar una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que tenga como soluciones:

$$y_1(x) = e^{3x}, y_2(x) = e^{-2x}.$$

El polinomio característico debe tener las raíces 3 y -2 y ser de segundo grado. Por tanto $p(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$ y la ecuación buscada es:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Ejemplo 10.3.6: Escribir la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda + 5) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 4)$.

La solución general es:

$$\psi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-5x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{4x}.$$

Ejercicios

10.8. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) $y^{iv} - y'' = 0$.

c) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

10.9. Integrar las ecuaciones:

a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

b) $y^{iv} - y = 0$.

c) $y^{iv} + y = 0$.

d) $(D^2 - 2D + 5)^2(y) = 0$.

10.10. Probar que si $x \cdot e^{\alpha x}$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes $L(y) = 0$, entonces su ecuación característica tiene a α como raíz doble.

10.4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

10.4.1. Reducción de orden de una ecuación diferencial lineal homogénea. Método de D'Alembert

El método de D'Alembert consiste en reducir el orden de una ecuación lineal homogénea, sin que deje de ser lineal, cuando previamente se conoce una solución particular que no sea trivial.

Sean $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y $L(y) = y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$.

Se considera la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Sea $y_1(x)$ una solución particular, no trivial, de la ecuación anterior. Si se supone que $y(x) = z(x) \cdot y_1(x)$, donde $z(x)$ es una nueva función incógnita, se tiene una ecuación de la forma $a_n(x) \cdot z^n + a_{n-1}(x) \cdot z^{n-1} + \dots + a_1(x) \cdot z' = 0$; llamando $z'(x) = u(x)$ se obtiene una ecuación diferencial en $u(x)$ en la que el orden queda reducido en una unidad.

Por tanto un método general de búsqueda de soluciones puede ser tantear con soluciones sencillas: polinómicas, exponenciales o trigonométricas y si se consigue hallar una, entonces es posible reducir el orden. De esta forma resulta fácil resolver ecuaciones de segundo orden que quedan reducidas a ecuaciones lineales de primer orden; además en este caso las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x) = z(x) \cdot y_1(x)$ son linealmente independientes y por tanto forman un conjunto fundamental de soluciones.

10.4.2. Método de variación de las constantes

El método de **variación de las constantes** o método de **variación de parámetros** se emplea para resolver una ecuación lineal no homogénea de orden n . Consiste en obtener primero la solución general de la ecuación homogénea y buscar a continuación una solución de la ecuación completa que tenga la forma de la solución general de la ecuación homogénea pero considerando las constantes como funciones a determinar.

Sea $L(y) = G(x)$, con $L(y) = y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$, la ecuación no homogénea que se quiere resolver y sea $\psi_H(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$ la

solución general de la ecuación homogénea asociada en el intervalo (a, b) . Se supone que una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\varphi(x)$

$$= \sum_{k=1}^n v_k(x)y_k(x), \text{ siendo } v_k(x) \text{ funciones que hay que determinar. Para ello es}$$

necesario imponer n condiciones.

Al derivar la expresión anterior se obtiene:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^n v'_k(x)y_k(x) + \sum_{k=1}^n v_k(x)y'_k(x),$$

si se impone la condición $\sum_{k=1}^n v'_k(x)y_k(x) = 0$ resulta:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x)y'_k(x).$$

Derivando de nuevo esta expresión:

$$\varphi''(x) = \sum_{k=1}^n v'_k(x)y'_k(x) + \sum_{k=1}^n v_k(x)y''_k(x)$$

y si se impone de nuevo la condición $\sum_{k=1}^n v'_k(x)y'_k(x) = 0$ se obtiene:

$$\varphi''(x) = \sum_{k=1}^n v_k(x)y''_k(x).$$

Se repite este proceso hasta la derivada de orden n con lo que se tiene que:

$$\varphi^n(x) = \sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k^{n-1}(x) + \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k^n(x),$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$L(\varphi) = \varphi^n + P_1 \varphi^{n-1} + \dots + P_{n-1} \varphi' + P_n \varphi = G(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k^{n-1}(x) + \sum_{k=1}^n v_k y_k^n + P_1 \cdot \sum_{k=1}^n v_k y_k^{n-1} + \dots + P_{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n v_k y'_k + P_n \cdot \sum_{k=1}^n v_k y_k =$$

$$\sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k^{n-1}(x) + \sum_{k=1}^n v_k (y_k^n) + P_1 \cdot y_k^{n-1} + \dots + P_{n-1} \cdot y_k' + P_n \cdot y_k = G(x).$$

y por tanto:

$$\sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k^{n-1}(x) = G(x)$$

Si se pueden encontrar n funciones $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ que verifiquen las n condiciones impuestas, entonces φ es una solución particular de la ecuación completa.

Las funciones $v'_1(x)$, $v'_2(x)$, ..., $v'_n(x)$ se obtienen, por tanto, como solución del sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^n v'_k(x) y'_k(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n v'_k(x) y_k^{n-1}(x) = G(x). \end{array} \right.$$

En este sistema el determinante de los coeficientes de las incógnitas es el wronskiano $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$, que por el *corolario 10.2.6* no se anula en ningún punto del intervalo (a, b) . Por lo tanto tiene solución única y aplicando la regla de Cramer se obtiene que $v'_k = \frac{W_k}{W}$, $1 \leq k \leq n$, donde W_k es el determinante que se obtiene del wronskiano sustituyendo la columna k por $(0, 0, \dots, 0, G)$.

Al integrar se tiene que $v_k(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_k(t)}{W(t)} dt$, siendo x_0 un punto del

intervalo (a, b) . Sustituyendo se obtiene una solución particular de la ecuación

lineal no homogénea $\varphi_p(x) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_0}^x \frac{W_k(t)}{W(t)} dt \right) y_k(x)$. Por el *teorema 10.2.11* la

solución general de la ecuación completa φ_g se puede expresar por $\varphi_g = \varphi_H + \varphi_p$ es decir, la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la completa.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.1: Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y'' + 2y' + x \cdot y = 0$, $x > 0$,

sabiendo que $y_1 = \frac{\text{sen}x}{x}$ es una solución particular.

Para calcular una solución linealmente independiente de y_1 se busca una segunda solución de la forma $y_2(x) = \frac{\text{sen}x}{x} \cdot z(x)$. Entonces $y_2' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z'$ e $y_2'' = y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z''$.

Se sustituye en la ecuación:

$$x(y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z'') + 2(y_1' \cdot z + y_1 \cdot z') + x \cdot y_1 \cdot z = 0$$

y se ordenan términos:

$$z'' \cdot x \cdot y_1 + z' \cdot (2x \cdot y_1' + 2y_1) + z \cdot (x \cdot y_1'' + 2y_1' + x \cdot y_1) = 0.$$

Al ser la función y_1 una solución particular de $x \cdot y_1'' + 2y_1' + x \cdot y_1 = 0$, se verifica que el término que multiplica a z es igual a cero y se tiene: $z'' \cdot x \cdot y_1 + z' \cdot (2x \cdot y_1' + 2y_1) = 0$.

$$\text{Como } y_1 = \frac{\text{sen}x}{x} \Rightarrow x \cdot y_1 = \text{sen}x \Rightarrow$$

$$2x \cdot y_1' + 2y_1 = 2x \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\text{sen}x}{x^2} \right) + 2 \frac{\text{sen}x}{x} = 2 \cos x.$$

La ecuación queda de la forma $\text{sen}x \cdot z'' + 2 \cos x \cdot z' = 0$ que se puede expresar por $\frac{z''}{z'} + \frac{2 \cos x}{\text{sen}x} = 0$, e integrando $\ln|z'| + 2 \ln|\text{sen}x| = K$, luego $z' \cdot \text{sen}^2 x = C_1$ y por lo tanto $z = -C_1 \cdot \cotg x + C_2$.

Se tiene entonces que $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ y la solución general de la ecuación diferencial viene expresada por:

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\text{sen}x}{x}, \quad x > 0.$$

Ejemplo 10.4.2: Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \text{cosec} x$ sabiendo que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$\psi_H(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \text{sen} x.$$

Se comprueba primero la solución general de la ecuación homogénea $\psi(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \text{sen} x$ y se busca una solución particular de la ecuación

completa de la forma $\varphi_p(x) = A(x) \cdot \cos x + B(x) \cdot \operatorname{sen} x$. Para determinar las funciones $A(x)$ y $B(x)$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} A'(x) \cdot \cos x + B'(x) \cdot \operatorname{sen} x = 0 \\ -A'(x) \cdot \operatorname{sen} x + B'(x) \cdot \cos x = \operatorname{cosec} x \end{cases}$$

Se obtiene que $A'(x) = -1$ y $B'(x) = \cotg x$; integrando, $A(x) = -x + C_1$ y $B(x) = \ln |\operatorname{sen} x| + C_2$. Una solución particular es:

$$\varphi_p(x) = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln |\operatorname{sen} x|.$$

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$$\varphi(x) = (-x + C_1) \cdot \cos x + (\ln |\operatorname{sen} x| + C_2) \cdot \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 10.4.3: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$x^2 \cdot y'' - 6x^2 \cdot y' + 9x^2 \cdot y = e^{3x}, \quad x > 0.$$

Se calcula primero la solución general de la ecuación homogénea $\psi_H(x) = Ae^{3x} + Bx \cdot e^{3x}$, y se busca una solución particular de la ecuación completa de la forma $\varphi_p(x) = A(x) \cdot e^{3x} + B(x) \cdot x \cdot e^{3x}$. Para determinar las funciones $A(x)$ y $B(x)$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} A'(x) \cdot e^{3x} + B'(x) \cdot x \cdot e^{3x} = 0 \\ A'(x) \cdot 3e^{3x} + B'(x) \cdot [e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}] = e^{3x} \cdot x^2. \end{cases}$$

Se observa que el coeficiente de y'' debe ser 1, por lo que $G(x) = e^{3x} \cdot x^2$

El sistema tiene como solución $A'(x) = -x^{-1}$ y $B'(x) = x^{-2}$, e integrando, $A(x) = -\ln|x| + C_1$ y $B(x) = -x^{-1} + C_2$, por tanto la solución general de la ecuación no homogénea es: $\varphi(x) = (-\ln|x| + C_1) \cdot e^{3x} + (-x^{-1} + C_2) \cdot x \cdot e^{3x}$, $x > 0$.

Ejercicios

10.11. Resolver la ecuación $x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = 0$, $x > 0$, buscando previamente una solución particular de tipo exponencial.

10.12. Resolver la ecuación $x^2 \cdot y'' + 2x \cdot y' - 6y = 0$, $x > 0$, buscando previamente una solución particular de tipo $y = x^f$.

10.13. Calcular, utilizando el método de variación de las constantes, la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + y = \sec x$.

b) $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$.

c) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \ln x$.

10.14. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $(D^2 - 4D + 3)(y) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

b. $(D^2 - 1)(y) = \frac{1}{(1 + e^{-x})^2}$.

10.4.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Los métodos que se estudian a continuación están indicados, especialmente, para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, pues con ellos generalmente resulta más fácil obtener una solución particular de la ecuación no homogénea que con el método general de

variación de las constantes.

Método del anulador

Se considera la ecuación diferencial $L(y) = G(x)$, donde el operador L tiene coeficientes constantes. El método consiste en encontrar un operador A con coeficientes constantes que anule la función G , es decir, $A(G) = 0$. De este modo, aplicando el operador A a la ecuación dada, se obtiene $A \cdot L(y) = A(G) = 0$ de forma que las soluciones de $L(y) = G(x)$ también son soluciones de la ecuación homogénea $A \cdot L(y) = 0$. Se resuelve esta ecuación y entre sus soluciones se elige una que satisfaga $L(y) = G(x)$. Conocida una solución particular de la ecuación completa, φ_p , por el *teorema 10.2.11*, la solución general, φ_g , de esta ecuación se expresa por $\varphi_g = \varphi_p + \psi_H$, siendo ψ_H la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Se puede aplicar el método del anulador cuando se encuentre un operador con coeficientes constantes que anule el término $G(x)$, lo que sólo es posible cuando éste es de la forma: $x^m \cdot e^{\alpha x}$, $x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$; $x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \text{sen } \beta x$.

A continuación se incluye una lista de posibles funciones y de su correspondiente anulador:

| Función $G(x)$ | Operador anulador |
|-------------------------------------|-------------------|
| $G(x) = x^{m-1}$ | D^m |
| $G(x) = e^{\alpha x}$ | $D - \alpha$ |
| $G(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}$ | $(D - \alpha)^m$ |

| | |
|--|--------------------------------|
| $G_1(x) = \cos \beta x; G_2(x) = \operatorname{sen} \beta x$ | $D^2 + \beta^2$ |
| $G_1(x) = x^{m-1} \cdot \cos \beta x; G_2(x) = x^{m-1} \cdot \operatorname{sen} \beta x$ | $(D^2 + \beta^2)^m$ |
| $G_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x; G_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$ | $(D - \alpha)^2 + \beta^2$ |
| $G_1(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x; G_2(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$ | $((D - \alpha)^2 + \beta^2)^m$ |

Método de los coeficientes indeterminados

Se considera la ecuación diferencial $y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = G(x)$ donde p_1, p_2, \dots, p_n son constantes y $G(x)$ una función continua en un intervalo de la recta real. Como en el método anterior, por aplicación del *teorema 4.2.11*, obtener la solución general de esta ecuación se reduce a encontrar una solución particular de la ecuación y la solución general de la ecuación homogénea asociada y sólo se puede aplicar este método cuando la función $G(x)$ sea de la forma:

$$G(x) = e^{\alpha x} \cdot (Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_r(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x),$$

siendo $Q_m(x)$ y $R_r(x)$ polinomios de grado m y r respectivamente, o bien cuando la función G sea una combinación lineal de este tipo de funciones.

Si $G(x) = e^{\alpha x} \cdot (Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_r(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x)$, una solución particular φ_p de la ecuación diferencial completa es:

$$\varphi_p = x^s \cdot e^{\alpha x} \cdot (S_k(x) \cdot \cos \beta x + T_k(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x),$$

siendo $k = \max(m, r)$; $S_k(x)$ y $T_k(x)$ polinomios de grado k de coeficientes indeterminados que hay que calcular y s el orden de multiplicidad de la raíz de la ecuación característica $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de la ecuación homogénea. En particular

cuando las raíces no son de la forma $\alpha \pm i\beta$, entonces s toma el valor 0.

Se observa que, en la práctica, este método coincide con el método del anulador.

Para facilitar el cálculo de la solución particular según las distintas formas de G se resume su expresión en la siguiente tabla.

| Función $G(x)$ | Raíces de la ecuación característica | Solución particular $k = \max(m, r)$ |
|--|--|--|
| $Q_m(x)$ | $\lambda = 0$ no es raíz de la ecuación característica | $S_m(x)$ |
| | $\lambda = 0$ es raíz de orden s | $x^s \cdot S_m(x)$ |
| $Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ α real | $\lambda = \alpha$ no es raíz | $S_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ |
| | $\lambda = \alpha$ es raíz de orden s | $x^s \cdot S_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ |
| $Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_r(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x$ | $\lambda = \pm \beta i$ no es raíz | $S_k(x) \cdot \cos \beta x + T_k(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x$ |
| | $\lambda = \pm \beta i$ es raíz de orden s | $x^s \cdot (S_k(x) \cdot \cos \beta x + T_k(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x)$ |
| $e^{\alpha x} \cdot (Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_r(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x)$ | $\lambda = \alpha \pm \beta i$ no es raíz | $(S_k(x) \cdot \cos \beta x + T_k(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x) \cdot e^{\alpha x}$ |
| | $\lambda = \alpha \pm \beta i$ es raíz de orden s | $x^s \cdot (S_k(x) \cdot \cos \beta x + T_k(x) \cdot \operatorname{sen} \beta x) \cdot e^{\alpha x}$ |

En ocasiones cuando en la ecuación diferencial $L(y) = G(x)$, la función $G(x)$ contiene las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \beta x$, $\cos \beta x$ se puede expresar fácilmente como una función exponencial compleja. Considerar y resolver la ecuación en el plano complejo muchas veces simplifica los cálculos como se

observa en el ejemplo 10.4.9.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.4: Calcular una solución particular de la ecuación diferencial lineal $(D^4 - 16)(y) = x^2 + x + 1$, buscando un polinomio anulador.

El operador D^3 anula la ecuación de forma que $D^3(D^4 - 16)(y) = 0$. Las soluciones de la ecuación característica son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = -2$, $\lambda_6 = 2i$, $\lambda_7 = -2i$ y la solución general es de la forma:

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot e^{2x} + C_5 \cdot e^{-2x} + C_7 \cdot \cos 2x + C_8 \cdot \operatorname{sen} 2x,$$

como los cuatro últimos términos son anulados por $D^4 - 16$ por ser soluciones de la ecuación homogénea, nuestro objetivo es encontrar C_1, C_2, C_3 , tal que $(D^4 - 16) \cdot (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2) = x^2 + x + 1$, por lo que $-16C_1 - 16C_2x - 16C_3x^2 = x^2 + x + 1$, así $C_3 = \frac{-1}{16}$, $C_2 = \frac{-1}{16}$, $C_1 = \frac{-1}{16}$ y $\varphi_p(x) = \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}$.

Ejemplo 10.4.5: Calcular la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$(D^4 - 16)(y) = x^2 + x + 1$$

mediante el método de coeficientes indeterminados.

Las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$ y la solución general de la ecuación homogénea asociada es de la forma $\varphi_H(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot \cos 2x + C_4 \cdot \operatorname{sen} 2x$. Se busca una solución particular "parecida" a $G(x) = x^2 + x + 1$, $\varphi_P(x) = Ax^2 + Bx + C$, e imponiendo que sea solución de la ecuación completa se obtiene que $\varphi_p(x) = \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}$,

por lo que solución general pedida es:

$$\varphi(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} + C_3 \cdot \cos 2x + C_4 \cdot \operatorname{sen} 2x + \frac{-1}{16} x^2 - \frac{1}{16} x - \frac{1}{16}.$$

Ejemplo 10.4.6: Calcular la solución general de la ecuación diferencial lineal $(D^2 - 3D + 2)(y) = e^x$, buscando un polinomio anulador.

El operador $(D - 1)$ anula a e^x de modo que $(D - 1) \cdot (D^2 - 3D + 2)(y) = 0$, los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, y la solución general de esta ecuación es de la forma $\varphi(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x$. Como los dos primeros términos son anulados por $(D^2 - 3D + 2)$, es suficiente determinar C_3 tal que $(D^2 - 3D + 2)(C_3 \cdot x \cdot e^x) = e^x$. Derivando se obtiene $C_3 = -1$ y la solución general de la ecuación es: $\varphi_g(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x - x \cdot e^x$.

Si se utilizara el método de los coeficientes indeterminados, al ser $\lambda = 1$ raíz de la ecuación característica no se podría probar una solución particular $\varphi(x) = Ae^x$, sino que se probaría con $\varphi(x) = Ax \cdot e^x$, obteniéndose que $A = -1$.

Ejemplo 10.4.7: Calcular la solución general de la ecuación diferencial lineal $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$, y encontrar la solución particular que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = y''(0) = 1$.

Se calcula primero una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $\psi_H(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \operatorname{sen} x$; como $\lambda = 0$ no es un autovalor, la solución particular φ_p es un polinomio de grado dos:

$\varphi_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, cuyos coeficientes A , B , C hay que determinar. Se sustituye este polinomio y sus derivadas en la ecuación diferencial:

$$-(2A) + (2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x.$$

Se identifican coeficientes:

$$\begin{cases} -A = 1 \\ 2A - B = 1 \\ -2A + B - C = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se tiene que $A = -1$; $B = -3$; $C = -1$ por lo que:

$$\varphi_p(x) = -x^2 - 3x - 1$$

y por tanto la solución general es:

$$\varphi_g(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1.$$

Para obtener la solución particular que verifica que $y(0) = 0$; $y'(0) = y''(0) = 1$, se calcula $\varphi_g(0) = C_1 + C_2 - 1$, $\varphi'_g(0) = C_1 + C_3 - 3$, $\varphi''_g(0) = C_1 - C_2 - 2$ y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ C_1 + C_3 - 3 = 1 \\ C_1 - C_2 - 2 = 1 \end{cases}$$

se obtiene $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ y $C_3 = 2$ y por tanto la solución particular que verifica las condiciones iniciales es:

$$\varphi(x) = 2e^x - \cos x + 2\operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1.$$

Ejemplo 10.4.8: Resolver la ecuación $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada: $\psi_H(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x$, como $\lambda = 0$ es autovalor doble, la solución particular φ_p es un polinomio de grado cuatro de la forma: $\varphi_p(x) = x^2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, cuyos coeficientes A , B , C hay que determinar. Sustituyendo este polinomio y sus derivadas en la ecuación diferencial:

$$24A \cdot x + 6B - (12A \cdot x^2 + 6B \cdot x + 2C) = 12x^2 + 6x.$$

Identificando coeficientes se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 24A - 6B = 6 \\ 6B - 2C = 0 \end{cases}$$

de donde resulta: $A = -1$; $B = -5$ y $C = -15$. Por lo tanto la solución particular es:

$$\varphi_p(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2,$$

y la solución general:

$$\varphi_g(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Ejemplo 10.4.9: Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = x \cdot \text{sen } x$.

Los autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, y la solución general de la ecuación homogénea asociada tiene la forma $\psi_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \text{sen } x$; como $\pm i$ son autovalores simples, una solución particular de la ecuación completa φ_p es de la forma $\varphi_p(x) = x[(Ax + B) \cdot \cos x + (Cx + D) \cdot \text{sen } x]$, en la que hay cuatro coeficientes por determinar.

Para simplificar se considera la ecuación de variable compleja con coeficientes reales $z'' + z = x \cdot e^{ix}$. Al ser $x \cdot \text{sen } x$ la parte imaginaria de $x \cdot e^{ix}$, entonces la parte imaginaria de una solución de la ecuación de variable compleja es una solución para la ecuación de variable real.

Sea $z_p = (Ax + B) \cdot x \cdot e^{ix} = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{ix}$ una solución particular de la

ecuación de variable compleja; sustituyendo para calcular A y B se tiene que:

$$(2A + 4Axi + 2Bi) \cdot e^{ix} = x \cdot e^{ix} \text{ y por tanto } A = \frac{-i}{4} \text{ y } B = \frac{1}{4}, \text{ por lo que:}$$

$$z_p = \frac{-i \cdot x^2 + x}{4} (\cos x + i \operatorname{sen} x) = \frac{x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{4} + i \frac{x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x}{4}$$

de donde resulta que una solución particular φ_p de la ecuación inicial es:

$$\varphi_p(x) = \frac{x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x}{4}$$

y la solución general:

$$\varphi_g(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x}{4}$$

Ejercicios

10.15. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $(D - 1)(D - 2)^2(y) = e^{2x}$.

b) $(D^2 - 1)(y) = 4x \cdot e^x$.

c) $(D^3 - 4D)(y) = 4$.

10.16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$.

b) $y'' - y = \operatorname{sen}^2 x$. (Ayuda: Expresar $\operatorname{sen}^2 x$ en función del ángulo $2x$).

c) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

d) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \cdot \operatorname{sen} x$.

10.17. Resolver las siguientes ecuaciones, planteando la correspondiente

ecuación de variable compleja

a) $y'' + y = x \cdot \cos x$

b) $y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$

10.4.4. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes

No existen métodos generales para resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, pero hay diversos procedimientos, utilizando distintos cambios de variable, que permiten rebajar el orden de la ecuación. Algunos de estos procedimientos coinciden con los que se estudiaban en el *capítulo 9* para reducir el orden de una ecuación diferencial de orden n . Otra forma de reducir el orden de una ecuación de este tipo es utilizar el principio de D'Alembert que se estudió en el *apartado 10.4.1*, pero esto supone que se conoce una solución particular. Por otra parte existen algunas ecuaciones especiales, como la ecuación de Cauchy-Euler, a las que se puede aplicar un método general de resolución.

Para utilizar el método de variación de las constantes, aplicable a una ecuación lineal con coeficientes variables, es necesario conocer un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, lo que no siempre es fácil cuando se trata de resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables.

Ecuación de Cauchy-Euler

Definición 10.4.1:

Se denomina **ecuación de Cauchy-Euler**, o ecuación equidimensional, a una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$p_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = g(x),$$

con $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathfrak{R}$ y $x \neq 0$.

Constituye una clase de ecuaciones con coeficientes variables cuya solución siempre puede escribirse en términos de funciones elementales.

Se caracteriza porque el grado del exponente de x coincide con el orden de la derivada. Se resuelve en primer lugar la ecuación homogénea asociada y luego se obtiene una solución particular de la completa.

Ecuación homogénea:

La ecuación: $p_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = 0$, $x \neq 0$, con $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ constantes, se denomina ecuación homogénea de Cauchy-Euler.

Se observa que el coeficiente de $y^{(n)}$ es $p_0 \cdot x^n$, que se anula en $x = 0$. Al dividir por él la ecuación diferencial para despejar $y^{(n)}$ las funciones coeficientes resultantes no son continuas en $x = 0$, por lo que se calcula una solución en el intervalo $(0, +\infty)$, o en el intervalo $(-\infty, 0)$.

En la resolución se pueden utilizar dos métodos que resultan coincidentes: hacer el cambio de variable $x = e^t$ o buscar una solución de la forma $y = x^r$, para algún valor de r .

Método 1:

Realizando el cambio de variable $x = e^t$ estas ecuaciones se reducen a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes. La ecuación, con este cambio de variable, queda de la forma:

$$q_0 \frac{d^n y}{dt^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + q_{n-1} \frac{dy}{dt} + q_n y = 0 \text{ con } q_1, q_2, \dots, q_n \text{ constantes.}$$

Método 2:

Este método consiste en buscar una solución de la ecuación del tipo $y = x^r$, siendo r un número por determinar.

$$\text{En este caso } y' = r \cdot x^{r-1}; y'' = r \cdot (r-1) \cdot x^{r-2}; \dots, y^n = r \cdot (r-1) \dots (r-n+1) \cdot x^{r-n}.$$

Al sustituir esta función y sus derivadas en la ecuación se tiene $x^r(q(r)) = 0$ siendo $q(r)$ un polinomio en r . Ya que $x^r \neq 0$ se tiene que $q(r)$ debe ser 0. Las soluciones de esta ecuación permiten obtener un conjunto fundamental de soluciones.

Ecuaciones completas

Sean $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ constantes. Las ecuaciones de Cauchy-Euler completas del tipo:

$$p_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = x^\alpha \cdot Q_m(\ln x), \quad x \neq 0, \text{ siendo } Q_m(x)$$

un polinomio de grado m , se pueden resolver por el método de los coeficientes indeterminados de forma similar a como se resolvían las ecuaciones no homogéneas de coeficientes constantes de la forma $e^{\alpha x} Q_m(x)$. En este caso, una solución particular es del tipo $\varphi_p(x) = x^\alpha \cdot R_m(\ln|x|)$, siendo $R_m(x)$ un polinomio de grado m .

Ecuación de Cauchy-Euler con cambio de variable

Un cambio de variable similar al que ha resuelto la ecuación de Cauchy-Euler se puede utilizar para resolver la siguiente ecuación homogénea:

$$p_0 \cdot (ax + b)^n \cdot y^{(n)} + p_1 \cdot (ax + b)^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} \cdot (ax + b) \cdot y' + p_n \cdot y = 0, \quad ax + b \neq 0.$$

Buscando soluciones de la forma $\varphi(x) = (ax + b)^r$, o haciendo el cambio $ax + b = e^t$, una ecuación de este tipo se transforma en una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Es evidente que la ecuación de Cauchy-Euler es un caso particular de esta ecuación cuando $a = 1$ y $b = 0$

Cambios de variable

Ecuaciones en las que falta la función incógnita

Si la ecuación es de la forma $y^{(n)}(x) + P_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y'(x) = G(x)$, el cambio de variable $y'(x) = u(x)$, reduce el orden de la ecuación en una unidad.

Efectivamente si $\frac{dy}{dx} = u$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ y $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ y la ecuación que resulta $u^{(n-1)}(x) + P_1(x) \cdot u^{(n-2)}(x) + \dots + P_{n-1}(x) \cdot u(x) = G(x)$ es de orden $n - 1$.

Análogamente si en la ecuación diferencial falta la función y y sus derivadas hasta el orden k , es decir, se puede expresar de la forma:

$$y^{(n)}(x) + P_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-k}(x) \cdot y^{(k)}(x) = G(x),$$

realizando el cambio de variable $\frac{d^k y}{dx^k} = u$ se reduce el orden de la ecuación en

k unidades.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.10: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0, x \neq 0.$$

Haciendo el cambio $x = e^t$ se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}; \quad y'' = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}.$$

Sustituyendo, la ecuación queda de la forma: $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$.

La solución general de esta ecuación es: $\phi(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Deshaciendo el cambio se obtiene la solución general de la ecuación inicial:

$$\psi(x) = C_1 x + C_2 x^{-1}.$$

Para resolver por el otro método la ecuación anterior $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$, se sustituye en la ecuación diferencial la solución $y = x^r$. Se tiene que $x^2 \cdot r \cdot (r - 1) x^{r-2} + x \cdot r \cdot x^{r-1} - x^r = 0$ y por lo tanto $x^r \cdot (r^2 - 1) = 0$, como $x^r \neq 0$ se tiene que $r^2 - 1 = 0$, y la solución es $r = 1$ y $r = -1$. Las funciones $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, de las que se obtiene la solución general:

$$\psi(x) = C_1 x + C_2 x^{-1}.$$

Ejemplo 10.4.11: Integrar la ecuación $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = -16x^{-1} \cdot \ln x$, $x > 0$.

Se resuelve primero la ecuación diferencial homogénea asociada buscando una solución del tipo $y = x^r$. Sustituyendo $y' = r \cdot x^{r-1}$; $y'' = r \cdot (r - 1) \cdot x^{r-2}$ se tiene que $x^r \cdot (r^2 - 2r - 3) = 0$, de raíces $r = 3$ y $r = -1$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial homogénea es $\psi(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}$.

A continuación se busca una solución particular de la ecuación completa.

Como $\lambda = -1$ es un autovalor simple, se tiene que:

$$\varphi_p(x) = x^{-1} \cdot \ln x \cdot (A \cdot \ln x + B) = x^{-1} \cdot (A \cdot \ln^2 x + B \cdot \ln x),$$

$$\varphi_p'(x) = x^{-2} \cdot (-A \cdot \ln^2 x + (2A - B) \cdot \ln x + B),$$

$$\varphi_p''(x) = x^{-3} \cdot (2A \cdot \ln^2 x + (2B - 6A) \cdot \ln x - 3B + 2A),$$

y al sustituirlos en la ecuación:

$$x^{-1} \cdot (-8A \cdot \ln x - 4B + 2A) = -16x^{-1} \cdot \ln x$$

resulta que $A = 2$ y $B = 1$ y la solución particular buscada es:

$$\varphi_p(x) = x^{-1} \cdot (2\ln^2 x + \ln x).$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\varphi_g(x) = x^{-1} \cdot (C_1 \cdot x^4 + C_2 + 2\ln^2 x + \ln x).$$

Ejemplo 10.4.12: Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y'' - 2y' = x$.

Al realizar el cambio de variable $u = y'$ se tiene que $u' = y''$, que se sustituye en la ecuación y se obtiene $x \cdot u' - 2u = x$, ecuación lineal de primer orden. La solución general es $u(x) = -x + C_1 \cdot x^2$. Se deshace el cambio: $y'(x) = -x + C_1 \cdot x^2$. Se integra de nuevo para obtener la solución general:

$$\varphi_g(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1 \frac{x^3}{3} + C_2.$$

Ejemplo 10.4.13: Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y''' - 2y'' = 0$.

Realizando el cambio de variable $y'' = u$, la ecuación que resulta es lineal de primer orden $x \cdot u' - 2u = 0$, que tiene como solución general $u(x) = k_1 x^2$.

Deshaciendo el cambio $y'(x) = k_1 \frac{x^3}{3} + k_2$ e $y(x) = k_1 \frac{x^4}{12} + k_2 x + k_3$, es decir:

$$\varphi_g(x) = C_1 \cdot x^4 + C_2 \cdot x + C_3.$$

Ejercicios

10.18. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + 2y = x \cdot \ln x$

b) $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 2x$

c) $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = x^2 - 2x + 2.$

10.19. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $(1 + x^2) \cdot y'' + 2x \cdot y' = 2x^{-3}$

b) $x \cdot y'' - y' = -2x^{-1} - \ln x$

c) $(1 + 2x) \cdot y''' + 4x \cdot y'' + (2x - 1) \cdot y' = e^{-x}.$

d) $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = 5x^4.$

10.20. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones conocida una solución particular.

a) $x^2 \cdot (\ln x - 1) \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0$, siendo $y_1(x) = x$, una solución particular.

b) $(2x + 1) \cdot y'' + (4x - 2) \cdot y' - 8y = 0$ siendo $y_1(x) = e^{mx}$, una solución particular.

10.5. DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS

En el apartado anterior se han estudiado algunos métodos para resolver una ecuación lineal de orden n con coeficientes variables que se pueden

aplicar cuando las ecuaciones diferenciales son de una forma específica. Pero existen muchas ecuaciones diferenciales que aparecen en las aplicaciones que no se ajustan a los modelos anteriores y es preciso para resolverlos aplicar un método general que consiste en buscar soluciones linealmente independientes expresadas mediante una serie de potencias. El procedimiento que se utiliza para resolverlas es similar al de los coeficientes indeterminados aplicado a una serie infinita. El estudio que se realiza a continuación, centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, trata, esencialmente, de su desarrollo y de las condiciones necesarias para poder aplicarlo.

10.5.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios

Definición 10.5.1:

Se dice que x_0 es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial lineal:

$$y'' + P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$$

si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones analíticas en un entorno del punto x_0 , es decir, cada una de ellas se puede expresar como un desarrollo en serie de potencias que converge en un entorno de dicho punto.

Si un punto no es ordinario se denomina **punto singular**.

En un punto ordinario las soluciones de la ecuación diferencial son también analíticas.

Ecuación de Legendre

Definición 10.5.2:

Se denomina **ecuación de Legendre** la que se puede expresar de la forma:

$$(1 - x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + p \cdot (p + 1) \cdot y = 0, \quad (10.5.1)$$

siendo p constante.

Las funciones $P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ y $Q(x) = \frac{p(p+1)}{1-x^2}$ son analíticas en el origen,

que por tanto es un punto ordinario. Se trata de encontrar una serie de

potencias de la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergente en un intervalo abierto de la

recta real $(-r, r)$, con $0 < r < 1$.

Derivando esta serie de potencias se obtiene:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ y}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

por lo tanto:

$$2x \cdot y' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n,$$

$$(1 - x^2) \cdot y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_nx^n + p(p+1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

que se satisface si y sólo si los coeficientes verifican la siguiente ecuación:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1) \cdot a_n = 0,$$

que se puede expresar:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-p)(n+1+p) \cdot a_n = 0, \text{ o bien,}$$

$$a_{n+2} = - \frac{(p-n) \cdot (p+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Esta expresión permite calcular los términos pares de la serie en función

de a_0 , en particular se tiene que: $a_2 = - \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} a_0$,

$$a_4 = - \frac{(p-2) \cdot (p+3)}{3 \cdot 4} a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{p(p+1)(p-2) \cdot (p+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a_0,$$

y en general

$$a_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{p(p-2) \cdots (p-2n+2) \cdot (p+1)(p+3) \cdots (p+2n-1)}{(2n)!} a_0.$$

Análogamente se pueden calcular los términos impares en función de a_1

con lo que se obtiene:

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1) \cdot (p+2)(p+4) \cdots (p+2n)}{(2n+1)!} a_1.$$

Se consideran las siguientes funciones:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3) \cdots (p-2n+1)(p+2)(p+4) \cdots (p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Se puede demostrar por el criterio del cociente que estas series son convergentes para $|x| < 1$. Además $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial (10.5.1) y son linealmente independientes ya que satisfacen las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial de Legendre (10.5.1) en el intervalo $(-1, 1)$ está expresada por:

$$\varphi(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Si p es 0 o un entero par positivo, $p = 2k$, la serie $y_1(x)$ se convierte en un polinomio de grado $2k$ que sólo contiene potencias pares de x , mientras que en $y_2(x)$ no hay coeficientes nulos. Cuando p es un entero impar positivo es la serie $y_2(x)$ la que se reduce a un polinomio frente a la serie $y_1(x)$ que sigue teniendo infinitos términos no nulos.

Los polinomios obtenidos de esta forma se denominan **polinomios de Legendre** y tienen importantes aplicaciones prácticas.

Teorema 10.5.1:

Si $P(x)$, $Q(x)$ son dos funciones desarrollables en serie de potencias en un entorno de un punto x_0 , $E(x_0)$, entonces la solución general de la ecuación

diferencial: $y'' + P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$ es $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = k_0 \cdot y_1 + k_1 \cdot y_2$, donde

y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial desarrollables en serie de

potencias en $E(x_0)$. Además si k_0 y k_1 son números reales existe una única solución de la ecuación en serie de potencias que verifica que $a_0 = k_0$, $a_1 = k_1$ y el resto de los coeficientes se determinan en función de a_0 y a_1 .

El radio de convergencia de los desarrollos en serie de y_1 e y_2 es mayor o igual que el mínimo de los radios de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

La demostración de este teorema sigue los mismos pasos que se han utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Legendre. Se sustituyen los desarrollos en serie de $P(x)$ y $Q(x)$ en la ecuación diferencial obteniendo los coeficientes a_n de la solución para que se verifique la ecuación. Se obtiene una fórmula recurrente que determina los coeficientes pares a partir de a_0 y los impares, de a_1 . Se parte de que $a_0 = k_0$ y $a_1 = k_1$ y se consiguen todos los demás. De esta forma la serie de potencias así definida verifica la ecuación diferencial. Para probar que esta serie es convergente en $E(x_0)$ se mayoría mediante otra serie de potencias convergente en dicho entorno.

10.5.2. Soluciones en torno a puntos singulares

El teorema anterior garantiza la existencia de una solución expresada en serie de potencias de una ecuación diferencial de segundo orden en un entorno de un punto ordinario. Se trata ahora de analizar las soluciones en serie de potencias que se pueden obtener de dicha ecuación en puntos singulares.

Definición 10.5.3:

Se dice que x_0 es un **punto singular regular** de una ecuación diferencial lineal de segundo orden si dicha ecuación se puede expresar de la forma:

$$(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0,$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones analíticas en un entorno del punto x_0 .

Si un punto singular no verifica esta condición se dice que es un **punto singular irregular**.

Resulta evidente que en la ecuación $(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x)y' + Q(x) \cdot y = 0$ no es aplicable el *teorema 10.5.1* ya que las funciones $\frac{P(x)}{(x - x_0)}$ y $\frac{Q(x)}{(x - x_0)^2}$

no son analíticas en x_0 ; sin embargo existen métodos para resolver estas ecuaciones. A continuación se utilizará la teoría de Frobenius para resolver la ecuación de Bessel en $x_0 = 0$, cuando éste es un punto singular regular de esta ecuación.

Teoría de Frobenius

Definición 10.5.4:

Se denomina **serie de Frobenius** o **serie de potencias generalizada** en un punto x_0 a una serie de la forma:

$$|x - x_0|^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n, \quad t \in \mathfrak{R} \text{ y } a_0 \neq 0. \quad (10.5.2)$$

siendo la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ convergente en un entorno de x_0 .

Definición 10.5.5:

La **ecuación de índices** en un punto singular regular x_0 de la ecuación diferencial $(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$ es la ecuación, en la variable t , que se obtiene al sustituir en la ecuación diferencial la función

incógnita por una serie de Frobenius genérica de la forma (10.5.2) e igualar a 0 el término independiente de la expresión que se obtiene dividida por x^t .

Las raíces de la ecuación de índices son los únicos valores de t que permiten encontrar soluciones, expresadas mediante series de Frobenius, en un punto singular regular de una ecuación diferencial.

Ecuación de Bessel

Definición 10.5.6:

Se denomina **ecuación de Bessel** la que se puede expresar de la forma:

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + (x^2 - p^2) \cdot y = 0,$$

siendo $p \geq 0$ constante.

Se busca una ecuación de la forma:

$$y(x) = |x|^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \quad (10.5.3)$$

siendo $a_0 \neq 0$, en un entorno pinchado de 0, $B'_r(0)$, con lo que $x \neq 0$.

Se supone, primero que $x > 0$, así $|x|^t = x^t$. Derivando (10.5.3) se obtiene:

$$y' = t \cdot x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) \cdot x^n,$$

$$y'' = (t-1) \cdot x^{t-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) \cdot x^n + x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n+t) a_n \cdot x^{n-1} = x^{t-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (t-1+n)(n+t) a_n \cdot x^n,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (t-1+n)(n+t) a_n \cdot x^n + x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) x^n + x^{t+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - x^t \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n \cdot x^n = 0$$

$$\Rightarrow x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+t)^2 - p^2] x^n + x^{t+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

dividiendo por x^t :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+t)^2 - p^2] \cdot x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0.$$

Los coeficientes a_n se determinan imponiendo que se anulen en esta ecuación los coeficientes de cada una de las potencias de x .

Al igualar a cero el término independiente se tiene que $(t^2 - p^2) \cdot a_0 = 0$, y como $a_0 \neq 0$ es necesario que $t^2 - p^2 = 0$. Esta es la *ecuación de índices* y sus raíces p y $-p$ son los únicos valores de t que permiten obtener una ecuación de la forma (10.5.3).

Para $t = p$ las ecuaciones que se obtienen para determinar los valores a_n son:

$$[(1+p)^2 - p^2] \cdot a_1 = 0 \text{ y } [(n+p)^2 - p^2] \cdot a_n + a_{n-2} = 0, \forall n \geq 2.$$

Ya que $p \geq 0$, de la primera ecuación se deduce que $a_1 = 0$, de la segunda se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia que expresa a_n en función de a_{n-2} :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}.$$

De este modo se obtiene que $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$, y por tanto $a_{2n+1} = 0$ $\forall n \geq 0$, es decir los coeficientes de potencias de exponente impar son nulos.

Para los de potencias pares se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2(1+p)}, \\ a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2p)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4 2!(1+p)(2+p)}, \\ a_6 = -\frac{a_4}{6(6+2p)} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}, \end{array} \right.$$

y en general

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)\dots(n+p)}.$$

Por lo tanto para el valor $t = p$ se obtiene la siguiente solución:

$$y(x) = a_0 x^p \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)\dots(n+p)} \right).$$

Aplicando el criterio del cociente se comprueba que esta serie es convergente.

Si se considera ahora que $x < 0$, mediante un razonamiento análogo, se obtiene una solución similar que sólo difiere de la anterior en que x^p queda sustituido por $(-x)^p$. Por lo tanto una solución de la ecuación de Bessel para $x \neq 0$ está expresada por la función:

$$y_1(x) = a_0 \cdot |x|^p \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)\dots(n+p)} \right), \forall x \neq 0$$

Si se estudia la raíz de la ecuación de índices $t = -p$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(1-p)^2 - p^2] \cdot a_1 = 0, \\ [(n-p)^2 - p^2] \cdot a_n + a_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-2p) \cdot a_1 = 0, \\ n(n-2p) \cdot a_n + a_{n-2} = 0. \end{array} \right.$$

De estas ecuaciones, si $2p$ no es entero, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0, \\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2p)}, \forall n \geq 2 \end{array} \right.$$

Ya que la fórmula de recurrencia es la misma sustituyendo p por $-p$, mediante un desarrollo similar al anterior se obtiene la solución:

$$y_2(x) = a_0 \cdot |x|^p \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1-p)(2-p)(3-p)\dots(n-p)} \right), \forall x \neq 0$$

Esta solución se ha obtenido suponiendo que $2p$ no es un entero positivo pero la serie que la define tiene igual sentido si $2p$ es entero positivo, siempre que p no lo sea.

Para todo $p \geq 0$ se ha obtenido la solución $y_1(x)$ y si p no es un número entero positivo se ha calculado otra solución $y_2(x)$. Se puede demostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes y por lo tanto cuando p no es un número entero positivo la solución general de la ecuación de Bessel es de la forma:

$$\varphi(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Teorema 10.5.2:

Si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' + x \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$ y las funciones $P(x)$, $Q(x)$ tienen un desarrollo en serie de potencias en un intervalo $(-r, r)$, con $r > 0$, y si la ecuación de índices tiene dos raíces reales t_1 y t_2 ($t_2 < t_1$), entonces la ecuación diferencial tiene al menos una solución de la forma $y_1(x) = |x|^{t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, siendo $a_n \neq 0$, para todo $x \neq 0$, en

el intervalo $(-r, r)$. Además si $t_1 - t_2$ no es cero ni un número entero positivo, entonces la ecuación tiene otra solución linealmente independiente de la anterior de la forma $y_2(x) = |x|^{t_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$, siendo $b_n \neq 0$, para todo $x \neq 0$, en el intervalo $(-r, r)$.

La demostración de este teorema sigue los mismos pasos que se han utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Bessel.

La ecuación de índices que resulta es: $t^2 + t(p_0 - 1) + q_0 = 0$, siendo p_0 y q_0 los coeficientes de x^0 en los desarrollos en series de potencias de $x \cdot P(x)$ y $x^2 \cdot Q(x)$ respectivamente.

Si las raíces de esta ecuación son números complejos conjugados entonces los coeficientes de la serie de Frobenius son también complejos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.5.1: Encontrar la solución general, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, de la

ecuación diferencial $y'' + x \cdot y' + y = 0$ de la forma $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$, series de potencias.

Derivando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2}.$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \cdot x^{n-2} = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \cdot x^n = - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \cdot x^n.$$

Igualando coeficientes $(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} = -(n+1) \cdot a_n$ de donde se

obtiene la fórmula de recurrencia $a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+2}$ válida para $n \geq 0$. Por lo tanto:

$$a_2 = \frac{-a_0}{2}, a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{(-1)^2 a_0}{2 \cdot 4}, a_6 = \frac{-a_4}{6} = \frac{(-1)^3 a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots, a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3}, a_5 = \frac{-a_3}{5} = \frac{(-1)^2 a_1}{3 \cdot 5}, a_7 = \frac{-a_5}{7} = \frac{(-1)^3 a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!!}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Ejemplo 10.5.2: Hallar una solución expresada en series de potencias de la ecuación diferencial $(1 - x^2) \cdot y'' + 2y = 0$.

Derivando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, como en el ejemplo anterior se obtiene:

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2}.$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) - 2)a_n \cdot x^n.$$

Igualando coeficientes:

$$(n+2) \cdot (n+1) \cdot a_{n+2} = (n^2 - n - 2) \cdot a_n$$

de donde se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$a_{n+2} = \frac{a_n(n-2)}{n+2} \text{ válida para } n \geq 0.$$

Por lo tanto:

$$a_2 = -a_0, a_4 = 0, a_6 = 0, \dots, a_{2n} = 0, \forall n \geq 2$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3}, a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{-a_1}{3 \cdot 5}, a_7 = \frac{3a_5}{7} = \frac{-a_1}{5 \cdot 7}, \dots, a_{2n+1} = \frac{-a_1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Por consiguiente una solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = a_0 + a_2x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_1)x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = a_0(1-x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Ejemplo 10.5.3: Comprobar que el origen es un punto singular regular de la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden: $x^2 \cdot y'' + bx \cdot y' + cy = 0$ (b, c constantes no nulas) y que su ecuación de índices coincide con la ecuación característica de la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes que se obtiene al realizar el cambio de variable $x = e^t$.

Las funciones $P(x) = b$ y $Q(x) = c$ son constantes y por lo tanto $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Cauchy-Euler.

Haciendo el cambio $x = e^t$ se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}; \quad y'' = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}.$$

Sustituyendo: $\frac{d^2y}{dt^2} + (b-1)\frac{dy}{dt} + cy = 0$, ecuación diferencial con

coeficientes constantes cuya ecuación característica es: $\lambda^2 + (b-1)\lambda + c = 0$

Para calcular la ecuación de índices se supone $x > 0$ (si $x < 0$ se obtiene la misma ecuación) y se considera la serie de Frobenius $y(x) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$,

siendo $a_n \neq 0$. Derivando esta serie:

$$y' = x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) x^n, \quad y'' = x^{t-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (t-1+n)(n+t) a_n \cdot x^n,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (t-1+n)(n+t) a_n \cdot x^n + bx^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) \cdot x^n + cx^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow$$

$$x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+t)^2 - (n+t) + b(n+t) + c] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+t)^2 + (b-1)(n+t) + c] x^n = 0.$$

Dividiendo por x^t , se tiene que el coeficiente de x^0 es: $a_0(t^2 + (b-1)t + c)$ y por lo tanto la ecuación de índices: $t^2 + (b-1)t + c = 0$ tiene las mismas raíces que la ecuación característica obtenida anteriormente.

Ejercicios

10.21. Encontrar la solución general $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, de la **ecuación de**

Hermite, $y'' - 2x \cdot y' + 2p \cdot y = 0$, (con p constante) de la forma $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$, series de potencias.

10.22. Hallar dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes, válidas en un intervalo $(-r, r)$, con $r < 1$, de la **ecuación de Chebyshev**, $(1 - x^2) \cdot y'' - x \cdot y' + p^2 \cdot y = 0$, siendo p una constante.

10.23. Demostrar que si p es un número entero no negativo, entonces la solución de la **ecuación de Chebyshev** es un polinomio de grado p .

10.24. Encontrar la ecuación de índices y sus raíces para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales en el punto $x = 0$.

a) $x^2 \cdot y'' + (\cos 2x - 1) \cdot y' + 2x \cdot y = 0.$

b) $4x^2 \cdot y'' + (2x^4 - 5x) \cdot y' + (3x^2 + 2x) \cdot y = 0.$

10.25. Comprobar que el origen es un punto singular regular de la ecuación:

$2x^2 \cdot y'' + x(2x + 1) \cdot y' - y = 0$ y resolverla en un entorno de $x = 0$.

10.6. APLICACIONES

10.6.1. Movimiento oscilatorio armónico

Vibraciones armónicas simples no amortiguadas

Se considera un bloque de masa m sujeto al extremo de un resorte y se denota por $y(t)$ el desplazamiento del bloque en función del tiempo. Se considera el desplazamiento hacia abajo como positivo y hacia arriba negativo. En el punto de equilibrio el peso del bloque se compensa con la fuerza de elasticidad del resorte. Se supone que esta fuerza elástica es proporcional al desplazamiento, es decir, igual a $-k \cdot y(t)$, siendo $k > 0$ una constante, que cuantifica la rigidez del resorte. El movimiento de este sistema, siempre que no se rebasen los límites de elasticidad del resorte, viene dado por la ecuación:

$$-k \cdot y(t) = m \cdot y''(t).$$

Si se supone que no hay más fuerzas actuando en el sistema, la ecuación anterior describe un **movimiento libre no amortiguado** que se denomina **movimiento armónico simple**; esta ecuación se puede expresar de la forma $y'' + w_0^2 \cdot y = 0$ con $w_0^2 = k/m$, que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden cuya ecuación característica es $\lambda^2 + w_0^2 = 0$, sus autovalores $\pm w_0 \cdot i$, y por lo tanto la solución general tiene la forma: $y(t) = C_1 \cdot \cos(w_0 \cdot t) + C_2 \cdot \sen(w_0 \cdot t) = A \cdot \sen(w_0 \cdot t + \alpha)$ donde t es el tiempo.

Se puede calcular e interpretar físicamente el periodo, la frecuencia, la amplitud y el ángulo de fase. Y dadas unas condiciones iniciales se determina la ecuación del movimiento.

Vibraciones amortiguadas

El modelo libre no amortiguado no es realista pues no se conoce ningún resorte que no pare nunca. Existe siempre la resistencia del medio. Se puede suponer que existe resistencia debido a que el medio es viscoso, o bien que existe un dispositivo amortiguador. Esta fuerza se considera proporcional a la velocidad del movimiento y' , y si b es la constante de amortiguación se tiene que la ecuación del movimiento amortiguado viene dada por:

$$y'' + (b/m) \cdot y' + (k/m) \cdot y = 0.$$

Se denota de nuevo $w_0^2 = k/m$, y $2u = b/m$ con lo que la ecuación queda de la forma:

$$y'' + 2u \cdot y' + w_0^2 \cdot y = 0$$

que es también una ecuación homogénea de coeficientes constantes, cuya ecuación característica es:

$$\lambda^2 + u \cdot \lambda + w_0^2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son: $-u \pm \sqrt{u^2 - w_0^2}$. Sean δ y μ . Se pueden distinguir tres casos:

- a) Si $u^2 - w_0^2 > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales y simples, teniendo ambas signo negativo:

La solución general de la ecuación viene expresada por: $y(t) =$

$C_1 \cdot e^{\delta t} + C_2 \cdot e^{\mu t}$. De esta fórmula se deduce, al ser δ y μ negativas, que cualesquiera que sean las condiciones iniciales, el desplazamiento $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a ∞ , y por lo tanto no hay oscilaciones. El movimiento es suave y no oscilatorio y se dice que el sistema está **sobreamortiguado**.

b) Si $u^2 - w_0^2 < 0$ la ecuación tiene dos raíces complejas: $\delta = \alpha + \beta \cdot i$ y $\mu = \alpha - \beta \cdot i$, con $\alpha = -u < 0$. La solución general de la ecuación viene expresada por:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sen \beta t = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sen(\beta t + \phi).$$

De esta fórmula se deduce que las amplitudes $A \cdot e^{\alpha t}$ de las oscilaciones tienden a cero cuando aumenta el tiempo, y el sistema está **subamortiguado**.

c) En el caso en que $u^2 - w_0^2 = 0$ la ecuación tiene una única raíz real $\delta = \mu = -u < 0$ y la solución general de la ecuación $y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\delta t}$. En este caso, como en el sistema sobreamortiguado, al ser δ negativo, el desplazamiento también tiende a cero cuando t tiende a ∞ , pero con menor velocidad debido al factor $C_1 + C_2 \cdot t$. Se dice que el sistema está **críticamente amortiguado** en el sentido de que cualquier variación lo haría pasar a uno de los dos estados anteriores.

Vibraciones forzadas

En este caso actúan fuerzas exteriores al sistema. Así, por ejemplo, se puede suponer que el punto inferior del resorte efectúa movimientos verticales según una función de t . Esto puede ocurrir cuando, por ejemplo, el resorte y el

bloque se desplazan por un camino de relieve irregular. En este caso, más general, la ecuación diferencial que describe el movimiento es una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y(t)}{dx^2} + b \cdot \frac{dy(t)}{dx} + c \cdot y(t) = g(t),$$

donde $g(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre la masa del resorte. Para calcular sus soluciones, en primer lugar, hay que resolver la ecuación homogénea y luego hallar una solución particular de la completa.

Cuando la función g que representa la fuerza exterior es periódica se puede originar una situación especial que se analiza a continuación, si se supone que la fuerza externa g es una función seno o coseno con la misma frecuencia que las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Se deben considerar de nuevo los casos ya estudiados para la ecuación homogénea. Si en la ecuación general $y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = g(t)$, se tiene que b es igual a 0, el movimiento corresponde a las oscilaciones libres forzadas pudiendo aparecer problemas de **resonancia**, o de modulación de amplitud. Mientras que si b es distinto de cero, las vibraciones son forzadas amortiguadas, el movimiento siempre está acotado y no hay resonancia.

Vibraciones libres forzadas. Resonancia

Se trata de estudiar $y''(t) + c \cdot y(t) = F_0 \cdot \cos wt$, donde la ecuación homogénea corresponde a la de las oscilaciones libres y la fuerza externa es una función coseno.

Llamando $w_0 = \sqrt{c}$ resulta que la solución general de la ecuación

homogénea es: $y = C_1 \cdot \cos(w_0 \cdot t) + C_2 \cdot \text{sen}(w_0 \cdot t)$

Si w es distinto de w_0 , es decir la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la de las propias oscilaciones, entonces se puede probar por el método de los coeficientes indeterminados, al buscar una solución de la forma $y_P(t) = A \cdot \cos wt + B \cdot \text{sen} wt$, que esta solución particular es:

$$y_P(t) = \frac{F_0}{(w_0^2 - w^2)} \cos wt.$$

Si se considera $y(0) = y'(0) = 0$ y se calcula la solución del problema de valor inicial se obtiene:

$$y(t) = \frac{F_0}{(w_0^2 - w^2)} (\cos wt - \cos w_0 t) = \frac{2F_0}{(w_0^2 - w^2)} \text{sen} \frac{(w_0 - w)t}{2} \text{sen} \frac{(w_0 + w)t}{2}.$$

Si w es próximo a w_0 la solución particular que se obtiene es una oscilación rápida con frecuencia $(w_0 + w)/2$ pero con una amplitud senoidal que varía lentamente. Este tipo de movimiento, que posee una variación periódica de amplitud, se denomina una **pulsación**. Este fenómeno se presenta en acústica, cuando los diapasones de una frecuencia casi igual se hacen sonar simultáneamente; entonces la variación periódica de la amplitud puede percibirse por el oído. En electrónica la variación de amplitud con el tiempo se llama modulación de amplitud.

Si $w = w_0$ la solución particular que se obtiene es:

$$y_P(t) = \frac{F_0}{2w} t \text{sen} wt.$$

y debido a la existencia del término en t cuando el tiempo t aumenta el movimiento no está acotado. El fenómeno se conoce como **resonancia**. En la

práctica el sistema se rompería.

Una anécdota interesante es la discusión sobre si este fenómeno de resonancia fue el que provocó el derrumbe del puente colgante de *Tacoma Narrows*. Es costumbre también que cuando un ejército atraviese un puente no marque el paso para no provocar resonancia.

En el *ejemplo 10.6.4* se presentan fenómenos de resonancia, y resulta interesante estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones

10.6.2. Circuitos eléctricos

En el *capítulo 7* se ha obtenido la siguiente ecuación diferencial lineal para un circuito eléctrico:

$$L \cdot \frac{dI}{dt}(t) + R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t),$$

siendo L la inductancia, R la resistencia, C la capacitancia, Q la carga eléctrica, I la intensidad de la corriente y E la fuerza electromotriz.

Sustituyendo en esta ecuación $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ se obtenía la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + R \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C} Q(t) = E(t).$$

También en ese capítulo se observaba la semejanza de esta ecuación con la obtenida para las vibraciones amortiguadas forzadas:

$$m \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = g(t),$$

estableciendo las correspondencias entre las constantes y las funciones de ambas ecuaciones.

Resulta evidente que la similitud entre las ecuaciones de los sistemas mecánicos y los eléctricos conlleva que las expresiones de las soluciones sean idénticas desde el punto de vista matemático.

Por ejemplo la ecuación homogénea que se obtiene cuando la fuerza electromotriz es nula, $E(t) = 0$, al dividirla por L queda de la forma:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{L \cdot C} Q(t) = 0.$$

En el estudio matemático de esta ecuación hay que analizar los distintos valores de $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{L \cdot C}$, que es el discriminante de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{L \cdot C} = 0.$$

Sean δ y μ , las raíces de esta ecuación. Se pueden distinguir tres casos:

a) Si $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la ecuación tiene dos raíces reales y simples:

La solución general de la ecuación viene expresada por: $Q(t) = C_1 \cdot e^{\delta t} + C_2 \cdot e^{\mu t}$. En el caso particular en el que L es despreciable el circuito es **no inductivo**.

b) Si $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la ecuación tiene dos raíces complejas, $\delta = \alpha + \beta \cdot i$ y

$\mu = \alpha - \beta \cdot i$. La solución general de la ecuación viene expresada por:

$$Q(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sen \beta t = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \sen(\beta t + \phi).$$

En el caso particular en el que R es despreciable se trata de un

circuito **inductivo de débil resistencia**.

c) Si $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la ecuación tiene una única raíz real δ y la solución

general de la ecuación $Q(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\delta t}$. En este caso, como en el sistema mecánico, la solución tiene un comportamiento crítico en el sentido de que cualquier variación lo haría pasar a uno de los dos estados anteriores.

Además al estudiar la ecuación completa existe una resistencia crítica por debajo de la cual el comportamiento libre del circuito es vibratorio, y cuando la fuerza electromotriz es una función periódica pueden aparecer fenómenos de resonancia de forma análoga a los que se han estudiado en el sistema mecánico cuando la fuerza externa era una función periódica.

10.6.3. Las leyes de Kepler

En este apartado se deducen las leyes de Kepler de los movimientos de los planetas a partir de la ley de la gravitación de Newton. Se trata pues de describir el movimiento de una partícula de masa m , que puede representar un planeta, bajo la atracción de otra fija de masa M , que representaría el Sol.

Para facilitar los cálculos se considera un sistema de coordenadas polares, colocando a la partícula fija en el origen.

Sea P el punto del plano donde está colocada la masa m , de coordenadas polares (r, α) . El vector OP se puede representar como $OP = r \cdot \mathbf{u}_p$, siendo \mathbf{u}_p el vector unitario de coordenadas $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Al girarlo $\pi/2$, se obtiene el vector \mathbf{n}_p de coordenadas $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Ambos vectores están relacionados

ya que $\frac{du_p}{d\alpha} = n_p$ y $\frac{dn_p}{d\alpha} = -u_p$. Se calcula la velocidad y la aceleración en

función de estos vectores:

$$v = \frac{dOP}{dt} = r \frac{du_p}{dt} + \frac{dr}{dt} u_p = r \frac{du_p}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{dr}{dt} u_p = r \frac{d\alpha}{dt} n_p + \frac{dr}{dt} u_p \text{ y}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\alpha}{dt} n_p + \frac{dr}{dt} u_p \right) = \left(r \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right) n_p + \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right) u_p.$$

Si la fuerza que actúa sobre m se descompone en una componente en la dirección de u_p y otra en la de n_p se tiene que $F = F_r \cdot u_p + F_n \cdot n_p$ y aplicando la segunda ley del movimiento de Newton $F = m \cdot a$ se tiene que:

$$F_r = m \cdot \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \right) \text{ y } F_n = m \cdot \left(r \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right).$$

Segunda ley de Kepler

Se supone que la fuerza de atracción del Sol sobre los planetas es central, lo que indica que sólo tiene una componente en la dirección del vector OP y por lo tanto la componente de la fuerza en la dirección perpendicular a OP es 0, es decir $F_n = 0$. Por lo tanto $\left(r \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right) = 0$ y al multiplicar por r

se tiene $\left(r^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\alpha}{dt} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d\alpha}{dt} = k$. Se puede

suponer $k > 0$ lo que indica que la masa m se desplaza en sentido positivo.

Si $A = A(t)$ es la función que determina el área a partir de una posición fija

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\alpha \text{ y a partir de la ecuación anterior se tiene que } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} k.$$

Calculando la integral entre t_1 y t_2 se obtiene que $A(t_2) - A(t_1) = \frac{1}{2} k(t_2 - t_1)$,

que es la segunda ley de Kepler, es decir: *el área que recorre el vector OP es proporcional al tiempo en que la recorre.*

Primera ley de Kepler

Se supone ahora que la fuerza central, que se ha llamado F_r , según la ley de gravitación es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, por lo que $F_r = -G \frac{Mm}{r^2}$

y se sustituye el valor de F_r obtenido anteriormente: $m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 r \right) =$

$-G \frac{Mm}{r^2}$. Se hace el cambio de variable $z = \frac{1}{r}$ y se calculan las derivadas

respecto a α :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\alpha} \frac{k}{r^2} = -k \frac{dz}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-k \frac{dz}{d\alpha} \right) = -k \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{dz}{d\alpha} \right) \frac{d\alpha}{dt} = -k \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \frac{k}{r^2} = -k^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\alpha^2},$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación anterior:

$$-k^2 z^2 \frac{d^2 z}{d\alpha^2} - \frac{1}{z} k^2 z^4 = -GM \cdot z^2 \Rightarrow \frac{d^2 z}{d\alpha^2} + z = \frac{GM}{k^2},$$

que es una ecuación lineal con coeficientes constantes que tiene por solución general:

$$z = C_1 \cdot \cos \alpha + C_2 \cdot \text{sen } \alpha + \frac{GM}{k^2},$$

y llamando $H = \frac{GM}{k^2}$ se tiene que:

$$r = \frac{1}{C_1 \cos \alpha + C_2 \operatorname{sen} \alpha + H}.$$

Para simplificar esta expresión se cambian los ejes de coordenadas de modo que r sea mínimo cuando $\alpha = 0$, lo que equivale a decir que z es máximo:

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0 \text{ y } \frac{d^2z}{d\alpha^2} < 0, \text{ de donde } C_2 = 0 \text{ y } C_1 > 0 \text{ y}$$

$$r = \frac{1}{C_1 \cos \alpha + H} = \frac{\frac{1}{H}}{\frac{C_1}{H} \cos \alpha + 1};$$

llamando $e = \frac{C_1}{H}$ y $p = \frac{1}{C_1}$ se tiene:

$$r = \frac{pe}{e \cos \alpha + 1},$$

que es la ecuación en coordenadas polares de una cónica, donde $e = \frac{C_1 k^2}{MG}$ es la excentricidad. Como los planetas permanecen en el sistema solar su órbita ha de ser cerrada y por tanto una elipse.

Tercera ley de Kepler

Se supone que m se desplaza con una órbita elíptica centrada en el origen que tiene por coordenadas cartesianas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, su excentricidad es

$e = \frac{c}{a}$, siendo $c^2 = a^2 - b^2$, de forma que $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ y por tanto:

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2).$$

La distancia media, a , de m al foco F es la media entre el mayor valor de r

y el menor. Teniendo en cuenta que $r = \frac{pe}{\cos\alpha + 1}$ se tiene:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{pe}{1+e} + \frac{pe}{1-e} \right) = \frac{pe}{1-e^2},$$

sustituyendo $pe = \frac{k^2}{MG}$ y $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ se tiene:

$$a = \frac{k^2}{MG(1-e^2)} = \frac{k^2 a^2}{MG b^2} \text{ y } b^2 = \frac{k^2 a}{MG}.$$

Si T es el tiempo que necesita la masa m para dar una vuelta completa a su órbita, como el área de la elipse es $\pi \cdot a \cdot b$, aplicando la fórmula obtenida para

el área al demostrar la segunda ley se tiene que $\pi \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} k \cdot T$ y $T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{k^2}$

sustituyendo la última expresión para b^2 se obtiene $T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 a^3}{MG}$.

De donde se obtiene la tercera ley de Kepler según la cual *los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas con proporcionales a los cubos de sus distancias.*

Es evidente que la constante de proporcionalidad $\frac{4 \cdot \pi^2}{MG}$ no depende de la masa m del planeta y por lo tanto es válida para todos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.6.1: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 0, \text{ con las condiciones iniciales } y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Se puede ver que la solución viene dada por: $y(t) = (5/3)e^{-t} - (2/3)e^{-4t}$

El problema puede ser interpretado como una representación del **movimiento sobreamortiguado** de una masa sujeta a un resorte. La masa parte desde una posición que se encuentra una unidad por debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 cm/s. Puede comprobarse que la masa alcanza un desplazamiento máximo a 1 069 cm por debajo de la posición de equilibrio y no cruza el eje t , lo que quiere decir que la masa no pasa por la posición de equilibrio.

Ejemplo 10.6.2: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 10y = 0, \text{ con las condiciones iniciales } y(0) = -2, y'(0) = 0.$$

La solución es $y(t) = e^{-t} \cdot (-2 \cos 3t - (2/3) \sin 3t)$.

El problema corresponde a un peso que se empuja hacia arriba y se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está a 2 cm sobre la posición de equilibrio. El medio ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Se dice que el **movimiento** está **subamortiguado**.

Ejemplo 10.6.3: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 16y = 0, \text{ con las condiciones iniciales } y(0) = 1, y'(0) = -3.$$

El problema corresponde a un peso que se suelta desde la posición de equilibrio anterior con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 cm/seg.

En este caso se trata de un sistema **críticamente amortiguado**. El

desplazamiento máximo es $-0,276$ cm sobre la posición de equilibrio, es decir, el peso llega a una altura máxima de $0,276$ cm sobre la posición de equilibrio.

La solución es: $y(t) = -3te^{-4t}$.

Ejemplo 10.6.4: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación:

$$y'' + a^2 \cdot y = \text{sen } t, \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y_1.$$

La solución para a distinto de uno y de menos uno es:

$$y(t) = \frac{1}{a^2 - 1} \text{sent} - \frac{1}{a(a^2 - 1)} \text{senat} + y_0 \cos at + \frac{1}{a} y_1 \text{senat}.$$

Esta solución es oscilatoria, aunque no es periódica. En general existen dos frecuencias independientes, por lo que es cuasiperiódica. Al tomar a el valor uno esta solución converge a una solución no acotada:

$$y(t) = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \text{sent} + y_0 \cos t + y_1 \text{sent}.$$

con lo que se dice que hay **resonancia**. Si a se acerca a uno se observa que también la amplitud crece, y aunque no hay resonancia propiamente dicha, puede superar los límites del sistema.

Ejercicios

10.26. Una masa de 2 kg estira un muelle de 40 cm. En $t = 0$ se suelta en un punto que está 60 cm por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 8 m/sg. Determinar la función $y(t)$ que describe el movimiento armónico simple, estando $y(t)$ medido desde la posición de equilibrio. Tomar $g = 10$ m/sg².

10.27. Se considera una masa situada en un muelle con amortiguación. Sea

$y = y(t)$ la función que describe el movimiento que verifica la ecuación

diferencial $y'' + 2\lambda \cdot y' + \omega \cdot y = 0$, donde $\lambda = \frac{\pi}{8}$ y $\omega = \frac{\pi}{6}$

- a) Determinar si el movimiento armónico resultante es sobre, sub o críticamente amortiguado.
- b) Hallar la solución para los valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

10.28. Estudiar una solución particular de la ecuación $y'' + \omega_0^2 \cdot y = F_0 \cdot \text{sen } \omega t$, que verifique las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$

10.29. Calcular la solución general de la ecuación de las oscilaciones amortiguadas forzadas $y'' + 2u \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = \text{sen } \omega t$, cuando $u^2 - \omega_0^2 < 0$.

10.7. EJERCICIOS

10.30. Integrar las siguientes ecuaciones:

- a) $y''' - 3y' + 2y = 0$.
- b) $y^{iv} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$.
- c) $y^v = 0$.
- d) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$.
- e) $y''' - y' = 0$.

10.31. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal para todo valor de m , $y^{vi} + m^2 \cdot y^{iv} - m^4 \cdot y'' - m^6 \cdot y = 0$.

10.32. Calcular una solución particular de la ecuación $y''' - y = 0$, que verifique las condiciones iniciales $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

10.33. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + 4y = 5$.

b) $y'' + 4y = x^2$.

c) $y'' + 4y = \cos x$.

d) $y'' + 4y = x \cdot \cos x$.

10.34. Verificar si las siguientes funciones son soluciones de alguna de las ecuaciones diferenciales anteriores.

a) $y = \frac{5}{4} + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

b) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

c) $y = \frac{1}{3} \cos x + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

d) $y = \frac{1}{3} x \cdot \cos x + \frac{2}{9} \operatorname{sen} x + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

10.35. Calcular por el método de los coeficientes indeterminados una solución particular de la ecuación: $y'' - 6y' + 9y = -12x^2 \cdot e^{3x} + 9$.

10.36. Calcular por el método del anulador la solución general de la ecuación: $y'' - 2y' + y = 2x$.

$$(\text{Solución: } y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot e^x + 2x + 4)$$

10.37. Resolver la ecuación diferencial: $x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = \frac{x^2}{x+1}$.

$$(\text{Solución: } y = C_1 \cdot e^x - 1 + (C_2 - \ln|1 + x|) \cdot (1 + x), x > 0)$$

10.38. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver las

siguientes ecuaciones:

a) $y'' - 4y' + 8y = \operatorname{tg} x$.

b) $y'' - 4y' + 8y = 8 + 3e^{2x}$.

c) $x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = x^2$.

d) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$. (Sol: $y = \frac{\cos x + 1}{x}$)

10.39. Calcular una solución particular de la ecuación diferencial:

$$x \cdot y'' - (1 + x) \cdot y' + y = x^2 \cdot e^{-2x} \text{ con } y(1) = y'(1) = 0.$$

$$(\text{Solución: } y = \frac{e^2}{2} \cdot (x + 1) - e^{x+1} + \frac{e^{2x}}{2} \cdot (x - 1))$$

10.40. Integrar la ecuación de Bessel: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, en el

intervalo $(0, \infty)$ sabiendo que admite la solución $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

$$(\text{Solución: } y = C_1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \frac{\operatorname{cos} x}{\sqrt{x}})$$

10.41. Calcular la solución general de la ecuación $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 4y = 0$, en $(0, \infty)$ sabiendo que tiene una solución polinómica de grado 2.

$$(\text{Solución: } y_1 = x^2; y = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot \ln x)$$

10.42. Resolver $x^2 \cdot y'' - 6y = 0$ en $(0, \infty)$ sabiendo que admite una solución polinómica de grado 3.

$$(\text{Solución: } y_1 = x^3; y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^2)$$

10.43. Integrar la ecuación $(1 + 2x) \cdot y'' + 4x \cdot y' - 4y = 0$, sabiendo que admite

una solución de la forma $y = e^{\sqrt{x}}$.

10.44. Resolver la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 7x \cdot y' + 16y = 0$, en $x > 0$, sabiendo que admite una solución de la forma $y = x^n$.

10.45. Resolver la ecuación diferencial: $y'' - x \cdot y' - 2y = 0$, expresando la solución mediante series de potencias.

10.46. Comprobar que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación:

$2x^2 \cdot y'' + (3x - 2x^2) \cdot y' - (x + 1) \cdot y = 0$ y resolver la ecuación.

$$(Solución: y = C_1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)} \right] + C_2 \cdot \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$$

CAPÍTULO 11

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Cuando se estudia matemáticamente una situación de la realidad, el modelo que se obtiene suele tener un carácter no lineal, siendo esto lo que le confiere, en la mayoría de los casos, una gran dificultad. Uno de los procedimientos más utilizados dentro de la Matemática, y de la Ciencia en general, cuando se aborda un problema difícil, es considerar un problema más sencillo que sea, en algún sentido, una buena aproximación del anterior. Al estudiar este segundo problema se intenta obtener, de las conclusiones, algún tipo de resultado para el problema primitivo. Una de las formas más usuales de simplificar el problema es linealizarlo. Si se quiere estudiar un problema no lineal, el primer paso obligado es estudiar el problema lineal asociado de la manera más completa posible para poder analizar así que ocurrirá en el caso no lineal. El estudio de los sistemas lineales no es difícil y en numerosas ocasiones se pueden obtener resultados concluyentes pues la estructura algebraica de las soluciones es sencilla y a veces se puede dar una descripción de la misma en términos de funciones elementales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior se transforma en un sistema de primer orden añadiendo más variables. Por esta razón el

capítulo se centra en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La *sección 1* comienza realizando una primera aproximación entre los sistemas lineales y las ecuaciones diferenciales de orden superior y estableciendo los teoremas de existencia y unicidad. En la *sección 2* se desarrolla la teoría general de la estructura de las soluciones de los sistemas lineales de primer orden que es similar a la de las ecuaciones lineales de orden superior. Así el conjunto de soluciones de un sistema lineal de primer orden homogéneo tiene estructura de espacio vectorial y el no homogéneo de espacio afín. La *sección 3* está centrada en los métodos de resolución de los sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Utilizando la teoría algebraica para calcular los autovalores y autovectores de una matriz se establece un procedimiento que permite resolver el sistema. Otra forma de resolver sistemas lineales es utilizando la exponencial de una matriz, que es el contenido de la *sección 4*. El capítulo termina con la *sección 5* en la que se desarrollan los métodos de resolución de sistemas lineales no homogéneos, en los que de nuevo se observa un paralelismo con los estudiados en el capítulo anterior para resolver las ecuaciones lineales completas de orden superior.

11.1. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede transformarse fácilmente en un sistema de primer orden sin más que añadir

más variables: si el sistema de orden superior es lineal también lo es el de primer orden. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, es posible estudiar únicamente los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

11.1.1. Conceptos previos

Definición 11.1.1:

Un **sistema de k ecuaciones diferenciales de orden superior n** expresado de la forma $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}''(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)) = 0$ se denomina **lineal** cuando la función vectorial \mathbf{f} es una función lineal con respecto a la función $\mathbf{y}(x)$ y a todas sus derivadas.

En particular un **sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden** expresado de la forma $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) = 0$ se denomina **lineal** cuando la función vectorial \mathbf{f} es una función lineal respecto a $\mathbf{y}(x)$ y $\mathbf{y}'(x)$

Cuando es posible despejar \mathbf{y}' el sistema se escribe de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad f_1, \dots, f_n : S \subset \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$$

siendo f_1, f_2, \dots, f_n funciones lineales respecto a las variables y_1, y_2, \dots, y_n , es decir, también se puede expresar:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \dots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \dots + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x) \\ \dots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \dots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases} \quad (11.1.1)$$

siendo $a_{ij}(x)$ y $b_i(x)$ funciones definidas en un intervalo (a, b) , $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

El sistema anterior se puede expresar en forma vectorial: $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$, siendo $A(x)$ una matriz cuadrada de orden n , formada por las funciones $a_{ij}(x)$ y $\mathbf{b}(x)$, $\mathbf{y}'(x)$, $\mathbf{y}(x)$ funciones vectoriales de dimensión n definidas en un intervalo (a, b) de \mathfrak{R} .

En el *capítulo 9* se desarrolló una manera natural de asociar a cada ecuación diferencial ordinaria de orden n un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden; así mismo, dado un sistema se puede determinar una ecuación diferencial de orden superior asociada, aunque no hay equivalencia ya que la ecuación puede tener soluciones que no lo son del sistema como se muestra en el *ejemplo 11.1.3*. En esta transformación entre sistemas de primer orden y ecuaciones de orden n , la propiedad de linealidad se conserva como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 11.1.1:

Si una ecuación diferencial de orden n es lineal también es lineal el sistema asociado de n ecuaciones diferenciales de primer orden y recíprocamente si el sistema es lineal también lo es su ecuación diferencial asociada.

Demostración:

Dada la ecuación diferencial lineal:

$$y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x),$$

realizando el cambio de variable:

$$y_1 = y; y_2 = y'; \dots; y_n = y^{(n-1)},$$

se obtiene $y'_n = y^{(n)}$, y por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x) \\ y'_2(x) = y_3(x) \\ \dots \\ y'_n(x) = -P_1(x)y_n(x) - P_2(x)y_{n-1}(x) - \dots - P_n(x)y_1(x) - G(x) \end{cases}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Recíprocamente si y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones del sistema (11.1.1) al derivar la primera ecuación con respecto a x :

$$y''_1 = a_{11}' \cdot y_1 + a_{11} \cdot y'_1 + a_{12}' \cdot y_2 + a_{12} \cdot y'_2 + \dots + a_{1n}' \cdot y_n + a_{1n} \cdot y'_n + b'_1$$

y sustituir las derivadas y'_1, y'_2, \dots, y'_n por sus expresiones en el sistema (11.1.1) se obtiene $y_1'' = d_{21} \cdot y_1 + d_{22} \cdot y_2 + \dots + d_{2n} \cdot y_n + h_2$. Se deriva esta expresión con respecto a x , se sustituye del modo anterior y se obtiene $y_1'''(x) = d_{31} \cdot y_1 + d_{32} \cdot y_2 + \dots + d_{3n} \cdot y_n + h_3$.

Se repite el proceso hasta la derivada de orden n y se calcula:

$$y_1^{(n)}(x) = d_{n1} \cdot y_1 + d_{n2} \cdot y_2 + \dots + d_{nn} \cdot y_n + h_n.$$

De esta forma se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \dots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_1''(x) = d_{21}(x)y_1(x) + d_{22}(x)y_2(x) + \dots + d_{2n}(x)y_n(x) + h_2(x) \\ \dots \\ y_1^{(n)}(x) = d_{n1}(x)y_1(x) + d_{n2}(x)y_2(x) + \dots + d_{nn}(x)y_n(x) + h_n(x) \end{cases} \quad (11.1.2)$$

De las $n - 1$ primeras ecuaciones se calculan y_2, y_3, \dots, y_n en función de x , la función y_1 y sus derivadas hasta el orden $n - 1$, y al introducir estas expresiones en la última ecuación de (11.1.2) se obtiene la ecuación diferencial lineal de orden n :

$$y_1^{(n)}(x) = Q_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + Q_{n-1}(x) \cdot y_1' + Q_n(x) \cdot y_1 + H(x). \quad \square$$

Definición 11.1.2:

Un **sistema** de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con **coeficientes constantes** se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \dots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in \mathfrak{R}$, y $b_i(x)$ son funciones reales de variable real.

Si para todo i , $1 \leq i \leq n$, $b_i(x) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, el sistema se denomina **homogéneo**.

Las equivalentes ecuaciones matriciales son: $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$ para un sistema no homogéneo y $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x)$ para un sistema homogéneo, donde A es una matriz de números reales, cuadrada de orden n , $A = (a_{ij})$.

11.1.2. Teoremas de existencia y unicidad

Los **teoremas fundamentales de existencia y unicidad** de las soluciones de un problema de valor inicial para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden enunciar de forma similar a los obtenidos para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y se demostrarán a partir de ellos.

Teorema 11.1.2: Teorema de existencia y unicidad

Sea $A(x)$ una función matricial cuadrada de orden n , $\mathbf{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo (a, b) de \mathfrak{R} , y sea $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$ un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sea $x_0 \in (a, b)$, si se impone la condición inicial $\mathbf{y}(x_0) = (y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$, entonces existe una única función vectorial $\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ que es solución del sistema y verifica las condiciones iniciales.

Demostración:

En el *teorema 9.2.1* de existencia del *capítulo 9* para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden para garantizar la existencia se exigía la continuidad de las funciones $f_k(x, \mathbf{y})$, para todos los valores de k entre 1 y n .

En nuestro caso particular $f_k(x, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n a_{kj}(x) \cdot y_j(x) + b_k(x)$. Como por

hipótesis las funciones $a_{kj}(x)$ y $b_k(x)$ son funciones continuas en el intervalo (a, b) se tiene garantizada la existencia de solución de cualquier problema de valor inicial en ese intervalo.

Además las derivadas parciales de las funciones $f_k(x, \mathbf{y})$, respecto de las variables $y_j(x)$ son precisamente las funciones $a_{kj}(x)$ que por hipótesis son continuas por lo tanto, por el *teorema 9.2.2*, se asegura la existencia y unicidad local de la solución para un problema de valor inicial, y dicha solución puede extenderse a todo intervalo en el que sean continuas las funciones $a_{kj}(x)$ y $b_k(x)$. \square

Es interesante observar que para sistemas lineales el intervalo maximal de existencia de cualquier solución es el mismo intervalo para cualquier condición inicial, y coincide con el intervalo dominio de definición de las funciones $A(x)$ y $\mathbf{b}(x)$, mientras que si el sistema es no lineal el intervalo maximal de existencia depende de la condición inicial.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.1.1: Clasificar los siguientes sistemas en lineales o no lineales, homogéneos o no homogéneos, de primer orden o de orden superior.

$$\text{a) } \begin{cases} (D^2 - 2)y_1 - 3y_2 = e^{2x} \\ (D^2 + 2)y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y_1' = \frac{y_2^2}{y_1} \\ y_2' = \frac{y_1^2}{y_2} \end{cases}$$

El sistema del apartado a) es lineal, no homogéneo de orden dos.

El sistema del apartado b) es lineal, homogéneo y de primer orden.

El sistema del apartado c) es no lineal, homogéneo y de primer orden.

Los tres ejemplos tienen los coeficientes constantes.

Ejemplo 11.1.2: Expresar en forma matricial el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea $y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$.

Realizando el cambio de variable $y_1 = y$; $y_2 = y'$; $y_3 = y''$, se obtiene $y_3' = y'''$, y por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ y_3'(x) = -a_0 y_1(x) - a_1 y_2(x) - a_2 y_3(x) \end{cases}$$

que expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.1.3: Calcular una ecuación diferencial de orden dos asociada al sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y comprobar que tiene soluciones que no son soluciones del sistema.

La solución de general de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x + K_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \Rightarrow y_1 = K_1 \cdot e^x; y_2 = K_2 \cdot e^x,$$

y no existe una ecuación diferencial lineal de segundo orden que tenga estas soluciones, así por ejemplo derivando la primera ecuación $y_1' = y_1$ se tiene $y_1'' = y_1'$. Una solución de esta ecuación son las funciones constantes que sin embargo no son solución del sistema de partida.

Ejemplo 11.1.4: Obtener una ecuación diferencial de segundo orden

asociada al sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$, y a partir de sus soluciones resolver el sistema.

Derivando la primera ecuación se tiene $y_1'' = y_1' + 2y_2'$. Sustituyendo los valores de y_1' e y_2' del sistema se tiene: $y_1'' = 7y_1 + 6y_2$.

Se considera el sistema en las variables y_1 e y_2 : $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_1'' = 7y_1 + 6y_2 \end{cases}$. Se

despeja y_2 en la primera ecuación: $y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1)$, y se sustituye en la segunda, con lo que se obtiene la ecuación $y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 0$.

La solución general de esta ecuación diferencial es $y_1 = K_1 \cdot e^{4x} + K_2 \cdot e^{-x}$.

Sustituyendo en y_2 tanto y_1 como su derivada se obtiene: $y_2 = \frac{3}{2}K_1 \cdot e^{4x} - K_2 \cdot e^{-x}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

11.1. Calcular la ecuación diferencial asociada a cada uno de los siguientes sistemas y a partir de sus soluciones obtener la solución general del sistema.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad \text{b) } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

11.2. Expresar en forma matricial el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + 2y' + y = 0$.

11.3. Resolver el sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$ a partir de las soluciones de la

ecuación diferencial de orden dos asociada a este sistema.

11.2. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

11.2.1. Dependencia e independencia lineal

Definición 11.2.1:

Dado un conjunto de funciones vectoriales $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ definidas en un intervalo (a, b) se dice que son **linealmente dependientes** en el intervalo (a, b) , si existen n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todas nulas, tales que: $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot y_n(x) = \mathbf{0}, \forall x \in (a, b)$.

Si por el contrario se verifica que esta identidad solamente se cumple cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, entonces se dice que las funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son **linealmente independientes** en el intervalo (a, b) .

Definición 11.2.2:

Dado un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$, con $\mathbf{y}_k(x) = (y_{k1}(x), y_{k2}(x), \dots, y_{kn}(x))$, $1 \leq k \leq n$, se denomina **wronskiano** de estas funciones y se denota por $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$ a la función definida por el siguiente determinante:

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \dots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{n2}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

es decir $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = \det[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x)$.

Proposición 11.2.1:

Si las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ son linealmente dependientes en el intervalo (a, b) , entonces su wronskiano en ese intervalo es la función nula.

Demostración:

Si las funciones son linealmente dependientes una de ellas \mathbf{y}_k se puede expresar como combinación lineal de las otras y por lo tanto, la columna k -ésima del determinante se puede expresar como una combinación lineal de las otras columnas, lo que supone que el determinante es cero. \square

Esta proposición prueba que si un conjunto de funciones vectoriales es linealmente dependiente entonces son linealmente dependientes los vectores numéricos que se obtienen al hallar las imágenes de estas funciones en cada punto.

El recíproco no es cierto, para algún valor de x pueden ser dichos vectores linealmente dependientes y no serlo las funciones. Si los vectores son linealmente independientes para algún valor, x , entonces se puede asegurar que son linealmente independientes las funciones. Pero incluso puede ocurrir que para cada valor x los vectores sean linealmente dependientes y ser linealmente independientes las funciones.

Esta anomalía de que unas funciones linealmente independientes puedan tener valores en un punto que no lo sean, desaparece si las funciones son solución de un mismo sistema lineal homogéneo.

11.2.2. Estructura de las soluciones del sistema homogéneo

En los siguientes teoremas se supone un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden expresado en forma vectorial $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ siendo $A(x)$ una función matricial cuadrada de orden n , continua en un intervalo (a, b) de \mathfrak{R} , e $\mathbf{y}'(x)$, $\mathbf{y}(x)$ funciones vectoriales de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R} .

Teorema 11.2.3.

Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ en el intervalo (a, b) . Entonces, dadas n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , la

función $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k$ es también solución del sistema en el intervalo (a, b) .

Demostración:

Las funciones $\mathbf{y}_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, son soluciones del sistema, y por tanto

verifican $\mathbf{y}_k'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}_k(x)$. Por ser la derivada lineal se tiene que:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k \frac{d\mathbf{y}_k}{dx} = \sum_{k=1}^n c_k A(x) \cdot \mathbf{y}_k(x) = A(x) \cdot \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k(x). \quad \square$$

Teorema 11.2.4:

Si las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ son soluciones linealmente independientes en el intervalo (a, b) del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ entonces su wronskiano no se anula en ningún punto de ese intervalo.

Demostración:

Se demuestra el teorema por reducción al absurdo, por lo que se supone que existe algún $x_0 \in (a, b)$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x_0) = 0$.

Por lo tanto una columna del wronskiano es una combinación lineal de las otras. Se supone que es la primera, entonces:

$$\mathbf{y}_1(x_0) = c_2 \cdot \mathbf{y}_2(x_0) + c_3 \cdot \mathbf{y}_3(x_0) + \dots + c_n \cdot \mathbf{y}_n(x_0)$$

$$\text{Sea } \mathbf{z}(x) = -\mathbf{y}_1(x) + c_2 \cdot \mathbf{y}_2(x) + c_3 \cdot \mathbf{y}_3(x) + \dots + c_n \cdot \mathbf{y}_n(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

Esta función es solución del sistema por ser una combinación lineal de soluciones; además $\mathbf{z}(x_0) = \mathbf{0}$, luego en el punto x_0 la función $\mathbf{z}(x)$ coincide con la función nula, que también es solución del sistema. Por el teorema de unicidad de soluciones $\mathbf{z}(x) = \mathbf{0}, \forall x \in (a, b)$, lo que contradice que las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ sean linealmente independientes en (a, b) . \square

Teorema 11.2.5:

Si las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema lineal de ecuaciones diferenciales $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ en un intervalo (a, b) , entonces su wronskiano en ese intervalo o es la función nula o no se anula en ningún punto de dicho intervalo.

Demostración:

Se puede comprobar la siguiente expresión para la derivada del wronskiano:

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n] = W[\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n] + W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}'_2, \dots, \mathbf{y}_n] + \dots + W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}'_n].$$

Como $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema para todo k , tal que $1 \leq k \leq n$, se verifica que $\mathbf{y}'_k(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}_k(x)$. Sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = (a_{11}(x) + a_{22}(x) + \dots + a_{nn}(x)) \cdot W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x)$ que es una ecuación diferencial lineal de primer orden que tiene por solución $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = C e^{\int \text{Traza}(A(x)) dx}$. Como la función exponencial no se anula, se tiene que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = 0$ sólo cuando C es igual a 0, por lo que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x)$ es la función nula o no se anula en ningún punto del intervalo (a, b) . \square

De la demostración de este teorema se deduce que:

$$W'[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x) = \text{traza}(A) \cdot W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n](x).$$

Como conclusión de los teoremas anteriores se tiene el siguiente corolario:

Corolario 11.2.6:

Si las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$ en el intervalo (a, b) , las tres condiciones siguientes son equivalentes:

- a) Las funciones y_1, y_2, \dots, y_n son linealmente independientes en (a, b) .
- b) Existe un $x \in (a, b)$ tal que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ es distinto de cero.
- c) Para todo $x \in (a, b)$ se verifica que $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ es distinto de cero.

Es evidente que:

- a) \Rightarrow b) por el teorema 11.2.4,
- b) \Rightarrow a) por el teorema 11.2.1,
- b) \Rightarrow c) por el teorema 11.2.5,
- c) \Rightarrow b) trivial.

Definición 11.2.3:

Se llama **sistema fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$ en un intervalo (a, b) , a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en (a, b) .

Teorema 11.2.7:

Siempre existe un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$, en el intervalo (a, b) .

Demostración:

Sea $x_0 \in (a, b)$. Por el teorema de existencia de soluciones se sabe que existen funciones $y_k(x)$, para k desde 1 hasta n , que son solución del sistema y cada una verifica la condición inicial siguiente: $y_1(x_0) = (1, 0, \dots, 0)$, $y_2(x_0) = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $y_n(x_0) = (0, 0, \dots, 1)$,

Las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independientes, ya que si existen n constantes c_1, c_1, \dots, c_n tales que $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = \mathbf{0}$ $\forall x \in (a, b)$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_1}(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_2}(x_0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

.....

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_n}(x_0) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

En consecuencia las n funciones son linealmente independientes y por lo tanto forman un sistema fundamental de soluciones. \square

Teorema 11.2.8:

Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$, en el intervalo (a, b) , entonces toda solución $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$ del sistema se puede

expresar de la forma $\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$, donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes.

Demostración:

Sea $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ un sistema fundamental de soluciones, φ una solución del sistema $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$, y x_0 un punto del intervalo (a, b) , entonces por el *corolario 11.2.6*, $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$.

Se determina $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ y se considera el siguiente sistema de n ecuaciones en las incógnitas c_1, c_2, \dots, c_n :

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_1}(x_0) = \varphi_1(x_0)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_2}(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

.....

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{k_n}(x_0) = \varphi_n(x_0)$$

Como $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0)$ es el determinante de la matriz de los coeficientes y es distinto de cero, el sistema tiene solución única, es decir existen c_1, c_2, \dots, c_n constantes que verifican las n ecuaciones y por el teorema

de unicidad $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k y_k \cdot \square$

Teorema 11.2.9:

Sea Λ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $y'(x) = A(x) \cdot y(x)$ en el intervalo (a, b) . Entonces Λ tiene estructura de **espacio vectorial de dimensión n** .

Demostración:

Como el *teorema 11.2.3* garantiza la linealidad de las soluciones del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$, y además se verifican los axiomas de espacio vectorial, se tiene que Λ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo tiene estructura de espacio vectorial. Un sistema fundamental de soluciones del sistema, que existe como resultado del *teorema 11.2.7*, es una base del espacio vectorial Λ ya que:

a) Es un sistema de generadores, pues por el *teorema 11.2.8* cualquier solución se puede expresar como combinación lineal de los elementos del sistema fundamental de soluciones.

b) Por definición son funciones linealmente independientes. \square

Se puede observar que cada solución no puede depender de más de n soluciones independientes, ya que suponiendo que hubiera $n + 1$ y particularizando en un punto x_0 se encontrarían $n + 1$ vectores de \mathfrak{R}^n linealmente independientes, que es imposible.

Corolario 11.2.10:

Sea $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ en el intervalo (a, b) . La ***solución general*** de este sistema se puede expresar de la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k(x) = c_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \dots \\ y_{1n}(x) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ \dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

11.2.3. Matriz fundamental

Definición 11.2.4:

Se denomina **matriz fundamental** del sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ a una matriz $\Phi(x)$ cuyas columnas son n soluciones linealmente independientes del sistema, es decir, son un sistema fundamental de soluciones en un intervalo (a, b) ,

$$\Phi(x) = (\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{n1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Definición 11.2.5:

Se denomina **matriz solución** del sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ a una matriz $\psi(x)$ cuyas columnas son soluciones del sistema, sean linealmente independientes o no.

Definición 11.2.6:

Se denomina **matriz fundamental principal** del sistema lineal homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ a una matriz fundamental $\Phi(x)$ tal que para un valor x_0 verifique que $\Phi(x_0) = I$, siendo I la matriz identidad.

En algunos textos se dice que una matriz de soluciones linealmente independientes es fundamental cuando además es principal.

La solución general de un sistema homogéneo se puede expresar en términos de la matriz fundamental del sistema: $\mathbf{y} = \Phi(x) \cdot \mathbf{C}$, donde \mathbf{C} es un

vector de constantes indeterminadas. Una matriz fundamental queda caracterizada por verificar:

a) $\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$, pues es una matriz solución, y

b) Su determinante es distinto de cero.

Propiedades de la matriz fundamental:

1. Fórmula de *Jacobi*: Si $\Psi(x)$ es una matriz solución entonces:

$$(\det \Psi)'(x) = \text{traza}(A(x)) \cdot \det \Psi(x)$$

$$\det(\Psi(x)) = \det \Psi(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x \text{traza}(A(s)) \cdot ds}$$

Resultados que ya han sido comentados en la demostración del *teorema* 11.2.5.

2. Sea $\Phi(x)$ una matriz solución. $\Phi(x)$ es una matriz fundamental si y sólo si existe algún $x_0 \in (a, b)$ tal que $\det(\Phi(x_0))$ es distinto de cero.

Es una consecuencia del *corolario* 11.2.6.

3. Si Φ es una matriz fundamental entonces cualquier otra matriz fundamental es de la forma $\Phi \cdot P$ donde P es una matriz regular de orden n . Sin embargo, como el producto de matrices no es necesariamente conmutativo, $P \cdot \Phi$ puede no ser una matriz fundamental.

4. Si Φ es una matriz fundamental se comprueba que:

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x) = \Phi(x) \cdot C + \int \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) \cdot ds$$

Esta fórmula se estudia posteriormente en 11.5.1, y se conoce con el nombre de **fórmula de variación de las constantes**.

5. Si Φ es una matriz fundamental, y si se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y'(x) = A(x) \cdot y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ donde $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$ entonces la

única solución es:

$$y(x) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot x_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(s) \cdot b(s) \cdot ds.$$

Se observa que conocida la matriz fundamental se puede obtener el conjunto de soluciones del sistema homogéneo, y que si se pudiera calcular la integral que aparece en la *propiedad 4* se tendría de manera explícita todas las soluciones. Desgraciadamente, existen pocos tipos de sistemas en los que se puede encontrar de manera explícita la matriz fundamental.

11.2.4. Estructura de las soluciones del sistema no homogéneo

El conjunto de soluciones de un sistema lineal de primer orden no homogéneo tiene estructura de espacio afín, siendo su espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo. El desarrollo para obtener este resultado es muy similar al que se realizaba para determinar la estructura de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de orden

superior. Previamente se demuestra que una solución general del sistema no homogéneo se puede obtener a partir de una solución particular de éste y la solución general del sistema homogéneo. Este resultado, que ya se estudió para las ecuaciones lineales de primer orden y de orden superior, es esencial para resolver sistemas no homogéneos.

Teorema 11.2.11:

Sea $A(x)$ una función matricial y $\mathbf{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo abierto (a, b) . Si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ son n soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo de primer orden $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$ en el intervalo (a, b) y φ_P es una solución cualquiera del sistema no homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$, entonces para toda solución φ de este sistema, existen

n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , tales que φ puede expresarse por $\varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k$

Demostración:

Sea φ una solución arbitraria del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$. Como φ_P también es solución se tiene que ambas funciones verifican el sistema, por lo que $\varphi'(x) = A(x) \cdot \varphi(x) + \mathbf{b}(x)$ y $\varphi_P'(x) = A(x) \cdot \varphi_P(x) + \mathbf{b}(x)$.

Por lo tanto restando ambas igualdades: $\varphi'(x) - \varphi_P'(x) = A(x) \cdot (\varphi(x) - \varphi_P(x))$, es decir, $\varphi - \varphi_P$ es una solución del sistema homogéneo.

Por el *teorema 11.2.8* existen n constantes c_1, c_2, \dots, c_n , tales que $\varphi - \varphi_P =$

$\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k \Rightarrow \varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k$, de donde se deduce que la solución general φ

del sistema no homogéneo se puede expresar como la suma de una solución particular de éste, φ_p , más la solución general del sistema homogéneo

asociado $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k$. \square

Teorema 11.2.12:

Sea $A(x)$ una función matricial y $\mathbf{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo abierto (a, b) . El conjunto de soluciones del sistema no homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$ tiene estructura de **espacio afín** de dimensión n construido sobre el espacio vectorial de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x)$.

Sea Λ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo, que por el *teorema 11.2.9* tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n , y sea \mathfrak{S} el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo.

La aplicación $h: \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \rightarrow \Lambda$, definida por $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$ estructura a \mathfrak{S} como espacio afín ya que:

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow (\varphi_2 - \varphi_1)' = (\varphi_2)' - (\varphi_1)' = (A(x) \cdot \varphi_2(x) + \mathbf{b}(x)) - (A(x) \cdot \varphi_1(x) + \mathbf{b}(x)) = A(x) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)(x) \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 \in \Lambda$.

Además se verifican los axiomas de espacio afín:

1º $\forall \varphi_1 \in \mathfrak{S}$ y $\forall \psi \in \Lambda$ entonces $\exists \varphi_2 \in \mathfrak{S}$, tal que $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 = \psi$.

Basta tomar $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi \in \mathfrak{S}$. Es evidente que $\varphi_2 \in \mathfrak{S}$ ya que $\varphi_2'(x) = (\varphi_1 + \psi)'(x) = \varphi_1'(x) + \psi'(x) = A(x) \cdot \varphi_1(x) + \mathbf{b}(x) + A(x) \cdot \psi(x) = A(x) \cdot (\varphi_1 + \psi)(x) + \mathbf{b}(x) =$

$$A(x) \cdot \varphi_2(x) + b(x).$$

2º Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathfrak{F}$ entonces $h(\varphi_1, \varphi_2) + h(\varphi_2, \varphi_3) = h(\varphi_1, \varphi_3)$, lo que se verifica ya que $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_1$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.2.1: Comprobar que $\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & -xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}$ y $\Phi_2(x) =$

$\begin{pmatrix} e^{2x} + xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix}$ son matrices fundamentales del sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Para comprobar que $\Phi_1(x)$

es solución del sistema $y' = A \cdot y$, se debe verificar que $\Phi_1'(x) = A \cdot \Phi_1(x)$.

$\Phi_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \\ -2e^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix}$ y coincide con $A \cdot \Phi_1(x)$ ya que

$$A \cdot \Phi_1(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \\ -2e^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto es una matriz solución y como además es regular (pues su determinante vale $4e^{4x}$ por lo que es distinto de cero), entonces es una matriz fundamental.

$$\text{Análogamente } \Phi_2'(x) = \begin{pmatrix} 3e^{2x} + 2xe^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \\ -e^{2x} - 2xe^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix} \text{ y } A \cdot \Phi_2(x) =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} + xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2x} + 2xe^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \\ -e^{2x} - 2xe^{2x} & e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix}, \text{ por lo}$$

que $\Phi_2(x)$ es una matriz solución del sistema. Además es regular (pues su determinante vale e^{4x} por lo que es distinto de cero). Por lo tanto es también una matriz fundamental.

Ejemplo 11.2.2: Dada la matriz $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 3e^x \\ e^{2x} & 2e^x \end{pmatrix}$ encontrar un sistema

de ecuaciones diferenciales para el que $\Phi(x)$ sea una matriz fundamental.

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 3e^x \\ 2e^x \end{pmatrix} \text{ son soluciones linealmente independientes del}$$

sistema buscado. Además $\mathbf{y}_1' = 2\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2' = \mathbf{y}_2$. Por lo tanto $\Phi(x)$ es una matriz

$$\text{fundamental del sistema } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.2.3: Demostrar que si $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{a} + i \cdot \mathbf{b}) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x}$ y $\mathbf{z}_2 = (\mathbf{a} - i \cdot \mathbf{b}) \cdot e^{(\alpha - \beta i)x}$

son soluciones complejas linealmente independientes de un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \text{Real}((\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot i)e^{(\alpha + \beta i)x}) \\ \mathbf{y}_2 = \text{Im}((\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot i)e^{(\alpha + \beta i)x}) \end{cases}$$

son soluciones reales del sistema linealmente independientes.

Las funciones \mathbf{y}_1 y \mathbf{y}_2 son combinaciones lineales de las funciones \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2

ya que:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) = e^{\alpha x} \cdot (\mathbf{a} \cdot \cos \beta x - \mathbf{b} \cdot \operatorname{sen} \beta x), \\ \mathbf{y}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) = e^{\alpha x} (\mathbf{b} \cdot \cos \beta x + \mathbf{a} \cdot \operatorname{sen} \beta x) \end{cases}$$

por lo tanto son también soluciones del sistema. Además son linealmente independientes ya que:

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2] = e^{\alpha x} \begin{vmatrix} a_1 \cos \beta x - b_1 \operatorname{sen} \beta x & b_1 \cos \beta x + a_1 \operatorname{sen} \beta x \\ a_2 \cos \beta x - b_2 \operatorname{sen} \beta x & b_2 \cos \beta x + a_2 \operatorname{sen} \beta x \end{vmatrix} = e^{\alpha x} \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Para demostrar que $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$, se calcula el wronskiano de las soluciones \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2 , que por hipótesis son linealmente independientes, y por lo tanto es distinto de cero:

$$W[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2] = e^{\alpha x} \begin{vmatrix} (a_1 + ib_1)e^{\beta x} & (a_1 - ib_1)e^{-\beta x} \\ (a_2 + ib_2)e^{\beta x} & (a_2 - ib_2)e^{-\beta x} \end{vmatrix} = 2i \cdot e^{\alpha x} \cdot (b_1 a_2 - b_2 a_1).$$

Comparando ambos determinantes se observa que las soluciones \mathbf{z}_1 y \mathbf{z}_2 son linealmente independientes si y sólo si \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 son linealmente independientes.

Ejercicios

11.4. Comprobar que $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & -e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del

$$\text{sistema } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

11.5. Dada la matriz $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & (1-2x)e^{3x} \\ e^{3x} & -2xe^{3x} \end{pmatrix}$ encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales para el que $\Phi(x)$ es una matriz fundamental.

11.6. Comprobar que $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^x & 0 \\ 0 & e^x & 2e^{3x} \\ e^x & xe^x & e^{3x} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental

$$\text{del sistema } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

11.3. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En los **sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes** es posible dar una descripción completa del conjunto de soluciones y de muchas de sus propiedades cualitativas. Por razones de claridad los ejemplos se limitan a sistemas de dos o tres ecuaciones. En esta sección se estudian los sistemas homogéneos, haciendo uso del cálculo de autovectores y autovalores. Sólo se contempla el caso en que los coeficientes son reales, pero el caso de coeficientes complejos se podría estudiar de forma similar con ligeras modificaciones, como reemplazar la transpuesta de una matriz por la hermítica conjugada.

Un sistema lineal y homogéneo de coeficientes constantes $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ es un

sistema autónomo pues A , al ser constante no depende de x , por lo que basta con estudiarlo en $x = 0$ para tenerlo estudiado para cualquier problema de valor inicial. Los sistemas autónomos se estudiarán con mayor profundidad en el *capítulo 12: Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales*.

Ante un sistema lineal, lo primero que se debe intentar es transformarlo en otro más sencillo o en una ecuación de orden n . Las estrategias para conseguirlo pueden ser muy diversas, como son las distintas técnicas algebraicas que permiten resolver un sistema lineal o utilizar determinados cambios de variable. Una forma sistemática de realizar combinaciones lineales entre las ecuaciones del sistema de manera que se reduzca a una ecuación de orden superior consiste en utilizar operadores diferenciales, procedimiento que se desarrolla a continuación.

11.3.1. Resolución por eliminación mediante el operador diferencial D

En el capítulo anterior se definía el **operador diferencial D** como una aplicación de \mathfrak{F} en \mathfrak{F} tal que $\forall f \in \mathfrak{F}, D(f) = \frac{df}{dx}$, siendo \mathfrak{F} la familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (a, b) .

Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11}y_1'(x) + b_{12}y_2'(x) + \dots + b_{1n}y_n'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ b_{21}y_1'(x) + b_{22}y_2''(x) + \dots + b_{2n}y_n'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ \dots \\ b_{m1}y_1'(x) + b_{m2}y_2'(x) + \dots + b_{mn}y_n'(x) = a_{m1}y_1(x) + a_{m2}y_2(x) + \dots + a_{mn}y_n(x) \end{array} \right. \quad (11.3.1)$$

Aplicando que $D(y) = y'$ se puede expresar:

$$\begin{cases} (a_{11} - b_{11}D)y_1(x) + (a_{12} - b_{21}D)y_2(x) + \dots + (a_{1n} - b_{1n}D)y_n(x) = 0 \\ (a_{21} - b_{21}D)y_1(x) + (a_{22} - b_{22}D)y_2(x) + \dots + (a_{2n} - b_{2n}D)y_n(x) = 0 \\ \dots \\ (a_{n1} - b_{n1}D)y_1(x) + (a_{n2} - b_{n2}D)y_2(x) + \dots + (a_{nn} - b_{nn}D)y_n(x) = 0 \end{cases}$$

o bien en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11}D & a_{12} - b_{12}D & \dots & a_{1n} - b_{1n}D \\ a_{21} - b_{21}D & a_{22} - b_{22}D & \dots & a_{2n} - b_{2n}D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - b_{n1}D & a_{n2} - b_{n2}D & \dots & a_{nn} - b_{nn}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sea el operador } \Delta(D) = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11}D & a_{12} - b_{12}D & \dots & a_{1n} - b_{1n}D \\ a_{21} - b_{21}D & a_{22} - b_{22}D & \dots & a_{2n} - b_{2n}D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - b_{n1}D & a_{n2} - b_{n2}D & \dots & a_{nn} - b_{nn}D \end{bmatrix}$$

que se supone que no es la función nula. $\Delta(D)$ es un operador polinómico de grado n .

Si $\Delta(D) = r_0 + r_1 \cdot D + \dots + r_n \cdot D^n$ entonces

$$\Delta(D)(y_k(x)) = r_0 \cdot y_k(x) + r_1 \cdot y'_k(x) + \dots + r_n \cdot y_k^{(n)}(x).$$

Para todo k , $1 \leq k \leq n$ se resuelve la ecuación diferencial homogénea de grado n : $r_0 \cdot y_k(x) + r_1 \cdot y'_k(x) + \dots + r_n \cdot y_k^{(n)}(x) = 0$

Una vez obtenidas cada una de las funciones $y_k(x)$ en función de n constantes, se tienen en total n^2 constantes que se eliminan hasta dejar sólo n sustituyéndolas en el sistema.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.1: Utilizar el método por eliminación mediante el operador D para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Para resolver el sistema se integra la ecuación diferencial de segundo orden homogénea: $\Delta(D)(z(x)) = 0$.

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} 1-D & -2 \\ 1 & 3-D \end{vmatrix} = D^2 - 4D + 5 = (D - (2 + i))(D - (2 - i))$$

La ecuación $(D^2 - 4D + 5)z(x) = 0$ tiene como solución general:

$$z(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \text{sen } x + C_2 \cdot \text{cos } x).$$

Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} y(x) &= 2e^{2x} \cdot (C_1 \text{sen } x + C_2 \text{cos } x) + e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \text{cos } x - C_2 \cdot \text{sen } x) - 3e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \text{sen } x \\ &+ C_2 \cdot \text{cos } x) = e^{2x} \cdot ((-C_1 - C_2) \cdot \text{sen } x + (C_1 - C_2) \cdot \text{cos } x) \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = e^{2x} \cdot ((-C_1 - C_2) \cdot \text{sen } x + (C_1 - C_2) \cdot \text{cos } x) \\ z(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \text{sen } x + C_2 \cdot \text{cos } x). \end{cases}$$

Ejemplo 11.3.2: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'' - 4z = 0 \\ z'' + 4y = 0 \end{cases}$$

utilizando el operador D.

Se expresa el operador D en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} D^2 & -4 \\ 4 & D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $\Delta(D) = D^4 + 16$.

Se resuelve la ecuación homogénea de orden 4: $(D^4 + 16)(y(x)) = 0$.

Las raíces de la ecuación característica de esta ecuación diferencial son:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}(1 + i); \lambda_2 = \sqrt{2}(-1 + i); \lambda_3 = \sqrt{2}(-1 - i); \lambda_4 = \sqrt{2}(1 - i),$$

y la solución general:

$$y(x) = e^{\sqrt{2}x} \cdot (C_1 \cdot \cos \sqrt{2}x + C_2 \cdot \sen \sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x} (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sen \sqrt{2}x).$$

Al calcular $y''(x)$ y sustituir en la primera ecuación se obtiene $z(x)$.

$$y'(x) = \sqrt{2} e^{\sqrt{2}x} \cdot ((C_1 + C_2) \cdot \cos \sqrt{2}x + (-C_1 + C_2) \cdot \sen \sqrt{2}x) + \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}x} \cdot ((C_4 - C_3) \cdot \cos \sqrt{2}x + (-C_3 - C_4) \cdot \sen \sqrt{2}x).$$

$$y''(x) = 4 e^{\sqrt{2}x} (C_2 \cdot \cos \sqrt{2}x - C_1 \cdot \sen \sqrt{2}x) + 4 e^{-\sqrt{2}x} (-C_4 \cdot \cos \sqrt{2}x + C_3 \cdot \sen \sqrt{2}x).$$

$$z(x) = e^{\sqrt{2}x} (C_2 \cos \sqrt{2}x - C_1 \sen \sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x} (-C_4 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sen \sqrt{2}x).$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = e^{\sqrt{2}x} \cdot (C_1 \cdot \cos \sqrt{2}x + C_2 \cdot \sen \sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x} (C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sen \sqrt{2}x). \\ z(x) = e^{\sqrt{2}x} \cdot (C_2 \cos \sqrt{2}x - C_1 \sen \sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x} (-C_4 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sen \sqrt{2}x). \end{cases}$$

11.3.2. Resolución buscando soluciones exponenciales.

Método de Euler

La función exponencial, $y = e^{ax}$, verifica que sus derivadas son múltiplos de sí misma. Por lo tanto parece natural que sean de ese tipo las soluciones de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes.

Se considera el sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Se busca una solución de la forma $\mathbf{y}(x) =$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}. \text{ Se sustituye en el sistema:}$$

$$\begin{cases} B_1 \lambda e^{\lambda x} = a_{11} B_1 e^{\lambda x} + a_{12} B_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{1n} B_n e^{\lambda x} \\ B_2 \lambda e^{\lambda x} = a_{21} B_1 e^{\lambda x} + a_{22} B_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{2n} B_n e^{\lambda x} \\ \dots \\ B_n \lambda e^{\lambda x} = a_{n1} B_1 e^{\lambda x} + a_{n2} B_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{nn} B_n e^{\lambda x} \end{cases}$$

y se divide entre $e^{\lambda x}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) B_1 + a_{12} B_2 + \dots + a_{1n} B_n = 0 \\ a_{21} B_1 + (a_{22} - \lambda) B_2 + \dots + a_{2n} B_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} B_1 + a_{n2} B_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) B_n = 0 \end{cases} \quad (11.3.2)$$

El resultado es un sistema algebraico lineal homogéneo en las variables B_1, B_2, \dots, B_n que sólo tiene solución distinta de la trivial cuando el determinante de los coeficientes es igual a cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación se denomina **ecuación característica**. Al desarrollar el determinante se obtiene una ecuación polinómica en λ de grado n , en la que el tipo de raíces de la ecuación determina la expresión de las soluciones.

Caso 1: La ecuación característica tiene todas las raíces reales y distintas.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ las raíces de la ecuación característica, entonces para todo $k, 1 \leq k \leq n$, al sustituir λ por cada valor λ_k en el sistema (11.3.2) se obtiene una solución, no trivial, del sistema algebraico $(B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{nk})$ que determina una solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{y}_k(x) = (y_{kj}(x)) = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ \dots \\ B_{nk} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_k x}.$$

De esta forma se obtienen n soluciones que, en este caso, son linealmente independientes, y por lo tanto determinan la solución general del sistema que es de la forma $\mathbf{y}(x) = C_1 \cdot \mathbf{y}_1(x) + C_2 \cdot \mathbf{y}_2(x) + \dots + C_n \cdot \mathbf{y}_n(x)$, y por tanto:

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ \dots \\ B_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} B_{12} \\ \dots \\ B_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \cdot \begin{pmatrix} B_{1n} \\ \dots \\ B_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}.$$

Caso 2: La ecuación característica tiene raíces complejas distintas.

En este caso se puede obtener la solución general en función de exponenciales complejas y las soluciones de (11.3.2) pueden ser también números complejos. Para analizar el caso en el que se quieren obtener soluciones reales se supone un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, y dos soluciones linealmente independientes complejas:

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{B}_1 \cdot e^{(\alpha + \beta i)x} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x} \text{ y}$$

$$\mathbf{y}_2(x) = \mathbf{B}_2 \cdot e^{(\alpha - \beta i)x} = (\mathbf{a} - i\mathbf{b}) \cdot e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

La parte real y la parte imaginaria de estas soluciones se obtienen como combinación lineal de ellas, por lo que son soluciones, son linealmente independientes y son funciones reales, como se comprobó en el *ejemplo* 11.2.3. La solución general del sistema es:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \cos \beta x - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sen} \beta x \right) + C_2 \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \cos \beta x + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sen} \beta x \right).$$

Caso 3: La ecuación característica tiene raíces múltiples.

Se supone un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tiene una raíz doble. El caso general se estudia en el siguiente

apartado. Sea λ_1 la raíz, entonces $\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{B}_1 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}$ es una solución.

La analogía con las ecuaciones de orden n llevaría a pensar que la otra solución linealmente independiente con ella es $\mathbf{y}_2(x) = \mathbf{B}_2 x e^{\lambda_1 x}$. Sin embargo puede no ser así, la otra solución del sistema tiene la forma $\mathbf{y}_2(x) = (\mathbf{B}_1 x + \mathbf{B}_2) \cdot e^{\lambda_1 x}$. Sustituyendo esta solución en el sistema se determinan los vectores \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 .

La solución general del sistema es:

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \left(\begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} \cdot x \right) e^{\lambda_1 x}.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.3: Resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

Se calculan las raíces de la ecuación característica: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$-\lambda^3 + 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (-1) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \text{Las raíces de la ecuación}$$

característica $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ y $\lambda = -1$ son reales y distintas.

Para $\lambda = 3$ se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_1 e^{3t}$, $y(t) = B_1 e^{3t}$, $z(t) = C_1 e^{3t}$ siendo A_1 , B_1 , C_1 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_1 = K$, $B_1 = C_1 = \frac{3}{2}K_1$, por lo que la solución buscada es $x(t) = 2e^{3t}$, $y(t) = 3e^{3t}$, $z(t) = 3e^{3t}$.

Para $\lambda = -2$, se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_2 e^{-2t}$, $y(t) = B_2 e^{-2t}$, $z(t) = C_2 e^{-2t}$ siendo A_2 , B_2 , C_2 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_2 = K_2$, $B_2 = C_2 = -K_2$, por lo que la solución buscada es $x(t) = e^{-2t}$, $y(t) = -e^{-2t}$, $z(t) = -e^{-2t}$.

Para $\lambda = -1$, se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_3 e^{-t}$, $y(t) = B_3 e^{-t}$, $z(t) = C_3 e^{-t}$ siendo A_3 , B_3 , C_3 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_3 = 0$, $B_3 = -C_3 = K_3$, por lo que la solución buscada es $x(t) = 0$, $y(t) = e^{-t}$, $z(t) = -e^{-t}$.

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{cases} x(t) = 2K_1 \cdot e^{3t} + K_2 \cdot e^{-2t} \\ y(t) = 3K_1 \cdot e^{3t} - K_2 \cdot e^{-2t} + K_3 \cdot e^{-t} \\ z(t) = 3K_1 \cdot e^{3t} - K_2 \cdot e^{-2t} - K_3 \cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = K_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} + K_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t} + K_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}.$$

Ejemplo 11.3.4: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 9z \\ \frac{dz}{dx} = y + 8z \end{cases}.$$

Se resuelve la ecuación característica: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 \\ 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 =$

$0 \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0$, por lo tanto la ecuación característica tiene una raíz doble y una solución del sistema es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} x \cdot e^{5x}.$$

Al sustituir en la primera ecuación del sistema se obtiene:

$$(5(A_1 + A_2x) + A_2) \cdot e^{5x} = 2(A_1 + A_2x) \cdot e^{5x} - 9(B_1 + B_2x) \cdot e^{5x} \Rightarrow$$

$$3A_1 + 9B_1 + A_2 + (3A_2 + 9B_2) \cdot x = 0 \Rightarrow$$

Si $B_2 = K_2$, $A_2 = -3K_2$ y si $B_1 = K_1$, $A_1 = -3K_1 + K_2$,

y por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = (-3K_1 + K_2 - 3K_2x) \cdot e^{5x}, \\ z(x) = (K_1 + K_2x) \cdot e^{5x}. \end{cases}$$

11.3.3. Ecuación característica. Autovalores y autovectores

Se considera el sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ con $\mathbf{y}(x) = (y_k(x))$, $1 \leq k \leq n$. Se supone que el sistema tiene una solución de la forma $\mathbf{y}(x) = \mathbf{v} \cdot e^{\lambda x}$, donde \mathbf{v} es un vector de \mathfrak{R}^n no nulo. Para que $\mathbf{y}(x)$ sea solución se debe verificar que:

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda \cdot \mathbf{v} \cdot e^{\lambda x} = A \cdot \mathbf{v} \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{v} = A \cdot \mathbf{v},$$

es decir, $A \cdot \mathbf{v}$ es un múltiplo de \mathbf{v} , lo que indica que \mathbf{v} es un autovector de la matriz A y λ un autovalor.

Por este procedimiento, en el caso en que se pudieran encontrar n soluciones de este tipo linealmente independientes, se tendría resuelto el sistema. Antes de demostrar que existe al menos una solución de esta forma y de buscar un sistema fundamental de soluciones se definen los conceptos algebraicos necesarios para desarrollar la teoría.

Definición 11.3.1:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se denomina **vector propio**, **vector característico**, **autovector** o **eigenvector** de A , a un vector \mathbf{v} real o complejo, distinto de cero, para el que existe un valor λ , tal que $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ o lo que es lo mismo $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ donde I es la matriz identidad.

Definición 11.3.2:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , y \mathbf{v} un vector característico de A , se denomina **valor propio**, **autovalor** o **eigenvalor** de A , a un número real o complejo λ que verifica que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Si para un valor λ y un vector \mathbf{v} se verifica que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, se dice que λ es un autovalor de la matriz A y \mathbf{v} es un autovector de A asociado al autovalor λ .

Definición 11.3.3:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se denomina **ecuación característica** de A a la ecuación $|A - \lambda I| = 0$.

Proposición 11.3.1:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , λ es un autovalor de A si y sólo si es una raíz de su ecuación característica.

Demostración:

Sea $A = (a_{ij})$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ un autovector de A asociado al autovalor λ .

La ecuación matricial $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ se expresa:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases} .$$

Este sistema admite una solución no trivial para los valores de λ para los

que el determinante de los coeficientes $|A - \lambda I|$ se anula, por lo que si λ es un autovalor de A es equivalente a decir que es una raíz de su ecuación característica. \square

Ya que $|A - \lambda I| = 0$ es una ecuación polinómica de grado n , no puede tener más de n autovalores. Si λ es una raíz múltiple de orden m se dice que el autovalor tiene multiplicidad m . Por el teorema fundamental del Álgebra se sabe que A tiene exactamente n autovalores contando cada uno tantas veces como indica su multiplicidad.

Proposición 11.3.2:

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ son m autovectores de A asociados, respectivamente, a m autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes.

Demostración:

Se demuestra por inducción sobre m . Para $m = 1$ es inmediato ya que un autovector no puede ser el vector cero.

Supuesto cierto para $k - 1$ vectores, se consideran k autovectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Si existen c_i no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, al multiplicar por la

matriz A se tiene que $\sum_{i=1}^k c_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Se puede suponer que al menos una de las constantes c_1, c_2, \dots, c_{k-1} es

distinta de cero, multiplicando $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i$ por λ_k y restando $\sum_{i=1}^k c_i \lambda_i \mathbf{v}_i$, se anula el

sumando k -ésimo y se obtiene $\sum_{i=1}^{k-1} c_i (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{v}_i = 0$, lo que contradice la

hipótesis de inducción ya que los autovalores son distintos. Por lo tanto las constantes c_i son nulas para todo i lo que implica que los autovectores son linealmente independientes. \square

Proposición 11.3.3:

Sea $\mathbf{y}(x)$ una solución del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Si existe un valor x_0 tal que el vector $\mathbf{y}(x_0)$ es un autovector de A asociado al autovalor λ , es decir $A \cdot \mathbf{y}(x_0) = \lambda \mathbf{y}(x_0)$, entonces para todo valor de x se verifica que $A \cdot \mathbf{y}(x) = \lambda \mathbf{y}(x)$.

Demostración:

Se considera la función $\mathbf{z}(x) = \mathbf{y}'(x) - \lambda \mathbf{y}(x)$. Por ser $\mathbf{y}(x)$ una solución del sistema se tiene que $\mathbf{z}(x) = A \cdot \mathbf{y}(x) - \lambda \mathbf{y}(x)$, como por hipótesis $A \cdot \mathbf{y}(x_0) = \lambda \mathbf{y}(x_0)$, se verifica que $\mathbf{z}(x_0) = 0$. Aplicando el teorema de unicidad $\mathbf{z}(x)$ es la función idénticamente cero y por lo tanto para todo valor de x se tiene que $A \cdot \mathbf{y}(x) = \lambda \mathbf{y}(x)$. \square

Definición 11.3.4:

Se dice que una solución $\mathbf{y}(x)$ del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ es una **solución característica** si para algún valor λ se verifica que $A \cdot \mathbf{y}(x) = \lambda \mathbf{y}(x)$.

Proposición 11.3.4:

Sea el sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Para cada autovalor λ de la matriz A , existe al menos una solución característica del sistema, $\mathbf{y}(x)$, que se puede expresar de la forma $\mathbf{y}(x) = (v_1 e^{\lambda x}, v_2 e^{\lambda x}, \dots, v_n e^{\lambda x})$, siendo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un autovector asociado al autovalor λ .

Demostración:

Sea λ un autovalor de la matriz A y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un autovector asociado a λ , sea $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ una solución característica del sistema tal que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{v}$, que existe por la *proposición 11.3.3* y verifica que $\mathbf{y}'(x) = A \cdot \mathbf{y}(x) = \lambda \mathbf{y}(x)$. Por lo tanto para todo k , $1 \leq k \leq n$ se tiene que $y_k'(x) = \lambda y_k(x)$. Integrando se tiene $y_k(x) = c_k e^{\lambda x}$, y puesto que $y_k(0) = c_k = v_k$ se obtiene:

$$\mathbf{y}(x) = (v_1 e^{\lambda x}, v_2 e^{\lambda x}, \dots, v_n e^{\lambda x}). \quad \square$$

El siguiente teorema permite determinar un sistema fundamental de soluciones y por lo tanto la solución general del sistema cuando los autovalores de la ecuación característica son distintos.

Teorema 11.3.5:

Un conjunto de soluciones características del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ asociadas a autovalores diferentes de la matriz A es linealmente independiente. En particular si A tiene n autovalores distintos el conjunto de soluciones características es un sistema fundamental de soluciones.

Demostración:

Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$ soluciones características del sistema asociadas,

respectivamente, a los m autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Por la *proposición* 11.3.2 para un valor fijo x_0 , los vectores $\mathbf{y}_1(x_0), \mathbf{y}_2(x_0), \dots, \mathbf{y}_m(x_0)$ son linealmente independientes y por el *corolario* 11.2.6 también son linealmente independientes las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$.

En particular, si la matriz A tiene n autovalores distintos, las soluciones características $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ forman un sistema fundamental de soluciones. \square

Para todo $k, 1 \leq k \leq n$ por la *proposición* 11.3.4 se tiene que $\mathbf{y}_k(x) = (v_{k1}e^{\lambda_k x}, v_{k2}e^{\lambda_k x}, \dots, v_{kn}e^{\lambda_k x})$ y por tanto la solución general $\mathbf{y}(x)$ se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= C_1 \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ \dots \\ v_{1n} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ \dots \\ v_{2n} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \cdot \begin{pmatrix} v_{n1} \\ \dots \\ v_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x} = \\ &= C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn})$ un autovector asociado al autovalor λ_k .

El sistema fundamental que se obtiene, en general, puede estar formado por soluciones complejas pero a partir de él se pueden obtener n soluciones reales linealmente independientes y por lo tanto constituyen un sistema fundamental de soluciones; es el resultado de la siguiente *proposición*.

Proposición 11.3.6:

Sean las funciones $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n$ soluciones características reales o complejas linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$, siendo A una matriz real de orden n , entonces se pueden obtener a partir de ellas n soluciones

reales linealmente independientes.

Demostración:

Para toda solución compleja $\mathbf{z}_k = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x}$, se tiene la solución $\mathbf{z}_{2k} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}i) \cdot e^{(\alpha - \beta i)x}$. Para cada par de soluciones complejas $\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_{2k}$ se obtienen dos soluciones reales linealmente independientes, que son:

$$\mathbf{y}_k = \text{Real}((\mathbf{a} + \mathbf{b}i) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x}) \text{ e } \mathbf{y}_{2k} = \text{Im}((\mathbf{a} + \mathbf{b}i) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x}).$$

Las funciones \mathbf{y}_k e \mathbf{y}_{2k} son combinaciones lineales de las funciones \mathbf{z}_k y \mathbf{z}_{2k} ya que:

$$\mathbf{y}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{z}_k + \mathbf{z}_{2k}) = e^{\alpha x} \cdot (\mathbf{a} \cdot \cos \beta x - \mathbf{b} \cdot \text{sen } \beta x);$$

$$\mathbf{y}_{2k} = \frac{1}{2i} (\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{2k}) = e^{\alpha x} \cdot (\mathbf{b} \cdot \cos \beta x + \mathbf{a} \cdot \text{sen } \beta x)$$

por lo tanto son también soluciones del sistema y por construcción son linealmente independientes. \square

Antes del estudio del caso general se recuerdan algunos resultados de Álgebra lineal.

Definición 11.3.5:

Sea λ un autovalor de la matriz A , se dice que un vector $\mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$, esta asociado a λ con multiplicidad m si para el número entero m , y no para otro menor, se verifica que $(A - \lambda I)^m \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$, es decir:

$$\mathbf{y}_0 \in \text{Ker}(A - \lambda I)^m / \text{Ker}(A - \lambda I)^{m-1}.$$

Proposición 11.3.7:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ los autovalores de la matriz A , con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_r , siendo $\sum_{k=1}^r m_k = n$. Entonces para cada autovalor λ_k existe un conjunto de m_k vectores $\mathbf{y}_{kj}, j \in \{1, 2, \dots, m_k\}$ tales que \mathbf{y}_{kj} está asociado a λ_k con multiplicidad menor o igual a m_k y el conjunto de vectores $\mathbf{y}_{kj}, j \in \{1, 2, \dots, m_k\}, k \in \{1, 2, \dots, r\}$, es linealmente independiente.

Esta proposición es consecuencia de las siguientes proposiciones.

Proposición 11.3.8:

Sea $\mathbf{y}(x)$ una solución del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$. Si se verifica que para un valor x_0 , $(A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}$, entonces para todo x se verifica que $(A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$.

Demostración:

Sea $\mathbf{z}(x) = (D - \lambda)^m(\mathbf{y}(x)) = (A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x)$; $\mathbf{z}(x)$ es solución del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ por ser combinación lineal de $\mathbf{y}(x)$ y de sus derivadas, además $\mathbf{z}(x_0) = (A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{0}$ y por el teorema de unicidad se tiene que $\mathbf{z}(x) = \mathbf{0}$. \square

Proposición 11.3.9:

Si $\mathbf{y}(x)$ es una solución del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ asociada a un autovalor λ con multiplicidad m , es decir, $(A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{y}(x)$ es de la forma:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \dots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \quad (11.3.2)$$

siendo $p_k(x)$, $1 \leq k \leq n$, polinomios de grado menor o igual a $m - 1$.

Demostración:

Sea $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ una solución del sistema tal que $(A - \lambda I)^m \mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$, por lo tanto se verifica entonces que $(D - \lambda)^m (y_k(x)) = 0$, $1 \leq k \leq n$.

Por otra parte $(D - \lambda)^m (y_k(x)) = (D - \lambda)^m (e^{\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} \cdot y_k(x))$ y aplicando el *lema* 10.3.1: $(D - \lambda)^m (y_k(x)) = e^{\lambda x} \cdot D^m (e^{-\lambda x} \cdot y_k(x))$.

Por lo tanto $e^{\lambda x} \cdot D^m (e^{-\lambda x} \cdot y_k(x)) = 0$; simplificando se obtiene $D^m (e^{-\lambda x} \cdot y_k(x)) = 0$, e integrando $y_k(x) = p_k(x) \cdot e^{\lambda x}$, $1 \leq k \leq n$ y $\text{grado}(p_k(x)) \leq m - 1$. \square

Teorema 11.3.10:

Siempre existe un sistema fundamental de soluciones del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$, formado por funciones de la forma (11.3.2). Además si se conocen los autovalores de la matriz A , este sistema fundamental se puede obtener mediante un número finito de operaciones elementales.

Demostración:

Por la *proposición* 11.3.7 existe un conjunto de n vectores linealmente independientes \mathbf{y}_{k0} asociados a los autovalores λ_k de A . Si se determinan las soluciones del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ de modo que verifiquen las condiciones iniciales $\mathbf{y}_k(x_0) = \mathbf{y}_{k0}$, estas funciones serán linealmente independientes y de la forma

(11.3.2).

Además si λ es un autovalor cualquiera con multiplicidad m se pueden obtener m soluciones linealmente independientes del sistema de la forma $\mathbf{y}(x)$

$$= \begin{pmatrix} p_{i1}(x) \\ p_{i2}(x) \\ \dots \\ p_{in}(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}, \text{ con } p_{ij}(x) \text{ polinomio de grado } i \text{ con coeficientes indeterminados,}$$

siendo $i \leq m - 1$.

Para $i = 0$, sustituyendo $\mathbf{y}(x)$ en el sistema se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en los coeficientes indeterminados de los polinomios. Este sistema puede que no tenga solución, que tenga una o que tenga varias soluciones no triviales linealmente independientes. Se repite el proceso para $i = 1$ y se obtienen $2n$ ecuaciones lineales en los $2n$ coeficientes indeterminados. Se continúa el proceso hasta $i = m - 1$, hasta obtener m soluciones linealmente independientes.

Haciendo lo mismo con los otros autovalores se obtiene un sistema fundamental de soluciones. \square

Se puede precisar más el proceso seguido para calcular los autovectores correspondientes a autovalores múltiples utilizando conceptos algebraicos.

Dado el sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$, puede ocurrir que la matriz A sea diagonalizable o que no lo sea. En el caso en que la matriz A sea diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal D y una matriz P regular tal que $P^{-1} \cdot D \cdot P = A$, entonces existen n autovectores \mathbf{v}_i linealmente independientes, que son las columnas de la matriz P de cambio de base. Estos autovectores son las bases

de los subespacios $\text{Ker}(A - \lambda_i)$, siendo λ_i los autovalores de la matriz A . Las soluciones linealmente independientes del sistema son de la forma $\varphi_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x}$.

Cuando la matriz A no es diagonalizable el número de autovectores que se obtienen de las bases de los subespacios $\text{Ker}(A - \lambda_i)$ es un valor k menor que n y por lo tanto el número de soluciones linealmente independientes de la forma $\varphi_i(x) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x}$ es también k . Las $n - k$ soluciones restantes son del tipo

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} p_{i1}(x) \\ p_{i2}(x) \\ \dots \\ p_{in}(x) \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}, \quad p_{ij}(x) \text{ es un polinomio tal que } \text{grado}(p_{ij}(x)) \leq m - 1 \text{ siendo}$$

m la multiplicidad de λ_i .

En la siguiente proposición se desarrolla un método para simplificar el cálculo de estos polinomios.

Proposición 11.3.11:

Sea λ un autovalor de A de multiplicidad s tal que en el subespacio $\text{Ker}(A - \lambda I)$ sólo se encuentra un autovector \mathbf{v}_1 linealmente independiente; entonces se pueden encontrar s soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$, de la forma: $\varphi_1(x) = \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda x}$ tal que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ y para todo $j, 2 \leq j \leq s, \varphi_j(x)$

$$= (\mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^{s-1}}{(j-1)!} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{x^{s-2}}{(j-2)!} + \dots + \mathbf{v}_j) \cdot e^{\lambda x} \text{ tal que } (A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_{j-1} = \mathbf{v}_j.$$

Demostración:

Si λ es un autovalor de A de multiplicidad s tal que en el subespacio $\text{Ker}(A$

– λI) sólo se encuentra un autovector \mathbf{v}_1 linealmente independiente se tiene una solución del sistema: $\varphi_1(x) = \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda x}$.

Una segunda solución se busca de la forma $\varphi_2(x) = (\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2) \cdot e^{\lambda x}$. Para determinar \mathbf{v}_2 se aplica que $\varphi_2(x)$ es solución, es decir $\varphi_2'(x) = A \cdot \varphi_2(x)$, por lo tanto $\mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda x} + (\mathbf{v}_1 \cdot x + \mathbf{v}_2) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = A \cdot (\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2) \cdot e^{\lambda x}$.

Simplificando se tiene $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot x \cdot \lambda + \mathbf{v}_2 \cdot \lambda = A \cdot \mathbf{v}_1 \cdot x + A \cdot \mathbf{v}_2$. Aplicando que $\lambda \cdot \mathbf{v}_1 = A \cdot \mathbf{v}_1$ se obtiene: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \lambda = A \cdot \mathbf{v}_2$ y por lo tanto $\mathbf{v}_1 = (A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_2$.

La tercera solución se busca de la forma $\varphi_3(x) = (\mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{v}_2 \cdot x + \mathbf{v}_3) \cdot e^{\lambda x}$.

Se sustituye en el sistema:

$$(\mathbf{v}_1 \cdot x + \mathbf{v}_2) \cdot e^{\lambda x} + (\mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{v}_2 \cdot x + \mathbf{v}_3) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = A \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{v}_2 \cdot x + \mathbf{v}_3) \cdot e^{\lambda x}.$$

Se simplifica:

$$\mathbf{v}_1 \cdot x + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \lambda + \mathbf{v}_2 \cdot x \cdot \lambda + \mathbf{v}_3 \cdot \lambda = A \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^2}{2} + A \cdot \mathbf{v}_2 \cdot x + A \cdot \mathbf{v}_3.$$

Se aplica que $\lambda \cdot \mathbf{v}_1 = A \cdot \mathbf{v}_1$ y que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \lambda = A \cdot \mathbf{v}_2$ por lo que se obtiene $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \cdot \lambda = A \cdot \mathbf{v}_3$, es decir $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$.

Análogamente se calculan las distintas soluciones hasta $\varphi_s(x)$ que es de la

$$\text{forma: } \varphi_s(x) = (\mathbf{v}_1 \cdot \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \mathbf{v}_2 \cdot \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} + \dots + \mathbf{v}_s) \cdot e^{\lambda x}.$$

Se sustituye en el sistema y se simplifican términos teniendo en cuenta

que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ y que $(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1}$ para todo j , $2 \leq j \leq s - 1$:

$$(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v}_{s-1} = \mathbf{v}_s. \square$$

Otros resultados algebraicos que conviene recordar son:

Proposición 11.3.12:

La suma de los autovalores de una matriz A es igual a la traza de A y su producto al determinante de A .

Proposición 11.3.13:

Si A es una matriz simétrica entonces A tiene todos sus autovectores reales y además tiene n autovectores ortonormales.

Otro método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales es calcular directamente la matriz fundamental, lo que conlleva calcular la exponencial de una matriz, que se desarrolla en el siguiente apartado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.5: Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y+z \\ \frac{dy}{dt} = x+z \\ \frac{dz}{dt} = x+y \end{cases}$

Se resuelve la ecuación característica: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$. Los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$.

Se determina el subespacio $\text{Ker}(A + I)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
 que tiene

dimensión 2 y por lo tanto una base está formada por $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Existen por tanto dos autovectores linealmente independientes asociados

al autovalor -1 , y dos soluciones linealmente independientes $\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$ y

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Se determina el subespacio $\text{Ker}(A - 2I)$:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
 Un

autovector de este subespacio es $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la solución $\boldsymbol{\varphi}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Ejemplo 11.3.5: Resolver el sistema
$$\begin{pmatrix} 1-D & 2 \\ -2 & 5-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se calculan las raíces de la ecuación característica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ y se obtiene un autovalor doble $\lambda = 3$.

Se determina el subespacio $\text{Ker}(A - 3I)$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se obtiene

un único autovector $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linealmente independiente. Una solución es $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$.

Se busca un vector \mathbf{v}_2 tal que $\mathbf{v}_1 = (A - 3I) \cdot \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y se

obtiene $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Otra solución es $\varphi_2(x) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{3x}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\varphi(x) = K_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} + K_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot e^{3x}.$$

Ejercicios

11.7. Resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

11.8. Calcular la solución general del sistema:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y + z \\ \frac{dz}{dx} = -y + 4z \end{cases}.$$

11.9. Encontrar dos soluciones linealmente independientes del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 5z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}.$$

11.10. Resolver el sistema
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2y - z \\ \frac{dz}{dt} = -x + y + z \end{cases}$$
 con las condiciones iniciales $x(0) = 2$,

$$y(0) = 3, z(0) = 4.$$

11.11. Calcular la solución general del sistema:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

11.12. Resolver el sistema:
$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

11.4. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

El conjunto de las funciones matriciales tiene estructura de espacio métrico, por lo que se puede hablar de límites, series, derivadas ... de funciones matriciales, y es isomorfo al espacio euclídeo \mathfrak{R}^{n^2} . Definiendo como producto interno el producto de matrices se tiene una estructura de álgebra.

Si se compara un sistema con la ecuación $y' = a \cdot y$, de solución $y = e^{ax} \cdot C$, se puede pensar que la solución del sistema $y' = A \cdot y$ es de la forma $y = e^{Ax} \cdot C$. Para ello se debe definir la exponencial de una matriz.

Definición 11.4.1:

Sea A una matriz constante. Se define la **exponencial de la matriz A** mediante la expresión:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Por lo tanto $e^{Ax} = I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{A^n x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x^n}{n!}.$

En cada término de la matriz se tiene una serie numérica y como la serie de *Taylor* asociada a la función exponencial converge en todo el plano complejo, puede probarse que tal matriz siempre existe.

Cuando la matriz A es diagonal o es nilpotente, la expresión de e^A se simplifica considerablemente con respecto a su forma general, como se demuestra en las siguientes proposiciones.

Proposición 11.4.1:

Si A es una matriz diagonal de orden m , $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$, entonces

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}.$$

Demostración:

Si A es una matriz diagonal se tiene que $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m^k \end{pmatrix}.$

Por lo tanto:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2}{2!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_m^2}{2!} \end{pmatrix} + \dots +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_m^n}{n!} \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Definición 11.4.2:

Una matriz A es **nilpotente** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A^k es la matriz nula.

Proposición 11.4.2:

Si A es nilpotente entonces e^A tiene un número finito de sumandos.

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la definición de matriz nilpotente.

11.4.1. Propiedades de la exponencial de una matriz

1. Si $\mathbf{0}$ es la matriz nula entonces $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
2. Si \mathbf{I} es la matriz identidad y $r \in \mathfrak{R}$ entonces $e^{r\mathbf{I}} = e^r \cdot \mathbf{I}$
3. Si A y B son matrices de orden n y $A \cdot B = B \cdot A$, entonces $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
4. Si $r, s \in \mathfrak{R}$ y A es una matriz de orden n entonces $e^{A(r+s)} = e^{Ar} \cdot e^{As}$.
5. La exponencial de la matriz A , e^A , es regular ya que $\det(e^A) = e^{\text{traza}A}$.
6. La inversa de la exponencial de una matriz $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, ya que $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = \mathbf{I}$.

Proposición 11.4.3:

La matriz e^{Ax} es una matriz fundamental principal del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$,

Demostración:

Al derivar $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^n}{n!}$, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(e^{Ax}) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} A^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = A \cdot e^{Ax}.$$

Por lo tanto e^{Ax} es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$.

Además cuando $x = 0$ entonces $e^{Ax} = \mathbf{I}$ por lo que además es una matriz fundamental principal del sistema. \square

11.4.2. Cálculo de la función matricial e^{Ax}

La solución única del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ es $\mathbf{y} = e^{Ax} \cdot \mathbf{y}_0$. Si

se considera el problema más general $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, la solución es $y = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0$.

En ambos casos hay que calcular la matriz e^{Ax} , por lo que se va a desarrollar un procedimiento útil y efectivo para calcular dicha función matricial,

Proposición 11.4.4:

Si A es una matriz diagonalizable, tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, siendo D una matriz diagonal, entonces $e^{Ax} = P \cdot e^{Dx} \cdot P^{-1}$. Además $\det(e^{Ax}) = e^{(\text{traza} D)x}$.

Demostración:

Sea $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, siendo $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los

autovalores de A y las columnas de la matriz P los autovectores asociados a dichos autovalores. Entonces:

$$A^2 = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}; A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

y en general $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1},$$

por lo tanto:

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (P \cdot D^n \cdot P^{-1}) \frac{x^n}{n!} = P \cdot e^{Dx} \cdot P^{-1}.$$

Por la *proposición 11.4.1* $e^{Ax} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

Además ya que $\det(A) = \det(D)$ se tiene:

$$\det(e^{Ax}) = \det(e^{Dx}) = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} = e^{(\text{traza } D)x}. \quad \square$$

Proposición 11.4.5:

Si A es una matriz no diagonalizable, y $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, siendo J una matriz de Jordan entonces $e^{Ax} = P \cdot (e^{Dx} \cdot e^{Nx}) \cdot P^{-1}$, D matriz diagonal y N matriz nilpotente.

Demostración:

Si A no es diagonalizable se tiene que $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, siendo J una matriz de Jordan y la matriz P tiene por columnas los autovectores asociados a los autovalores de la matriz A . J no es diagonal, pero $J = D + N$, siendo D una matriz diagonal y N una matriz nilpotente por lo tanto:

$$e^{Ax} = P \cdot e^{Jx} \cdot P^{-1} = P \cdot e^{(D+N)x} \cdot P^{-1} = P \cdot (e^{Dx} \cdot e^{Nx}) \cdot P^{-1}. \quad \square$$

11.4.3. Estudio del caso general

A continuación se analiza el caso en el que la matriz A no es constante. En el caso de una ecuación de primer orden, $y' = b(x)y$, la solución se puede expresar de la forma $y = C e^{\int b(x) dx}$. Si ahora se analiza el sistema $y' = A(x)y$ se puede pensar que la solución sea de la forma $y = e^{\int A(x) dx} C$. Esto es así cuando se cumplen las condiciones de la proposición que se presenta a

continuación:

Proposición 11.4.6:

Sea el sistema $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$; $B(x) = \int A(x) dx$. Si $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$

entonces $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema.

Demostración:

Al derivar $e^{Bx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(B(x))^n}{n!} = 1 + B(x) + \frac{(B(x))^2}{2!} + \dots + \frac{(B(x))^n}{n!} + \dots$, se

tiene que $\frac{d}{dx}(e^{Bx}) = 0 + B'(x) + \frac{1}{2!} \frac{d}{dx}(B(x))^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d}{dx}(B(x))^n + \dots$

$$\frac{d}{dx}(B(x))^2 = \frac{d}{dx}(B(x) \cdot B(x)) = B'(x) \cdot B(x) + B(x) \cdot B'(x) = A(x) \cdot B(x) + B(x) \cdot A(x)$$

Si $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$ entonces $\frac{d}{dx}(B(x))^2 = 2B'(x) \cdot B(x)$. Análogamente

si $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$ entonces $\frac{d}{dx}(B(x))^n = n \cdot B'(x) \cdot (B(x))^{n-1}$.

Por lo tanto $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$. \square

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.4.1: Dada la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz

nilpotente $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular e^D y e^N .

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal por tanto $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$,

por consiguiente $e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \dots =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz nilpotente pues $N^2 = \mathbf{0}$ y por tanto $N^n = \mathbf{0}$,

$\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, por consiguiente:

$$e^N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.4.2: Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$,

siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriz A es diagonalizable. Se calcula la matriz diagonal asociada $D =$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de cambio de base es $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y su inversa es $P^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$e^{Ax} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^{2x} - 3e^x & -6e^{2x} + 6e^x \\ 2e^{2x} - 2e^x & -3e^{2x} + 4e^x \end{pmatrix}.$$

Este cálculo se puede simplificar sin necesidad de hallar P^{-1} . Aplicando

que cuando $\Phi(x)$ es una matriz fundamental y P una matriz regular entonces $\Phi(x) \cdot P$ es también una matriz fundamental. Y ya que $e^{Dx} \cdot P = P \cdot e^{Dx} \cdot P^{-1} \cdot P = P \cdot e^{Dx}$, se tiene que:

$$P \cdot e^{Dx} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 3e^x \\ e^{2x} & 2e^x \end{pmatrix} \text{ es una matriz fundamental.}$$

Ejemplo 11.4.3: Calcular una matriz fundamental del sistema $y' = A \cdot y$,

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no es diagonalizable pero es semejante a $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con la

matriz de autovectores $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$J = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ } D \text{ es diagonal y } N \text{ nilpotente, } N^2 = \mathbf{0}.$$

$$J^2 = (D + N)^2 = D^2 + D \cdot N + N \cdot D + N^2 = D^2 + 2D \cdot N.$$

Y en general:

$$J^n = D^n + 2D^{n-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por lo tanto: } e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n-1} x^n}{n!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & xe^{2x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente $e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

Una matriz fundamental del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & -xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Otro método para obtener e^{Jx} es expresarla de la forma:

$$e^{(2I+J-2I)x} = e^{2x} \cdot I \cdot e^{(J-2I)x} = e^{2x} \cdot \left[e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x} \right] = e^{2x} \cdot \left[I + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Análogamente se puede obtener e^{Ax} .

$$e^{Ax} = e^{(2I+A-2I)x} = e^{2x} \cdot I \cdot e^{(A-2I)x} = e^{2x} \cdot \left[e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}x} \right] = e^{2x} \cdot \left[I + \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2x} + xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.4.4: Calcular una matriz fundamental del sistema $y' = A(x) \cdot y$,

siendo $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$.

$$B(x) = \int A(x)dx = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x^2 & x \end{pmatrix}.$$

Las matrices $A(x)$ y $B(x)$ conmutan ya que $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x) =$

$\begin{pmatrix} x+2x^3 & 3x^2 \\ 3x^2 & x+2x^3 \end{pmatrix}$; por lo tanto $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema. y

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{x+x^2} & 0 \\ 0 & e^{x-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+x^2} & e^{x-x^2} \\ e^{x+x^2} & -e^{x-x^2} \end{pmatrix} \text{ también.}$$

Ejercicios

11.13. Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$, siendo $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(\text{Solución: } \Phi(x) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & -e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}).$$

11.14. Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}$.

$$(\text{Solución: } \Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & (1-2x)e^{3x} \\ e^{3x} & -2xe^{3x} \end{pmatrix}).$$

11.15. Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y}$.

11.16. Comprobar si $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A(x) \cdot \mathbf{y}$,

$$\text{siendo } A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 3x^2 & 4x^3 \end{pmatrix} \text{ y } B(x) = \int A(x) dx.$$

11.5. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

En esta sección se estudian distintos métodos de resolver los sistemas lineales no homogéneos, el método de variación de constantes, que es válido para cualquier sistema lineal completo, el método de coeficientes indeterminados y utilizando el operador diferencial D , que únicamente pueden utilizarse cuando el sistema lineal homogéneo asociado tiene los coeficientes constantes, y la función $b(x)$ adopta determinadas formas.

11.5.1. Método de variación de las constantes

El método de variación de las constantes o método de variación de parámetros, como procedimiento para resolver un sistema lineal no homogéneo, es muy similar al que se utilizó para resolver ecuaciones lineales de primer orden y de orden superior no homogéneas.

Sea $\mathbf{y}'(x) = A(x) \cdot \mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$ el sistema lineal no homogéneo que se quiere resolver y sea $\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k(x)$ la solución general del sistema homogéneo asociado que se expresa de la forma $\boldsymbol{\psi}(x) = \Phi(x) \cdot \mathbf{C}$, siendo $\Phi(x)$ una matriz fundamental del sistema. Se busca una solución particular del sistema no homogéneo que sea de la forma $\boldsymbol{\varphi}_p(x) = \Phi(x) \cdot \mathbf{v}(x)$, siendo $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))$ una función vectorial que hay que determinar.

Al derivar la expresión anterior se obtiene:

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) = \Phi'(x) \cdot \mathbf{v}(x) + \Phi(x) \cdot \mathbf{v}'(x),$$

que al sustituir en el sistema:

$$\Phi'(x) \cdot \mathbf{v}(x) + \Phi(x) \cdot \mathbf{v}'(x) = A(x) \cdot \Phi(x) \cdot \mathbf{v}(x) + \mathbf{b}(x).$$

Al ser $\Phi(x)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo verifica que $\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$, por lo que al sustituir este resultado en la expresión anterior se obtiene:

$$\Phi(x) \cdot \mathbf{v}'(x) = \mathbf{b}(x).$$

Como $\Phi(x)$ tiene inversa por ser una matriz regular, se puede multiplicar por su inversa:

$$\mathbf{v}'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x)$$

y al integrar se obtiene:

$$\mathbf{v}(x) = \int \Phi^{-1}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \cdot ds.$$

Si se puede encontrar una función $\mathbf{v}(x)$ que verifique esta condición, entonces $\varphi_p = \Phi(x) \cdot \mathbf{v}(x)$ es una solución particular del sistema:

$$\varphi_p(x) = \Phi(x) \cdot \int \Phi^{-1}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \cdot ds.$$

Por el *teorema 11.2.11* la solución general φ_g se puede expresar sumando la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo asociado a una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales lineal completo: $\varphi_g = \psi + \varphi_p$ es decir:

$$\varphi_g(x) = \psi(x) + \varphi_p(x) = \Phi(x) \cdot \mathbf{C} + \Phi(x) \cdot \int \Phi^{-1}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \cdot ds.$$

11.5.2. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes

El método que se estudia a continuación es similar al que se ha desarrollado para los sistemas homogéneos. Permite reducir de una forma sistemática un sistema lineal a una ecuación diferencial de orden superior y a partir de la solución de ésta resolver el sistema.

Reducción a una ecuación diferencial mediante el operador diferencial D

Se considera el sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes $E \cdot y'(x) + A \cdot y(x) = b(x)$, siendo A y E matrices cuadradas de orden n y $b(x)$ una función vectorial que se puede expresar por:

$$\begin{cases} e_{11}y_1'(x) + e_{12}y_2'(x) + \dots + e_{1n}y_n'(x) + a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) = b_1(x) \\ e_{21}y_1'(x) + e_{22}y_2'(x) + \dots + e_{2n}y_n'(x) + a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) = b_2(x) \\ \dots \\ e_{n1}y_1'(x) + e_{n2}y_2'(x) + \dots + e_{nn}y_n'(x) + a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x) = b_n(x) \end{cases}$$

Aplicando que $D(y) = y'$ el sistema anterior se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} (e_{11}D + a_{11})y_1(x) + (e_{12}D + a_{12})y_2(x) + \dots + (e_{1n}D + a_{1n})y_n(x) = b_1(x) \\ (e_{21}D + a_{21})y_1(x) + (e_{22}D + a_{22})y_2(x) + \dots + (e_{2n}D + a_{2n})y_n(x) = b_2(x) \\ \dots \\ (e_{n1}D + a_{n1})y_1(x) + (e_{n2}D + a_{n2})y_2(x) + \dots + (e_{nn}D + a_{nn})y_n(x) = b_n(x) \end{cases}$$

Sea el operador $\Delta(D) = \begin{bmatrix} e_{11}D + a_{11} & e_{12}D + a_{12} & \dots & e_{1n}D + a_{1n} \\ e_{21}D + a_{21} & e_{22}D + a_{22} & \dots & e_{2n}D + a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1}D + a_{n1} & e_{n2}D + a_{n2} & \dots & e_{nn}D + a_{nn} \end{bmatrix}$ que

se supone que no es el operador nulo.

$$\text{Se define } \Delta_k(D) = \begin{bmatrix} e_{11}D + a_{11} & e_{12}D + a_{12} & \dots & b_1(x) & \dots & e_{1n}D + a_{1n} \\ e_{21}D + a_{21} & e_{22}D + a_{22} & \dots & b_2(x) & \dots & e_{2n}D + a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1}D + a_{n1} & e_{n2}D + a_{n2} & \dots & b_n(x) & \dots & e_{nn}D + a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Esta expresión, que matemáticamente no tiene sentido ya que es un determinante en el que en la columna k aparecen funciones y y en el resto operadores, es una forma de recordar la siguiente definición:

$$\Delta_k(D) = \Delta_{1k}(D)(b_1(x)) + \Delta_{2k}(D)(b_2(x)) + \dots + \Delta_{nk}(D)(b_n(x)),$$

siendo $\Delta_{jk}(D)$ el operador de grado $n - 1$ que se obtiene de $\Delta(D)$ al eliminar la fila j y la columna k .

$$\text{Si } \Delta(D) = r_0 + r_1D + \dots + r_nD^n \text{ y } \Delta_{jk}(D) = s_{jk}^0 + s_{jk}^1D + s_{jk}^2D^2 + \dots + s_{jk}^{n-1}D^{n-1}$$

$$\Delta(D)(y_k(x)) = r_0y_k(x) + r_1y'_k(x) + \dots + r_ny_k^{(n)}(x)$$

$$\Delta_k(D) = \sum_{i=0}^{n-1} s_{1k}^i D^i (b_1(x)) + \sum_{i=0}^{n-1} s_{2k}^i D^i (b_2(x)) + \dots + \sum_{i=0}^{n-1} s_{nk}^i D^i (b_n(x))$$

$$\text{Por lo tanto } r_0y_k(x) + r_1y'_k(x) + \dots + r_ny_k^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} s_{jk}^i D^i (b_j(x)) \right), \quad 1 \leq k$$

$\leq n$.

Así se obtiene una ecuación diferencial de orden n . Una vez obtenidas cada una de las funciones $y_k(x)$ en función de n constantes, hay en total n^2 constantes que se eliminan hasta dejar sólo n sustituyéndolas en el sistema.

Método de coeficientes indeterminados

Este método es similar al que se ha desarrollado para las ecuaciones diferenciales lineales de orden n . Consiste en buscar una solución particular “parecida” al término independiente $\mathbf{b}(x)$.

Tiene el inconveniente de que sólo se puede utilizar si el sistema homogéneo asociado es de coeficientes constantes y si $\mathbf{b}(x)$ es una función vectorial polinómica, exponencial o formada por senos y cosenos, y por sumas y productos de estas funciones. Tiene la ventaja de su sencilla resolución. En el caso en que la solución particular que se debería probar, ya esté contenida en la solución de la homogénea, entonces se multiplica por x^s , siendo s el menor número natural que elimine esta dificultad.

En los ejemplos resueltos a continuación se comentará este método.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.5.1: Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + y + 2z = \cos x + \operatorname{sen} x \\ z' + 2y + z = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

Se resuelve primero el sistema homogéneo $\begin{cases} y' + y + 2z = 0 \\ z' + 2y + z = 0 \end{cases}$ que tiene

como ecuación característica $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas

raíces son $\lambda = 1$ y $\lambda = -3$.

Para $\lambda = 1$ se buscan soluciones de la forma: $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \cdot e^x$ siendo

A_1, B_1 constantes a determinar: $-2A_1 - 2B_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1 = K_1$. Un autovector

es: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y una solución es: $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x$.

Para $\lambda = -3$, se buscan soluciones de la forma: $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$ siendo

A_2, B_2 constantes a determinar: $2A_2 - 2B_2 = 0 \Rightarrow A_2 = B_2 = K_2$. Un autovector

es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y una solución es: $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$.

La solución general del sistema homogéneo es:

$$\varphi_H(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x + K_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

Se busca una solución del sistema no homogéneo de la forma:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

siendo $C_1(x)$ y $C_2(x)$ funciones que se obtienen integrando las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = \cos x + \operatorname{sen} x \\ -C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = e^{-x} \cdot \cos x \\ C_2'(x) = e^{3x} \cdot \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Integrando:

$$\begin{cases} C_1(x) = \frac{e^{-x}}{2} \cdot (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) \\ C_2(x) = \frac{e^{3x}}{10} \cdot (3\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) \end{cases}$$

Una solución particular del sistema no homogéneo es:

$$\begin{cases} y_p(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = \frac{8}{10}\operatorname{sen} x - \frac{6}{10}\operatorname{cos} x \\ z_p(x) = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = \frac{-2}{10}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\operatorname{cos} x \end{cases}$$

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = \frac{8}{10}\operatorname{sen} x - \frac{6}{10}\operatorname{cos} x \\ z(x) = -K_1 e^x + K_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) + \frac{1}{10}(3\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = \frac{-2}{10}\operatorname{sen} x + \frac{2}{5}\operatorname{cos} x \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución “parecida” a $\mathbf{b}(x)$ que está formado por sumas de senos y cosenos, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \operatorname{sen} x + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cdot \operatorname{cos} x.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = 8/10$, $b = -2/10$, $c = -6/10$, $d = 2/5$.

Ejemplo 11.5.2: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + z' + 2y + z = x \\ z' + 5y + 3z = x^2 \end{cases}$$

El sistema expresado en forma matricial mediante el operador D:

$$\begin{pmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

El operador $\Delta = \begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 1.$

$$\Delta_y(x) = \begin{vmatrix} x & D+1 \\ x^2 & D+3 \end{vmatrix} = (D+3)(x) - (D+1)(x^2) = 1 + 3x - 2x - x^2.$$

$$(D^2 + 1)(y(x)) = 1 + x - x^2,$$

ecuación diferencial de segundo orden que tiene como solución general $y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sen x + y_p(x)$, siendo $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea: $y_p(x) = ax^2 + bx + d$.

$$(D^2 + 1)(y_p(x)) = 1 + x - x^2 \Rightarrow 2a + ax^2 + bx + d = 1 + x - x^2 \Rightarrow a = -1, b = 1$$

$$\text{y } d = 3 \Rightarrow y_p(x) = -x^2 + x + 3 \Rightarrow y(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sen x - x^2 + x + 3.$$

$$\Delta_z(x) = \begin{vmatrix} D+2 & x \\ 5 & x^2 \end{vmatrix} = (D+2)(x^2) - 5x = 2x + 2x^2 - 5x.$$

$$(D^2 + 1)(z(x)) = -3x + 2x^2,$$

ecuación diferencial de segundo orden que tiene como solución general $z(x) = C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sen x + z_p(x)$, siendo $z_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea $z_p(x) = ex^2 + fx + g$.

$$(D^2 + 1)(z_p(x)) = -3x + 2x^2 \Rightarrow 2e + ex^2 + fx + g = -3x + 2x^2 \Rightarrow e = 2, f = -3$$

$$\text{y } g = -4 \Rightarrow z_p(x) = 2x^2 - 3x - 4 \Rightarrow z(x) = C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \text{sen } x + 2x^2 - 3x - 4.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$5C_1 + C_4 + 3C_3 = 0 \text{ y } -C_3 + 5C_2 + 3C_4 = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{5}(-3C_3 - C_4) \text{ y } C_2 = \frac{1}{5}(C_3 - 3C_4)$$

La solución general del sistema:

$$y(x) = \frac{1}{5}(-3C_3 - C_4) \cdot \cos x + \frac{1}{5}(C_3 - 3C_4) \cdot \text{sen } x - x^2 + x + 3$$

$$z(x) = C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \text{sen } x + 2x^2 - 3x - 4.$$

Se observa que también se podía haber resuelto el sistema de una forma más rápida calculando $z(x)$ y sustituyendo su valor en la segunda ecuación para calcular $y(x)$.

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución “parecida” a $\mathbf{b}(x)$ que está formado por polinomios de segundo grado, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix} \cdot x^2 + \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} d \\ g \end{pmatrix}.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = -1$, $b = 1$, $d = 3$, $e = 2$, $f = -3$ y $g = -4$.

Ejemplo 11.5.3: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' - z' - z = e^x \\ z' + y - z = e^{2x} \end{cases}$$

Al derivar la segunda ecuación se obtiene: $z'' + y' - z' = 2e^{2x}$.

Se despeja y' en la primera ecuación y se sustituye en la anterior:

$$z'' + (z' + z + e^x) - z' = 2e^{2x} \Rightarrow z'' + z = 2e^{2x} + e^x,$$

ecuación diferencial lineal de segundo orden que tiene como solución general:

$$z(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + z_p(x), \text{ siendo } z_p(x) = Ae^{2x} + Be^x.$$

$$(D^2 + 1)(Ae^{2x} + Be^x) = 2e^{2x} + e^x,$$

de donde se obtiene $B = \frac{1}{2}$ y $A = \frac{2}{5}$, por lo tanto:

$$z(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x$$

Al sustituir en la segunda ecuación:

$$y(x) = (C_1 - C_2) \cdot \cos x + (C_1 + C_2) \cdot \sin x + \frac{3}{5}e^{2x}.$$

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución "parecida" a $\mathbf{b}(x)$ que está formada por exponenciales, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = 3/5$, $b = 0$, $e =$

$2/5$ y $f = 1/2$.

Ejercicios

11.17. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema

$$\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = \frac{3}{2}x^2 \end{cases} .$$

11.18. Resolver el sistema $\begin{cases} y' - y - z = 3x \\ z' + 2y + z = x \end{cases}$.

11.19. Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} y' + 2z' + y + 7z = e^x + 2 \\ z' - 2y + 3z = e^x - 1 \end{cases}$.

11.20. Integrar el sistema $\begin{cases} y' + y - z = \sec 2x \\ z' + 5y - z = 0 \end{cases}$.

11.6. EJERCICIOS

11.21. Hallar e^{Ax} , siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y utilizar este resultado para

resolver el sistema $y' = A \cdot y$.

$$(Solución: e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ -2x & -2x & 1-2x \end{pmatrix} e^x)$$

11.22. Sea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathfrak{R}$. Probar que $A^2(x) = (1 + x^3) \cdot A(x)$ y calcular $e^{A(x)}$.

11.23. Calcular la solución general del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(Solución: \varphi(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + K_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + K_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \right] e^{2t})$$

11.24. Resolver el sistema homogéneo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(Solución: \varphi(x) = K_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t + K_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t + K_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \right] e^t)$$

11.25. Calcular la solución general $(y(x), z(x))$ del sistema $\begin{cases} y' + z' - y = 2x + 1 \\ 2y' + 2z' + y = x \end{cases}$.

$$(Solución: y(x) = -x - \frac{2}{3}, z(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + C).$$

11.26. Calcular la solución general $(y(x), z(x))$ del sistema $\begin{cases} y'' - 3z' + 4y = e^x \\ z'' + 3y' + 4z = e^{-x} \end{cases}$

$$(Solución: y(x) = K_1 \cdot \cos x + K_2 \cdot \sin x + K_3 \cdot \sin 4x + K_4 \cdot \cos 4x + \frac{1}{34} (5e^x - 3e^{-x})$$

$$z(x) = K_1 \cdot \sin x - K_2 \cdot \cos x + K_3 \cdot \cos 4x - K_4 \cdot \sin 4x + \frac{1}{34} (-3e^x + 5e^{-x})$$

11.27. Utilizar la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$\begin{cases} y' - z' + 2y = 3 \\ 3y' + z' - 2z = 0 \end{cases} \text{ con las condiciones iniciales } y(0) = 1, z(0) = 2.$$

$$(\text{Solución: } y(x) = \frac{1}{8}(3e^x - 7e^{-x} + 12), z(x) = \frac{1}{8}(9e^x + 7e^{-x}))$$

11.28. Utilizando la transformada de Laplace encontrar la solución particular del

$$\text{sistema } \begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{cases}, \text{ que verifica que } y(0) = 1, z(0) = 2.$$

$$(\text{Solución: } y(x) = (1 - x)e^{2x}, z(x) = (2 - x)e^{2x}).$$

11.29. Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 2y' + 3z' + x = 1 \\ y' + z' - x = 0 \\ x' + z = 0 \end{cases}$$

$$(\text{Solución: } x(t) = K_1 e^{\frac{-3}{2}t} + \frac{1}{3}, y(t) = \frac{-13}{6} K_1 e^{\frac{-3}{2}t} + \frac{1}{3}t + K_2, z(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{\frac{-3}{2}t})$$

$$11.30. \text{ Calcular la solución general del sistema: } \begin{cases} x' + y' + y = 1 \\ x' - z' + 2x + z = 1 \\ y' + z' + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(\text{Solución: } x(t) = K_1 e^{\frac{-4}{5}t} + \frac{3}{4}, y(t) = 4K_1 e^{\frac{-4}{5}t} + K_2 e^{-t} + 1, z(t) = \frac{-2}{3} K_1 e^{\frac{-4}{5}t} - \frac{1}{2}).$$

$$11.31. \text{ Calcular la solución del sistema } \begin{cases} (D - 2)x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + (D - 4)y = 3e^{2t} \end{cases} \text{ que verifica las}$$

$$\text{condiciones iniciales } x(0) = \frac{-2}{3}, y(0) = \frac{1}{3}.$$

$$(\text{Solución: } x(t) = e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}, y(t) = e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t})$$

11.32. Resolver el sistema
$$\begin{cases} (D-1)x + Dy = 2t + 1 \\ (2D+1)x + 2Dy = t \end{cases}$$

$$(\text{Solución: } x(t) = -t + K, y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + Kt)$$

11.33. Calcular la solución general del sistema
$$\begin{cases} 2x' + y' - 4x - y = e^t \\ x' + 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$(\text{Sol: } x(t) = K_1 \cdot \cos t + K_2 \cdot \sin t - \frac{1}{2}e^t, y(t) = (K_1 - 3K_2) \cdot \sin t - (3K_1 + K_2) \cdot \cos t + 2e^t).$$

11.34. Resolver el sistema
$$\begin{cases} y' + z' - y + 3z = e^{-x} - 1 \\ y' + z' + 2y + z = e^{2x} + x \end{cases}$$

$$(\text{Solución: } y(x) = \frac{-1}{49} + \frac{3}{7}x + \frac{5}{17}e^{2x} + K_1 e^{\frac{-7}{5}x},$$

$$z(x) = \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{2}{17}e^{2x} + e^{-x} + \frac{52}{49} - \frac{9}{7}x - 3K_1 e^{\frac{-7}{5}x}\right).$$

11.35. Calcular la solución general del sistema
$$\begin{cases} x' + x - 5y = \sec 3t \\ 2x + y' - y = 0 \end{cases}$$

11.36. Hallar la solución del sistema
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$
 que

verifica que
$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

11.37. Calcular la solución general, para $x > 0$, del sistema:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1 + \ln x}{x^2} \end{pmatrix}$$

11.38. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica las

condiciones iniciales $y(1) = 1, z(1) = 1$.

11.39. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \\ \operatorname{cos} x \end{pmatrix}$ que

verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0, z(0) = 0$.

11.40. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$ que verifica

las condiciones iniciales $y(0) = 0, z(0) = 0$.

11.41. Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x'(t) = 3x - z \\ y'(t) = -3y - z \\ z'(t) = 2y - z \end{cases}$$

11.42. Integrar el siguiente sistema
$$\begin{cases} x'(t) = 2x - 2y + \frac{e^{-2t}}{t} \\ y'(t) = 8x - 6y + \frac{3e^{-2t}}{t} \end{cases}$$

11.43. Calcular la solución general del sistema

$$\begin{cases} x'(t) = -6x - 3y + 14z + e^{2t} \\ y'(t) = 4x + 3y - 8z \\ z'(t) = -2x - y + 5z \end{cases} .$$

CAPÍTULO 12

Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se inicia el estudio de lo que se denomina teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo es adquirir familiaridad con los diagramas de fases de los sistemas autónomos bidimensionales, describir algunas técnicas generales para el análisis de la estabilidad y realizar un estudio cualitativo de algunos sistemas caóticos.

En algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales puede interesar, incluso más que conocer las ecuaciones explícitas de las soluciones, poder analizar sus propiedades cualitativas, tales como la periodicidad, el comportamiento cuando crece la variable independiente, a la que en este capítulo se supone que es el tiempo, si es constante, o si se aproxima a una solución conocida...

Tiene interés considerar qué ocurre cuando las ecuaciones no son lineales. Entonces aparecen fenómenos nuevos sumamente interesantes. Los sistemas dinámicos pueden modelarse en general mediante sistemas no lineales. Uno de los procesos que permiten su estudio es el de linealizar el sistema, es decir, buscar un sistema lineal que se le aproxime en el entorno de un punto y que permita predecir el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal cerca

de dicho punto. Por este motivo se analiza la dinámica de los sistemas lineales con el estudio de los atractores o repulsores como ejemplos de puntos fijos y de los espacios de fases, para a continuación estudiar los sistemas no lineales. La idea de caos es moderna y altamente motivadora y las técnicas cualitativas ayudan a analizar el comportamiento de las soluciones en los sistemas autónomos.

Se puede considerar a *Poincaré* como el padre de esta teoría. La clave de su estudio radica en el diagrama de fase de un sistema dinámico, que consiste en un modelo geométrico del conjunto de todos los posibles estados del sistema. Ya se sabe que en general es difícil encontrar soluciones, aunque es posible analizar la forma de estas soluciones al fijarse en su comportamiento local cerca de los puntos críticos o en su comportamiento asintótico.

El método directo de *Liapunov* permite en ocasiones deducir información útil sobre las propiedades de tipo cualitativo satisfechas por algunas soluciones, o en ocasiones obtener resultados de naturaleza global que proporcionan información sobre el comportamiento de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias considerado. La interpretación física del sistema en los que se conserva la energía total, es decir sistemas conservativos o **hamiltonianos** puede proporcionar ejemplos en los que se puede aplicar este método. Esto permite el estudio de la estabilidad de las soluciones.

En 1989 el matemático americano R. Devaney formuló la siguiente definición:

Definición 12.1.1:

La función $f: X \rightarrow X$ es **caótica** en el espacio métrico X , no finito, si se verifican las siguientes condiciones:

1. El conjunto de puntos periódicos de la función f es denso en X .
2. La función es topológicamente transitivo.
3. La función depende sensiblemente de las condiciones iniciales.

Definición 12.1.2:

La función $f: X \rightarrow X$ **depende sensiblemente de las condiciones iniciales** si existe un $\varepsilon > 0$ (**constante de sensibilidad**) tal que para cualquier abierto no vacío U contenido en X , existe un número natural n , tal que el diámetro de $f^n(U)$ es mayor o igual que ε .

Definición 12.1.3:

La función $f: X \rightarrow X$ es **transitiva** si y sólo si para algún x de X , el conjunto $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots)$ es denso en X .

Definición 12.1.4:

La función $f: X \rightarrow X$ es **topológicamente transitiva** si para todo par de intervalos abiertos no vacíos de X , U y V , existe un número natural n , tal que $f^n(U) \cap V$ sea distinto del vacío.

Estas ideas, que se refieren a sistemas discretos, se van a estudiar a continuación con sistemas de ecuaciones diferenciales continuos.

12.1. CONCEPTOS PREVIOS: GENERALIDADES

12.1.1. Soluciones y trayectorias en un sistema de ecuaciones diferenciales

Se considera un sistema de n ecuaciones diferenciales que se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y \in \mathfrak{R}^n, \quad t \in \mathfrak{R} \quad (12.1.1)$$

donde la variable t se interpreta en general como el tiempo, donde y e y' son vectores de dimensión n y la función f es una función de $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ a la que se supone la regularidad suficiente para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones.

Se comienza estudiando los sistemas autónomos.

Definición 12.1.5:

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales 12.1.1 es un **sistema autónomo** si la función f no depende explícitamente de la variable independiente, t .

Se observa que si el sistema no es autónomo se puede convertir en uno

autónomo sin más que añadir una variable más. Así el sistema 12.1.1. se convierte en el sistema autónomo:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), & \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n \\ t' = 1 \end{cases}$$

En general, se considera entonces el **sistema autónomo** n -dimensional:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n, \quad (12.1.2)$$

donde la función \mathbf{f} es suficientemente regular para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones en, al menos, un subconjunto de \mathfrak{R}^n .

Definición 12.1.6:

Una **solución** del sistema es una función diferenciable $\mathbf{y}: (a, b) \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, que satisface el sistema 12.1.2, (o bien 12.1.1).

Se tiene un problema de valor inicial si en un sistema como el 12.1.2 se conoce una condición inicial $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$. Usualmente se toma como t_0 el valor 0. La solución particular $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, que se denota por $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{y}_0)$, que verifica dicha condición, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$, puede representarse mediante una gráfica que es una curva en el espacio $n + 1$ dimensional de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$ dada por los puntos $(t, \mathbf{y}(t))$ o $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ donde t varía en el intervalo de la recta real en que exista la solución del sistema.

Definición 12.1.7:

Se denomina **espacio de estados** del sistema 12.1.2 al subconjunto de \mathfrak{R}^n , Ω , en el que existen soluciones del sistema. Es decir: $\Omega = \{y_0; y(t, t_0, y_0) \text{ es solución de } y' = f(y)\}$

Definición 12.1.8:

La curva proyección en \mathfrak{R}^n (eliminando el tiempo) de una solución particular, $y = y(t)$, de un sistema de ecuaciones diferenciales, $y' = f(y)$, se denomina **órbita** o **trayectoria**.

Por tanto la trayectoria u órbita es el subconjunto de \mathfrak{R}^n dado por los puntos $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ con $t \in \mathfrak{R}$, siendo $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ una solución de (12.1.2).

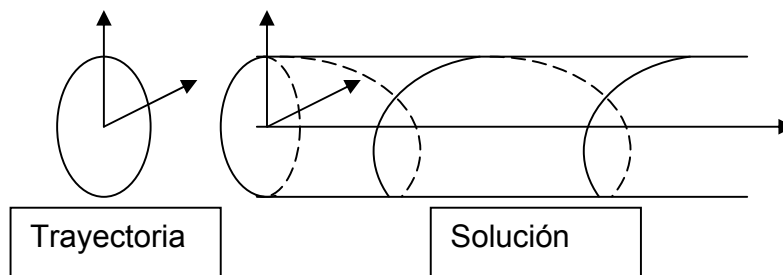


Figura 12.1: Órbita o trayectoria y solución de un sistema de ecuaciones diferenciales

Si el sistema es de dimensión dos, la solución es una curva en \mathfrak{R}^3 , mientras que la órbita o trayectoria es una curva en \mathfrak{R}^2 .

Se denomina **semitraectoria positiva** a $\{y(t); t \in [t_0, +\infty)\}$ y se denota por $C^+(y(t))$.

Se denomina **semitraectoria negativa** a $\{y(t); t \in (-\infty, t_0]\}$ y se denota por

$C^-(\mathbf{y}(t))$.

Se sabe por el teorema de unicidad de las soluciones que las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no se pueden cortar. Sin embargo distintas soluciones pueden proyectarse sobre una misma trayectoria. Por lo tanto dos soluciones, o bien dan lugar a una misma trayectoria, o bien no se cortan en ningún punto, y en consecuencia, por cada punto de \mathfrak{R}^n pasa una única trayectoria.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

las gráficas de las soluciones $(t, x(t), y(t))$ son hélices circulares sobre el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, y sus trayectorias son las circunferencias $x^2 + y^2 = r^2$.

Definición 12.1.9:

Sea $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ el espacio de estados del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, y sea $\varphi: \mathfrak{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ una aplicación de clase uno, que a cada punto de una solución le hace corresponder el de la trayectoria asociada. Esta aplicación recibe el nombre de **flujo**.

12.1.2. Diagrama de fases

La clave de la teoría geométrica de los sistemas dinámicos creada por Poincaré es el **diagrama de fase** de un sistema dinámico. El primer paso para dibujar el diagrama es la creación de un modelo geométrico del conjunto de todos los posibles estados del sistema en el llamado **espacio de estado**. En este modelo geométrico la dinámica determina una estructura celular de cuencas limitadas por **separatrices**. En cada cuenca hay un núcleo llamado **atractor**. Se podría afirmar que el objetivo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es la descripción lo más completa posible del diagrama de fases, analizando el comportamiento asintótico de las trayectorias, determinando las trayectorias especiales, mostrando cuencas y atractores, con lo que se podría conocer el comportamiento del sistema. La teoría cualitativa tiene un gran interés en las aplicaciones.

Las soluciones $\mathbf{y}(t)$ representan las coordenadas de un objeto, es decir, su posición, o quizás la velocidad y aceleración del objeto en un tiempo t .

Si el sistema es de dimensión dos, en el plano (y_1, y_2) se pueden dibujar un número de trayectorias suficientes como para tener una idea de conjunto del comportamiento de todas las del sistema. Sobre dichas trayectorias se dibuja una flecha que indica el sentido de la variación de y_1 y de y_2 al crecer el tiempo, lo que proporciona una imagen “dinámica” de su recorrido, y con ello se obtiene una descripción cualitativa del comportamiento de las soluciones.

Definición 12.1.10:

Se denomina **diagrama de fase** del sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ al conjunto de todas las trayectorias de las soluciones del sistema.

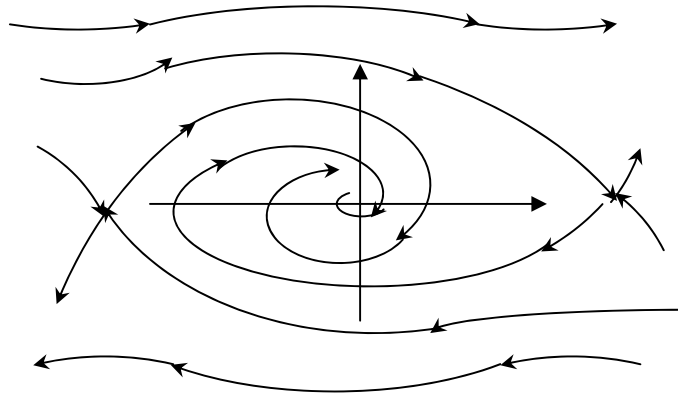


Figura 12.2: Ejemplo de diagrama de fase

Dos soluciones distintas no pueden cortarse nunca, debido a los teoremas de unicidad de las soluciones. Pero ¿y las trayectorias? Las trayectorias de dos soluciones distintas: $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{y}^*(t)$ o bien no tienen ningún punto en común o bien coinciden. Tampoco puede ocurrir que una trayectoria se corte a sí misma.

Definición 12.1.11:

Un **atractor** de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto cerrado y acotado hacia el cual se aproxima, cuando el tiempo t tiende a infinito, la órbita de las soluciones.

Por ejemplo, en la figura 12.2, el origen es un punto crítico asintóticamente estable, hacia el que se aproximan las soluciones, por lo que es un atractor.

Proposición 12.1.1:

Sea $\mathbf{y}(t)$ una solución de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Si existen dos valores distintos de t , t_1 y t_2 , $t_1 \neq t_2$, tales que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_2)$ se verifica que, o bien la solución es una función constante, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 \in \Omega$, siendo entonces \mathbf{y}_0 un punto de equilibrio, o bien la solución $\mathbf{y}(t)$ es una función periódica y su trayectoria es una curva cerrada simple.

Como consecuencia de esta proposición, el diagrama de fases de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ consta de trayectorias que no se cortan que pueden ser de tres tipos:

- curvas abiertas y simples
- curvas cerradas y simples (que se corresponden con las soluciones periódicas)
- puntos de equilibrio (que se corresponden con las soluciones constantes).

En los apartados siguientes se estudia esto con más detalle.

12.1.3. Puntos críticos

Se estudian los **puntos críticos** o **estacionarios** del sistema autónomo que son las soluciones de $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}$, constante. Cada punto crítico es una órbita del sistema formada por únicamente dicho punto. Si ese punto es el valor inicial, entonces, a lo largo del tiempo el sistema permanece invariante.

Definición 12.1.12:

Una **solución estacionaria** de un sistema de ecuaciones diferenciales es una **solución constante**, es decir, una solución \mathbf{y} tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ para todo t .

Definición 12.1.13:

La trayectoria de una solución estacionaria es un punto de \mathfrak{R}^n que se denomina **punto fijo**, **punto crítico**, **punto de equilibrio** o **punto estacionario** del sistema de ecuaciones diferenciales.

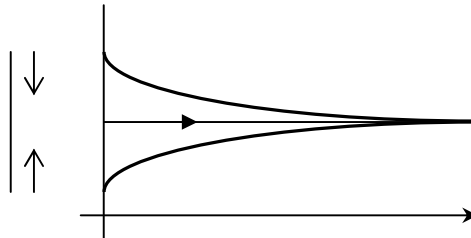


Figura 12.3: Solución estacionaria y punto fijo

Si $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ es una solución estacionaria, su trayectoria es un punto crítico que se puede identificar con el vector $\mathbf{y}(t_0)$.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

la solución $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ es una solución estacionaria, cuya trayectoria es un punto fijo, el punto $(0, 0)$.

Un punto $\mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$ es un punto crítico para el sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ si

$f(\mathbf{y}_0) = 0$. En caso contrario se dice que \mathbf{y}_0 es un **punto regular**.

Teorema 12.1.1:

Sea un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones diferenciales. La solución cero es el único punto crítico si y sólo si cero no es un autovalor de la matriz asociada.

Demostración:

Sea $\lambda = 0$ un autovalor de la matriz asociada, y sea \mathbf{v}_1 el autovector correspondiente, entonces la solución general del sistema tiene la forma:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \varphi_2(t) + \dots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot \varphi_n(t),$$

es decir, hay una solución particular $\varphi_1(t) = \mathbf{v}_1$, cuyas derivadas valen cero, y es, por tanto, un punto crítico distinto de cero.

Recíprocamente, si \mathbf{v}_1 es un punto crítico no nulo, entonces $\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{v}_1$, lo que significa que la matriz A no tiene matriz inversa, luego cero es un autovalor de dicha matriz. \square

Los puntos fijos se corresponden con las soluciones de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales. La condición del punto fijo de atraer o repeler proporciona información sobre la estabilidad del sistema.

De forma intuitiva un punto crítico es **estable** si para cualquier trayectoria \mathbf{y} suficientemente próxima al punto en el momento inicial, por ejemplo a una

distancia menor que δ , permanece próxima al punto para todo tiempo $t_0 > 0$, es decir, la trayectoria permanece siempre dentro de un círculo de centro el punto y radio ε , mientras que para que sea asintóticamente estable además de ser estable las trayectorias deben aproximarse al punto cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, el punto es un atractor. El punto es un repulsor si es inestable y las trayectorias se alejan de él.

Definición 12.1.14:

Se considera un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo como el 12.1.2, con un punto crítico \mathbf{v} .

- \mathbf{v} es un **punto fijo estable** o **nodo estable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si \mathbf{y} es una solución tal que $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{v}\| < \delta$, entonces $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{v}\| < \varepsilon$, para todo $t > t_0$.
- \mathbf{v} es un **punto fijo asintóticamente estable** o **nodo asintóticamente estable** si \mathbf{v} es estable, y si existe un $\delta > 0$ tal que para cada solución \mathbf{y} , si $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{v}\| < \delta$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \mathbf{v}$.
- \mathbf{v} es un **punto fijo inestable** o **nodo inestable** si no es estable.

12.1.4. Órbitas cíclicas

Se considera el caso en que el origen sea un punto de equilibrio. Los resultados son locales si es un punto de equilibrio aislado, y son globales si es el

único punto de equilibrio. Se definen conceptos como punto periódico, órbita, alfa-límite y omega-límite.

Es interesante mencionar los **conjuntos invariantes** por un sistema dinámico dado su importancia para el estudio de la estabilidad. Entre ellos tienen especial interés el estudio de las trayectorias cerradas en el espacio de fases que corresponden con soluciones periódicas.

Si una solución $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ verifica que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_2)$ con t_1 distinto de t_2 , entonces esa solución es una **función periódica**, de periodo un múltiplo de $t_2 - t_1$. Su trayectoria es una curva cerrada simple, y se dice que es una **órbita cíclica**.

En el caso particular de una solución estacionaria, se puede considerar que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ para todo t , como un caso trivial de periodicidad, siendo la trayectoria un punto de equilibrio del sistema.

Continuando con la teoría cualitativa de los sistemas se debe hacer referencia al comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito. Se estudia el concepto de conjunto límite. Si el tiempo tiende a más infinito (o a menos infinito) se puede analizar hacia donde tienden las trayectorias y definir los conjuntos alfa-límite y omega-límite.

Definición 12.1.15:

Dado un sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ de orden n y una semitrayectoria C^+ del mismo de ecuación $\mathbf{y}(t)$ con $t \geq t_0$, se dice que $\mathbf{y}_0^* \in \mathfrak{R}^n$ es un **omega-límite** (ω -

límite) si existe una sucesión real creciente (t_n) con $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, tal que la sucesión $(\mathbf{y}(t_n))$ tiene como límite \mathbf{y}_0^* .

Se observa que en esta definición se presupone que $\mathbf{y}(t)$ está definida en el intervalo $[t_0, +\infty)$.

El omega-límite no tiene necesariamente que ser único. Se denomina $L(C^+)$ al conjunto de todos los puntos ω -límites para un sistema autónomo dado. A este conjunto pertenecen los puntos fijos estables (atractores).

Del mismo modo se pueden considerar las semitrayectorias C^- definidas desde $-\infty$ hasta t_0 y definir los alfa-límites.

Definición 12.1.16:

Dado un sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ de orden n y una semitrayectoria C^- del mismo de ecuación $\mathbf{y}(t)$ con $t \leq t_0$, se dice que $\mathbf{y}_0^* \in \mathfrak{R}^n$ es un **alfa-límite** (α -límite) si existe una sucesión real decreciente (t_n) con $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$, tal que la sucesión $(\mathbf{y}(t_n))$ tiene como límite \mathbf{y}_0^* .

Se representa por $L(C^-)$ al conjunto de todos los puntos α -límites para un sistema autónomo dado. A este conjunto pertenecen los puntos fijos inestables que son repulsores.

La idea intuitiva es que cada trayectoria puede partir de un α -límite y llegar a un ω -límite.

En muchas ocasiones se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad (12.1.3)$$

Los parámetros no dependen de la variable independiente, pero se modifica el comportamiento de las soluciones según los valores que tome el parámetro. En general una modificación pequeña del valor del parámetro supone una variación también pequeña en las soluciones. Pero en ocasiones para un determinado valor del parámetro se modifica drásticamente la dinámica del sistema, como por ejemplo si un atractor pasa a ser un repulsor. En esas ocasiones se dice que la ecuación diferencial tiene una bifurcación.

Definición 12.1.17:

Una ecuación diferencial que depende de un parámetro tiene una **bifurcación** cuando hay una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones para un determinado valor del parámetro.

En el ejemplo 12.1.1 se observa que la ecuación diferencial $y' = ay$ tiene una bifurcación para $a = 0$, pues el origen es un atractor si $a < 0$ y es un repulsor si $a > 0$.

12.1.5. Estabilidad de Liapunov y estabilidad orbital

Se estudia el concepto de estabilidad de las soluciones y de las trayectorias. Existen dos conceptos de estabilidad y sus correspondientes versiones

asintóticas: la estabilidad de *Liapunov* y la estabilidad orbital.

La estabilidad de *Liapunov* mide la distancia entre las soluciones. Una solución es estable según *Liapunov* si para valores iniciales suficientemente próximos entonces la distancia entre las soluciones es tan pequeña como se quiera.

Definición 12.1.18:

Sea $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales y sea $\varphi(t)$ la solución que para $t = t_0$ toma el valor \mathbf{y}_0 , entonces se dice que la solución $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es **estable según *Liapunov*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, tal que si toda solución $\varphi^*(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)$ que verifique que $\text{dist}(\varphi(t_0), \varphi^*(t_0)) < \delta$ entonces $\text{dist}(\varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0), \varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)) < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Definición 12.1.19:

Un punto crítico \mathbf{y}_0 es **estable según *Liapunov*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $\text{dist}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0^*) < \delta$ entonces $\text{dist}(\mathbf{y}_0, \varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)) < \varepsilon$.

Definición 12.1.20:

Una solución $\varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es **asintóticamente estable** si es estable y también verifica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0) - \varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)\| = 0$.

Definición 12.1.21:

Un punto crítico \mathbf{y}_0 es **asintóticamente estable** si para valores iniciales

suficientemente próximos, el límite de $\varphi(t, t_0, \mathbf{y}^*_0)$, cuando t tiende a infinito, es \mathbf{y}_0 .

Definición 12.1.22:

Un punto crítico es **inestable** si no es estable.

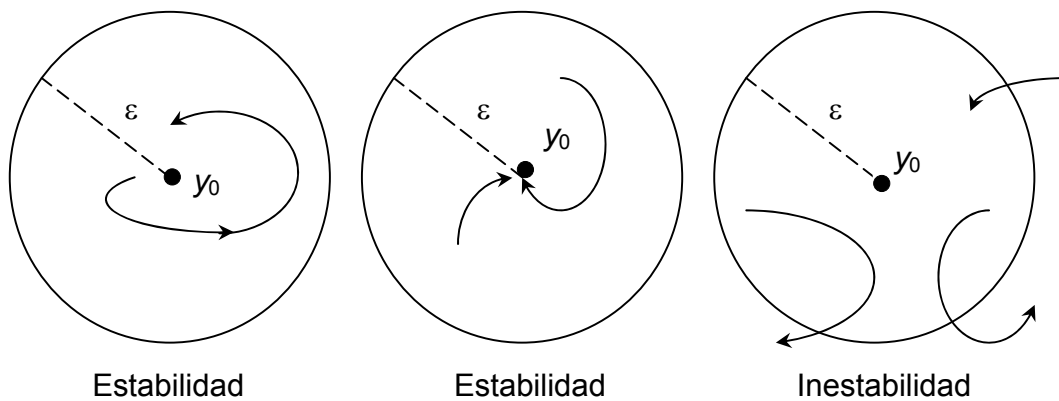


Figura 12.4: Solución estable, solución asintóticamente estable y solución inestable

Si el sistema es lineal, $\mathbf{y}'(t) = A(t)\cdot\mathbf{y}(t) + b(t)$, entonces una solución $\varphi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es estable (o asintóticamente estable) si y sólo si el origen es un punto crítico estable (o asintóticamente estable) del sistema homogéneo asociado. Este hecho conduce a estudiar los puntos críticos de los sistemas lineales homogéneos.

La estabilidad orbital mide la separación entre las trayectorias en el espacio de fases, no la separación de las soluciones.

Definición 12.1.23:

Una órbita cíclica $\mathbf{y}(t)$ (o trayectoria que sea una curva cerrada simple) es **orbitalmente estable** si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que cualquier

otra trayectoria $\mathbf{y}^*(t)$ que en $t = t_0$ diste de $\mathbf{y}(t)$ menos que δ entonces distará menos que ε para todo t mayor que t_0 . Es decir: Si $\text{Ínfimo}(\text{dist}(\mathbf{y}^*(t_0), \mathbf{y}(t))) < \delta$ entonces $\text{dist}(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{y}(t)) < \varepsilon$, para todo $t > t_0$.

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{dist}(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{y}(t))) = 0$ se dice que la **estabilidad es orbitalmente asintótica**.

En este caso se dice que la órbita $\mathbf{y}(t)$ es un ciclo límite.

Definición 12.1.24:

Un **ciclo límite** es una curva cerrada C que es cíclica y atrae a las órbitas de cualquier solución que en el instante inicial esté próxima a C .

La estabilidad según *Liapunov* implica la estabilidad orbital, aunque no al contrario.

Un ejemplo con estabilidad orbital, pero sin estabilidad según *Liapunov* es el oscilador cuártico definido por la ecuación: $y'' + 4y^3 = 0$. Las trayectorias en el espacio de fases (y, y') son los óvalos:

$$1/2(y')^2 + y^4 = A$$

donde A representa la amplitud de las oscilaciones.

Se observa que estos óvalos se deforman continuamente al variar A , por lo que se tiene estabilidad orbital, pero el periodo también varía con A : $T = T(A)$, por lo que la solución no es estable según *Liapunov*.

12.1.6. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 1$

Dado el sistema lineal y homogéneo de dimensión uno $y' = ay$, su solución general es $y(t) = Ce^{at}$. Según los valores del parámetro a se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $a < 0$. Cuando t crece, la función exponencial tiene a cero. El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, que es un atractor. Se tienen sólo tres trayectorias según el valor inicial.

Caso 2: $a = 0$. Todos los puntos de la recta real son puntos de equilibrio.

Caso 3: $a > 0$. Cuando t crece, la función exponencial tiene a infinito. El origen es un punto de equilibrio inestable que es un repulsor. Se tienen de nuevo sólo tres trayectorias según el valor inicial.

Se dice que $a = 0$ es un punto de bifurcación, pues cambia en él la dinámica del sistema.

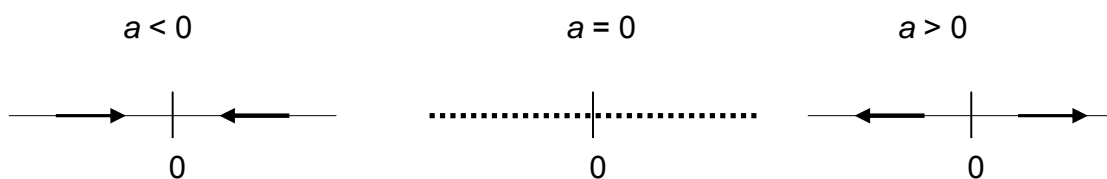


Figura 12.5: Diagrama de fase en un sistema lineal homogéneo de dimensión uno

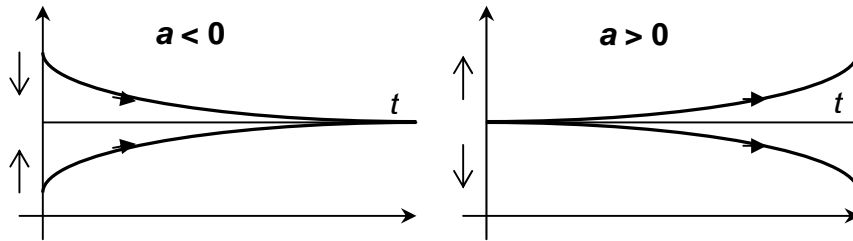


Figura 12.6: Diagrama de fase y trayectorias en un sistema lineal de dimensión uno.

12.1.7. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 2$

En un sistema lineal homogéneo de orden dos $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ el origen es un punto crítico.

Si el sistema tiene dos autovalores reales y distintos λ y μ , y \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 son los autovectores asociados, entonces la solución general es:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda t} + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot e^{\mu t}.$$

- Si ambos autovalores son negativos, $\lambda < \mu < 0$, se observa que, al crecer el tiempo, $e^{\lambda t}$ y $e^{\mu t}$ disminuyen, luego $\mathbf{y}(t)$ se acerca al origen, por lo que éste es un punto crítico estable, y además, es asintóticamente estable pues $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = 0$. Se dice entonces que el origen es un nodo asintóticamente estable, y es un **atractor**.

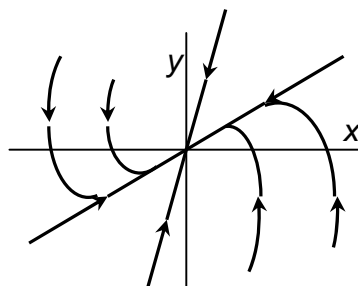


Figura 12.7: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores reales, distintos y negativos. Atractor.

- Si ambos autovalores son positivos, $\lambda > \mu > 0$, entonces para toda solución se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty$. Todas las trayectorias se alejan del origen. En este caso el origen es un **nodo inestable** o **repulsor**.
- Si un autovalor es positivo y el otro es negativo, $\lambda > 0 > \mu$, entonces las trayectorias que tengan su valor inicial sobre la recta de vector de dirección \mathbf{v}_2 tienden a aproximarse al origen, pero el resto, al aumentar el tiempo, crecen, por lo que tienden a infinito. En situaciones como estas se dice que el origen es un **punto de silla**, y es inestable.

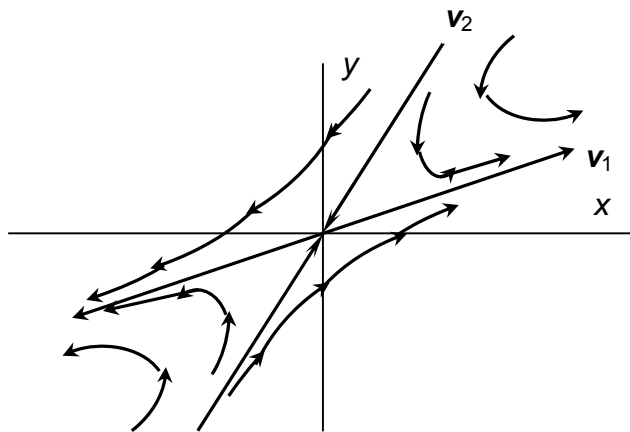


Figura 12.8: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores reales y distintos. Punto de silla.

- Si el autovalor es doble, el punto crítico se dice que es un **nodo degenerado**. Pueden darse distintos casos, como que todo vector sea

autovector, y entonces todas las trayectorias son rectas. Si el autovector es negativo al crecer el tiempo, se aproximan al origen, (atractor) y si es positivo, se alejan, (repulsor). Se dice entonces que el origen es una ***solución estrella***. Pero pueden darse otros diagramas de fase distintos, donde el nodo puede ser un nodo degenerado y asintóticamente estable, o un nodo degenerado inestable, según sea el signo del autovalor.

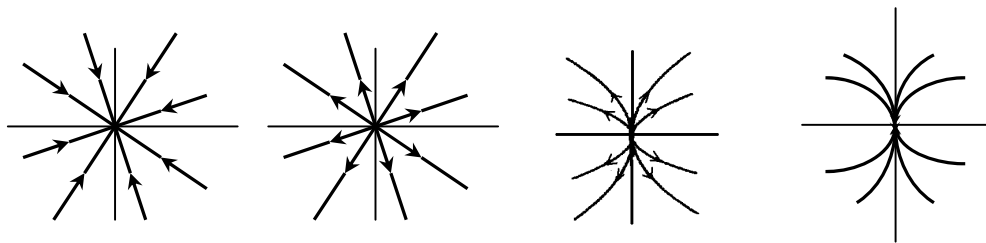


Figura 12.9: Diagramas de fase en sistemas lineales de dimensión dos con los autovalores iguales

- Si el autovalor es un número complejo $\lambda = \alpha \pm \beta i$, entonces la solución general es de la forma:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t} \cdot (C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \sin \beta t).$$

Si $\alpha > 0$, $e^{\alpha t}$ aumenta al crecer el tiempo, luego las trayectorias se alejan del origen. Ahora son ***espirales***. Se dice que el origen es un nodo inestable o repulsor o punto espiral inestable o foco inestable.

Si $\alpha < 0$ se invierte la situación, las trayectorias se acercan al origen en espiral, siendo éste un nodo asintóticamente estable o atractor o punto espiral estable o foco estable.

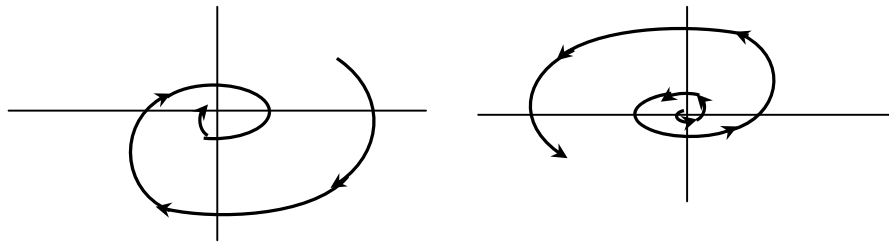


Figura 12.10: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos con autovalores complejos. Espirales.

Si $\alpha = 0$ entonces la solución general es de la forma:

$$y(t) = C_1 \cdot v_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot v_2 \cdot \sin \beta t.$$

Es una solución periódica de periodo $2\pi/\beta$. Ahora las trayectorias son elípticas. Se dice que el origen es un **centro**.

Se observa que un centro es un ejemplo de punto crítico estable pero que no es asintóticamente estable.

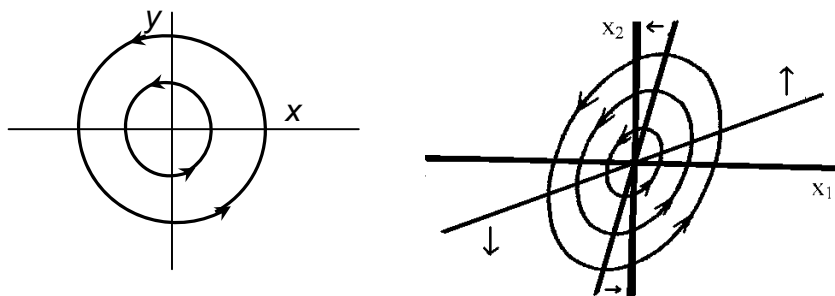


Figura 12.11: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores complejos con $\alpha = 0$.

Centro.

Se ha comprobado que el diagrama de fase de un sistema lineal homogéneo de dimensión dos: $y' = Ay$ depende de los autovalores de la matriz A , que se

obtienen de la ecuación característica:

$$\lambda^2 - (\text{Traza de } A)\lambda + (\text{Determinante de } A) = 0,$$

de discriminante:

$$D = (\text{Traza de } A)^2 - 4(\text{Determinante de } A).$$

Dependiendo de los signos de D , (*Determinante de A*) y (*Traza de A*) se tienen las distintas posibilidades:

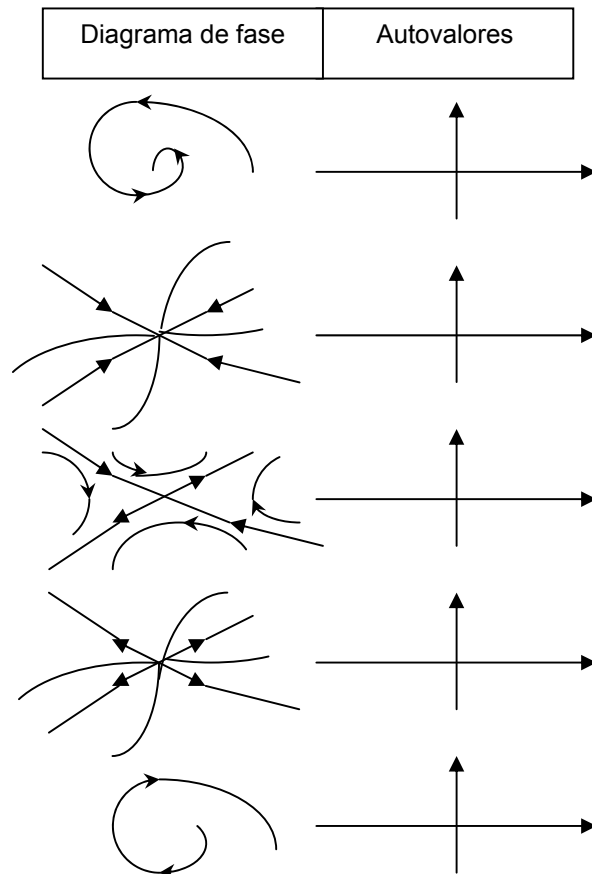


Figura 12.12: Distintos diagramas de fase en un sistema lineal de dimensión dos. Puntos críticos hiperbólicos.

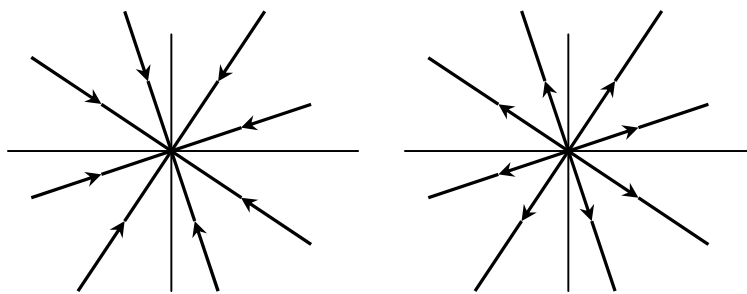
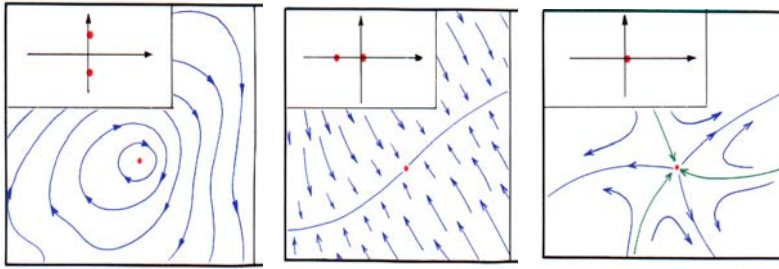


Figura 12.13: Distintos diagramas de fase en un sistema lineal de dimensión dos. Puntos críticos no hiperbólicos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.1.1: Identificar los puntos de equilibrio del sistema de dimensión uno:

$$y' = (y + 2) \cdot (y - 1)$$

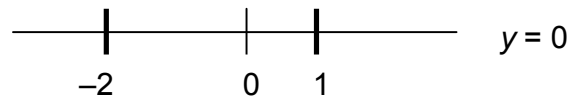
y determinar si son atractores, repulsores o puntos de silla.

En una ecuación del tipo $y' = f(y)$ se puede dibujar el diagrama de fase siguiendo los siguientes pasos:

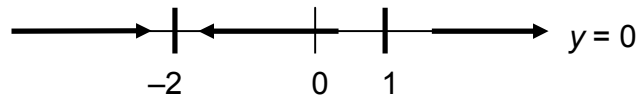
- 1) Dibujar la recta $y = 0$ _____ $y = 0$

- 2) Encontrar los puntos de equilibrio resolviendo la ecuación $f(y) = 0$ y marcarlos sobre la recta y .

$(y + 2) \cdot (y - 1) = 0 \Rightarrow y = -2; y = 1$. Los puntos de equilibrio son 1 y -2 .



- 3) Dibujar flechas hacia arriba (o hacia la derecha) en los intervalos donde $f(y) > 0$. Dibujar flechas hacia abajo (o hacia la izquierda) en los intervalos donde $f(y) < 0$.



El punto crítico $y = -2$ es un atractor, mientras que el punto crítico $y = 1$ es un repulsor.

Ejemplo 12.1.2: Determinar la solución general y clasificar el origen como punto fijo en el sistema lineal homogéneo de dimensión dos siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$$

Se determinan los autovalores resolviendo la ecuación característica:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = -5.$$

Ambos autovalores son negativos. El origen va a ser un atractor. Se calculan los autovectores:

$$\text{Para } \lambda = -1 \Rightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x + y = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Para } \lambda = -5 \Rightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La solución general es: } \mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Cuando t tiende a infinito, la solución tiende al origen, que es el único punto crítico. Si el instante inicial fuese un punto de la recta de dirección del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces su trayectoria se aproxima al origen siguiendo esa recta. Si el instante inicial fuese un punto de la recta de dirección del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, entonces su trayectoria se aproxima al origen siguiendo esa recta. En el resto de los casos se aproxima al origen acercándose a la recta de vector de dirección el $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, que corresponde al autovalor de mayor valor absoluto. El origen es un atractor, es un punto estable y asintóticamente estable.

Ejercicios

12.1. Hacer un esbozo del diagrama de fase de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = (1 - y) \cdot y$

b) $y' = y \cdot \cos y$

c) $y' = (2 - y) \cdot (y + 3)$

d) $y' = (y + 2)^2$

12.2. Identificar los puntos de equilibrio de las ecuaciones siguientes como atractores, repulsores o puntos de silla:

a) $y' = (1 - y)$

b) $y' = 2y \cdot (1 - y)$

c) $y' = 2y^3 \cdot (1 - y)^2$

d) $y' = 2y \cdot (1 - y) \cdot (y + 2)$

12.3. De la ecuación diferencial $y' = f(y)$ se sabe que $f(-2) = f(3) = 0$ y que $f(y) > 0$ para $-2 < f(y) < 3$. Describir todos los posibles comportamientos de la solución que verifica $f(0) = 1$.

12.4. En los sistemas lineales siguientes comprobar el valor de los autovalores, determinar la solución general y comprobar la clasificación del origen como punto fijo. Dibujar el diagrama de fase:

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$, autovalores: -2 y 2 ; punto de silla, inestable.

$$b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases}, \text{ autovalores: } -4 \text{ doble; nodo degenerado, punto estrella}$$

asintóticamente estable.

$$c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, \text{ autovalores: } 1 \text{ doble; nodo degenerado inestable.}$$

$$d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}, \text{ autovalores: } -1 + i, -1 - i, \text{ nodo espiral}$$

asintóticamente estable.

12.5. Determinar un valor de a para que el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases},$$

tenga un centro. ¿Existen valores de a que hagan al origen un punto espiral? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos.

12.6. En los sistemas lineales siguientes determinar la solución general, clasificar el origen como punto fijo y dibujar el diagrama de fase:

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -9x + 3y \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} .$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases} .$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases} .$$

12.2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

El estudio de la estabilidad en los sistemas lineales $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ se reducen al estudio de la estabilidad de los sistemas lineales homogéneos de dimensión n , $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. En los ejemplos anteriores de dimensión uno y dimensión dos se ha analizado ya el comportamiento dinámico de los sistemas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, con la matriz A de coeficientes constantes. En esta sección se van a enunciar algunos teoremas que lo generalizan para dimensión n .

Teorema 12.2.1:

El sistema $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, $t \geq t_0$, es estable si y sólo si todas sus soluciones están

acotadas en $[t_0, +\infty)$.

Corolario 12.2.2:

Para que todas las soluciones de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $t \geq t_0$, estén acotadas es necesario y suficiente que:

- a) Todos los autovalores de la matriz A tengan su parte real negativa o nula.
- b) Si λ tiene su parte real nula, entonces la dimensión del núcleo de $A - \lambda I$, $\dim N(A - \lambda I)$, coincida con el orden de multiplicidad de λ .

Para que todas las soluciones de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ estén acotadas es necesario que todos los autovalores de la matriz A tengan su parte real negativa o nula. Pero esta condición no es suficiente, pues pueden no estar acotadas si el autovalor tiene su parte real nula y es doble y aparecen polinomios. Para que esto no ocurra, la matriz de Jordan asociada debe ser diagonal.

Si la parte real es nula se pretende que no aparezcan soluciones del tipo:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t + \dots +$$

o bien, si son complejas:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \cos \alpha t + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \sin \alpha t + C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t \cdot \cos \alpha t + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t \cdot \sin \alpha t + \dots +$$

Corolario 12.2.3:

Toda solución $\mathbf{y}(t)$ del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ tiende a cero cuando el tiempo tiende

a infinito, si y sólo si, todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real negativa, o si tienen su parte real nula, entonces $\dim N(A - \lambda I)$ coincide con el orden de multiplicación de λ .

En este caso el origen es un atractor del sistema.

La justificación es clara teniendo en cuenta la forma general de dichas soluciones:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot e^{\lambda_n t}.$$

Si la parte real de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ es negativa, al calcular el límite cuando t tiende a infinito, $\mathbf{y}(t)$ tiende a cero. Recíprocamente si alguno tiene su parte real positiva entonces la solución no converge a cero.

Teorema 12.2.4:

Sea el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Toda solución $\mathbf{y}(t)$ del sistema, distinta de $\mathbf{y}(t) = 0$ para todo t , tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito, si y sólo si todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real positiva.

La justificación es similar al teorema anterior.

En este caso el origen es una **fente** o **repulsor** del sistema.

Teorema 12.2.4:

Si el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ tiene autovalores complejos imaginarios puros de la forma $\lambda = bi$ con b distinto de cero, y $m = \dim N(A - \lambda I)$ como subespacio de \mathbf{C}^n ,

entonces el conjunto de soluciones periódicas de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ de periodo $2\pi/b$ es un subespacio vectorial de dimensión $2m$.

Definición 12.2.1:

Un sistema lineal homogéneo de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ se dice que es **hiperbólico** si todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real distinta de cero.

En un sistema hiperbólico se tiene que el origen o bien es un atractor o bien es un repulsor o bien, si hay autovalores de parte real positiva y de parte real negativa, entonces es un punto de silla. En este caso el sistema se puede dividir en dos subsistemas, separando los autovalores por el signo de su parte real.

Definición 12.2.2:

Se denomina **subespacio estable** del sistema hiperbólico de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, al subespacio, E , en el que todos los autovalores tienen su parte real negativa.

Definición 12.2.3:

Se denomina **subespacio inestable** del sistema hiperbólico de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, al subespacio, N , en el que todos los autovalores tienen su parte real positiva.

Ambos subespacios, estable e inestable, son invariantes para el sistema. En un sistema hiperbólico \mathfrak{R}^n es suma directa de ellos: $\mathfrak{R}^n = E \oplus N$ y $E \cap N = \{\mathbf{0}\}$.

Sea $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ un sistema lineal y homogéneo y sea J la matriz de Jordan de A , ordenada de forma que primero se tengan los bloques que correspondan a autovalores con parte real negativa, J_e , luego con parte real nula, J_p , y por último, con parte real positiva, J_i , de dimensiones, respectivamente: e , p y i , con $e + p + i = n$. El sistema canónico se subdivide en tres subsistemas: $\mathbf{y}'_{(e)} = J_e \cdot \mathbf{y}_{(e)}$, $\mathbf{y}'_{(p)} = J_p \cdot \mathbf{y}_{(p)}$, $\mathbf{y}'_{(i)} = J_i \cdot \mathbf{y}_{(i)}$, donde los espacios correspondientes a J_e , E , y a J_i , N , son subespacios invariantes, y el subespacio P , correspondiente a J_p , también es un subespacio invariante con soluciones posiblemente periódicas. Se tiene que $\mathfrak{R}^n = E \oplus P \oplus N$ y $E \cap P \cap N = \{\mathbf{0}\}$.

12.2.1. Comportamiento dinámico de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden superior

Una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n se puede transformar en el sistema lineal equivalente, por lo que:

- Sus soluciones son asintóticamente estables si las raíces de su ecuación característica tienen su parte real estrictamente negativa.
- Sus soluciones son inestables si alguna raíz tiene su parte real positiva.
- Si la ecuación característica tiene raíces de parte real nula, el estudio debe hacerse de forma detallada ya que el origen puede ser un centro

(si las raíces son imaginarias puras), o puede ser un nodo degenerado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.2.1:

Estudiar la dinámica del sistema: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$ y estudiar la dinámica de $y'' = 0$.

En este sistema los autovalores son $\lambda = 0$ doble, por lo que la solución general del sistema lineal homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

que es una solución no acotada si C_2 es distinto de cero. Se observa que las soluciones acotadas son un subespacio vectorial de dimensión uno:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 \in \mathfrak{R}.$$

La matriz de Jordan asociada no es diagonalizable, y por ello, aunque la parte real de los autovalores sea nula, todas las soluciones no son acotadas.

La ecuación diferencial $y'' = 0$ tiene la ecuación característica $r^2 = 0$, de raíz doble $r = 0$. Su solución general es: $y(t) = C_1 + C_2 t$, que si C_2 es distinto de cero, no es acotada. Su sistema asociado es el anterior, por lo que se conoce también $y'(t)$

$= C_2$.

Ejemplo 12.2.2:

Estudiar la dinámica del sistema:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases}.$$

En este sistema los autovalores son $\lambda = 2i$ y $\lambda = -2i$. La solución general del sistema lineal homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \text{sen}2t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \text{cos}2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 \text{sen}2t \\ y_2(t) = C_2 \text{cos}2t \end{cases}$$

Las trayectorias son las elipses: $\frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = 1$. El origen es un centro. Es un

punto crítico estable, pero no asintóticamente estable. Las soluciones son periódicas de periodo π , acotadas. En este caso $\mathfrak{R}^2 = P$ y $E = N = \{\mathbf{0}\}$.

Ejemplo 12.2.3:

Estudiar la dinámica del sistema $y' = Ay$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Se tienen los autovalores $\lambda = \pm 2i$ dobles, y la dimensión del núcleo es: $\text{Dim } N(A - 2iI) = 1$.

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{ser} 2t \\ 0 \\ \operatorname{ser} 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{ser} 2t \\ \cos 2t \\ 0 \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \left(t \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{ser} 2t \\ 0 \\ \operatorname{ser} 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ \cos 2t \\ -\operatorname{ser} 2t \end{pmatrix} \right) + C_4 \left(t \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ser} 2t \\ \cos 2t \\ 0 \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{ser} 2t \\ 0 \\ \operatorname{ser} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \right)$$

Si C_3 y C_4 son distintos de cero se tienen soluciones no acotadas. Sin embargo si $C_3 = C_4 = 0$ se tiene un subespacio de dimensión dos de soluciones periódicas, de periodo π , acotadas.

Ejercicios

12.7. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes, determinar la solución general, dibujar el diagrama de fase y analizar los subespacios E , P y N :

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$, autovalores: 0 y -2 ; $E = \{(1, -2)\}$, $P = \{(1, 0)\}$ y $N = \{(0, 0)\}$.

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$ autovalores: -2 , 0 y 2; $E = \{(1, -1, 0)\}$, $P = \{(0, 0, 1)\}$ y $N = \{(1, -3, 0)\}$.

$$c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{dz}{dt} = -z \end{cases} \text{ autovalores: } -1, i \text{ y } -i; E = \{(0, 0, 1)\}, P = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

y $N = \{(0, 0, 0)\}$.

12.8. En los sistemas lineales siguientes, comprobar si los autovalores y los autovectores son los indicados, dibujar las rectas que determinan dichos autovectores, determinar la solución general y dibujar el diagrama de fase.

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}, \text{ autovalores: } 1 \text{ y } 2; \text{ autovectores: } (0, 1) \text{ y } (1, 1).$$

$$b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}, \text{ autovalor: } 2 \text{ doble; autovector: } (1, -1).$$

$$c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases}, \text{ autovalores: } -4 \text{ y } 2; \text{ autovectores: } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

$$d) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}, \text{ autovalores: } 3 \text{ y } 1; \text{ autovectores: } (6, -2) \text{ y } (-1, 1).$$

12.3. SISTEMAS CASI-LINEALES

Los casos más sencillos de sistemas autónomos son los **sistemas casi lineales**, aquellos que se pueden escribir como: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$, donde se tiene un sistema lineal de coeficientes constantes asociado y el origen es un punto crítico, siendo la función $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ continua y con derivadas parciales continuas en un entorno del origen, y anulándose la función y dichas derivadas en el origen. Estos sistemas se comportan localmente de forma similar al sistema lineal asociado, manteniendo nodos, puntos de silla, espirales, aunque los centros o los nodos degenerados no se puede asegurar que se mantengan. En estas condiciones se observa que la matriz A es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ en el origen.

Si el problema se puede escribir de la forma: $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$, donde A es una matriz cuadrada $n \times n$ constante, y se supone que todos los autovalores de A satisfacen que su parte real es negativa y que la matriz $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ satisface que $|\mathbf{h}(\mathbf{y})| = o(|\mathbf{y}|)$ cuando $|\mathbf{y}|$ tiende a cero, entonces la solución $\mathbf{y} = 0$ es asintóticamente estable.

En general, dado un sistema no lineal: $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ se pretende linealizarlo mediante el sistema $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{y})$ donde $A(t)$ es la matriz jacobiana de la función \mathbf{g} , por lo que $\mathbf{h}(t, 0) = 0$, y se podría conjeturar que $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ se puede aproximar en un entorno del origen por $A(t)$. Sin embargo esta conjetura no siempre es válida, pues por ejemplo el sistema $y' = y^2$ tiene su matriz jacobiana nula y su sistema lineal asociado es $y' = 0$ que no explica al sistema no lineal de

partida: $y' = y^2$, de solución $y = -1/x$.

Definición 12.3.1:

Sea V un subconjunto de \mathfrak{R}^n que contiene en su interior al origen. Sean f_1, \dots, f_n funciones reales en V que se anulan en el origen y cuyas derivadas parciales son continuas y también se anulan en el origen. Entonces el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (12.3.1)$$

es ***casi lineal*** en el origen.

Para saber si un sistema es casi lineal en un punto P , entonces se traslada P al origen y se comprueba si el nuevo sistema es casi lineal en el origen.

Al ser las funciones f_1, \dots, f_n continuas respecto a las variables y_1, \dots, y_n pero ser independientes del tiempo, el sistema anterior (12.3.1) es autónomo.

Al sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (12.3.2)$$

se le denomina su ***sistema auxiliar***, y a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

su **matriz asociada**.

Al imponer que se anulen las derivadas parciales primeras en el origen el sistema lineal auxiliar resulta ser una primera aproximación del sistema de partida y la matriz asociada A es la matriz jacobiana en el origen del sistema de partida.

Se pueden estudiar en el sistema lineal auxiliar las nociones de estabilidad, estabilidad asintótica, no estabilidad para el origen. Se tiene el siguiente teorema debido a Lyapunov y probado por Boyce y por Di Prima en 1986:

Teorema 12.3.1:

Sea un sistema casi lineal en el origen (como el 12.3.1). Si el origen es asintóticamente estable (respectivamente inestable) para el sistema lineal auxiliar (12.3.2), entonces el origen es asintóticamente estable (respectivamente inestable) para el sistema casi lineal 12.3.1.

Como consecuencia, si el punto crítico es un nodo, un punto de silla o un punto espiral en el sistema lineal auxiliar, entonces el punto crítico del sistema casi lineal es del mismo tipo.

Sin embargo los nodos degenerados y los centros del sistema lineal auxiliar no son heredados por el sistema casi lineal. Es más, si el sistema auxiliar tiene un centro, entonces el punto crítico del sistema casi lineal puede ser asintóticamente

estable o ser inestable. La razón se debe a que los centros surgen cuando la parte real del autovalor complejo vale exactamente cero, $\alpha = 0$, y pequeños cambios en este valor pueden alterar la naturaleza del punto crítico al hacer $\alpha < 0$ o $\alpha > 0$. Algo parecido sucede con los nodos degenerados que surgen cuando exactamente $\lambda = \mu$, y pequeños cambios pueden hacer $\lambda < \mu$ o $\lambda > \mu$.

Sin embargo si la parte real de los autovalores verifica que $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, (o $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$), por la continuidad de las funciones, en algún entorno sigue siendo cierto que $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, (o $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$) por lo que se heredan las nociones de estabilidad asintótica y de inestabilidad.

Si la parte real de los autovalores verifica que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$ se tiene que las soluciones que empiezan cerca del origen se acercan a él, siendo éste un atractor. Si los autovalores son complejos es un nodo en espiral. Si por el contrario todos tienen la parte real positiva entonces el origen es un repulsor o fuente, y si son complejos es una fuente en espiral. Si hay autovalores con la parte real positiva y otros con la parte real negativa entonces es un punto de silla, y hay curvas de soluciones que se acercan al origen y otras que se alejan.

En los sistemas casi lineales no se verifica el teorema de 12.1.1 de los sistemas lineales homogéneos que decía que el origen es el único punto crítico si y sólo si cero no es un autovalor. Aunque los autovalores del sistema auxiliar sean todos distintos de cero, el sistema casi lineal puede tener otros puntos críticos distintos de cero que deben estudiarse independientemente.

Tampoco esta clasificación de los puntos de equilibrio asegura nada respecto del comportamiento de las soluciones cuyas posiciones iniciales estén lejos del punto de equilibrio estudiado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.3.1:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente en un entorno del origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}.$$

El sistema dado es casi lineal, pues $f_1(x, y) = 2xy$, que es una función continua que se anula en el origen, y sus derivadas parciales respecto a x y respecto a y son: $2y$ y $2x$, respectivamente, que también se anulan en el origen.

El sistema auxiliar es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}, \text{ y su matriz asociada: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyos autovalores son:}$$

$$\lambda = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0 < \mu = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Son autovalores reales, uno positivo y otro negativo, por lo que el origen es

un punto de silla en el sistema auxiliar, que es un punto inestable, luego el sistema de partida, por el teorema 12.2.1 tiene en el origen un punto inestable.

Este sistema tiene otro punto crítico, el punto $(3/2, -3/2)$.

Ejemplo 12.3.2:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 1 \end{cases}.$$

El sistema propuesto tiene puntos críticos distintos del origen, lo que no podía suceder con los sistemas lineales homogéneos por el teorema 12.1.1. Para determinar los puntos críticos se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y + 2xy = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases},$$

y se obtiene que $(1, -2)$ es un punto crítico. Se trasladan los ejes a dicho punto: $x = 1 + u$; $y = -2 + v$, con lo que el sistema obtenido es:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u + v + 2uv \\ \frac{dv}{dt} = u + v \end{cases},$$

cuya dinámica se conoce por el ejemplo 12.3.1. Es un sistema casi lineal en el origen siendo éste un punto no estable, un punto de silla, y en consecuencia el

punto $(1, -2)$ es un punto crítico inestable.

Ejemplo 12.3.3:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x^3 - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + y - x^2y - y^3 \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal y tiene un punto crítico en el origen siendo:

$$f_1(x, y) = -x^3 - xy^2; f_2(x, y) = -x^2y - y^3,$$

funciones que se anulan en el origen y cuyas derivadas parciales primeras también se anulan en el origen. Para estudiar el comportamiento del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, se hace un cambio a coordenadas polares, utilizando la regla de la cadena, y se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Para $r = 0$, se tiene el punto fijo del origen.

Por los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones se sabe que por todo punto de \mathfrak{R}^2 pasa una única órbita.

Caso 1: Si en el instante inicial $\|\mathbf{y}(0)\| = 1$, entonces para todo $t > 0$ se tiene

que:

$$r = 1 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \|y(0)\| = 1 \text{ y } \|y(t)\| = 1, \forall t,$$

Se obtiene una órbita que es cerrada y acotada, la circunferencia de centro el origen y radio uno, y al ser constante la derivada respecto el ángulo, dicha órbita se recorre con velocidad constante.

Caso 2: Si en el instante inicial $0 < \|y(0)\| < 1 \Rightarrow 0 < r < 1$ para todo t , entonces $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) > 0$ para todo $t > 0$, por lo que $r(t)$ es una función creciente, y su límite tiende a 1, y por tanto $\|y(t)\|$ crece siendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 1$.

Caso 3: Si en el instante inicial $\|y(0)\| > 1$, entonces $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) < 0$ para todo $t > 0$, por lo que $r(t)$ es una función decreciente, y su límite tiende a 1 y $\|y(t)\|$ decrece siendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 1$.

En ese caso se tiene que cualquier trayectoria o es la circunferencia de centro el origen y radio uno, o se aproxima a ella. Como la circunferencia de centro el origen y radio uno es cerrada y acotada es un **ciclo límite**.

Ejercicios

12.9. En los sistemas siguientes determinar cuáles son casi lineales, y en los que lo sean, determina, cuando sea posible, su dinámica:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y - x^2 y \end{cases} .$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y + 1 - e^{xy} \\ \frac{dy}{dt} = x - y + x \operatorname{sen} y \end{cases} .$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x + y - xy \end{cases} .$$

12.10. Los sistemas siguientes modelizan poblaciones de especies, unas cooperativas y otras en competencia. Indicar qué modelos son de cada tipo. Determinar los puntos de equilibrio. Estudiar su dinámica:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -3y + 3xy \end{cases} .$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - x^2 - 2xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2xy - y^2 \end{cases} .$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3xy \\ \frac{dy}{dt} = -3y + 4xy \end{cases} .$$

$$d) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - 2x^2 - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3xy - 2y^2 \end{cases}.$$

12.4. SISTEMAS BIDIMENSIONALES AUTÓNOMOS

En sistemas de dimensión n se ha estudiado la estructura que tienen las soluciones en un entorno del punto de equilibrio, y se ha visto que éstos pueden ser puntos espirales, nodos, centros, puntos de silla... Naturalmente todo esto es válido en los sistemas casilineales autónomos de dimensión dos. En esta sección se analizan dichos sistemas con mayor detenimiento, estudiando el teorema de Poincaré - Bendixson, que sólo es válido para sistemas autónomos de dimensión dos, y se completa con el estudio de distintos ejemplos y aplicaciones de éstos sistemas.

12.4.1. Teorema de Poincaré - Bendixson

En los sistemas de dimensión dos es de gran belleza y utilidad el **teorema de Poincaré-Bendixson** que describe los conjuntos límite de las órbitas afirmando que, bajo determinadas condiciones, existen soluciones periódicas, cuyas trayectorias o son puntos críticos o ciclo-límites o unión de estos conjuntos.

Se ha visto que un sistema lineal homogéneo puede tener un atractor si el origen es un punto asintóticamente estable. En \mathfrak{R}^2 se han visto ejemplos de

órbitas acotadas o de elipses concéntricas que no son atractores. Si el sistema es casi lineal puede tener un atractor que sea un punto límite asintóticamente estable, o puede tener un ciclo límite o la unión de puntos críticos y ciclos límites que sean atractores.

El siguiente teorema, el teorema de Poincaré – Bendixson dice como deben ser los atractores para sistemas autónomos en \mathfrak{R}^2 .

Teorema 12.4.2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

donde f y g son funciones continuas. Si una trayectoria permanece acotada cuando t tiende a infinito, entonces la trayectoria es un punto crítico o un ciclo límite, o se aproxima a un punto crítico o a un ciclo límite.

Este interesante teorema dice que si un sistema autónomo de dimensión dos tiene un atractor, necesariamente éste es unión de puntos límites o ciclos límites, y en consecuencia, no puede ser un atractor extraño. Esto no es cierto si el sistema es de dimensión tres, como se estudiará en la sección sexta (12.6.3), al analizar el sistema de Lorenz. Con sistemas de dimensión superior a dos pueden aparecer atractores extraños y una dinámica de tipo caótico.

12.4.2. Dinámica del péndulo

En esta sección se utiliza la teoría de los sistemas casi lineales para estudiar la dinámica de un péndulo que ya se estudió en el capítulo 7, apartado 7.2.3.

Se supone un péndulo de longitud L , de masa m y que g es la aceleración debida a la gravedad. Sea $\varphi(t)$ el ángulo del péndulo con la vertical en el tiempo t .

12.4.2.1. Dinámica del péndulo ideal, sin rozamiento ni fuerzas externas

De momento se supone que no existe rozamiento, ni fuerzas externas, es decir, el péndulo está en el vacío únicamente bajo la influencia de la gravedad. En estas condiciones el movimiento del péndulo está determinado por la ecuación diferencial:

$$m \cdot L \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

Transformando la ecuación diferencial de orden dos en un sistema, denominando $x = \varphi$ e $y = \varphi'$, se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen}x \end{cases} \quad (12.4.1)$$

que se denomina **sistema del péndulo**. Se observa que este sistema no es lineal debido al término en $\operatorname{sen} x$, y no es sencillo encontrar las soluciones de (12.4.1).

Sin embargo es un sistema casi lineal en el origen.

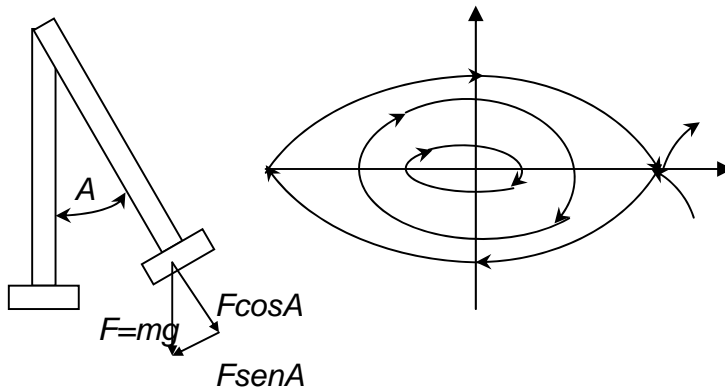


Figura 12.14: Diagrama de fase del péndulo sin rozamiento ni fuerza externa.

Teorema 12.4.1:

El sistema del péndulo (12.4.1) es un sistema casi lineal en el origen.

Demostración:

La primera ecuación del sistema es lineal. La segunda ecuación se puede escribir como: $y' = (-g/L) \cdot x + f(x, y)$ siendo $f(x, y) = (g/L) \cdot x - (g/L) \cdot \text{sen } x$.

La función $f(x, y)$ es continua y con derivadas parciales continuas. Se anula en el origen: $f(0, 0) = 0$, y sus derivadas parciales $f_x(x, y) = (g/L) - (g/L) \cdot \cos x$, $f_y(x, y) = 0$, se anulan en el origen: $f_x(0, 0) = (g/L) - (g/L) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, por lo que el sistema del péndulo es casi lineal en el origen. \square

Se estudia el sistema lineal auxiliar para analizar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} x \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

de autovalores: $\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} i$, que son imaginarios puros, por lo que el origen es un centro en el sistema lineal auxiliar, y por tanto es un punto crítico estable, aunque no asintóticamente estable. El diagrama de fase está formado por las órbitas de las soluciones que son elipses.

La velocidad angular es positiva cuando el péndulo se mueve hacia la derecha y negativa si se mueve hacia la izquierda.

12.4.2.2. Dinámica del péndulo con rozamiento

Se supone que existe rozamiento debido a la fricción con el aire o por otro medio. La ecuación diferencial es entonces:

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c \cdot L \cdot \frac{d\varphi}{dt} + m \cdot g \cdot L \cdot \text{sen}\varphi = 0.$$

Transformando la ecuación de orden dos en un sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} \text{sen}x - \frac{c}{mL} y \end{cases} \quad (12.4.2.)$$

Este nuevo sistema del péndulo tampoco es lineal, pero es casi lineal en el

origen, siendo $f(x, y) = (g/L)x - (g/L) \cdot \text{sen } x$ y su sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L}x - \frac{c}{mL}y \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL} \end{pmatrix}$$

de autovalores: $\lambda = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4gm^2L}}{2mL}$ y $\mu = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4gm^2L}}{2mL}$.

La naturaleza del punto crítico depende de los valores de λ y μ , que a su vez depende de los valores de c , m y L . Si $c > 0$, (con m y L positivos) se observa que ambos autovalores son negativos, y por tanto el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Esta consecuencia es realista, pues al haber resistencia del aire, todas las soluciones tienden hacia la posición vertical.

El sistema 12.4.2 tiene puntos críticos distintos del $(0, 0)$, son los puntos $\mathbf{v}_n = (n\pi, 0)$ para n entero. Se trasladan los ejes a dichos puntos: $x = n\pi + u$; $y = v$ y el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L} \text{sen}(n\pi + u) - \frac{c}{mL}v \end{cases} \quad (12.4.3)$$

Teorema 12.4.2:

El sistema del péndulo (12.4.3) es un sistema casi lineal en los puntos $\mathbf{v}_n = (n\pi, 0)$ para n entero.

Demostración:

La primera ecuación del sistema es lineal. La segunda ecuación se puede escribir como:

$$v' = (-g/L) \cdot u - (c/mL) \cdot v + f(u, v)$$

siendo $f(u, v) = (g/L) \cdot u - (g/L) \cdot \text{sen}(n\pi + u)$.

La función $f(u, v)$ es continua y con derivadas parciales continuas. Se anula en el origen: $f(0, 0) = 0$, y sus derivadas parciales $f_x(x, y) = (g/L) - (g/L) \cdot \text{cos}(n\pi + u)$, $f_y(x, y) = 0$, se anulan en el origen: $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, por lo que el sistema del péndulo es casi lineal en el nuevo origen. \square

Para n par el sistema es idéntico al caso del origen, y para n impar se tiene $f(u, v) = (g/L) \cdot u + (g/L) \cdot \text{sen } u$. Se analiza el comportamiento del péndulo en el punto $\mathbf{v}_1 = (\pi, 0)$. El sistema lineal auxiliar es:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{g}{L} u - \frac{c}{mL} v \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & \frac{-c}{mL} \end{pmatrix}$$

de autovalores: $\lambda = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4gm^2L}}{2mL}$ y $\mu = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4gm^2L}}{2mL}$.

Ahora, en todos los casos, los autovalores son reales, pues el término de dentro de la raíz es positivo, pero se observa que λ es negativo, mientras que μ es positivo: $\lambda < 0 < \mu$. En consecuencia el punto es un punto de silla, punto crítico inestable.

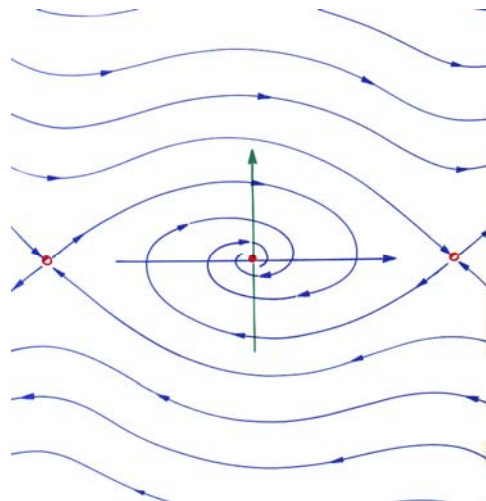


Figura 12.15: Diagrama de fase del péndulo con rozamiento

Si ahora se quiere estudiar lo que ocurre cuando se tiene una fuerza externa, el sistema obtenido ya no es autónomo. Su resolución se complica. Se pueden obtener soluciones con el ordenador usando programas especiales.

12.4.3. Dinámica de poblaciones: sistemas de *Lotka-Volterra*

Vito Volterra (1 860 – 1 940), importante matemático italiano, utilizó como modelo para explicar la dinámica de una población en la que coexisten unas presas y unos depredadores, un sistema de ecuaciones diferenciales. Se habían recogido datos estadísticos que mostraban que en el mar Adriático durante la primera guerra mundial habían aumentado porcentualmente más la cantidad de unos peces no comestibles (depredadores) que los que habían dejado de capturarse, comestibles (presas), al disminuir la actividad pesquera. Este modelo se ha utilizado con éxito, por ejemplo, para explicar el comportamiento de las poblaciones de conejos y zorros o para explicar el incremento de la población de tiburones en el Mediterráneo durante la primera guerra mundial al haber disminuido la pesca, y por tanto aumentado las presas. Explica también como el uso de insecticidas puede hacer crecer el número de insectos dañinos al matar también a sus depredadores naturales.

Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

- Si no hay depredadores, las presas, x , no tienen limitaciones en su crecimiento: $x' = ax$, $a > 0$.
- La presencia de los depredadores, y , hace disminuir el número de presas de forma proporcional al número de depredadores:

$$x' = ax - bxy, \quad a, b > 0.$$

- Los depredadores se alimentan exclusivamente de las presas, por lo

que en ausencia de ellas, se extinguirían: $y' = -cy$, $c > 0$.

- Cuantas más presas hay, más aumenta el número de depredadores:

$$y' = -cy + dxy, \quad c, d > 0.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}, \quad a, b, c, d > 0$$

se conoce con el nombre de Lotka-Volterra debido a que ya había sido propuesto por Alfred J. Lotka como modelo de ciertas reacciones químicas.

Es un sistema bidimensional autónomo. El origen es un punto crítico, que se explica porque si no hay ni presas ni depredadores, nunca los habrá. El sistema sólo tiene sentido físico para valores positivos de las variables x e y , pues no puede haber un número negativo de presas ni de depredadores. Además, si en el instante inicial una de las variables es nula, la otra si es presa, aumenta exponencialmente, y disminuye exponencialmente si es depredador, por lo que sus trayectorias recorren los semiejes positivos.

Para obtener los puntos de equilibrio se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases}$$

y se obtienen dos puntos de equilibrio, el origen $(0, 0)$, y el punto $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. El origen es un punto de equilibrio inestable que indica que si no existen ni presas ni depredadores, nunca los habrá. El otro punto es de más interés, pues indica que si se llegara a esa posición, las presas sería devoradas y los depredadores tendrían alimento, pero ambas poblaciones se mantendrían estables. Se trasladan los ejes a este punto, $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ y se busca el sistema lineal asociado cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

de autovalores imaginarios puros: $\pm i\sqrt{ac}$ por lo que las órbitas son cerradas y el punto es un centro, punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable, que corresponde con soluciones periódicas. Este tipo de equilibrio no es posible garantizar que se mantiene para el sistema no lineal de partida.

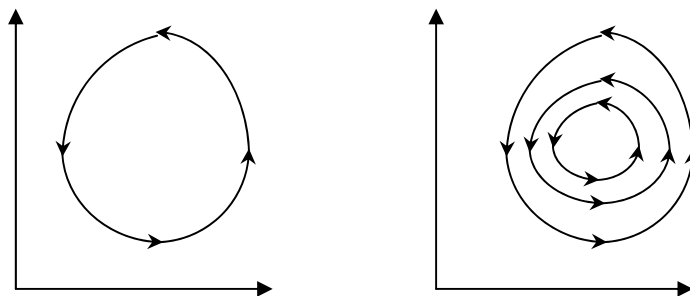


Figura 12.16: Sistema presa – depredador de Lotka-Volterra.

Analizando el diagrama de fase, es posible hacerse una idea del

comportamiento del sistema. Por ejemplo observando la región inferior derecha, es decir si x es “grande” e y es “pequeño”, se comprueba que ambas poblaciones, de presas y de depredadores aumentan por la abundancia de presas y la escasez de enemigos. El diagrama sugiere un movimiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio.

La solución de este sistema ya se comentó en el capítulo 7, apartado 7.2.6 y se resolvió en el capítulo 9, apartado 9.3.3 integrando la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy}.$$

Se comprueba que las poblaciones de depredadores y presas oscilan periódicamente con amplitud y periodo que dependen de las condiciones iniciales.

Al interpretar el sistema casi lineal de partida, al ser el punto de equilibrio del sistema lineal asociado un centro, que no se conserva, puede ocurrir que sea un punto en espiral estable, un punto en espiral inestable o que exista un ciclo límite (en el caso de introducir la posibilidad de que el punto de equilibrio sea repulsor, pero las órbitas sean atraídas por el ciclo límite como se observa en la figura 12.17).

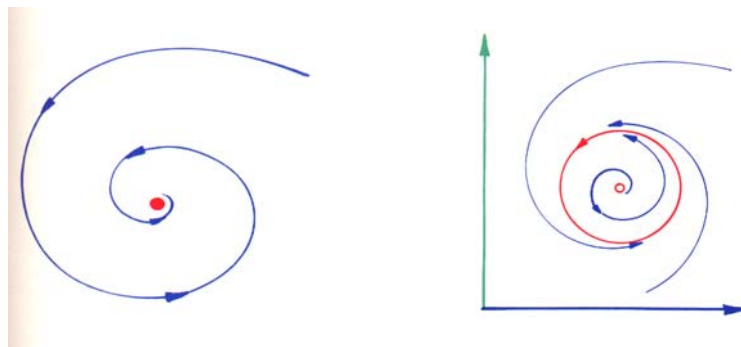


Figura 12.17: Sistema presa – depredador de Lotka-Volterra.

El modelo se puede hacer más realista añadiendo nuevas hipótesis, como que las presas compitan entre sí por el alimento siguiendo una ecuación logística:

$$x' = x(a - \lambda x) - bxy.$$

Se puede suponer también que los depredadores siguen una ecuación logística. Al estudiar este nuevo sistema aparece un nuevo punto crítico en el eje de abscisas: $\left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ y depende de los valores de los parámetros su determinación.

Al estudiar el sistema lineal asociado, al trasladar los ejes a este punto, se tiene que si $a/\lambda < c/d$ entonces es un punto asintóticamente estable y si $a/\lambda > c/d$ entonces es un punto inestable.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.4.1:

Estudiar la dinámica del sistema de Van der Pol siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - x^2y \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal y tiene un único punto crítico en el origen con $f_2(x, y) = -x^2y$, que se anula en el origen así como sus derivadas parciales primeras, siendo el sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases},$$

cuyos autovalores son: $\lambda = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Son autovalores complejos, con parte real positiva, luego las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose del origen, que es un punto inestable. Por tanto, cerca del origen, las soluciones del sistema de Van der Pol también se alejarán en espiral.

Ejemplo 12.4.2:

Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

Este sistema modela la dinámica de dos poblaciones que compiten por los recursos. Se comprueba que un aumento de una de las especies hace disminuir a la otra.

Si se hace $x = 0$, entonces $x' = 0$, e $y' = 3y(1 - y/3)$, un modelo logístico de población siendo su diagrama de fase el eje de ordenadas con puntos de equilibrio en $(0, 0)$ y $(0, 3)$. Igualmente si $y = 0$, entonces $y' = 0$, e $x' = 2x(1 - x/2)$, un modelo logístico de población siendo su diagrama de fase el eje de abscisas con puntos de equilibrio en $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Al modelizar poblaciones y no tener sentido los

valores negativos y al coincidir los ejes con curvas solución las soluciones que interesan son únicamente las del primer cuadrante.

Se resuelve el sistema para hallar los puntos de equilibrio y se obtiene que son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$ y $(1, 1)$.

El punto $(1, 1)$ tiene su interés. Se traslada a él el origen mediante: $u = x - 1$, $v = y - 1$, y se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - v - u^2 - uv \\ \frac{dv}{dt} = -2u - v - v^2 - 2uv \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal con $f_1(u, v) = -u^2 - uv$ y $f_2(u, v) = -v^2 - 2uv$, que se anulan en el origen así como sus derivadas parciales primeras, siendo el sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - v \\ \frac{dv}{dt} = -2u - v \end{cases},$$

cuyos autovalores son: $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$, uno positivo y el otro negativo por lo que $(u, v) = (0, 0)$ es un punto de silla de este sistema lineal asociado. Por tanto, cerca del punto $(1, 1)$, las soluciones del sistema no lineal se comportarán como un punto de silla.

Ejercicios

12.11. Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 30y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

12.12. En general un sistema de Lotka – Volterra que modela el comportamiento de dos especies en competencia es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Bx^2 - Cxy \\ \frac{dy}{dt} = Dy - Ey^2 - Fxy \end{cases}$$

donde x, y son positivas y los parámetros A, B, C, D, E y F son positivos.

Para que valores de los parámetros existe al menos un punto de equilibrio para $x > 0$ y $y > 0$.

12.5. ESTABILIDAD EN SISTEMAS HAMILTONIANOS O CONSERVATIVOS, EN SISTEMAS DISIPATIVOS Y EN SISTEMAS GRADIENTE

En esta sección se estudian unos sistemas que deben su nombre al matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805 – 1865), en los que se conserva la energía, otros se que deben al matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 – 1918) en los que la energía se disipa, y otros denominados sistemas gradiente.

12.5.1. Sistemas conservativos y funciones de Hamilton

Definición 12.5.1:

Un sistemas de ecuaciones diferenciales se denomina **sistema hamiltoniano** o **sistema conservativo** si existe una función real $H(x, y)$ que verifica, para todo x e y , que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

A la función $H(x, y)$ se la denomina **función de Hamilton** para el sistema.

Proposición 12.5.1:

La función $H(x, y)$ se conserva en cualquier solución del sistema.

Demostración:

Sea $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema, entonces, por la regla de la cadena y la definición, se sigue que:

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0. \quad \square$$

Por tanto las curvas solución del sistema se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de la función $H(x, y)$, con lo que para esbozar el diagrama de fase de estos sistemas, basta con dibujar las curvas de nivel de la función hamiltoniana. Por desgracia es difícil encontrar sistemas que sean hamiltonianos. A continuación se estudia cómo determinar si un sistema lo es.

Proposición 12.5.2:

Si $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$, entonces el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

es hamiltoniano.

Demostración:

Si se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

y se quiere saber si existe una función $H(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ g(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Si dicha función tiene derivadas segundas continuas verifica la igualdad de sus derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}. \quad \square$$

Una vez que se ha comprobado que un sistema es hamiltoniano, se puede construir la función H sin más que aplicar la definición e integrar:

$$\text{Como } f(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \text{ entonces } H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x), \text{ donde } C(x)$$

es una función que no depende de la variable y .

$$\text{Como } -g(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f(x, y) dy + C(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy + C'(x),$$

despejando C' e integrando se obtiene $C(x)$ y por tanto $H(x, y)$.

Proposición 12.5.3:

Si el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ es hamiltoniano, entonces sus puntos de

equilibrio no pueden ser ni atractores ni repulsores.

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema, entonces su matriz jacobiana es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}.$$

Por la igualdad de las derivadas cruzadas, la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

siendo su ecuación característica: $\lambda^2 - a^2 - bc = 0$, y sus autovalores

$\lambda = \pm \sqrt{a^2 + bc}$. Caben tres posibilidades:

Caso 1: $a^2 + bc > 0$. Los dos autovalores son reales y tienen distinto signo. El punto de equilibrio es inestable y es un punto de silla.

Caso 2: $a^2 + bc < 0$. Los dos autovalores son imaginarios puros, su parte real es nula. El punto de equilibrio es estable, pero no es asintóticamente estable, es un centro.

Caso 3: $a^2 + bc = 0$. El 0 es un autovalor doble. \square

12.5.2. Sistemas disipativos y funciones de Lyapunov

Los sistemas hamiltonianos o conservativos resultan ser una idealización de la realidad. Un péndulo no permanece indefinidamente oscilando. Sin embargo, el péndulo ideal sin rozamiento (estudiado en la sección 12.4.2 y en el ejemplo 12.5.2), se comprueba que es un sistema de Hamilton y permanece oscilando indefinidamente, y lo mismo ocurre con el oscilador armónico sin rozamiento que se estudia en el ejemplo 12.5.1. La idea de la función de Hamilton puede generalizarse utilizando las funciones de Lyapunov.

Definición 12.5.2:

Una función $L(x, y)$ es una **función de Lyapunov** para un sistema de ecuaciones diferenciales si, para cada solución $(x(t), y(t))$ que no sea una solución de equilibrio del sistema, se verifica que:

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0,$$

siendo la desigualdad estricta para todo t , salvo para un conjunto finito de valores de t . Se dice entonces que el sistema es **disipativo**.

En el caso de sistemas hamiltonianos, la derivada de la función de Hamilton es cero a lo largo de cualquier solución, ahora se impone que la función de Lyapunov nunca crezca, y que disminuya a lo largo de cualquier solución.

Estas funciones son de gran ayuda al dibujar el diagrama de fase, pues las soluciones deben cortar los conjuntos de nivel de las funciones de Lyapunov, pasando de valores mayores a menores.

No todos los sistemas tienen funciones de Lyapunov, o es sencillo encontrarlas. En los ejemplos que se verán al final de este apartado del oscilador armónico amortiguado, la función de Hamilton se transforma en la función de Lyapunov. En ese caso la energía no se conserva sino que se **disipa**.

12.5.3 Sistemas gradiente

Definición 12.5.3:

Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama un **sistema gradiente** si existe una función $G(x, y)$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \end{cases} \text{ para todo } (x, y).$$

Proposición 12.5.4:

La función $G(x, y)$ es creciente a lo largo de cualquier solución del sistema que no sea un punto crítico.

Demostración:

Sea $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema que no sea un punto crítico,

entonces, por la regla de la cadena y la definición, se sigue que:

$$\frac{dG(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \geq 0. \quad \square$$

Por tanto el valor de $G(x, y)$ aumenta a lo largo de las curvas solución del sistema que no sean puntos críticos. En consecuencia la función $-G(x, y)$ disminuye a lo largo de las soluciones y por tanto es una función de Lyapunov para ese sistema. Sin embargo no todos los sistemas que poseen función de Lyapunov provienen de funciones opuestas de sistemas gradientes. En el ejemplo 12.5.3 puede verse un sistema con función de Lyapunov en el que el origen es un atractor espiral, por lo que no puede deducirse de un sistema gradiente, como consecuencia de la siguientes proposición:

Proposición 12.5.5:

Si el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ es un sistema gradiente, entonces sus puntos de

equilibrio no pueden ser ni centros ni nodos espirales.

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema, entonces su matriz jacobiana asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}.$$

Por la igualdad de las derivadas cruzadas, la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

siendo su ecuación característica: $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$, y sus autovalores

$$\lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

El discriminante es siempre positivo por lo que los autovalores son siempre reales. En consecuencia los sistemas gradiente no pueden tener ni centros ni espirales. \square

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.5.1:

Estudiar si el sistema siguiente del oscilador armónico es hamiltoniano, y si lo es, determinar su función de Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx \end{cases}.$$

Al ser $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = -kx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, y en consecuencia el

sistema es hamiltoniano, siendo:

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x) = y^2/2 + C(x) = y^2/2 + kx^2/2.$$

Los conjuntos de nivel de la función $H(x, y)$ son elipses de centro el origen.

La variable x representa el desplazamiento y la variable y la velocidad.

Ejemplo 12.5.2:

Estudiar si el sistema siguiente del péndulo simple, sin rozamiento, es hamiltoniano, y si lo es, determinar su función hamiltoniana:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g \operatorname{sen} x \end{cases}.$$

Al ser $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = -g \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, y en consecuencia el

sistema es hamiltoniano, siendo:

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x) = y^2/2 + C(x) = y^2/2 - g \cdot \cos x.$$

La variable x representa el ángulo que se desplaza el péndulo y la variable y su velocidad.

Los puntos de equilibrio $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ son centros. Cerca y alrededor de ellos las soluciones son periódicas, son soluciones oscilantes. Los puntos de

equilibrio $\pm\pi, \pm3\pi, \dots$ son puntos de silla. Las soluciones que pasan por ellos son separatrices. Estas soluciones separan a otras soluciones rotatorias que se tendrían para velocidades iniciales altas.

Ejemplo 12.5.3:

Comprobar si en el sistema siguiente la función $L(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov del sistema, y determinar la dinámica del mismo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \end{cases}.$$

Para comprobar si $L(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov del sistema se calcula su derivada a lo largo de cualquier solución $(x(t), y(t))$ del sistema:

$$\frac{dL(x(t), y(t))}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-x - y) = -2(x^2 + y^2) \leq 0$$

anulándose únicamente en el origen, por lo que la función $L(x, y)$ es decreciente a lo largo de cualquier solución que no sea un punto de equilibrio, por lo que es una función de Lyapunov.

Para estudiar la dinámica del sistema se calculan los autovalores $\lambda = -1 \pm i$, por lo que el origen es un atractor en espiral, por tanto no puede ser $L = -G$ de un sistema gradiente.

Ejercicios

12.13. Estudiar si son hamiltonianos los sistemas siguientes y si lo son, determinar su función de Hamilton.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases} \quad \text{Solución: NO es hamiltoniano}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2 \end{cases} \quad \text{Solución: } H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 + x^3/3$$

12.14. Comprobar que la función $L(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ es una función de Liapunov

para el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -y^3 \end{cases}$$

12.6. DINÁMICAS CAÓTICAS

En esta sección se estudian nuevos ejemplos, ahora de dimensión mayor que dos, en los que ya no se verifica el teorema de Poincaré – Bendixon, y en los que aparecen nuevos fenómenos de gran interés, como las dinámicas caóticas.

12.6.1. El sistema de Lorenz

En la atmósfera ocurren fenómenos de convección, en los que el aire se mueve debido a las diferencias de temperatura entre unos lugares y otros. Cuando Lorenz escribió su artículo dijo la célebre frase de: *Puede el vuelo de una mariposa en Brasil formar un tornado en Tejas*, y desde entonces se habla del **Efecto Mariposa**. En este apartado se estudia el comportamiento del sistema de Lorenz.

En 1916 Lord Rayleigh descubrió el número que lleva su nombre dado por:

$$R_{\alpha} = g \cdot \alpha \cdot H^3 \cdot (\Delta T) \cdot \nu^{-1} \cdot k^{-1}. R_c = \pi^4 \frac{(1 + a^2)^3}{a^2}$$

que depende, entre otros parámetros, de la gravedad, g , y de las diferencias de temperaturas, ΔT .

Cuarenta años más tarde, en 1962, Barry Saltzman obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales para describir la convección. Un año después Edward Lorenz estudió su famosa versión.

Definición 12.6.1:

Se denomina **sistema de Lorenz** al sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (12.6.1)$$

donde t es el tiempo y las variables x , y y z no son coordenadas espaciales sino que x es proporcional a la intensidad del movimiento de convección, y es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la corriente ascendente y la descendente y z es proporcional a la distorsión.

Las constantes son:

- σ es el número de Prandtl y vale ν/k , $\sigma = \nu/k$, siendo:
 - ν = Coeficiente de viscosidad.
 - k = Coeficiente de conductividad térmica.
- $r = R_\alpha/R_c$ siendo R_α y R_c los números de Lord Rayleigh.
- $b = 4/(1 + a^2)$.

Se observa que los tres coeficientes σ , r y b son positivos, r es función de ΔT y además es mayor que 1, $r > 1$. Lorenz realizó un estudio detallado del sistema (12.6.1) con la ayuda del ordenador.

Teorema 12.6.1:

El sistema de Lorenz es casi lineal en el origen.

Demostración:

El sistema lineal asociado es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} = rx - y \\ \frac{dz}{dt} = -bz \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

por lo que $f_2(x, y, z) = -xz$, y $f_3(x, y, z) = xy$, funciones continuas que se anulan en $(0, 0, 0)$, y cuyas derivadas parciales primeras también se anulan en $(0, 0, 0)$. \square

Se estudia el sistema lineal asociado, y se calculan sus autovalores, que son:

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

$$\lambda_3 = -b.$$

Se observa que siempre $\lambda_3 = -b$, por lo que es un autovalor real y negativo.

Se analizan los siguientes tres casos:

- Caso 1: $0 < r < 1 \Rightarrow (\sigma - 1)^2 + 4 \cdot r \cdot \sigma = \sigma^2 - 2\sigma + 1 + 4 \cdot r \cdot \sigma = \sigma^2 + 2\sigma + 1 - 4\sigma + 4 \cdot r \cdot \sigma = (\sigma + 1)^2 + 4 \cdot \sigma \cdot (r - 1) < (\sigma + 1)^2$ pues $(r - 1) < 0$. Por tanto λ_1 y λ_2 son autovalores reales y negativos. El origen es un nodo asintóticamente estable. La interpretación física es que la convención se anula al aumentar el tiempo.
- Caso 2: $r > 1 \Rightarrow (\sigma - 1)^2 + 4 \cdot r \cdot \sigma = (\sigma + 1)^2 + 4 \cdot \sigma \cdot (r - 1) > (\sigma + 1)^2$. Por tanto λ_1 es ahora un autovalor positivo, mientras λ_2 y λ_3 son autovalores reales y negativos. El origen es un punto de silla, un nodo inestable.
- Caso 3: $r = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, mientras λ_2 y λ_3 son autovalores reales y negativos, por lo que el origen es una solución estable.

Para $r = 1$ hay un cambio en la dinámica del sistema, por lo que $r = 1$ es una **bifurcación** para la familia de los sistemas de Lorenz considerando a r como parámetro, pues para valores de r menores de uno el origen es un punto crítico asintóticamente estable y para valores de r mayores de uno, inestable.

Para $r > 1$ hay más puntos críticos.

Teorema 12.6.2:

Si $r > 1$, además del origen, existen dos nuevos puntos críticos P y Q para el sistema de Lorenz dados por: $P = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ y $Q = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Demostración:

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \sigma y - \sigma x = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$, entonces $y = 0$ y $z = 0$, siendo el origen $(0, 0, 0)$ la solución obtenida.

Pero si x es distinto de cero entonces: $y = x \Rightarrow z = r - 1 \Rightarrow x^2 = y^2 = b(r - 1)$,

por lo que se obtienen dos puntos críticos:

$$P = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ y } Q = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1). \quad \square$$

Para estudiar la dinámica del sistema en las proximidades de ellos, se trasladan los ejes al punto P :

$$\begin{cases} x = \sqrt{b(r-1)} + u \Rightarrow x' = u' = -\sigma x + \sigma y = -\sigma u + \sigma v \\ y = \sqrt{b(r-1)} + v \Rightarrow y' = v' = rx - y - xz = u - v - \sqrt{b(r-1)} w \\ z = r - 1 + w \Rightarrow z' = w' = xy - bz = \sqrt{b(r-1)} u + \sqrt{b(r-1)} v - bz. \end{cases}$$

La matriz asociada es:

$$A_P = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Por simetría, la ecuación característica de Q es la misma que la de P , por lo que ambos puntos, P y Q son ambos asintóticamente estables o son ambos inestables o ninguna de las dos cosas. Se analiza la dinámica de P .

Si $\sigma > b + 1$ entonces $\sigma - b - 1 > 0$. Denominando $r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ entonces $r^* > 1$ cuando $\sigma > b + 1$ y $\sigma > 1$.

Si $r^* > r > 1$ entonces las tres raíces tienen negativa su parte real por lo que en este caso P es un punto crítico asintóticamente estable.

Si $r > r^*$ y $r > 1$ dos de las raíces tienen su parte real positiva, en consecuencia P es un punto crítico inestable. En este caso el sistema tiene tres puntos críticos, el origen, P y Q , y los tres son inestables. Para $r = r^*$ se tiene, de nuevo, una bifurcación, pues los puntos críticos P y Q pasan de ser asintóticamente estables a ser inestables, cuando r pasa de ser menor que r^* a ser mayor.

El estudio de las órbitas de las soluciones es complicado. Se denomina **familia de Lorenz** a los sistemas con $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r > 1$. Por ejemplo, para $\sigma = 10$, $b = 8/3$, entonces $\sigma > b + 1$, $r^* = 470/19 \cong 24,74$, $r = 28$ entonces $r > r^*$, en consecuencia los tres puntos críticos son inestables. La superficie en la que la órbita reside es el **atractor de Lorenz** cuya dimensión de Hausdorff es 2,07. Es un

atractor extraño. Pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden, al cabo de un cierto tiempo, tener comportamientos muy diferentes, por lo que el atractor es caótico, al haber una dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.

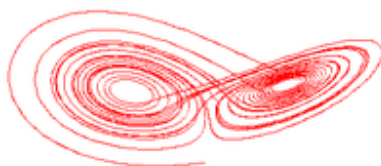


Figura 12.18: Atractor de Lorenz, con valores $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

El sistema de Lorenz ha sido estudiado durante décadas y se han localizado varias bifurcaciones para $r > 28$. Las órbitas se clasifican en distintos tipos. Se dice que una órbita es del tipo ab^2 si gira una vez alrededor de uno de los puntos críticos y dos veces alrededor del otro. Francheschini en 1980 identificó una órbita estable del tipo ab^2 para $r \cong 100,75$.

En la actualidad sigue habiendo cuestiones abiertas relativas al sistema de Lorenz y su dinámica.

Ejercicios

- 12.15. En el sistema de Lorenz (12.6.1) trasladar los ejes al punto Q y estudiar la dinámica en un entorno de dicho punto.

12.7. EJERCICIOS

12.16. Hacer un esbozo del diagrama de fase de las siguientes ecuaciones diferenciales. Identificar los puntos de equilibrio como atractores, repulsores o puntos de silla:

a) $y' = (3 + y)$

b) $y' = 3y^2 \cdot (2 + y)$

c) $y' = 3y^3 \cdot (2 + y)^2$

d) $y' = y \cdot (3 - y) \cdot (2 + y)$.

12.17. En los sistemas lineales siguientes determinar la solución general, clasificar el origen como punto fijo y dibujar el diagrama de fase:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases} .$$

(Solución: $y(t) = (K_1 + K_2 t) \cdot e^{5t}$. Repulsor)

b)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases} .$$

(Solución: $y(x) = e^{2x} \cdot ((-C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 - C_2) \cdot \cos x)$; $z(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \sin x +$

$C_2 \cdot \cos x)$. Nodo repulsor en espiral).

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$(Solución: $x(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{-2t}$; $y(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{3t} - K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-t}$; $z(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{3t} -$$$

$K_2 e^{-2t} - K_3 e^{-t}$; Punto de silla).

12.18. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes determinando la solución general, clasificando el punto crítico y dibujando el diagrama de fase:

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = -y + 4z \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

12.19. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes, determinar la solución general, dibujar el diagrama de fase y analizar los subespacios E ,

P y N:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases} .$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} .$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{dz}{dt} = -y \end{cases} .$$

12.20. En los sistemas lineales siguientes, calcular los autovalores y los autovectores, dibujar las rectas que determinan dichos autovectores, determinar la solución general y dibujar el diagrama de fase.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y \end{cases} .$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases} .$$

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} .$$

$$d) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases} .$$

12.21. Los sistemas siguientes modelizan poblaciones de especies, unas cooperativas y otras en competencia. Indicar qué modelos son de cada tipo. Determinar los puntos de equilibrio. Estudiar su dinámica:

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy \end{cases} .$$

$$b) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 4y - xy - y^2 \end{cases} .$$

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy \end{cases} .$$

$$d) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 2y - xy - y^2 \end{cases} .$$

12.22. Estudiar la dinámica de la ecuación diferencial del generador de válvulas:

$$L \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + R \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{C} y = \frac{1}{C} f(M, y')$$

donde L , C , R y M son constantes positivas, analizando el sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -w^2 x - hy + g(y) \end{cases}$$

en el origen.

- 12.23. Estudiar la dinámica de la ecuación logística $y' = ay - by^2$, donde a y b son constantes positivas.
- 12.24. Estudiar la dinámica del sistema de Lotka-Volterra en un entorno de su punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - d \end{cases}$$

donde a , b , c y d son constantes positivas y comprobar que tiene un punto de equilibrio en $(d/c, a/b)$. Trasladar los ejes a dicho punto y comprobar que los valores propios son imaginarios puros. Comprobar que:

$$L(x, y) = cx + by - d \cdot \log x - a \cdot \log y$$

es una función de Liapunov para dicho sistema en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$.

- 12.25. Se considera el movimiento oscilatorio de un edificio alto, un rascacielos flexible que oscila cuando hay fuertes ráfagas de viento. Sea $y(t)$ el desplazamiento en metros del edificio, siendo $y = 0$ la posición vertical. Se modela mediante la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P \cdot \frac{dy}{dt} + Q \cdot y = 0$$

donde $P = 0,2$ y $Q = 0,25$. Estudiar el sistema lineal asociado. Dibujar el diagrama de fase. Comprobar que el sistema es estable y el origen es un punto de equilibrio estable en espiral.

- 12.26. Se considera el movimiento oscilatorio de un edificio alto, un rascacielos flexible que oscila cuando hay fuertes ráfagas de viento. Sea $y(t)$ el desplazamiento en metros del edificio, siendo $y = 0$ la posición vertical. Se modela mediante la ecuación del oscilador armónico, pero en esta ocasión se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad actuando sobre el voladizo, con lo que se añade el término independiente y^3 :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P \cdot \frac{dy}{dt} + Q \cdot y = y^3$$

donde $P = 0,2$ y $Q = 0,25$. Estudiar el sistema lineal asociado. Dibujar el diagrama de fase. Comprobar que si la condición inicial es suficientemente próxima al origen entonces se comporta como en el ejercicio anterior, pero si no lo es, el comportamiento de las soluciones es inquietante. Encontrar nuevos puntos críticos y comprobar que son puntos de silla. Interpretar

físicamente el resultado.

- 12.27. Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 150x - x^2 - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = 100y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

- 12.28. Estudiar si es hamiltoniano el sistema siguiente y si lo es, determinar su función de Hamilton.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \operatorname{sen} y + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -\cos y \end{cases}$$

(Solución: $H(x, y) = y^2 + x \cdot \cos x$)

- 12.29. Estudiar los valores de las constantes a y b para los que el origen es un punto crítico estable en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + ay \\ \frac{dy}{dt} = bx - 2y \end{cases}$$

- 12.30. Estudiar los valores de la constante a para los que el origen es un punto crítico estable en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - 2y \\ \frac{dy}{dt} = ay - 2z \\ \frac{dz}{dt} = az - 2x \end{cases}$$

12.31. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 2y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4 \end{cases}$$

12.32. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y^4 \end{cases}$$

12.33. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + y^2 \end{cases}$$

12.34. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2y^4 \end{cases}$$

12.35. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x^4 \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 7y^3 \end{cases}$$

12.36. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^5 - 2y^2 \end{cases}$$

12.37. El sistema siguiente se refiere a un sistema depredador – presa. Describir el comportamiento de la población de presas si se han extinguido los depredadores:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy \end{cases}$$

12.38. El sistema anterior referido a un sistema depredador – presa, describir el comportamiento de la población de depredadores si se han extinguido las presas.

12.39. El sistema siguiente se refiere a un sistema depredador – presa. Buscar los puntos de equilibrio y clasificarlos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 10xy \end{cases}$$

12.40. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

12.41. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

12.42. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

12.43. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

12.44. Convertir la ecuación diferencial siguiente: $y'' - y = 0$ en un sistema y dibujar el diagrama de fase asociado.

12.45. Obtener el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial siguiente: $y'' + 3y = 0$ y dibujar el diagrama de fase.

12.46. Calcular los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2x^2 - 2y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 7y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - 12 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = y - 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 4 \\ \frac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En la sección anterior se han estudiado diferentes técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales que se ajustaban a un patrón concreto. Sin embargo muchos de los problemas que realmente se presentan en la ingeniería no se pueden resolver mediante estas técnicas, puesto que sólo algunos tipos de ecuaciones diferenciales admiten soluciones en términos de funciones elementales. Las ecuaciones diferenciales aparecen en el diseño de modelos matemáticos de los fenómenos físicos, técnicos, químicos, biológicos, etc. Sin embargo, hasta la segunda mitad del siglo XX eran escasas las ecuaciones diferenciales que se podían resolver de manera explícita.

Es posible modelar la distribución de temperaturas de un sólido, la velocidad de partículas en un fluido, las tensiones de un cuerpo que se deforma, el flujo alrededor del ala de un avión, el impacto de un automóvil contra un obstáculo, el crecimiento de especies animales con presas y depredadores o la evolución del precio de un artículo en el mercado financiero.

La simulación numérica de estos fenómenos tan diferentes permite rentabilizar esfuerzos y mejorar los costes que la experimentación real originaría. En consecuencia, siempre que no sea posible obtener una solución

exacta, (por ejemplo: $y' = x^2 + y^2$) o cuando ésta tenga escaso interés, o sea demasiado complicada de conseguir, o aparezcan integrales que no sean elementales (por ejemplo: $y'' + \operatorname{sen} y = 0$), o cuando su cálculo resulte engorroso (por ejemplo: $y' = y^4 + 1$), está indicado recurrir a los métodos numéricos, que proporcionen valores numéricos de la solución con una aproximación adecuada, en un determinado conjunto de puntos. Incluso cuando sea posible encontrar la solución en términos de funciones elementales o en desarrollo en serie puede ser que la evaluación numérica de la función o el truncamiento de la serie conduzcan a una peor calidad que un método aproximado.

La forma de proceder es buscar una solución aproximada a la ecuación diferencial mediante el uso de un ordenador, utilizando para ello alguno de los métodos numéricos que se conocen, que tienen en nuestros días un desarrollo extraordinario tanto por su número como por sus posibilidades de cálculo, debido al progreso de los ordenadores. Estos métodos se utilizan en la actualidad para resolver las ecuaciones diferenciales en la teoría de los proyectiles balísticos y satélites artificiales, en redes eléctricas, elasticidad de vigas, estabilidad de aviones y teoría de vibraciones, entre otras.

Por ejemplo, en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, se sabe que existe una solución única para cada problema de valor inicial que se puede calcular. Pero si el número de ecuaciones es muy elevado las manipulaciones algebraicas para obtenerla pueden ser excesivamente laboriosas. En esta sección se analizará la forma de adaptar los métodos numéricos a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Otra ventaja de estos métodos es que permiten experimentar con una ecuación diferencial modificando valores o coeficientes, con el fin de obtener una información más completa sobre el problema tecnológico o físico que representa.

Los métodos numéricos que se utilizan en la actualidad para la solución de ecuaciones diferenciales tienen su origen en la segunda mitad del siglo XIX. A finales del siglo pasado **Carl David Tolmé Runge** (1 856 – 1 927) presentó unos métodos específicos para obtener mejores aproximaciones que las que ofrecía el método de *Euler*. Pocos años después fueron perfeccionados por **Wilhelm Martin Kutta** y por *Heun*, por lo que se conocen como métodos de *Runge-Kutta*, y pueden considerarse como los más populares de entre los métodos denominados de un paso. También en este período hacen aparición los métodos multipaso que constituyen el otro gran grupo de métodos utilizados.

Pero hasta la década de 1 940 a 1 950, en la que la aparición de los ordenadores hace posible la realización de grandes cálculos a un coste económico y de tiempo razonables, no se generaliza su uso. Supone un cambio radical, pues es a partir de ese momento cuando el “Análisis Numérico” nace como disciplina autónoma, desarrollándose enormemente en la segunda mitad del siglo XX, en estrecha conexión con la evolución tecnológica de los ordenadores.

En el campo de la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias la investigación de sistemas no *stiff* produjo una serie de métodos y algoritmos que llevan ya algunos años incluidos en paquetes estándar sin apenas modificación. Se siguen buscando métodos *Runge-Kutta* con mejores

constantes de error y mayor orden, se investiga también en comprender la dinámica de los diversos algoritmos. El campo de los sistemas *stiff* es todavía hoy objeto de investigación, pues problemas como los sistemas hamiltonianos están recibiendo atención en la actualidad, a pesar que desde 1980 se dispone de métodos y algoritmos para otros muchos problemas.

Se podría decir que el análisis numérico trata sobre procedimientos para hacer cálculos. De forma simplificada es posible decir que tiene dos partes diferenciadas que se complementan. Una parte es un análisis similar al de otras partes de la Matemática, que permite investigar sobre cuando los procedimientos de cálculo proporcionan una respuesta precisa, su grado de precisión y su costo computacional. De este modo se analiza la convergencia del método, descartando los no convergentes y prefiriendo los de mayor orden de convergencia. Pero hay otros aspectos, no suficientemente investigados, como por ejemplo, el uso de pasos variables en la estimación de un problema de valor inicial, que parece razonable, pero en el que la mejora de la eficiencia computacional varía según los casos, y sólo permite guiar en su uso la experiencia, por lo que tiene una importante componente experimental.

El carácter aplicado se recoge, una vez cubiertos los rudimentos de análisis, dando una descripción de los algoritmos, o presentando numerosos ejemplos con los resultados, tablas, gráficos y diagramas que se obtienen al aplicar los métodos numéricos estudiados a problemas concretos, para poder analizarlos y reflexionar sobre las consecuencias prácticas de utilizar un método u otro. En los ejemplos elegidos se pretende que las conclusiones obtenidas no sean exclusivas de ellos, sino que se den frecuentemente en la práctica.

El problema puede plantearse de la siguiente forma:

Encontrar una solución aproximada al problema de valor inicial o de *Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde, con la misma notación, se puede interpretar como una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

El primer aspecto que hay que tener en cuenta es si la función f es lo suficientemente regular como para que se verifiquen los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones, pues si no se tuviera esa precaución, el método numérico podría proporcionar una solución que en absoluto resolvería el problema. Y también que el intervalo donde exista esa única solución contenga a la abscisa del punto final x_N .

En algunos casos $f(x, y)$ es tan simple que se puede integrar directamente el problema de valor inicial. Sin embargo en los problemas que usualmente se presentan en la ciencia y en la ingeniería esto no es así, por lo que resulta lógico considerar procedimientos numéricos para obtener una solución aproximada al problema. En ocasiones aunque se pueda integrar directamente puede ser más difícil evaluar la solución, por ejemplo si viene dada en forma implícita complicada, que aplicar un método numérico.

Un primer paso para resolver un problema de valor inicial consiste en sustituir el problema continuo, cuya incógnita es una función definida en un intervalo real, por un problema discreto, cuya incógnita es una función definida en un conjunto finito de puntos. Para ello se consideran los puntos del eje de

abscisas x_0, x_1, \dots, x_N , definidos mediante $x_n = x_0 + nh$, donde n varía desde 0 hasta N , siendo $x_N = x$, igual al valor de la abscisa donde se quiere estimar la ecuación diferencial, y siendo el tamaño del paso $h = (x_N - x_0)/N$. En toda esta sección se denomina por y_n o por $y(x_n)$ al valor exacto de la solución del problema de valor inicial en cada punto x_n , mientras que se denomina por z_n al valor que el método que se esté aplicando obtiene para cada x_n . Se pretende llegar a conocer los valores z_n con una aproximación tan grande como se quiera de la solución $y(x_n)$ del problema de valor inicial.

Se ha dividido la sección en dos partes: El primer capítulo está dedicado a uno de los grandes grupos, los métodos de un paso, mientras que el segundo está dedicado al otro gran grupo, el de los métodos multipaso.

Un primer **objetivo** que se pretende es que se obtenga una comprensión intuitiva de determinados métodos numéricos y se sepan aplicar para resolver problemas. Un segundo objetivo es que se tenga una comprensión del concepto de error pudiendo analizarlo y predecirlo, para poder tener un control del error que se comete. Se pretende que quede claro el concepto de convergencia, así como los conceptos de consistencia y estabilidad, por lo que debe insistirse en la equivalencia entre convergencia y consistencia más estabilidad. Se proporcionan ejemplos del cálculo del orden de consistencia de un método, sobre cómo decidir sobre la estabilidad y la convergencia de un método, y analizar los diversos tipos de errores cometidos.

HISTORIA DE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Parece adecuado presentar los conceptos dentro de su contexto histórico, para poder ligar la historia de las Matemáticas con su aprendizaje. Dice Simmons:¹ *“Hay un antiguo refrán armenio que dice: “Quien carezca de sentimientos hacia el pasado estará condenado a vivir en la oscuridad estrecha de su propia generación”. Las matemáticas sin historia estarían desprovistas de su grandeza, puesto que, como las artes -y las matemáticas son uno de los logros supremos de nuestra civilización-, obtienen su grandeza por el hecho de ser una creación humana”.*

En esta introducción histórica de los métodos numéricos de las ecuaciones diferenciales se consideran dos etapas, la primera desde sus orígenes hasta la aparición de los ordenadores hacia el año 1 955, y la segunda desde esta fecha de 1 955 hasta aproximadamente el 1 975, fecha desde la cual se pierde, por su proximidad, la perspectiva histórica.

Antes de los ordenadores eran necesarios meses y meses de trabajo para resolver una única ecuación diferencial con su valor inicial, con un trabajo tedioso, por lo que sólo se resolvían aquellas que se precisaban para su aplicación. Así, por ejemplo, el ejército necesitaba conocer las soluciones de

¹ SIMMONS, F.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill. 1992.

las ecuaciones que regían las trayectorias balísticas, que debían ser tabuladas para cada cañón. Uno de los primeros prototipos de ordenador se construyó para resolver las ecuaciones diferenciales necesarias para la bomba de hidrógeno.

Solución numérica antes de los ordenadores

La búsqueda de soluciones aproximadas a problemas matemáticos en general, es un proceso antiguo. Se puede citar como ejemplo los polinomios de *Taylor* que aproximan a una función, o los polinomios interpoladores obtenidos por *Newton* y *Lagrange* para ajustar una función polinómica a una tabla de n valores, o el método de *Newton* para hallar una solución aproximada de una ecuación, o por último, el método de *Euler* para el cálculo de una solución aproximada de una ecuación diferencial.

El **método de Euler**, que data de 1768,² está aún “vivo”, no sólo porque juega un papel excepcional en la enseñanza como base metodológica para explicar métodos más complicados, sino que incluso se sigue utilizando en la actualidad para obtener una primera aproximación en la resolución de ecuaciones.

Es un método de variable discreta en el que se genera una sucesión de valores para la variable independiente (x_n) y una sucesión de valores calculados (z_n) que se pueden considerar tanto escalares como vectoriales. Se define z_n por recursión: Si $y' = f(x, y)$ e $y(a) = y_0$, entonces $x_0 = a$, $z_0 = y_0$; $x_{n+1} =$

² L. Euler (1768): *Institutiones Calculi Integralis*. Volumen 1, Sección Segunda, Capítulo VII,

$x_n + h$, siendo h la longitud de paso, $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ siendo $f_n = f(x_n, z_n)$. De la propia definición está claro que el error cometido en el primer paso es un infinitésimo de segundo orden: $z_1 = y(x_1) + O(h^2)$. Se puede demostrar, y ya lo probó *Cauchy*, que el error total obtenido es un infinitésimo de primer orden: $z_n = y(x_n) + O(h)$.

El mismo *Euler* en los ejercicios propone métodos de orden superior que son los que hoy se conocen como métodos de *Taylor*, donde la idea geométrica la proporciona el calcular la derivada segunda, en lugar de utilizar para aproximar la solución por la tangente se hace mediante la parábola que más se aproxima, o en general por el polinomio de grado n que más se aproxima.

Los siguientes métodos se deben a **John C. Adams** (1819 – 1892). Analizando anomalías en la órbita de Saturno Adams conjeturó en 1846 la existencia de otro planeta, siendo observado Neptuno en 1846.



Figura 1: John C. Adams y Neptuno

Fue catedrático en Escocia en St. Andrews, en 1858, y en Cambridge en 1859, siendo nombrado director del Observatorio de Cambridge en 1861. Los métodos que llevan su nombre, *Adams* no los publicó (quizás no los

considerara suficientemente serios). Aparecen publicados por primera vez por *Bashford*, en 1 883, en un trabajo sobre problemas de capilaridad, tensión superficial, la forma de una gota..., aunque dijo que ya los conocía de *Adams* desde 1 855.

La idea es considerar la ecuación $y' = f(x, y)$ como una integral:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \cdot dx$$

pero como $y(x)$ no se conoce, se reemplaza $f(x, y(x))$ por un polinomio interpolador basado en valores ya calculados: $p(x) \approx f(x, y(x))$.

Con el polinomio interpolador más sencillo, una constante, se recupera el método de *Euler*. Si se usa una recta se obtiene un método de segundo orden, y con esta forma de razonar, aumentando el grado del polinomio y el número de puntos de partida, es posible obtener métodos del orden que se quiera. De esta forma se obtienen los métodos explícitos que se conocen con el nombre de **métodos de Adams-Bashford**. La cantidad de trabajo en cada paso es la misma que en el método de *Euler*, pues aunque cada valor se usa varias veces, en cada paso sólo se evalúa una vez la función.

Adams construyó otros métodos, los implícitos, que en la bibliografía se conocen como métodos de **Adams-Moulton**. Existen otros métodos: en 1 925 los de *Nyström*, en 1 926 los de *Milne*. Todos ellos son combinaciones lineales de $z_{n+1}, z_n, \dots, f_{n+1}, f_n, \dots$



Figura 2: Carl David Tolmé Runge

Carl David Tolmé Runge nació en 1856 en Brena. Vivió en La Habana. Estudió hacia 1876 en Munich y Berlín con *Kronecker* y *Weierstrass*, donde se ocupó del estudio de la variable compleja. En 1886 se trasladó a Hannover a Escuela Técnica Superior donde conoció a *Plank*, que investigaba en espectroscopia, centrándose en trabajos de matemática aplicada. En 1905 fue llamado a Göttingen por *Félix Klein*, donde fue nombrado como el primer catedrático de Matemática Aplicada. En 1895 apareció publicado su trabajo en la revista "*Mathematische Annalenn*".

La idea en la que basó sus métodos numéricos consiste en fijarse en los métodos numéricos de integración. Si $f(x, y)$ no dependiera de y , para integrarla se podría usar la regla del rectángulo, o la regla del punto medio, o la regla de *Simpson*. En particular si se utilizara la regla del rectángulo se recuperaría de nuevo el método de *Euler*. Si se interpola la función por un rectángulo en el punto medio se obtiene lo que denominó "*tangenten trapez*". Si se evalúa por la regla del trapecio se obtiene otra aproximación, que recupera la regla de *Simpson* en el caso en que la función sólo dependiera de x . Si se hace la media aritmética de las dos, no resulta en el caso general de cuarto orden, sino

únicamente de segundo orden, lo que lleva a buscar una media ponderada con la que *Runge* consiguió en 1 895 un método de orden tres.

En 1 900 **Heun** escribió los métodos de *Runge* mediante una expresión general:

$$z_1 = z_0 + h(b_1 \cdot k_1 + \dots + b_s \cdot k_s) \text{ siendo}$$

$$k_1 = f(x_0, y_0),$$

$$k_2 = f(x_0 + c_2 \cdot h, y_0 + b_{21} \cdot h \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(x_0 + c_3 \cdot h, y_0 + b_{31} \cdot h \cdot k_1 + b_{32} \cdot h \cdot k_2),$$

....,

$$k_s = f(x_0 + c_s \cdot h, y_0 + b_{s,1} \cdot h \cdot k_1 + \dots + b_{s,s-1} \cdot h \cdot k_{s-1}).$$

Todos los métodos de *Runge* responden a este formato. Pero no avanzó mucho más. Consiguió un método de orden tres con tres etapas y un método de orden cuatro con ocho etapas.

Wilhelm Martin Kutta en 1 901 utilizó este formato general y describió varios métodos de orden cuatro con cuatro etapas. Uno de ellos es el que ha pasado a los libros como *el método de Runge-Kutta*, lo cual es inexacto, pues no lo descubrió *Runge*, sino *Kutta*, y es uno entre varios, y no precisamente del que se muestra más orgulloso. Aunque bien es cierto que *Runge* lo mencionó en un libro sobre *Matemática Aplicada*.



Figura 3: Wilhelm Martin Kutta

Aparecieron otros métodos numéricos, como el método de *Milne*, que posteriormente al utilizar ordenadores han quedado totalmente en desuso debido a la propagación de los errores.

Solución numérica después de los ordenadores

El primer estudio riguroso de la **teoría matemática** encerrada en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales se debe a **Dahlquist** que escribió su tesis, ya mayor, en el año 1956, siendo publicada en 1959. Es el primero en escribir una teoría que explique conceptos como estabilidad o el orden alcanzable. Sólo escribió seis o siete artículos, pero que son de una importancia excepcional.

Dahlquist planteó una ecuación general:

$$\alpha_k \cdot z_{n+1} + \alpha_{k-1} \cdot z_n + \dots + \alpha_0 \cdot z_{n-k+1} = h(\beta_k \cdot f_{n+1} + \dots + \beta_0 \cdot f_{n-k+1})$$

mediante la cual estudió la estabilidad, el orden alcanzable y cómo debían ser los coeficientes. Al encontrar los mejores coeficientes estos resultaron ser los coeficientes de los métodos de *Adams*.

Para obtener el orden del método en los métodos de *Runge-Kutta* es preciso realizar desarrollos de *Taylor*. El neozelandés **Butcher** mediante problemas combinatorios y la utilización de la teoría de grafos obtuvo unas fórmulas con las que calcularlo sin necesidad de realizar los desarrollos.

En la práctica los métodos que actualmente se utilizan son los **códigos** o librerías de programas, en los que están programados, los métodos de *Adams* para cada paso y cada orden, o los métodos de *Runge-Kutta* de pares encajados. El propio código estima el error y elige el orden que más se adecue, e incluso toma los valores del paso mayores o menores según sea más conveniente. Son por tanto baterías de métodos que se combinan. **Gear** en 1971 escribió un libro con los listados de uno de estos códigos, que ha sido tan utilizado que puede considerarse como la referencia científica más citada.

Por último muy brevemente el estado actual de la cuestión: Hoy se trabaja en métodos específicos para resolver distintas clases de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo, los sistemas hamiltonianos, para acercar la teoría numérica a la teoría analítica, los sistemas dinámicos y la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, con un mayor contenido geométrico, utilizando los grupos de *Lie*. Otro problema que ocupa mucha literatura desde 1965 a 1985 es el tratamiento de los problemas rígidos o “*stiff*”. Y un camino perdido ha sido el utilizar métodos analógicos en lugar de digitales, como el uso del analizador diferencial.

CAPÍTULO 13

Métodos numéricos de un paso

El objetivo de este capítulo es introducir los métodos numéricos de resolución de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones diferenciales de un solo paso, mientras que en el siguiente capítulo se estudiarán los métodos multipaso.

Un sistema de ecuaciones diferenciales o una ecuación diferencial de orden superior siempre pueden ser expresados como un sistema de primer orden, y de esta forma resolver numéricamente el problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{array} \right.$$

donde \mathbf{y} , \mathbf{y}' , $\mathbf{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$ son vectores n -dimensionales, $\mathbf{f}: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$, mientras que x y x_0 son escalares. Una solución está definida en un intervalo $[x_0, b]$ donde x_0 y b son finitos. Se supone que se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de *Picard-Lindelöf* por lo que se puede garantizar que existe una única solución $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ del problema de valor inicial.

Todo método numérico lleva consigo la idea de discretización, esto es, el

intervalo continuo $[x_0, b]$ de x es reemplazado por un conjunto discreto de puntos $\{x_n\}$ definidos por $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N = (b - x_0)/h$. El parámetro h se denomina **longitud de paso**, que en un principio se considera que es constante, aunque la potencia de los modernos algoritmos deriva de su habilidad para cambiar h automáticamente en el proceso de computación.

En este capítulo (y en el siguiente) se denota por $y(x)$ a la solución exacta de la ecuación diferencial y por z_n al valor aproximado de la solución en x_n .

El objetivo es encontrar un conjunto de valores $\{z_n\}$ que se aproximen a la solución en el conjunto discreto de puntos $\{x_n\}$, $z_n \cong y(x_n)$. Esta sucesión se denomina **solución numérica del problema de valor inicial**. Un método numérico es por tanto una ecuación en diferencias que permita computar los z_n .

Existen algoritmos que implementan estos métodos permitiendo estimar el error, seleccionar el tamaño de paso más conveniente y decidir qué método emplear en cada etapa de la búsqueda de la solución. Pero resultan como “cajas negras” poco aprovechables para comprender el proceso. El propósito de este capítulo y del siguiente es, precisamente, entender su comportamiento y conocer sus propiedades.

Existen una gran diversidad de métodos numéricos para la resolución de un problema de valor inicial, con distintas características. Estos métodos se agrupan en dos familias: los métodos de un paso y los métodos lineales multipaso.

Los métodos de un paso, que se presentan en este capítulo, se caracterizan

porque el valor aproximado z_n de la solución en el punto x_n se obtiene a partir del valor z_{n-1} obtenido en la etapa anterior.

Los métodos lineales multipaso, que se estudian en el capítulo siguiente, utilizan para el cálculo del valor aproximado z_n no sólo el valor z_{n-1} obtenido en la etapa anterior, sino también los valores z_{n-2}, \dots, z_{n-j} obtenidos en etapas previas. La utilización de estos valores previos hace que el comportamiento de los dos grupos de métodos numéricos sea muy diferente, con características específicas para cada grupo, lo que hace preciso un estudio diferenciado de cada una de las familias.

El contenido de este capítulo es el siguiente: En primer lugar y con el fin de entender como funcionan los métodos numéricos se comienza estudiando el más sencillo, el método de *Euler*, que sirve como modelo común de comportamiento de los métodos numéricos, tanto para los métodos de un paso como para los métodos lineales multipaso. A continuación se introducen los métodos de un paso, entre los que se destacan especialmente los métodos de *Taylor* y los métodos de *Runge-Kutta*, y se estudian sus propiedades. Al analizar de forma general los métodos de un paso se estudia la manera de evaluar el error cometido, o de conocer si es de esperar que el resultado obtenido se ajusta bien a la solución exacta de la ecuación diferencial, es decir, si el método es convergente.

13.1. EL MÉTODO DE EULER

En el estudio de las soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales se comienza estudiando un método clásico, el **método de Euler**, (o de las poligonales de *Euler*), desarrollado por *Leonard Euler* por lo que lleva su nombre. Tiene un interés especial desde el punto de vista didáctico porque sirve como punto de partida para introducir los conceptos y analizar los problemas que van a aparecer en el resto de los métodos numéricos. Su estudio sirve, pues, como modelo para investigar las dificultades que se presentan en cualquier método numérico y para analizar los distintos tipos de error que se generan. Suministra también una sencilla interpretación geométrica pues se aproxima la solución del problema de valor inicial mediante la tangente a dicha solución.

Se considera el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, del que se supone que es un problema bien propuesto, es decir, se sabe que tiene una única solución en un intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$. Para encontrar una solución aproximada de $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se toma como valor inicial z_0 ; entonces $f(x_0, z_0)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto de partida (x_0, z_0) , por lo que se puede obtener como valor z_1 el que toma la recta que pasa por (x_0, z_0) y tiene como pendiente $f(x_0, z_0)$ en el punto de abscisa x_1 :

$$z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0)$$

A continuación se repite el proceso desde el punto (x_1, z_1) aproximando la

solución por la recta tangente que pasa por dicho punto. Por tanto la expresión general del método de *Euler* resulta:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n).$$

La solución numérica resultante aparece como una poligonal formada por trazos de rectas tangentes.

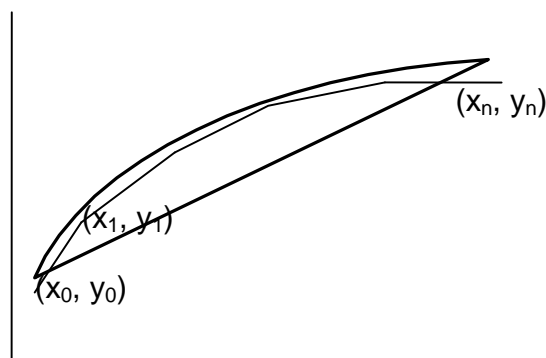


Figura 13.1: Poligonal de Euler

Definición 13.1.1:

Se denomina **método de Euler** al método numérico de expresión:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n).$$

Se pueden utilizar cuatro puntos de vista distintos para explicar el método de Euler:

- Un punto de vista geométrico, utilizando la idea de recta tangente de pendiente $y'(x) = f(x, y(x))$.
- Utilizar el desarrollo de *Taylor*, lo que permite además valorar el orden del

error cometido:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + (h^2/2) \cdot y''(x) + \dots + (h^p/p!) \cdot y^{(p)}(x) + \dots$$

pudiéndose considerar el método de Euler como el método de Taylor de orden uno, cuando se corta en:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x).$$

El error cometido al calcular el valor aproximado de $y(x+h)$, en un solo paso, entre x y $x+h$, es del orden del término complementario:

$$\frac{h^2}{2} \cdot y''(c)$$

donde c es un punto comprendido entre x y $x+h$, por lo que si se puede acotar $y''(c)$ entonces se dice que este error es del orden de $O(h^2)$. Otros métodos, los métodos de Taylor, se obtendrán cortando el desarrollo de Taylor en distintos términos.

- Aplicar la definición de derivada o el teorema del valor medio:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \Rightarrow y(x+h) - y(x) \approx h \cdot y'(x),$$

teniendo en cuenta que $y'(x) = f(x, y)$ se obtiene que

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n)),$$

por lo tanto $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$.

Otros métodos se obtendrán buscando mejores estimaciones para la derivada $y'(x)$.

- Integrar la ecuación diferencial entre dos puntos consecutivos de la red, por ejemplo entre x_n y x_{n+1} :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \cdot dx$$

Si la función $f(x, y(x))$ se toma como la constante $f(x_n, z_n)$, se obtiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + f(x_n, z_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx = y(x_n) + f(x_n, z_n) \cdot h$$

Por lo tanto: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$.

Otros métodos, los métodos multipaso, se obtienen dando mejores estimaciones para la función $f(x, y(x))$.

Estos cuatro diferentes puntos de vista volverán a ser utilizados para obtener el resto de los métodos. Por ejemplo se obtendrán los métodos de *Runge-Kutta* por el 2º, los métodos multipaso y especialmente los predictor-corrector mediante el 4º, las ecuaciones diferenciales *stiff* y el método del punto medio utilizará el 3º, y en todos ellos se buscará una interpretación geométrica con promedios de la tangente.

Para terminar, es importante señalar que el método de Euler rara vez se utiliza en la práctica debido a que, a pesar de su sencillez a la hora de

implementarlo, su convergencia es lenta, como se comprobará enseguida, de manera que se pueden necesitar muchos pasos en su ejecución para obtener una buena aproximación del valor buscado. Su interés fundamental es por tanto didáctico. Debido a su sencillez, se utiliza también para obtener valores iniciadores que permitan aplicar métodos lineales multipaso como los que se estudiarán en el capítulo siguiente.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.1.1: Aplicar el método de Euler para estimar un valor aproximado de la solución en $x = 1,5$ de $y' = x + y^2$, $y(1) = 0$, siendo $z_0 = 0$ y el tamaño de paso 0,1; 0,05 y 0,025.

Para $h = 0,1$, bien a mano o con una hoja de cálculo, se construye una tabla para evaluar $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_n = x_0 + nh$. Así, $1,5 = 1 + 0,1n$, por lo que $n = 5$.

| n | x_n | z_n | $f(x_n, z_n)$ |
|-----|-------|-------------------|---------------|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1,1 | 0,1 | 1,11 |
| 2 | 1,2 | 0,211 | 1,244521 |
| 3 | 1,3 | 0,3354521 | 1,41252811 |
| 4 | 1,4 | 0,47670491 | 1,62724757 |
| 5 | 1,5 | 0,63942967 | |

Ya que, por ejemplo, $z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0) = z_0 + h \cdot (x_0 + z_0^2) = 0 + 0,1(1) = 0,1$;

$z_2 = z_1 + h \cdot f(x_1, z_1) = z_1 + h \cdot (x_1 + z_1^2) = 0,1 + 0,1(1,1 + 0,1^2) = 0,1 + 0,1(1,11) = 0,211$ y así sucesivamente, hasta $z_5 = 0,63942967 \cong y(1,5)$.

Para $h = 0,05$, a mano o con una hoja de cálculo, se construye una tabla para evaluar $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_n = x_0 + nh$. Así, $1,5 = 1 + 0,05n$, por lo que $n = 10$.

| n | x_n | z_n | $f(x_n, z_n)$ |
|-----|-------|-------------------|---------------|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1,05 | 0,05 | 1,0525 |
| 2 | 1,1 | 0,102625 | 1,11053189 |
| 3 | 1,15 | 0,15815159 | 1,17501193 |
| 4 | 1,2 | 0,21690219 | 1,24704656 |
| 5 | 1,25 | 0,27925452 | 1,32798309 |
| 6 | 1,3 | 0,34565367 | 1,41947646 |
| 7 | 1,35 | 0,4166275 | 1,52357847 |
| 8 | 1,4 | 0,49280642 | 1,64285817 |
| 9 | 1,45 | 0,57494933 | 1,78056673 |
| 10 | 1,5 | 0,66397766 | |

Ahora $z_{10} = 0,66397766 \cong y(1,5)$.

Para $h = 0,025$ se tiene que $n = 20$ y:

| n | x_n | z_n | $f(x_n, z_n)$ |
|-----|-------|-------------------|---------------|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1,025 | 0,025 | 1,025625 |
| 2 | 1,05 | 0,05064063 | 1,05256447 |
| 3 | 1,075 | 0,07695474 | 1,08092203 |
| 4 | 1,1 | 0,10397779 | 1,11081138 |
| 5 | 1,125 | 0,13174807 | 1,14235755 |
| 6 | 1,15 | 0,16030701 | 1,17569834 |
| 7 | 1,175 | 0,18969947 | 1,21098589 |
| 8 | 1,2 | 0,21997412 | 1,24838861 |
| 9 | 1,225 | 0,25118383 | 1,28809332 |
| 10 | 1,25 | 0,28338616 | 1,33030772 |
| 11 | 1,275 | 0,31664386 | 1,37526333 |
| 12 | 1,3 | 0,35102544 | 1,42321886 |
| 13 | 1,325 | 0,38660591 | 1,47446413 |
| 14 | 1,35 | 0,42346752 | 1,52932474 |
| 15 | 1,375 | 0,46170063 | 1,58816748 |
| 16 | 1,4 | 0,50140482 | 1,65140679 |
| 17 | 1,425 | 0,54268999 | 1,71951243 |
| 18 | 1,45 | 0,5856778 | 1,79301849 |
| 19 | 1,475 | 0,63050326 | 1,87253437 |
| 20 | 1,5 | 0,67731662 | |

Ahora $z_{20} = 0,67731662 \cong y(1,5)$.

Ejemplo 13.1.2: Aplicar el método de Euler para estimar la solución en $x = 1$ de $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, siendo $z_0 = 1$ y los tamaños de paso siguientes: 0,1; 0,05, 0,025, 0,0125. Resolver la ecuación diferencial. Valorar el error cometido y compararlo con el tamaño de paso utilizado

| Resultados de aplicar el método de Euler con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ | | | | | |
|--|-----------|------------|-------------|--------------|-----------|
| x | $h = 0,1$ | $h = 0,05$ | $h = 0,025$ | $h = 0,0125$ | Exacto |
| 1 | 34,411490 | 45,588399 | 53,807866 | 60,037126 | 64,897803 |
| Error global | 30,48... | 19,309... | 11,09... | 4,86... | |

Se observa que al disminuir los tamaños del paso a la mitad los errores cometidos se reducen cada vez aproximadamente a la mitad. En este sentido se dice que el orden del error es similar a h , el tamaño de paso. Pero los errores cometidos son excesivamente grandes lo que explica que se deban estudiar mejores métodos.

Ejemplo 13.1.3: Aplicar el método de Euler para estimar la solución de $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$, siendo $z_0 = 1$ y el tamaño de paso h resolviendo la ecuación en diferencias. Comprobar si el límite de la estimación obtenida cuando el tamaño de paso tiende a cero coincide con la solución exacta.

El estudio de las ecuaciones en diferencias aparece como un apéndice, 13.7.

Apéndice: Ecuaciones en diferencias, al final de este capítulo.

Para un tamaño de paso h y para $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$, siendo $x_0 = 0$, $x_n = x_0 + nh$, $f(x_n, z_n) = 2z_n - 1$ se tiene $z_{n+1} = z_n + h \cdot (2z_n - 1) = (1 + 2h) \cdot z_n - h$, por lo que la ecuación característica asociada es: $r = 1 + 2h$, y la solución de la ecuación homogénea es: $z_{nH} = C \cdot (1 + 2h)^n$. Se busca una solución particular "parecida" al término independiente que es una constante, $-h$, por lo que se prueba con $z_{nP} = a$, que al sustituir en la ecuación en diferencias:

$$a = (1 + 2h) \cdot a - h \Rightarrow h = 2h \cdot a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow z_{nP} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$z_n = z_{nH} + z_{nP} = C \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2}.$$

Para calcular C se impone que $z_0 = 1$.

$$z_0 = 1 = C \cdot (1 + 2h)^0 + \frac{1}{2} = C + \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow z_n = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2}.$$

La solución exacta de $y' = 2y - 1$, $y(0) = 1$, es $y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x})$. Se calcula el

límite:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + nh}} z_n = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x = x_0 + nh}} \frac{1}{2} \cdot (1 + 2h)^n + \frac{1}{2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x = x_0 + nh}} \frac{1}{2} \left(1 + \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x})$$

que coincide con la solución exacta.

Ejercicios

13.1. Calcular el valor aproximado en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$ usando el método de Euler con $h = 0,1$ y $z_0 = 0$.

(Solución: $z_5 = 0,11051$)

13.2. Calcular el valor aproximado en $x = 0,2$ de la solución del problema de valor inicial $y' = x + y$, $y(0) = 0$ usando el método de Euler con $h = 0,05$ y $z_0 = 0$.

(Solución: $z_4 = 0,01550625$)

13.3. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 2$ de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2$, $y(0) = 0$ usando como $z_0 = 0$ y tamaños de paso $h = 0,2$, $h = 0,1$ $h = 0,05$. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $y(2) = 0,4$; $z_{10} = 0,40681903$;

$e(0,2) = -0,00681903$; $z_{20} = 0,40419$; $e(0,1) = -0,00419$; $z_{40} = 0,40227$;

$e(0,05) = -0,00227$)

13.2. ESTUDIO GENERAL DE LOS MÉTODOS DE UN PASO

El método de Euler es un caso particular de los métodos de un paso, que se definen de forma general a continuación.

Definición 13.2.1:

Los métodos de un paso tienen como **expresión general**:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h).$$

Se denomina **función incremento** a $\Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, donde se supone que Φ verifica todas las condiciones que sean precisas: continuidad, diferenciabilidad...

Si la variable z_{n+1} no aparece en el segundo miembro se trata de un **método explícito** y es un **método implícito** en caso contrario.

El método de *Euler* es un método explícito de un paso con $\Phi(x_n, z_n, h) = f(x_n, z_n)$.

13.2.1. Control del error: error de redondeo, error de truncamiento, error local y error global

En todo método numérico es imprescindible controlar el **error** cometido. Hay dos fuentes fundamentales de error al resolver un problema de valor inicial: una

inherente al método, debida a la fórmula utilizada, y otra, que se denomina **error de redondeo**, debida al número de dígitos que utilice el ordenador, a la secuencia con la que se realicen los cálculos... El error global está acotado por la suma de los valores absolutos de los errores de fórmula y de redondeo.

El **error de redondeo** se debe a las cifras decimales que desprecia el ordenador utilizado. Tiene un gran interés, como se analizará al estudiar la estabilidad, pero en esta primera aproximación a los métodos numéricos no se va a estudiar con profundidad. Sin embargo, aunque no se estudie aquí, es fundamental señalar que el error de redondeo tiene interés porque muchas veces no es suficiente disminuir el tamaño del paso para reducir el error global, pues se puede llegar a un límite en el que aumentan los errores debidos al redondeo, siendo importante en estos casos deducir el **tamaño de paso óptimo y crítico**. Otra reflexión a destacar es que, en ocasiones, métodos que son “peores” pero mejor programados, pueden aproximar mejor la solución, al disminuir este error.

Se estudian a continuación los siguientes tipos de error:

- Error global.
- Error de truncamiento.
- Error local.

Definición 13.2.2:

Dado un método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema

de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se denomina **error global** a la diferencia entre el valor exacto de la solución y el valor que suministra el método:

$$e(h) = y(x) - z(x_N),$$

con $x = x_N = x_0 + Nh$.

En general, si no se conoce la solución, es decir, si no se sabe resolver la ecuación diferencial, no es posible calcular ese error.

Una forma de medir la eficacia de un método numérico es aplicarlo a ecuaciones diferenciales de solución conocida, evaluar dicho error y analizar de este modo el comportamiento del método.

Debido a que generalmente no es posible conocer el error global, lo que usualmente se utiliza es el error de truncamiento o, con más precisión, el orden del error de truncamiento. El **error de truncamiento** es el que se produce en un paso al aplicar el método, suponiendo que en los pasos precedentes no ha existido ningún error. Es decir, es la diferencia en el paso $n + 1$ entre el valor que asigna la solución exacta y el valor calculado por el método numérico suponiendo que z_n se conoce de forma exacta y es posible sustituirlo por $y(x_n)$.

Definición 13.2.2:

Si se tiene un método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se denomina **error de truncamiento** a:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)]$$

donde $y(x)$ es la solución exacta.

Para evaluar el error de truncamiento en la abscisa x_{n+1} se usa el desarrollo de *Taylor*, por lo que se sabe que:

$$y(x + h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \dots + \left(\frac{h^k}{k!}\right) \cdot y^{(k)}(x) + \left(\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\right) \cdot y^{(k+1)}(c) \quad (13.2.1)$$

donde c es algún punto entre x y $x + h$.

Se observa que, según la definición anterior, para calcular el error de truncamiento para un problema de valor inicial dado es preciso, también, conocer la solución exacta de la ecuación diferencial. Sin embargo, es posible evaluar el orden del error de truncamiento cometido.

Definición 13.2.3:

Dado el método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, se dice que tiene **error de truncamiento de orden p** si:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)] = O(h^p).$$

donde $y(x_n)$ es una solución genérica de cualquier problema de valor inicial bien propuesto al que se aplique el método.

Cálculo del orden del error de truncamiento para el método

de Euler:

En la expresión 13.2.1 si k es igual a uno, x es igual a x_n y $x + h = x_n + h = x_{n+1}$ se tiene:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(c).$$

Si se supone que z_n es exacto y por tanto igual a $y(x_n)$, como $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = f(x_n, z_n)$ se obtiene:

$$z_{n+1} = y(x_n) + h \cdot f(x_n, z_n),$$

por tanto la diferencia entre el valor exacto en x_{n+1} y el que suministra el método si en la abscisa anterior en lugar de tener z_n se conociera como valor la solución teórica es:

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - z_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(c).$$

donde una cota superior del valor absoluto de ese error es $M \cdot \frac{h^2}{2} = O(h^2)$ siendo

$M = \max_{x_n < x < x_{n+1}} |y''(x)|$. Por tanto se dice que el **error de truncamiento** del método

de Euler es de **orden 2**.

Definición 13.2.4:

Dado el método, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, z_{n+1}, h)$, que se aplica a un problema de

valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Si $u(x)$ es la solución del problema de valor inicial que verifica $u' = f(x, u)$, $u(x_n) = z_n$, se define como **error local** en x_{n+1} a la diferencia entre el valor que toma dicha solución en x_{n+1} , $u(x_{n+1})$, y el valor, z_{n+1} , obtenido con el método:

$$el_{n+1} = u(x_{n+1}) - z_{n+1}.$$

En el caso del método de Euler el error local resulta igual al término complementario de la fórmula de *Taylor* aplicada a $u(x)$.

Para obtener el error local se busca la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (x_n, z_n) , y se calcula el error que se comete al pasar a x_{n+1} mediante el método.

Si un método tiene un error de truncamiento de orden $O(h^{p+1})$ la intuición sugiere que el orden del error local es también $O(h^{p+1})$. Usualmente el error local y el error de truncamiento toman valores parecidos pues la solución $u(x)$ debe estar próxima a $y(x)$ salvo casos especiales.

Para calcular el error global se tienen que tener en cuenta tres factores:

- Los errores de partida, errores de medida en el valor inicial...
- El error que se comete en cada paso,
- La forma en que esos errores se propagan,

Desgraciadamente el error local está afectado por los errores de partida.

En el caso del método de *Euler* el error de truncamiento es proporcional al cuadrado del tamaño de paso y a la segunda derivada de la solución en un punto intermedio, por lo que para estimar este error conviene encontrar una cota del valor absoluto de esta derivada. Se observa que este error es el cometido entre el paso n y el $n + 1$, por lo que también interesa estimar el error acumulado, aún más difícil de calcular, pero que se puede estimar de forma intuitiva, en la que no se está teniendo en cuenta el efecto que el error en un paso tendrá en los pasos que le siguen, sin más que multiplicar por el número de pasos n la estimación anterior, con lo que se obtiene que este error es proporcional al tamaño de paso. Se puede probar que sobre cualquier intervalo finito este error es, en el método de *Euler*, menor que una constante por el tamaño de paso. Y en general es cierto que si el error de truncamiento es proporcional a h^{p+1} entonces para un intervalo finito, el error acumulado está acotado por una constante multiplicado por h^p .

De forma simplista se podría pensar que para reducir el error global basta con disminuir el tamaño de paso, pero desafortunadamente entonces puede ocurrir que aumenten los errores acumulados de redondeo, por lo que, se puede probar, existe una elección óptima del tamaño de paso.

13.2.2. Convergencia y consistencia en los métodos de un paso

En esta sección se definen los conceptos de **convergencia**, **consistencia** y **estabilidad** de un método.

Se dice que un método es convergente si, al aplicarlo a cualquier problema de valor inicial bien propuesto, la solución aproximada obtenida con el método converge, cuando h tiende a cero, siendo $nh = x_n - x_0$, a la solución exacta del problema, en todos los puntos x_n de la partición del intervalo $[a, b]$, siempre que el error en el paso inicial tienda a cero con el tamaño del paso, h .

Definición 13.2.5:

Un método numérico de un paso es **convergente** en $[a, b]$ si para todo problema de valor inicial bien definido, $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, y para todo $x^* \in [a, b]$, se verifica que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = x^* - x_0}} |y(x^*) - z_n| = 0 \text{ cuando } \lim_{h \rightarrow 0} z_0 = y_0.$$

Al no ser posible evaluar el método en todo problema de valor inicial resulta difícil probar de forma directa la convergencia de un método, por lo que se debe utilizar otro camino.

Definición 13.2.6:

Un método numérico de un paso es **consistente de orden p** si para toda función ψ continua y suficientemente regular (derivable hasta el orden que requiera el método) se verifica que:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = O(h^{p+1}).$$

Se observa que entonces el error de truncamiento es de orden $p + 1$.

Definición 13.2.7:

Se dice que un método es **consistente** si su orden de consistencia es p , $p \geq 1$.

Definición 13.2.8:

Un método es **estable** si hay dependencia continua de los valores iniciales.

Los métodos de un paso que son consistentes, son estables.

Teorema 13.2.1:

Dado el método numérico de un paso, $z_{n+1} = z_n + h \cdot \Phi(x_n, z_n, h)$, tal que $\Phi(x_n, z_n, h)$ es lipschiziana respecto de la segunda variable, se tiene que, el método es convergente si y sólo si es consistente.

En los métodos de un paso la consistencia es una condición necesaria y suficiente para la convergencia, pues estos métodos son siempre estables. Los métodos de un paso, y por tanto los métodos *Runge-Kutta*, son estables como consecuencia de la estabilidad del problema continuo. Basta que la función $f(x, y)$ verifique la condición de *Lipschitz* con constante de *Lipschitz* L para que la función $\Phi(x, y, h)$ verifique también la condición de *Lipschitz* con constante $\Lambda(L)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.2.1: Calcular el valor aproximado en $x = 1$ de la solución del

problema de valor inicial $y' = -y + x + 1$, $y(0) = 1$ con $n = 10$ y con $z_0 = 1$ utilizando el método de Euler. Calcular el error global, el error local y el error de truncamiento.

Como $n = 10$, $x = 1$, $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = x_0 + nh \Rightarrow 1 = 0 + 10h \Rightarrow h = 0,1 \Rightarrow x_n = 0,1n$.

El método de Euler: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n) = z_n + h \cdot (-z_n + x_n + 1) = z_n + 0,1 \cdot (-z_n + 0,1n + 1) = 0,9z_n + 0,01n + 0,1$. Se resuelve la ecuación en diferencias: $z_n = 0,9^n + 0,1n \Rightarrow z_{10} = 1,348678 \cong y(1) \Rightarrow z_{11} = 1,4138102 \cong y(1,1)$.

Cálculo del error global:

Para obtener la solución exacta de la ecuación diferencial se calcula la solución general: $y(x) = x + Ce^{-x}$. Como $y(0) = 1$ se tiene que $C = 1$ y la solución del problema de valor inicial es $y(x) = x + e^{-x} \Rightarrow y(1) = 1,367879 \Rightarrow y(1,1) = 1,4328711$.

El error global es: $e(0,1) = |y(1) - z_{10}| = 0,019201$.

Cálculo del error local:

Para calcular el error local en el paso $n + 1$, se obtiene la solución que pasa por el punto (x_n, z_n) .

Se impone que la solución pase por $(x_n, z_n) \Rightarrow z_n = x_n + Ce^{-x_n} \Rightarrow$

$$C = \frac{z_n - x_n}{e^{-x_n}} \Rightarrow u(x_{n+1}) = x_{n+1} + \frac{z_n - x_n}{e^{-x_n}} e^{-x_{n+1}} = 1,1 + \frac{1,348678 - 1}{e^{-1}} e^{-1,1} = 1,1 + 0,348678 e^{-0,1} = 1,4154969.$$

El error local es:

$$e|_{n+1} = u(x_{n+1}) - z_{n+1} = 1,4154969 - 1,4138102 = 0,0016867.$$

Cálculo del error de truncamiento:

Para calcular el error de truncamiento en el paso $n + 1$, se aplica la definición:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - [y(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)] = y(1,1) - (y(1) + h \cdot f(x_n, y(1))) = \\ &= y(1,1) - (y(1) + h \cdot (-y(1) + x_n + 1)) = 1,4328711 - (1,367879 + 0,1(-1,367879 + 1 + 1)) = 1,4328711 - 1,4310911 = 0,0017799. \end{aligned}$$

El error de truncamiento es: $T_{n+1} = 0,0017799$.

Ejemplo 13.2.2: Estudiar la convergencia del método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_{n+1}, z_n) - f(x_n, z_n))$. Aplicar el método para calcular el valor aproximado de la solución del problema: $y' = x \cdot y$; $y(-2) = e^2$, en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, con un tamaño de paso $h = 0,1$. ¿Son buenas las aproximaciones obtenidas?

Estudio del orden de consistencia del método:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = \psi(x_n + h) - [\psi(x_n) + h \cdot (f(x_n + h,$$

$$\begin{aligned} \psi(x_n) - f(x_n, \psi(x_n)) &= (\psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots) - [\psi(x_n) + h \cdot (\psi'(x_n) + (h \cdot f_x \\ &+ \dots) - \psi'(x_n))] = \psi(x_n) \cdot (1 - 1) + h \cdot \psi'(x_n) \cdot (1 - 1 - 1) + \dots = -h \cdot \psi'(x_n) + \dots = O(h). \end{aligned}$$

El orden de consistencia $p = 0 < 1$, por lo que el método no es consistente y por tanto no es convergente.

La solución exacta es:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(1) = 1,6487212... \Rightarrow y(2) = 7,3890561...$$

Se aplica el método: Como $f(x, y) = x \cdot y$ entonces $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_{n+1}, z_n) - f(x_n, z_n)) = z_n + h \cdot (x_{n+1} \cdot z_n - x_n \cdot z_n) = z_n + h \cdot (z_n \cdot h) = z_n \cdot (1 + h^2) \Rightarrow z_n = C \cdot (1 + h^2)^n$. Al ser $z_0 = e^2 = C \Rightarrow z_n = e^2 \cdot (1 + h^2)^n$.

$$x_n = x_0 + nh \Rightarrow 1 = -2 + 0,1n \Rightarrow n = 30 \Rightarrow z_{30} = 9,959... \Rightarrow e = |y(1) - z_{30}| = 8,30.$$

$$\Rightarrow 2 = -2 + 0,1n \Rightarrow n = 40 \Rightarrow z_{40} = 11,001297... \Rightarrow e = |y(2) - z_{40}| = 3,62.$$

Son malas aproximaciones de la solución exacta.

Ejemplo 13.2.3: Calcular $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ y γ para que el método:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\alpha_1 \cdot f(x_n + \beta h, z_n) + \alpha_2 \cdot f(x_n, z_n + \gamma h)) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 f_y(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) - 1\}$$

tenga orden de consistencia máximo, donde f_y representa la derivada parcial de f respecto de la segunda variable.

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ suficientemente regular, a la que se aplica el método, con lo que se tiene que:

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] = \psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot (\alpha_1 \cdot f(x_n + \beta \cdot h, \psi(x_n)) + \alpha_2 \cdot f(x_n, \psi(x_n + \gamma \cdot h))) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y(x_n, \psi(x_n)) \cdot \{f(x_n, \psi(x_n)) - 1\}] \quad (13.2.2)$$

utilizando el desarrollo de Taylor:

$$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots \Rightarrow$$

Se aplica a un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, denominando f_n

$$= f(x_n, \psi(x_n)), f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, \psi(x_n)), f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, \psi(x_n)), f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n,$$

$$\psi(x_n)), f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_n, \psi(x_n)), f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_n, \psi(x_n)), \dots$$

- $\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \frac{h^3}{6} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot f_n^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) +$

...

Utilizando el desarrollo de Taylor para funciones de dos variables:

- $- h \cdot \alpha_1 \cdot f(x_n + \beta \cdot h, \psi(x_n)) = - h \cdot \alpha_1 \cdot (f_n + \beta \cdot h \cdot f_x + \frac{1}{2} (\beta \cdot h)^2 \cdot f_{xx} + \dots)$

- $- h \cdot \alpha_2 \cdot f(x_n, \psi(x_n + \gamma \cdot h)) = - h \cdot \alpha_2 \cdot (f_n + \gamma \cdot h \cdot f_y + \frac{1}{2} (\gamma \cdot h)^2 \cdot f_{yy} + \dots)$

- $-h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y(x_n, \psi(x_n)) \cdot \{f(x_n, \psi(x_n)) - 1\} = -h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 \cdot f_y \{f_n - 1\}$

Se sustituyen estas expresiones en la expresión 13.2.2, y se hacen operaciones sacando factor común las potencias del tamaño de paso, con lo que se obtiene que:

$$h \cdot f_n (1 - \alpha_1 - \alpha_2) + h^2 \cdot [f_x (\frac{1}{2} - \alpha_1 \cdot \beta) + f_y f_n (\frac{1}{2} - \alpha_2 \cdot \gamma) + f_y (-\alpha_2 \cdot \gamma + \alpha_2 \cdot \gamma)] +$$

$$h^3 \cdot [f_{xx} (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha_1 \cdot \beta^2) + \frac{1}{3} f_{xy} f_n + \frac{1}{6} f_{yy} f_n^2 + \frac{1}{6} f_y f_x + \frac{1}{6} (f_y)^2 \cdot f_n - \frac{1}{2} f_{yy} \gamma^2 \cdot \alpha_2] + \dots$$

Por tanto si $1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$ se tiene que el orden de consistencia p es mayor o igual que 1. Si $\frac{1}{2} - \alpha_1 \cdot \beta = 0$ y $\frac{1}{2} - \alpha_2 \cdot \gamma = 0$, entonces el orden de consistencia p es mayor o igual que 2. Sin embargo el coeficiente de h^3 es imposible de anular siendo ψ una función cualquiera, pues por ejemplo, el coeficiente de $f_y f_x$ es $\frac{1}{6}$ distinto de cero.

En consecuencia, el orden de consistencia máximo que es posible conseguir es $p = 2$, haciendo $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta = \frac{1}{2\alpha_1}$, $\gamma = \frac{1}{2\alpha_2}$. Se tiene una familia uniparamétrica de soluciones. Una solución posible es: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = 1$.

Ejercicios

13.4. Estudiar la convergencia del método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_{n+1}, z_n)$. Aplicar el

método para calcular el valor aproximado de la solución del problema: $y' = xy$, $y(-2) = e^2$, en el punto $x = 1$, con un tamaño de paso $h = 0,01$. ¿Son buenas las aproximaciones obtenidas?

(Solución: Convergente, $z_{300} = 1,6486381$; $y(1) = 1,6487212$; Buena aproximación)

13.5. Aplicar el método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_n + h, z_n) + \frac{1}{2} f(x_n, z_n) \right)$$

al problema $y' = y$, $y(-1) = e^{-1}$, para obtener la solución aproximada en $x = 1$, tomando como tamaño de paso $h = 0,02$. Calcular el orden de consistencia del método.

(Solución: $z_n = e^{-1} \cdot (1 + h)^n$; $z_{100} = 2,665\dots$; $y(1) = e = 2,7182\dots$; $p = 1$).

13.6. Aplicar el método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_n + h, z_n) + \frac{1}{2} f(x_n, z_n + h) \right) + h^2 \cdot \frac{1}{2} f_{yy}(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) - 1\}$$

al problema $y' = 2x + 1$, $y(0) = 1$, para obtener la solución aproximada en $x = 3$, tomando como tamaño de paso $h = 0,1$. Calcular el error de truncamiento.

(Solución: $z_n = 1 + nh + (nh)^2$; $z_{30} = 13 = y(3)$. $T_{n+1} = 0$. La solución exacta es un polinomio de segundo grado: $y = x^2 + x + 1$).

13.7. Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\alpha_1 f(x_n + \beta h, z_n) + \alpha_2 f(x_n, z_n + \gamma h)) + h^2 \cdot \gamma \cdot \alpha_2 f_y(x_n, z_n) \cdot \{f(x_n, z_n) - 1\}$$
 si

a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta = \gamma = 1.$ (Solución: $p = 2$)

b) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \beta = 1, \gamma = 0.$ (Solución: $p = 0$)

c) $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{3}{4}, \beta = 1, \gamma = 0.$ (Solución: $p = 1$)

13.3. MÉTODOS DE TAYLOR

Al intentar mejorar la solución obtenida con la aplicación del método de *Euler* aparecen de manera natural los **métodos de Taylor**. Desde un punto de vista teórico los métodos de *Taylor* son sencillos y permiten obtener una mayor precisión sin más que aumentar convenientemente el grado del desarrollo. Para obtener los métodos de *Taylor* se debe aplicar a la solución de la ecuación diferencial un desarrollo de *Taylor* de orden k en cada punto $x_n = x_0 + nh$, con lo que se obtiene la fórmula:

$$y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_n + \dots + \frac{h^k}{k!} \cdot y^{(k)}_n.$$

Por tanto, para poder aplicar un método de *Taylor* de orden k se tiene el

inconveniente de tener que evaluar, en cada paso, las primeras k derivadas de la función $f(x, y)$ que define la ecuación diferencial, lo que actualmente se realiza sin dificultad mediante programas de cálculo simbólico, aunque se debe tener en cuenta que dicha función debe tener derivadas parciales sucesivas en la región del plano en la que se evalúe la curva solución.

Como $y'(x) = f(x, y(x))$, derivando se obtiene que $y'_n = f(x_n, y(x_n))$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = f_x + f_y \cdot f$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,$$

$$y(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \right)^2 \cdot f(x, y(x)) = f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_y \cdot f_x + f_y^2 \cdot f,$$

y así sucesivamente, por lo tanto al aumentar el orden se complica la expresión de

la derivada $\frac{d^k y}{dx^k}$.

De esta forma se obtiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot (f_n)^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) + \dots =$$

$$z_n + h \cdot f(x_n, z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x(x_n, z_n) + f_y(x_n, z_n) \cdot f(x_n, z_n)) + \frac{h^3}{3!} \cdot (f_{xx}(x_n, z_n) +$$

$$2f_{xy}(x_n, z_n) \cdot f(x_n, z_n) + f_{yy}(x_n, z_n) \cdot (f(x_n, z_n))^2 + f_y(x_n, z_n) \cdot f_x(x_n, z_n) + (f_y(x_n, z_n))^2 \cdot f(x_n, z_n)) + \dots$$

siendo el término complementario:

$$T_{n+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(c)$$

que se interpreta como la diferencia entre el valor calculado por el método y el valor de la solución exacta en x_{n+1} suponiendo que fuera conocida así como sus derivadas hasta el orden p en x_n .

Como se puede esperar por la construcción, el método de *Taylor* de orden p tiene un error de truncamiento $O(h^{p+1})$ y el orden del error de consistencia es p , siendo, por tanto el orden del error inherente al método $O(h^p)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.3.1: Aplicar el método de Euler y los métodos de Taylor de orden dos y cuatro a $y' = 1 + x - y$, $y(0) = 1$, con tamaño de paso 0,1, para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial 1. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Analizar el orden del error.

$$x_0 = 0; h = 0,1; x_n = 1 = x_0 + nh = nh = n \cdot 0,1 \Rightarrow n = 10.$$

Método de Euler:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n, z_n)$$

Como $f_n = f(x_n, z_n) = 1 + x_n - z_n$ resulta que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) = (1 - h) \cdot z_n + h \cdot (1 + nh).$$

Método de Taylor dos: $y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (y''_n)$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n)$$

Como $y' = f(x, y) = 1 + x - y \Rightarrow y'' = 1 - y' = y - x$:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (z_n - x_n) = (1 - h - \frac{h^2}{2!}) \cdot z_n + h \cdot (1 + nh) + n \frac{h^3}{2!}.$$

Método de Taylor cuatro:

$$y_{n+1} \cong y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (y''_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (y'''_n) + \frac{h^4}{4!} \cdot (y^{(IV)}_n)$$

Como $y''' = y' - 1 = x - y$; $y^{(IV)} = 1 - y' = y - x \Rightarrow$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (1 + x_n - z_n) + \frac{h^2}{2!} \cdot (z_n - x_n) + \frac{h^3}{3!} \cdot (x_n - z_n) + \frac{h^4}{4!} \cdot (z_n - x_n) = (1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}) \cdot z_n + h \cdot (1 + n(h - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} - \frac{h^4}{4!})).$$

| | | | | | | |
|---|--------------|--------|----------------------------|-----------|-------------------------------|------------------------|
| Resultados de aplicar el método de Euler y métodos de Taylor de orden dos y cuatro con tamaño de paso 0,1 a: $y' = 1 + x - y$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ | | | | | | |
| Exacto | <i>Euler</i> | Error | <i>Taylor</i> de orden dos | Error | <i>Taylor</i> de orden cuatro | Error |
| 1,36787944 | 1,348678 | 0,0192 | 1,368541 | 0,0006616 | 1,36787977 | $3,332 \times 10^{-7}$ |

Al comparar los distintos errores globales cometidos se observa que disminuyen al aumentar el orden de consistencia del método siendo el error en el método de Euler igual a 0,0192, el error en el método de Taylor dos igual a 0,0006616 y el error en el método de Taylor cuatro igual a 0,0000003332.

Ejemplo 13.3.2: Resolver por el método de Euler y por el método de Taylor dos la ecuación diferencial de orden superior del péndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\text{sen } \theta$$

Se obtiene el sistema asociado, introduciendo las nuevas variables: $x = \theta$, $y = x'$; que dependen de la variable independiente t , con lo que se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = y; \\ \frac{dy}{dt} = y' = -\text{sen } x \Rightarrow \end{cases}$$

Si se conoce un valor inicial en el punto t_0 , $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ y $h > 0$ es el

tamaño del paso se tiene aplicando el método de *Euler* a ambas ecuaciones:

$$t_{n+1} = t_n + h \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot y_n; \\ y_{n+1} = y_n - h \cdot \text{sen}(x_n); \end{cases}$$

Para aplicar el método de *Taylor* dos: $z_{n+1} = z_n + h \cdot z'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot z''_n$, se obtienen

las derivadas:

$$\begin{cases} x' = y \Rightarrow x'' = y' = -\text{sen } x \\ y' = -\text{sen } x \Rightarrow y'' = -(\cos x) \cdot x' = -(\cos x) \cdot y \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot x'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot x''_n = x_n + h \cdot y_n - \frac{h^2}{2} \cdot \text{sen}(x_n); \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot y''_n = y_n - h \cdot \text{sen}(x_n) - \frac{h^2}{2} \cdot \cos(x_n) \cdot y_n; \end{cases}$$

Ejemplo 13.3.3: Aplicar el método de Taylor dos a:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con tamaño de paso $h = 0,2$, para aproximar la solución en $x = 0,2$, tomando como

valor inicial $\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Método de *Taylor* dos: $z_{n+1} = z_n + h \cdot z'_n + \frac{h^2}{2!} \cdot z''_n = z_n + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n)$

donde:

$$f(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n1} \\ z_{n2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$f_x(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n1} \\ z_{n2} \end{pmatrix},$$

$$f_y(x_n, z_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2x_n \end{pmatrix},$$

$$z_1 = z_0 + h \cdot f(x_0, z_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot (f_x(x_0, z_0) + f_y(x_0, z_0) \cdot f(x_0, z_0))$$

$$f(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_x(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_y(x_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2!} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,02 \\ 0,2 \end{pmatrix} \cong \mathbf{y}(0,2).$$

Ejercicios

13.1. Aplicar el método de Taylor de orden dos a $y' = 2 + 2y$, $y(-4) = 1$, con tamaño de paso 0,1 y 0,05 para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Comparar el error cometido en ambos casos.

(Solución: $z_n = -1 + 2(1 + 2h + 2h^2)^n$; $z_{50} = 41592,12291\dots$, $z_{100} = 43375,82874\dots$, $y(1) = 44051,93159\dots$, $e(0,1) = 2460,\dots$, $e(0,05) = 676,\dots$).

13.2. Aplicar el método de Taylor de orden tres a $y' = 2 + 2y$, $y(-4) = 1$, con tamaño de paso 0,1 y 0,05 para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular en cada caso el error global cometido. Comparar el error cometido en ambos casos.

(Solución: $z_n = -1 + 2(1 + 2h + 2h^2 + \frac{4}{3}h^3)^n$; $z_{50} = 43926,90681\dots$, $z_{100} = 4034,98836\dots$, $y(1) = 44051,93159\dots$, $e(0,1) = 125,\dots$, $e(0,05) = 17,\dots$).

13.3. Resolver por el método de Euler y por el método de Taylor dos la ecuación diferencial de orden superior del péndulo linealizada: $\theta'' = -\theta$, que tiene como sistema lineal asociado:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

13.4. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Los métodos de Taylor de orden superior proporcionan una convergencia rápida, pero su implementación es complicada, ya que es preciso calcular los valores aproximados de las derivadas sucesivas de la solución. El método de Euler en cambio es muy sencillo de aplicar, pero sin embargo su convergencia es lenta. Es interesante entonces obtener métodos numéricos más sencillos que los de Taylor, pero cuya convergencia sea rápida.

Si la función f depende sólo de la variable x , $f(x, y) = f(x)$, existen fórmulas numéricas, anteriores incluso a la fórmula de Euler, que tienen una convergencia más rápida que la que se obtiene con el método de Euler. Así, si el problema que

se quiere aproximar es $\begin{cases} y' = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ la solución que se busca se puede expresar

de la forma $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds$. Para obtener un valor aproximado en un punto

x^* , se puede aplicar, por ejemplo, la regla del punto medio del cálculo integral:

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}\right).$$

En este caso el error global que se comete es de orden 2, con lo cual aunque la fórmula es tan sencilla como la de Euler, la convergencia es mejor.

El problema en esta fórmula es obtener el valor de $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$. Runge pensó que se podría sustituir este valor por el valor aproximado obtenido al aplicar la fórmula de Euler con un tamaño del paso que fuera la mitad del valor de h , de manera que $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$ se sustituyera por: $z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n)$, con lo cual la fórmula resultante obtenida es:

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n)\right).$$

Otra fórmula del mismo tipo es:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}[f(x_n, z_n) + f(x_n + h, z_n + hf(x_n, z_n))].$$

En este caso se ha sustituido en la fórmula de Euler el valor de la función f en el punto (x_n, z_n) por la media aritmética de los valores de f en los puntos (x_n, z_n) y (x_{n+1}, z_{n+1}) .

Las dos fórmulas anteriores tienen una convergencia más rápida que la del

método de Euler, ya que en ambos casos la convergencia es de orden 2.

La generalización de estas fórmulas con vistas a la obtención de algoritmos con orden de convergencia mayor evitando el cálculo de las derivadas dio lugar al desarrollo, desde finales del siglo XIX, de los **métodos de Runge-Kutta**, en los que el cálculo de las derivadas se sustituye por distintas evaluaciones de la función $f(x, y)$, más fáciles de programar.

Definición 13.4.1:

Se denomina **método de Runge-Kutta** de s etapas a un método de expresión:

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j; \quad \text{siendo } k_j = f(x_n + c_j h, z_n + h \sum_{i=1}^s a_{ji} k_i), j = 1, \dots, s$$

Se impone a estos coeficientes las condiciones necesarias para que el error de truncamiento sea del orden que se quiere conseguir.

Los coeficientes b_j , c_j , y a_{ij} se representan abreviadamente mediante lo que se denomina **tablero de Butcher** del método correspondiente:

$$\begin{array}{c|c} c^T & A \\ \hline & b \end{array}$$

donde $c = (c_1, \dots, c_s)$, $b = (b_1, \dots, b_s)$ y $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, s$.

Si A es triangular inferior el método es explícito y en caso contrario, implícito.

Se estudian con detenimiento a continuación los métodos de Runge-Kutta

explícitos. La expresión general de un método explícito de s etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h[b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + \dots + b_s \cdot k_s]$$

con

$$k_1 = f(x_n, z_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + h \cdot a_{21} \cdot k_1)$$

⋮

$$k_s = f(x_n + c_s \cdot h, z_n + h \cdot (a_{s1} \cdot k_1 + a_{s2} \cdot k_2 + \dots + a_{s,s-1} \cdot k_{s-1}))$$

Las fórmulas de Runge-Kutta son pues fórmulas de un paso en las que la función $\Phi(x_n, z_n, h)$ es una media ponderada de los valores que toma la función $f(x, y)$ en s puntos de \mathfrak{R}^2 .

Si $s = 1$, la forma general es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot b_1 \cdot f(x_n, z_n).$$

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ suficientemente regular tal que:

$$\begin{aligned} \psi(x_{n+1}) - (\psi(x_n) + h \cdot b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n))) &= (\psi(x_n) + \psi'(x_n) \cdot h + \psi''(x_n) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots) - \\ (\psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) \cdot b) &= (1 - b) \cdot \psi'(x_n) \cdot h + \psi''(x_n) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Se tiene entonces que el método es consistente si y sólo si $b = 1$, es decir, el único método de *Runge-Kutta* de una única etapa resulta ser el método de *Euler*.

13.4.1. Métodos de Runge-Kutta de dos etapas o métodos de Euler modificados

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de dos etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot f(x_n, z_n) + b_2 \cdot f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, z_n))),$$

donde $k_1 = f(x_n, z_n)$ y $k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, z_n))$. Se pretende obtener las relaciones entre los coeficientes b_1 , b_2 , c_2 y a_{21} para obtener el máximo orden de consistencia posible, 2.

Para calcular el orden de consistencia se supone una función cualquiera ψ suficientemente regular tal que:

$$OC = \psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot \Phi(x_n, \psi(x_n), \psi(x_{n+1}), h)] =$$

$$\psi(x_{n+1}) - [\psi(x_n) + h \cdot (b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n)) + b_2 \cdot f(x_n + c_2 \cdot h, \psi(x_n) + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, \psi(x_n))))]$$

Utilizando el desarrollo de Taylor:

- $$\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h \cdot \psi'(x_n) + \frac{h^2}{2} \cdot \psi''(x_n) + \dots = \psi(x_n) + h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \cdot (f_x + f_y \cdot f_n) + \frac{h^3}{6} \cdot (f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f_n + f_{yy} \cdot f_n^2 + f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n) + \dots$$

siendo $f_n = f(x_n, \psi(x_n))$, $f_x = f_x(x_n, \psi(x_n))$, ... ya que se supone que se aplica a un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

- $-h \cdot b_1 \cdot f(x_n, \psi(x_n)) = -h \cdot b_1 \cdot f_n$
- $-h \cdot b_2 \cdot f(x_n + c_2 h, \psi(x_n) + a_{21} \cdot h \cdot f(x_n, \psi(x_n))) = -h \cdot b_2 \cdot [f_n + \frac{1}{1!} \cdot (f_x \cdot c_2 \cdot h + f_y \cdot a_{21} \cdot h \cdot f_n) + \frac{1}{2!} (f_{xx} \cdot (c_2 \cdot h)^2 + 2f_{xy} \cdot (c_2 \cdot h) \cdot (a_{21} \cdot h \cdot f_n) + f_{yy} \cdot (a_{21} \cdot h \cdot f_n)^2) + \dots$

Se hacen operaciones sacando factor común las potencias del tamaño de paso:

$$OC = h \cdot f_n \cdot (1 - b_1 - b_2) + h^2 \cdot (f_x \cdot (\frac{1}{2} - b_2 \cdot c_2) + f_y \cdot f_n (\frac{1}{2} - b_2 \cdot a_{21})) + h^3 \cdot [f_{xx} \cdot (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} b_2 \cdot c_2^2) + f_{xy} \cdot f_n (\frac{1}{3} - b_2 \cdot c_2 \cdot a_{21}) + f_{yy} \cdot f_n^2 (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} b_2 \cdot a_{21}^2) + \frac{1}{6} (f_y \cdot f_x + (f_y)^2 \cdot f_n)] + \dots$$

Por tanto si $1 - b_1 - b_2 = 0$ se tiene que el orden de consistencia p es mayor o igual que 1. Si además $\frac{1}{2} - b_2 \cdot c_2 = 0$ y $\frac{1}{2} - b_2 \cdot a_{21} = 0$, entonces el orden de consistencia p es mayor o igual que 2. Sin embargo el coeficiente de h^3 es imposible de anular siendo ψ una función cualquiera, pues por ejemplo, el coeficiente de $f_y \cdot f_x$ es $\frac{1}{6}$ que es distinto de cero.

En consecuencia, el orden de consistencia máximo que es posible conseguir es $p = 2$, haciendo $b_1 + b_2 = 1$; $b_2 \cdot c_2 = \frac{1}{2}$; $b_2 \cdot a_{21} = \frac{1}{2}$. Se tiene una familia

uniparamétrica de soluciones.

Las fórmulas de *Runge-Kutta* generales de dos etapas se obtienen imponiendo que el orden de consistencia sea $p = 2$, para lo que hay que resolver un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$b_1 + b_2 = 1; \quad b_2 \cdot c_2 = \frac{1}{2}; \quad b_2 \cdot a_{21} = \frac{1}{2}.$$

por lo que hay infinitas soluciones. Se tiene entonces una familia uniparamétrica de fórmulas de Runge-Kutta. La primera ecuación

$$b_1 + b_2 = 1$$

asegura la consistencia de la fórmula, y las dos restantes garantizan que la consistencia sea de orden 2.

Tal y como se han encontrado, se observa que estos métodos permiten obtener un grado de aproximación equivalente a los métodos de *Taylor* sin necesidad de calcular la derivada de la función. En estas fórmulas el orden del error de truncamiento es proporcional al cubo del tamaño de paso, $O(h^3)$, y el error inherente al método en un intervalo finito es proporcional al cuadrado del tamaño de paso $O(h^2)$, pues son equivalentes al método de *Taylor* de orden dos.

Según los textos que se utilicen los nombres de estos métodos varían de unos a otros: como método del punto medio, de *Euler* modificado, de *Euler* mejorado...

Algunas de las fórmulas obtenidas son:

$$b_2 = \frac{1}{2}; \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n))),$$

$$b_2 = 1; \quad z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n))),$$

$$b_2 = \frac{3}{4}; \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (f(x_n, z_n) + 3f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3} \cdot f(x_n, z_n))).$$

Las dos primeras coinciden con las introducidas al comienzo de esta sección.

El método obtenido para $b_2 = \frac{1}{2}$ se conoce en algunos textos como **método de Euler mejorado**: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n)))$ que, como antes se ha indicado, consiste en reemplazar en el método de *Euler* la función $f(x_n, z_n)$ por el promedio de sus valores en los puntos extremos, y tomar en x_{n+1} como z_{n+1} el valor que proporciona el método de *Euler*.

El segundo método obtenido como resultado de tomar $b_2 = 1$ se conoce en ocasiones como el **método de Euler modificado**: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n)))$, en el que se utiliza el valor de la función $f(x, y)$ evaluado en el punto medio entre x_n y $x_n + h$ tomando en ese punto, $x_n + \frac{h}{2}$, el valor obtenido mediante el método de *Euler*.

Por ejemplo, si se aplica el método de Euler mejorado y el método de Euler a un problema y se analizan los errores, se obtiene:

| Resultados de aplicar el método de Euler y el método de Euler mejorado , con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$. | | | | | |
|--|------------------------|-----------------|---------------------------------|-----------------|---------------|
| | Método de Euler | | Método de Euler mejorado | | Exacto |
| x | h = 0,1 | h = 0,05 | h = 0,1 | h = 0,05 | |
| 1 | 34,411490 | 45,588400 | 59,938223 | 63,424698 | 64,897803 |
| Error global | 30,486313 | 19,309403 | 4,95958 | 1,473105 | |

Se observa que los resultados obtenidos son mucho mejores con el método de *Euler mejorado*, incluso comparando *Euler* con un tamaño de paso de 0,05 con *Euler mejorado* con 0,1, pero al comparar con el valor exacto los errores son todavía demasiado grandes. Se observa también como al reducir a la mitad el tamaño de paso, el error se reduce en el método de Euler en algo aproximado a la mitad, mientras que en el método de *Euler mejorado* se reduce hacia la cuarta parte: $4,959/4 \cong 1,25 \cong 1,4$.

13.4.2. Métodos de Runge-Kutta de tres etapas

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de tres etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + b_3 \cdot k_3),$$

donde:

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1) \text{ y}$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2).$$

Se pretende obtener las relaciones entre los coeficientes $b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, a_{21}, a_{31}$ y a_{32} para obtener el máximo orden de consistencia posible, 3. Se obtienen así 6 ecuaciones, con las que se deben calcular ocho coeficientes; se obtiene así una familia biparamétrica de fórmulas de Runge-Kutta de tres etapas, con un orden de convergencia 3. De forma análoga a las fórmulas de orden dos ya estudiadas, la ecuación:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

garantiza la consistencia de la fórmula, mientras que las ecuaciones de la forma:

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad i = 2, 3$$

aseguran la consistencia de orden 2.

Los métodos de *Runge-Kutta* de orden tres no se suelen usar en la práctica.

Los que alguna vez se utilizan son:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + k_3) + \frac{2h}{3} \cdot k_2, \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} k_1), \quad k_3 = f(x_n + h, z_n + h(2k_2 - k_1)),$$

y el método conocido como el **método de Runge-Kutta Heun**:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (k_1 + 3k_3), \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{3}, z_n + \frac{h}{3}k_1), k_3 = f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3}k_2).$$

Su tablero de *Butcher* es:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 0 | | | |
| 1/3 | 1/3 | | |
| 2/3 | 0 | 2/3 | |
| | 1/4 | 0 | 3/4 |

13.4.3. Métodos de Runge-Kutta cuatro

Los métodos de Runge-Kutta de orden cuatro son muy utilizados porque son sencillos de programar y porque poseen una relación exactitud-coste óptima. El desarrollo de estas fórmulas se inició con el trabajo de *Carl Runge* en 1 895 y lo continuó *M. Kutta* en 1 901.

La expresión general de los métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4),$$

donde:

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2),$$

$$k_4 = f(x_n + c_4 \cdot h, z_n + a_{41} \cdot h \cdot k_1 + a_{42} \cdot h \cdot k_2 + a_{43} \cdot h \cdot k_3).$$

Al plantear en general un método de *Runge-Kutta* de orden cuatro se tienen 13 incógnitas: $b_1, b_2, b_3, b_4, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ y a_{43} . y al imponer que el orden de consistencia sea $p = 4$ se tienen 11 ecuaciones. Se tiene entonces una familia biparamétrica de métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas, con un orden de consistencia 4.

La fórmula se calcula tomando valores de la función en cuatro puntos diferentes y calculando un valor intermedio. La fórmula que más se utiliza, a la que se denomina *Runge-Kutta* clásico, o simplemente **método de Runge-Kutta**, que es uno de los métodos más utilizados y el de más éxito entre los métodos de un paso, viene definida por el siguiente tablero de *Butcher*:

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | | | | |
| 1/2 | 1/2 | | | |
| 1/2 | 0 | 1/2 | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

y se expresa:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ donde}$$

$$k_1 = f(x_n, z_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_n + h, z_n + h \cdot k_3).$$

Su significado geométrico es obtener la pendiente en cuatro ocasiones y estimar un promedio. La primera vez se estima $k_1 = f(x_n, z_n)$, luego se estima la pendiente en el punto medio entre x_n y x_{n+1} calculando el valor mediante Euler en ese punto medio. La tercera estimación se hace también en el punto medio pero utilizando el valor k_2 , recién obtenido, y la cuarta se estima en el punto x_{n+1} .

Se observa que si $f(x, y)$ sólo depende de x , el método coincide con la regla de *Simpson* para integrar $f(x)$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

Es sencillo, con una simple hoja de cálculo, utilizar este método. El error de truncamiento que se comete es proporcional a h^5 en cada paso; por tanto, el error inherente al método es del orden $O(h^4)$.

Se compara este método con los anteriores:

| | | | | | |
|--|---------------------|---------------------|------------------------|----------------------|----------------------|
| Resultados de aplicar el método de Euler , el método de Euler mejorado , Taylor de orden dos y Runge-Kutta 4 con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - x + 4y$, $y(0) = 1$ para aproximar la solución en $x = 1$. | | | | | |
| <i>h</i> | <i>Euler</i> | <i>Euler</i> | <i>Taylor 2</i> | <i>Runge-</i> | <i>Exacto</i> |

| | | <i>mejorado</i> | | <i>Kutta 4</i> | |
|--------------|-----------|-----------------|-----------|----------------|-----------|
| 0,1 | 34,411490 | 59,938223 | 59,938223 | 64,858107 | 64,897803 |
| 0,05 | 45,588400 | 63,424698 | 63,424698 | 64,894875 | 64,897803 |
| 0,025 | 53,807866 | 64,497931 | 64,497931 | 64,897604 | 64,897803 |
| 0,01 | 60,037126 | 64,830722 | 64,830722 | 64,897798 | 64,897803 |

Aunque ya a principios de siglo XX se habían establecido las condiciones de orden para métodos de orden cuatro, no fue hasta 1957 cuando *Butcher* estableció las condiciones de orden para métodos de un número arbitrario de etapas. La demostración rigurosa supera el nivel de este curso. *J. C. Butcher* estableció la relación entre el número de evaluaciones por paso y el orden del error de truncamiento, y como consecuencia observó que es preferible utilizar métodos de orden menor que cinco con un tamaño de paso más pequeño, a métodos de orden mayor y tamaño de paso mayor. *Butcher* probó que no existe ningún método de cinco etapas con un orden de convergencia cinco. Si $p^*(R)$ representa el mayor orden de convergencia que se puede obtener para un método de *Runge-Kutta* de R etapas, entonces: $p^*(R) = R$, $R = 1, 2, 3, 4$; $p^*(5) = 4$, $p^*(6) = 5$, $p^*(7) = 6$, $p^*(8) = 6$, $p^*(9) = 7$, y en general $p^*(R) \leq R - 2$ para $R = 10, 11, \dots$ luego por esta razón los métodos de *Runge-Kutta* de orden 4 son los más populares.

En el ejemplo siguiente se compara el método de *Runge-Kutta* 4 con un tamaño de paso $h = 0,1$ con un método de *Euler mejorado* con un tamaño de paso de la mitad $h = 0,05$ y con el método de *Euler* con un tamaño de paso de la mitad del anterior y la cuarta parte del primero, $h = 0,025$, según el estudio que se ha

realizado del error de truncamiento en los tres casos el error debería ser parecido, y sin embargo se observa que el método de *Runge-Kutta 4* es claramente superior.

| Resultados de aplicar el método de Euler , el método de Euler mejorado y el método de Runge-Kutta 4 con distintos tamaños de paso a: $y' = 1 - y$, $y(0) = 0$, para aproximar la solución en $x = 0,5$. | | | |
|---|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------|
| Euler $h = 0,025$ | Euler mejorado $h = 0,05$ | Runge-Kutta 4 $h = 0,1$ | Valor real |
| 0,397312 | 0,393337 | 0,39346906 | 0,393469340 |

Hoy en día se construyen métodos de *Runge-Kutta* con más etapas de las estrictamente necesarias, pues al disponer de más parámetros se pueden mejorar otras propiedades del método como coeficientes de error, regiones de estabilidad absoluta, etc.

En los métodos de *Runge-Kutta* implícitos el número de etapas s y de orden n no coinciden necesariamente. Los métodos explícitos aunque tienen regiones de estabilidad lineal que aumentan con la precisión del método, no son adecuados para sistemas “stiff” ya que cubren porciones pequeñas del semieje real negativo. Los más importantes son:

- Métodos de *Gauss*, donde el orden es doble al número de etapas. Uno de los más interesantes es el de orden 2, conocido como la regla del punto medio implícita:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(x_n + h/2, (z_n + z_{n+1}) / 2)$$

Todos ellos son A-estables (ver *definición 13.6.3*) en régimen lineal,

algebraicamente estables en el no lineal.

- Métodos de *Randau*, donde el orden $n = 2s - 1$. Uno de estos métodos de orden uno coincide con el método de *Euler* implícito.
- Métodos de *Lobatto*, de orden $n = 2s - 2$. Uno de estos métodos de orden dos coincide con la regla trapezoidal. Unos son A-estables en el régimen lineal y algebraicamente estables en el no lineal, y otros son A-estables en el régimen lineal y no algebraicamente estables en el no lineal.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.4.1: Aplicar el **método de Euler**, el **método de Euler mejorado** y **Runge-Kutta 4** con tamaños de paso de 0,1 y 0,05 a: $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1,5$. Analizar el error cometido al disminuir el tamaño de paso a la mitad.

| Resultados de aplicar el método de Euler , el método de Euler mejorado , y Runge-Kutta 4 con distintos tamaños de paso a: $y' = 2xy$, $y(1) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1,5$. | | | | | | | |
|--|--------------|--------------|-----------------------|--------------|----------------------|--------------|---------------|
| h | Euler | Error global | Euler mejorado | Error global | Runge-Kutta 4 | Error global | Exacto |
| 0,1 | 2,9278 | 0,5626 | 3,4509 | 0,0395 | 3,4902 | 0,00013 | 3,4904 |
| 0,05 | 3,1733 | 0,3171 | 3,4795 | 0,0109 | 3,4903 | 0,000009 | 3,4904 |

Es sencillo analizar como disminuye el error al disminuir el tamaño de paso, calculando los errores y comparando con las potencias de h^p . El nombre de orden cuatro viene de ser el error inherente al método de $O(h^4)$, (con las condiciones de regularidad requeridas, como que la solución tenga cinco derivadas continuas),

siendo en el ejemplo anterior el error respectivamente para el método de *Runge-Kutta 4* de 0,000132210889 para h igual a 0,1 y de 0,0000091377 para un tamaño de paso de 0,05 siendo $0,0000091377 \approx 0,00013221/16 = 0,00000826$.

Ejemplo 13.4.2: Utilizar una hoja de cálculo para aproximar la solución en $x = 1$, por el **método de Euler y Runge-Kutta 4** con tamaños de paso de 0,25 de $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. Analizar el resultado obtenido.

| Ecuación: $y' = x^2 + y^2$ | | | | | | |
|----------------------------|--------------|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Dato inicial: $y(0) = 1$ | | | | | | |
| Paso $h = 0,25$ | | | | | | |
| x | <i>Euler</i> | <i>Runge-Kutta 4</i> | k_1 | k_2 | k_3 | k_4 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1,28125 | 1,3615875 | 1,8591638 |
| 0,25 | 1,25 | 1,33936829 | 1,8564074 | 2,6099833 | 2,9149023 | 4,5270122 |
| 0,5 | 1,65625 | 2,06575124 | 4,5173282 | 7,3097200 | 9,2678441 | 19,770666 |
| 0,75 | 2,40454102 | 4,45921471 | 20,447095 | 49,977276 | 115,39207 | 1110,3718 |
| 1 | 3,99062039 | 65,3574486 | 4272,5960 | 359319,94 | 20232318 | 2,558E+17 |

La diferencia entre ambos métodos es sorprendente. Si se estudia con detenimiento se observa que $y' = x^2 + y^2$, con $y(0)=1$ no se puede resolver por métodos elementales y tiene una solución no acotada en un valor próximo a $x = 0,97$, si se utiliza la desigualdad entre $0 < x < 1$, $y^2 < x^2 + y^2 < 1 + y^2$. Esto indica el tipo de precauciones que se deben tomar al utilizar los métodos numéricos y la importancia ya indicada de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones, así como de la dependencia continua de los datos.

Ejercicios

- 13.1. Calcular $b_1, b_2, c_2, c_3, a_{21}, a_{31}$ y a_{32} para que el método: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + b_3 \cdot k_3)$ siendo $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n + c_2 \cdot h, z_n + a_{21} \cdot h \cdot k_1)$;

$k_2 = f(x_n + c_3 \cdot h, z_n + a_{31} \cdot h \cdot k_1 + a_{32} \cdot h \cdot k_2)$ tenga orden de consistencia máximo.

13.2. Escribir el tablero de Butcher para el método de Euler mejorado: $z_{n+1} =$

$$z_n + \frac{h}{2} \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_n + h \cdot f(x_n, z_n))).$$

13.3. Escribir el tablero de Butcher para el método de Euler modificado: z_{n+1}

$$= z_n + h \cdot (f(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, z_n))).$$

13.4. Escribir el tablero de Butcher para el método de Runge-Kutta de tres

etapas: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + k_3) + \frac{2h}{3} \cdot k_2$, donde $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2},$

$$z_n + \frac{h}{2} k_1), k_3 = f(x_n + h, z_n + h(2k_2 - k_1)).$$

13.5. Aplicar el método: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f(x_n, z_n) + f(x_n + h, z_n + hf(x_n, z_n)))$ al

problema $y' = y$, $y(0) = 1$, para un tamaño de paso h .

$$(\text{Solución: } z_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n).$$

13.6. Aplicar el método: $z_{n+1} = z_n + hf(x_{n+1}, z_{n+1})$ al problema $y' = y$, $y(0) = 1$, para un tamaño de paso h .

$$(\text{Solución: } z_n = \left(\frac{1}{1-h}\right)^n).$$

13.5. ESTIMACIÓN DEL ERROR EN CADA PASO

En los métodos que se han presentado hasta ahora se ha supuesto que el tamaño del paso h es fijo durante todo el proceso. En la práctica, en ocasiones, esto no es así. Lo que se hace es modificar convenientemente el tamaño de h en los distintos pasos, de manera que se obtenga una aproximación adecuada, por lo que resulta fundamental controlar el error que se va cometiendo en cada paso.

Por tanto, una cuestión de interés práctico es el control del error cuando se quiere obtener una exactitud prefijada. Existen fórmulas asintóticas del error global para los métodos de *Runge-Kutta*. En particular para los métodos de orden cuatro de convergencia, la expresión es:

$$y(x_n) - z_n = D(x) \cdot h^4 + O(h^5),$$

donde $D(x)$ satisface un cierto problema de valor inicial.

La estimación directa del error de truncamiento en los métodos de Runge-Kutta es laboriosa, pues se precisa para ello calcular las derivadas parciales de órdenes superiores de la función $f(x, y)$, que es lo que precisamente se intenta evitar con los métodos de Runge-Kutta. Por ello, para controlar el error que se va cometiendo en cada etapa se utilizan otros procedimientos alternativos. Una de las técnicas que primero se utilizaron es la que se conoce como método de la

extrapolación de *Richardson*, o del paso doblante.

Extrapolación de Richardson

El método de la extrapolación de *Richardson* fue usado por primera vez por *L. F. Richardson* en 1927. Es una técnica antigua que puede ser utilizada con cualquier método numérico. Una manera habitual de proceder es calcular dos aproximaciones distintas de $y(x_{n+1})$ utilizando tamaños de paso h y $2h$ respectivamente, y a partir de ellas estimar el error. Si éste excede una tolerancia prefijada se disminuye el paso; en caso contrario se aumenta. Es importante hacer notar el elevado coste computacional de esta operación ya que se requieren en el caso del método de Runge-Kutta un número elevado de evaluaciones de la función $f(x, y)$ por paso.

Si se aplica la técnica de extrapolación de *Richardson* se tiene el resultado asintótico:

$$y(x_n) - z_h(x_n) = h^p \cdot D(x_n) + O(h^{p+1})$$

con $D(x)$ satisfaciendo una cierta ecuación diferencial lineal, lo que justifica el uso de esta fórmula para estimar el error y acelerar la convergencia.

Por ejemplo, para $p = 1$, la fórmula $y(x) - z_h(x) = h \cdot D(x)$ proporciona una estimación del error asintótico, y reemplazando h por $2h$, y sustituyendo $h \cdot D(x)$, se obtiene:

$$y(x) - z_{2h}(x) = 2h \cdot D(x) = 2(y(x) - z_h(x))$$

de donde, despejando $y(x)$ se obtiene tanto una **fórmula de extrapolación de Richardson**:

$$y(x) = 2z_h(x) - z_{2h}(x),$$

como el **error estimado de Richardson**:

$$y(x) - z_h(x) = z_h(x) - z_{2h}(x).$$

Este tipo de razonamiento puede volver a utilizarse en los otros métodos, pues las técnicas de extrapolación, cuya idea se debe a *W. B. Gragg*, se pueden usar en los problemas de valor inicial.

Si, por ejemplo, se aplica a un método de Runge-Kutta de orden p y es z_{n+1} el valor obtenido al aplicar el método al valor exacto en x_n , entonces el error de truncamiento es:

$$T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = \varphi(y(x_n)) \cdot h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Si ahora se emplea un tamaño de paso $2h$ y para calcular el error de truncamiento se aplica el método suponiendo que hasta x_{n-1} se tiene el valor exacto, y se obtiene z_{n+1}^* , entonces:

$$T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1}^* = \varphi(y(x_n)) \cdot (2h)^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

En consecuencia, restando ambas expresiones, se tiene:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = \varphi(y(x_n)) \cdot [2^{p+1} - 1] \cdot h^{p+1} \Rightarrow$$

$$\varphi(y(x_n)) \cdot h^{p+1} \cong (z_{n+1} - z_{n+1}^*) / [2^{p+1} - 1] \Rightarrow$$

La parte principal del error de truncamiento es:

$$T_{n+1} = (z_{n+1} - z_{n+1}^*) / [2^{p+1} - 1].$$

Esta estimación es buena, pero requiere un trabajo adicional importante. Si el método de Runge-Kutta es de s etapas se necesitan $s - 1$ evaluaciones adicionales de la función (pues k_1 ya ha sido calculado).

Así, si se utiliza el método de Runge-Kutta 4, de orden de convergencia, $p = 4$, entonces $[2^{p+1} - 1] = 31$, por lo que se aplica el método con un tamaño de paso h y con un tamaño de paso $2h$, se resta el resultado y se divide por 31. El resultado obtenido sirve de evaluación del error.

Pares encajados de Runge-Kutta

Un problema de interés es la determinación del tamaño del paso para obtener un error inferior a una tolerancia dada, pues si el tamaño es demasiado pequeño, además de aumentar los errores de redondeo, el coste computacional es mayor. Se ha visto como el tamaño del paso está relacionado con el error de truncamiento y con el error local y éstos con el error global, de forma que es posible resolver el problema.

Existen otros procedimientos más modernos para controlar el error. A mitad

del siglo XX, Merson, hacia 1957, ideó una forma para estimar el error a partir de valores ya calculados de k_i , que consiste en lo siguiente:

En esencia la idea de Merson consiste en tomar dos métodos numéricos con órdenes de consistencia p y $p + 1$, obteniéndose la siguiente aproximación:

$$\text{Orden } p: T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = C(x)h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

$$\text{Orden } p + 1: T_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1}^* = C^*(x)h^{p+2} + O(h^{p+3}).$$

Restando, se obtiene:

$z_{n+1} - z_{n+1}^* = C(x)h^{p+1} + O^*(h^{p+2})$, que es una estimación del error de truncamiento, que se obtiene

$$T_{n+1} \cong z_{n+1} - z_{n+1}^*.$$

Esta es la filosofía que se siguió al definir los pares encajados de Runge-Kutta, que consiste en controlar el error global a partir del control del error de truncamiento, utilizando para ello dos métodos de *Runge-Kutta* de distinto orden, sin apenas coste computacional añadido.

Definición 13.5.1:

Se conoce como **pares encajados de Runge-Kutta**, a dos métodos de Runge-Kutta con las características siguientes:

- 1) Sus órdenes de convergencia son p y $p + 1$.

2) Los coeficientes de las k_i coinciden en los métodos.

Es decir, expresados estos coeficientes en el tablero de Butcher, se tiene:

$$\begin{array}{c|c} \text{C} & \text{A} \\ \hline & \text{B} \end{array}$$

Primer método

$$\begin{array}{c|c} \text{C} & \text{A} \\ \hline & \text{B}^* \end{array}$$

Segundo método

y por lo tanto únicamente cambian los coeficientes b_j que multiplican a los k_j :

Se les pone la etiqueta $(p, p + 1)$, que indica que se toma como z_{n+1} el valor suministrado por el método de orden de convergencia p , con lo cual el orden de convergencia de los pares encajados es p .

$$\text{Orden } p: z_{n+1} = z_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i .$$

$$\text{Orden } p + 1: z_{n+1}^* = z_n + h \sum_{i=1}^s b_i^* k_i .$$

Restando se obtiene la aproximación del error:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = h \sum_{i=1}^s E_i k_i , \text{ siendo } E_i = b_i - b_i^* .$$

Los pares encajados más conocidos son:

a) El par de **Runge-Kutta-Fehlberg**, desarrollado por *E. Fehlberg* entre 1968 y 1969, y presentado en 1970, en el que se combinan los métodos de orden de convergencia cuatro y cinco, (*RKF45*), ambos de 6 etapas, lo cual

conlleva seis evaluaciones de la fórmula $f(x, y)$ por paso, en lugar de las once que tendrían lugar en el caso de aplicarlas independientemente¹.

Su tablero de Butcher es:

| | | | | | | |
|-----------------|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|----------------|
| 0 | | | | | | |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | | | | | |
| $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{9}{32}$ | | | | |
| $\frac{12}{13}$ | $\frac{1932}{2197}$ | $-\frac{7200}{2197}$ | $\frac{7200}{2197}$ | | | |
| 1 | $\frac{439}{216}$ | -8 | $\frac{3680}{513}$ | $-\frac{845}{4104}$ | | |
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{8}{27}$ | 2 | $-\frac{3544}{2565}$ | $\frac{1859}{4104}$ | $-\frac{11}{40}$ | |
| | $\frac{25}{216}$ | 0 | $\frac{1408}{32}$ | $\frac{2197}{4104}$ | $-\frac{1}{5}$ | 0 |
| | $\frac{16}{135}$ | 0 | $\frac{6656}{12825}$ | $\frac{28561}{56430}$ | $-\frac{9}{50}$ | $\frac{2}{55}$ |
| | $\frac{1}{360}$ | 0 | $-\frac{128}{4275}$ | $-\frac{2197}{75240}$ | $\frac{1}{50}$ | $\frac{2}{55}$ |

En ocasiones se computa el método *RKF45* como un método (5, 4) utilizando

¹ Lambert, J. D. (1973): Computational Methods in Ordinary Differential Equations. Editorial John Wiley & Sons. Página 182.

como valor el obtenido con el método de orden de convergencia 5.

b) El par de **Domand-Prince**, desarrollado por Dormand y Prince en 1980, DOPRI (5, 4), en el que se combinan los métodos de orden de convergencia cuatro y cinco, ambos de 7 etapas.

Su tablero de Butcher es:

| | | | | | | | |
|----------------|----------------------|-----------------------|----------------------|---------------------|-------------------------|--------------------|-----------------|
| 0 | | | | | | | |
| $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | | | | | | |
| $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{40}$ | $\frac{9}{40}$ | | | | | |
| $\frac{4}{5}$ | $\frac{44}{45}$ | $-\frac{56}{15}$ | $\frac{32}{9}$ | | | | |
| $\frac{8}{9}$ | $\frac{19372}{6561}$ | $-\frac{25360}{2187}$ | $\frac{64448}{6561}$ | $-\frac{212}{729}$ | | | |
| 1 | $\frac{9017}{3168}$ | $-\frac{355}{33}$ | $\frac{46732}{5247}$ | $\frac{49}{176}$ | $-\frac{5103}{18656}$ | | |
| 1 | $\frac{35}{384}$ | 0 | $\frac{500}{1113}$ | $\frac{125}{192}$ | $-\frac{2187}{6784}$ | $\frac{11}{84}$ | |
| | $\frac{5179}{57600}$ | 0 | $\frac{7571}{16695}$ | $\frac{393}{640}$ | $-\frac{92097}{339200}$ | $\frac{187}{2100}$ | $\frac{1}{40}$ |
| | $\frac{35}{384}$ | 0 | $\frac{500}{1113}$ | $\frac{125}{192}$ | $-\frac{2187}{6784}$ | $\frac{11}{84}$ | 0 |
| | $\frac{71}{57600}$ | 0 | $-\frac{71}{16695}$ | $\frac{71}{339200}$ | $\frac{22}{525}$ | $\frac{22}{525}$ | $-\frac{1}{40}$ |

A pesar de tener más etapas, 7 etapas, en los pares de Domand-Prince se tiene que los b_j^* coinciden con los coeficientes de la última fila de la matriz A, a_{7j} :

$$k_7^n = f(x_n + h, z_n + h \sum_{j=1}^6 a_{7j} k_j^n)$$

$$k_1^{n+1} = f(x_n + h, z_n + h \sum_{j=1}^6 b^*_j k_j^n) = k_7^n .$$

Los métodos con esta propiedad se denominan: Primero igual al último (FSAL: First Same As Last).

Estas fórmulas se computan simultáneamente y su diferencia se toma como una estimación del error de truncamiento para la fórmula de orden cuatro, el cual, a su vez, se utiliza bien para variar el tamaño de paso adecuadamente, bien para controlar el error.

Se observa que para tener un par (4, 5) es necesario utilizar, como mínimo, métodos de Runge-Kutta de 6 etapas.

Tanto en el método de la extrapolación de Richardson como en el método de los pares encajados una vez que se tiene una estimación del error cometido, $e(h^*)$, para un tamaño del tamaño del paso h^* se estudia si se verifica que: $e(h^*)/h^* < \varepsilon$, siendo ε el error máximo tolerado. Si no fuese así se busca un nuevo valor del tamaño del paso, h , hasta que se verifique lo anterior, $e(h)/h < \varepsilon$.

Si el orden de convergencia es p , se tiene que:

$$e(h^*) \cong c(x) h^{*p+1},$$

y que

$$e(h) \cong c(x) h^{p+1} = \left(\frac{e(h^*)}{h^{*p+1}} \right) h^{p+1} < \varepsilon h.$$

Si se supone que $h = ah^*$, entonces

$$e(h) \cong \left(\frac{e(h^*)}{h^{*p+1}} \right) (ah^*)^{p+1} < \varepsilon ah^* \Rightarrow a^p < \frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \Rightarrow a < \left(\frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$h = \left(\frac{\varepsilon h^*}{e(h^*)} \right)^{1/p} h^*.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.5.1: Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el caso, (ver *ejemplo 13.4.1*) en que $z_{0,1}(1,5) = 3,4902$ y $z_{0,05}(1,5) = 3,4903$.

En el *ejemplo 13.4.1* se ha utilizado el método de Runge-Kutta 4 y se ha calculado $z_{0,1}(1,5) = 3,4902$ y $z_{0,05}(1,5) = 3,4903$. El valor estimado por la fórmula de extrapolación de Richardson es:

$$y(x) = 2z_h(x) - z_{2h}(x) = 2z_{0,05}(1,5) - z_{0,1}(1,5) = 2(3,4903) - (3,4902) = 3,4904.$$

El error estimado de Richardson es:

$$y(x) - z_h(x) = z_h(x) - z_{2h}(x) = z_{0,05}(1,5) - z_{0,1}(1,5) = (3,4903) - (3,4902) =$$

0,0001.

Ejercicios

13.1. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.1*) en que $z_{0,1}(1,5) = 0,63942967$ y $z_{0,05}(1,5) = 0,66397766$.

13.2. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.1*) en que $z_{0,05}(1,5) = 0,66397766$ y $z_{0,0251}(1,5) = 0,67731662$.

13.3. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (ver *ejemplo 13.1.2*) en que $z_{0,0125}(1) = 60,037126$ y $z_{0,025}(1) = 53,807866$.

(Solución: $z_n = -4 + 4(2)^n - 3n$).

13.4. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - z_n = 5$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 2$.

(Solución: $z_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{5}{2}n$).

13.5. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 3z_{n+2} + 3z_{n+1} - z_n = 12$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = 1 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + 2n^3).$$

13.6. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + 3z_n = 0$.

$$(Solución: z_n = A(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \sen n\frac{\pi}{4}).$$

13.7. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 5$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = A \cos n\frac{\pi}{3} + B \sen n\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}).$$

13.8. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} - 7z_{n+3} + 18z_{n+2} - 20z_{n+1} + 8z_n = 0$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$.

$$(Solución: z_n = 5 - 5(2)^n + 3n(2)^n - \frac{1}{2}n^2(2)^n).$$

13.6. ESTABILIDAD ABSOLUTA EN LOS MÉTODOS DE UN PASO

Otro concepto interesante es el de **estabilidad absoluta**, ya que aunque el método sea estable y sea convergente es posible que, para determinados valores del paso, el error cometido sea demasiado grande para que el método resulte aceptable, y se necesite tomar un tamaño de paso muy pequeño, por lo que el número de pasos puede ser excesivo.

Al aplicar un método numérico se debe escoger, naturalmente, un método convergente. Pero esto quiere decir únicamente que se puede aproximar la solución obtenida tanto como se quiera a la solución exacta tomando el tamaño de paso suficientemente pequeño. Sin embargo, este límite no es lo que se utiliza en la práctica, sino que se aplica para un tamaño de paso fijo, con lo que puede ocurrir que el error cometido sea demasiado grande. Al aplicar el método no se toman límites cuando el tamaño de paso tiende a cero, sino que para un tamaño de paso fijado de antemano se calcula una cantidad finita de valores, por lo que es importante escoger un tamaño adecuado para el paso, de manera que el error que se cometa sea menor que una tolerancia dada.

Para hacer este estudio se aplica en primer lugar el método que se quiera probar al problema de valor inicial $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, que se denomina **ecuación de prueba**, que se toma como referencia de problema de valor inicial, y puede servir

de modelo de lo que ocurre en el caso general, y cuya solución es sobradamente conocida, $y(x) = e^{\lambda x}$, lo que permite calcular el error global cometido al aplicar el método. Aunque el estudio se realice en este caso particular, resulta que si el método no es adecuado para tratar este problema tampoco lo es para un problema general pues en el caso de un problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, se puede considerar que toda ecuación diferencial se puede aproximar por su primer término en su desarrollo de Taylor:

$$y' = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, por lo que mediante un cambio de variables se puede transformar en la ecuación diferencial:

$$y' = \lambda \cdot y$$

donde λ vale $f_y(x_0, y_0)$.

Definición 13.6.1:

Se denomina **ecuación de prueba** al problema de valor inicial $y' = \lambda \cdot y$, $y(0) = 1$.

Si λ es negativo la solución es decreciente y su límite, cuando x tiende a infinito, es cero, por lo que el método empleado debe reproducir ese comportamiento, es decir, para todo valor de h mayor que cero, el límite de la solución aproximada obtenida debe tender a cero cuando n tiende a infinito. En general esta condición no se verifica para cualquier h , sino para determinados

valores de $\lambda \cdot h$.

Para comprender mejor este comportamiento se analiza mediante un ejemplo:

Se estudia el caso del método de Runge-Kutta de dos etapas:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (f(x_n + h/2, z_n + (h/2) \cdot f(x_n, z_n))).$$

Al aplicarlo al problema de valor inicial: $y' = \lambda \cdot y$, $y(0) = 1$ se tiene:

$$z_{n+1} = z_n + \lambda \cdot h \cdot (z_n + (h/2) \cdot \lambda \cdot z_n) = z_n \cdot (1 + \lambda \cdot h + \frac{\lambda^2 h^2}{2})$$

Se denomina $\lambda \cdot h = \bar{h}$, y se tiene:

$$z_{n+1} = z_n \cdot (1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2}) = z_n \cdot r(\bar{h}).$$

Al calcular el error cometido:

$$e_n = y(x_n) - z_n.$$

Por otra parte, el error de truncamiento es:

$$T_n = y(x_n) - (y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h})) \Rightarrow y(x_n) = T_n + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}).$$

Si se supone que el error de truncamiento no depende de n y se denomina $T_n = T$, entonces:

$$y(x_n) = T + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}) \Rightarrow$$

$$e_n = y(x_n) - z_n = T + y(x_{n-1}) \cdot r(\bar{h}) - z_{n-1} \cdot r(\bar{h}) = T + r(\bar{h}) \cdot (y(x_{n-1}) - z_{n-1}) = T + r(\bar{h}) \cdot (e_{n-1})$$

Se resuelve la ecuación en diferencias:

$$e_n = r(\bar{h}) \cdot (e_{n-1}) + T.$$

La solución general de la ecuación homogénea: $e_H = C \cdot r(\bar{h})^n$ y la solución

particular: $e_P = T \frac{r(\bar{h})^n - 1}{r(\bar{h}) - 1}$, siendo $C = e_0$. Por tanto:

$$e_n = e_H + e_P = e_0 \cdot r(\bar{h})^n + T \frac{r(\bar{h})^n - 1}{r(\bar{h}) - 1} = r(\bar{h})^n \left(e_0 + \frac{T}{r(\bar{h}) - 1} \right) + T \frac{1}{1 - r(\bar{h})}.$$

En consecuencia, el error global decrece al aumentar n , si $|r(\bar{h})| < 1$, y crece si $|r(\bar{h})| \geq 1$. Por este motivo surge un nuevo concepto, el de **región de estabilidad absoluta** asociada a un método, que es un cierto dominio del plano complejo para los que λh verifica dicha condición:

Definición 13.6.2:

Se denomina **región de estabilidad absoluta** asociada a un método al conjunto de valores de \bar{h} tales que: $|r(\bar{h})| < 1$.

$$\text{R.E.A.} = \{ \bar{h} \in \mathbf{C} : |r(\bar{h})| < 1 \}.$$

Se denomina **intervalo de estabilidad absoluta** asociada a un método a la intersección de la región de estabilidad absoluta con eje real, es decir:

$$\text{I.E.A.} = \{ \bar{h} \in \mathfrak{R} : |r(\bar{h})| < 1 \}.$$

Definición 13.6.3:

El método es **A-estable** si la región de estabilidad absoluta es todo el semiplano negativo del plano complejo.

Esta propiedad que es especialmente interesante cuando se trabaja con los problemas “*stiff*”.

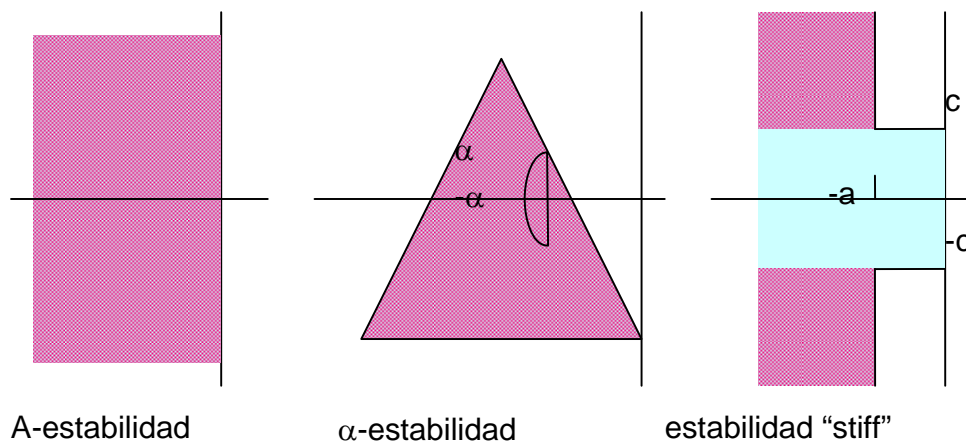


Figura 13.2: Regiones de estabilidad.

En el ejemplo anterior, $r(\bar{h}) = (1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2})$, y la parábola $y = x^2/2 + x + 1$ tiene de vértice el punto $(-1, 1/2)$, corta al eje vertical en $(0, 1)$, por lo tanto:

Si $\bar{h} \in (-2, 0)$ entonces $|r(\bar{h})| < 1$, por lo que se dice que $(-2, 0)$ es el

intervalo de estabilidad absoluta del método de Runge-Kutta de dos etapas estudiado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.6.1: Estudiar la estabilidad absoluta para: a) el método de Runge-Kutta de dos etapas: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} f(x_n, z_n))$; b) el método de Runge-Kutta de tres etapas de Heun, c) el método de Runge-Kutta de cuatro etapas, y d) el método de Euler.

a) El método de Runge-Kutta dos etapas pedido es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} f(x_n, z_n))$$

que al sustituir la ecuación de prueba $y' = \lambda y$ se obtiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (z_n + \frac{h}{2} z_n) \cdot \lambda = z_n \cdot (1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}) = z_n \cdot (1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2})$$

por lo que $r(\bar{h}) = (1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2})$ y al imponer que $|r(\bar{h})| < 1 \Rightarrow$

$$|(1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2})| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} < 1 \Rightarrow -2 < \bar{h} + \frac{(\bar{h})^2}{2} < 0,$$

por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

En todos los métodos de Runge-Kutta de dos etapas el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

b) En todos los métodos de Runge-Kutta de tres etapas al aplicarlos a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n \left(1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} \right) = z_n r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6}$ se tiene una cúbica, creciente, que corta al eje de abscisas en $(-1, 0)$ y al eje de ordenadas en $(0, 1)$.

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2,5127458\dots$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2,5127458\dots, 0)$.

c) En todos los métodos de Runge-Kutta de cuatro etapas al aplicarlos a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n \left(1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{\bar{h}^4}{24} \right) = z_n r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} + \frac{\bar{h}^3}{6} + \frac{\bar{h}^4}{24}$ se tiene una cuártica, que corta al eje de ordenadas en $(0, 1)$.

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2,78\dots$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2,78\dots, 0)$.

d) Al aplicar el método de Euler a la ecuación de prueba se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n(1 + \bar{h}) = z_n r(\bar{h}).$$

Al representar $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h}$ se tiene una recta, que corta al eje de ordenadas en $(0, 1)$ y al eje de abscisas en $(-1, 0)$.

Si $r(\bar{h}) = -1$ entonces $\bar{h} = -2$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

Se observa que todos los métodos de Runge-Kutta del mismo número de etapas tienen el mismo intervalo de estabilidad absoluta.

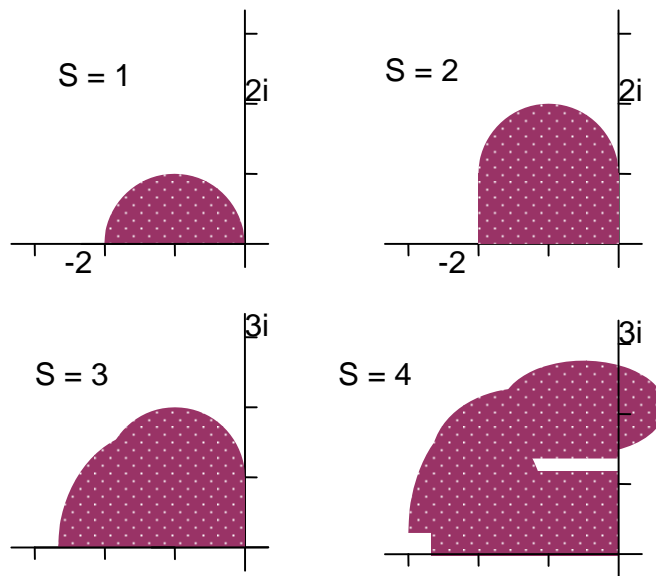


Figura 13.3: Regiones de estabilidad absoluta en los métodos de Runge-Kutta (Lambert 1991).

Ejemplo 13.6.2: Analizar la estabilidad absoluta para el método de Runge-Kutta de dos etapas al aplicarlo para distintos valores de tamaño de paso: $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ y $h = 0,001$ a los problemas de valor inicial a) $y' = -y$, $y(0) = 1$, b) y'

$= -30y$, $y(0) = 1$, c) $y' = y$, $y(0) = 1$.

Se ha visto que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

En a) $\lambda = -1$, en b) $\lambda = -30$ y en c) $\lambda = 1$.

a) Para $h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -1 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,1 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,01 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,001 \in (-2, 0)$.

Para todos los valores se verifica que $|r(\bar{h})| < 1$. Se puede observar mediante una hoja de cálculo que fijado el tamaño de paso, los errores crecen en valor absoluto hasta $x = 1$, y a partir de ese valor decrecen. Los errores son menores cuanto menor es el tamaño de paso, h .

Se había probado que el error global: $e_n \cong \frac{1}{6} \lambda x e^{\lambda x} \bar{h}^2 = -\frac{1}{6} x e^{-x} \bar{h}^2$, curva

que se comporta según lo descrito arriba.

Se observa que, como corresponde a un método convergente, si se fija el valor de x y se hace tender h a cero, entonces el error tiene a cero.

b) Para $h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -30 \notin (-2, 0)$.

Para $h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -3 \notin (-2, 0)$.

Para $h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,3 \in (-2, 0)$.

Para $h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = -0,03 \in (-2, 0)$.

Para que $\lambda \cdot h = -30h \in (-2, 0) \Rightarrow h \in (0, \frac{2}{30}) \Rightarrow 0 < h < \frac{1}{15}$.

c) Para $h = 1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 1 \notin (-2, 0)$.

Para $h = 0,1 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,1 \notin (-2, 0)$.

Para $h = 0,01 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,01 \notin (-2, 0)$.

Para $h = 0,001 \Rightarrow \bar{h} = \lambda \cdot h = 0,001 \notin (-2, 0)$.

Para todo tamaño de paso positivo los valores de \bar{h} están fuera del intervalo de estabilidad absoluta, por lo que los errores son crecientes. Sin embargo la solución exacta es $y = e^x$, que es también creciente por lo que las soluciones pueden aceptables. En este caso tiene interés un nuevo concepto, el de error

relativo que es: $er_n = \frac{e_n}{y_n}$, y como

$$e_n = \frac{1}{6} \lambda x e^{\lambda x} \bar{h}^2 + O(\bar{h}^2) = \frac{1}{6} x e^x \bar{h}^2 + O(\bar{h}^2),$$

entonces

$$er_n \cong \frac{1}{6} x \bar{h}^2,$$

que indica que el error crece sólo como x .

Ejercicios

13.9. Estudiar la estabilidad absoluta para el método de Taylor dos y el método de Taylor tres.

13.10. Analizar la estabilidad absoluta para el método de Taylor dos al aplicarlo para distintos valores de tamaño de paso: $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ y $h = 0,001$ a los problemas de valor inicial a) $y' = -y$, $y(0) = 1$, b) $y' = -30y$, $y(0) = 1$, c) $y' = y$, $y(0) = 1$.

13.7. APÉNDICE: ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales son ecuaciones en diferencias. Así, por ejemplo, al aplicar el método de Euler al problema $y' = y$, $y(0) = 1$ se tiene la ecuación en diferencias:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot z_n$$

por lo que:

$$z_1 = z_0 \cdot (1 + h) \Rightarrow z_2 = z_1 \cdot (1 + h) = z_0 \cdot (1 + h)^2 \Rightarrow z_3 = z_2 \cdot (1 + h) = z_0 \cdot (1 + h)^3,$$

y en general:

$$z_n = z_0 \cdot (1 + h)^n.$$

No siempre es tan sencillo encontrar una expresión por recursividad. Sin embargo las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes se resuelven de forma “similar” a como se han resuelto las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes. En esta sección se estudia la forma de resolver algunas de estas ecuaciones en diferencias.

El ejemplo anterior es una ecuación en diferencias finitas de primer orden. La definición general es

Definición 13.7.1:

Se llama **ecuación en diferencias finitas de primer orden** a una ecuación de la forma:

$$z_{n+1} = F(z_n, n), \quad n \in \mathbf{N},$$

siendo F una función de dos variables reales o complejas.

Definición 13.7.2:

Se llama **ecuación en diferencias finitas de orden k** a una ecuación de la forma:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n), \quad n \in \mathbf{N},$$

Definición 13.7.3:

Se llama **solución** de la ecuación en diferencias:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n)$$

a una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números reales o complejos que verifique la ecuación para todo $n \in \mathbf{N}$.

Así, por ejemplo la ecuación $z_{n+1} = (1 + n) \cdot z_n$ tiene como solución cualquier sucesión de la forma $\{z_n\} = C \cdot \{n!\}$, donde C es una constante arbitraria. La ecuación en diferencias tiene entonces una familia uniparamétrica de soluciones. Si se impone una condición inicial, por ejemplo $z_0 = 1$, entonces existe una única solución de la ecuación que es precisamente $z_n = n!$, $n \in \mathbf{N}$.

El problema siguiente:

$$z_{n+k} = F(z_{n+k-1}, \dots, z_{n+1}, z_n, n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad z_0 = a_0, \quad z_1 = a_1, \dots, \quad z_{k-1} = a_{k-1},$$

es un problema de valor inicial, análogo a los problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales.

Es sencillo encontrar una solución para la clase de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, que se definen a continuación, ya que se resuelven de forma “similar” a como se han resuelto las ecuaciones diferenciales lineales de orden k con coeficientes constantes. El conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión k , y el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias no homogénea tiene estructura de espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el

conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea.

Definición 13.7.4:

Se denomina **ecuación en diferencias finitas lineal con coeficientes constantes** a una expresión de la forma:

$$z_{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot z_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \cdot z_n = b_n,$$

donde α_i son números reales y donde $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales. Es una ecuación en diferencias finitas de orden k si α_0 es distinto de cero.

Se dice que es **homogénea** si $b_n = 0$ para todo n , y no homogénea si $b_n \neq 0$ para algún n .

Para encontrar la solución general de una ecuación en diferencias lineal, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada buscando soluciones de la forma $z_n = r^n$, para lo que se sustituye en la ecuación:

$$r^{n+k} + \alpha_{k-1} \cdot r^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 \cdot r^n = 0,$$

se divide por r^n ,

$$r^k + \alpha_{k-1} \cdot r^{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0,$$

y se obtiene la **ecuación característica** de la ecuación en diferencias.

Esta ecuación característica puede tener todas sus raíces reales y simples, puede tener raíces complejas simples, o bien tener raíces múltiples.

Si todas las raíces son reales y simples: r_1, \dots, r_k , se tienen k soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea: r_1^n, \dots, r_k^n , que son base del espacio vectorial de las soluciones, por lo que la solución general es de la forma:

$$z_{nH} = A_1 \cdot r_1^n + \dots + A_k \cdot r_k^n.$$

En el caso en que se tenga una raíz compleja, necesariamente se tiene, al ser los coeficientes reales, la raíz compleja conjugada. Sea $r_1 = a + bi = re^{i\alpha}$, por lo que $r_1^n = (r \cdot e^{i\alpha})^n = r^n \cdot e^{i\alpha n} = r^n \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$; las dos soluciones reales y linealmente independientes buscadas son: $r^n \cdot \cos \alpha$ y $r^n \cdot \sin \alpha$.

Si existe una raíz múltiple r_j , de orden m de multiplicidad, se precisan m soluciones linealmente independientes, que son:

$$r_j^n, n \cdot r_j^n, n^2 \cdot r_j^n, \dots, n^{m-1} \cdot r_j^n.$$

Una vez obtenida la solución general de la ecuación homogénea asociada, se busca una solución particular de la ecuación no homogénea. Para ello se prueba con una expresión “parecida” a la de b_n . Sólo en el caso en que la expresión que se deba probar ya esté incluida en la solución de la ecuación homogénea, se aumenta el orden, multiplicando por n elevado al exponente necesario.

La solución general es entonces:

$$z_n = z_{nH} + z_{nP} = A_1 \cdot r_1^n + \dots + A_k \cdot r_k^n + z_{nP}.$$

Para calcular los coeficientes A_1, \dots, A_k , se precisa conocer k condiciones iniciales: z_0, \dots, z_{k-1} . Al sustituir se tiene un sistema tipo Cramer de k ecuaciones y k incógnitas, que siempre tiene una única solución.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 13.7.1: Resolver $z_{n+2} - z_n = 7$, con $z_0 = 0$ y $z_1 = 0$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea asociada

Ecuación característica: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow z_{nH} = A_1 \cdot (1)^n + A_2 \cdot (-1)^n = A_1 + A_2 \cdot (-1)^n$.

Paso 2: Solución particular de la no homogénea

Se prueba con una solución particular que sea una constante c , pero ésta ya está incluida en la solución general de la homogénea, por lo que se aumenta el grado multiplicando por n :

$$z_{nP} = cn \Rightarrow c(n+2) - cn = 7 \Rightarrow c = \frac{7}{2} \Rightarrow z_{nP} = \frac{7}{2}n \Rightarrow z_n = A_1 + A_2 \cdot (-1)^n + \frac{7}{2}n.$$

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = A_1 + A_2 \cdot (-1)^0 + \frac{7}{2} \cdot 0 = A_1 + A_2 = 0.$$

$$z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = A_1 + A_2 \cdot (-1)^1 + \frac{7}{2} \cdot 1 = A_1 - A_2 + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 = -\frac{7}{4}.$$

$$\Rightarrow z_n = -\frac{7}{4} + \frac{7}{4} \cdot (-1)^n + \frac{7}{2} n.$$

Ejemplo 13.7.2: Resolver $z_{n+1} = (1 + h^2) \cdot z_n$, con $z_0 = e^2$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación que ya es homogénea

Ecuación característica: $r = (1 + h^2) \Rightarrow z_{nH} = A_1 \cdot (1 + h^2)^n$.

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = e^2 \Rightarrow z_0 = A_1 = e^2 \Rightarrow z_n = e^2 \cdot (1 + h^2)^n.$$

Ejemplo 13.7.3: Resolver $z_{n+1} = z_n + nh^2 + \frac{h^2}{2} + h$; con $z_0 = 0$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea asociada

Ecuación característica: $r = 1 \Rightarrow z_{nH} = A_1$.

Paso 2: Solución particular de la no homogénea

Se prueba con una solución particular que sea un polinomio en n de grado uno, $an + b$, pero ya está incluida la constante, b , en la solución general de la homogénea, por lo que se aumenta el grado multiplicando por n :

$$z_{n \text{ P}} = n \cdot (an + b) \Rightarrow a(n+1)^2 + b(n+1) = an^2 + bn + n \cdot h^2 + \frac{h^2}{2} + h \Rightarrow 2an + a$$

$$+ b = n \cdot h^2 + \frac{h^2}{2} + h \Rightarrow a = \frac{h^2}{2}, b = h; z_{n \text{ P}} = \frac{h^2}{2} n^2 + h \cdot n \Rightarrow z_n = A_1 + \frac{h^2}{2} \cdot n^2 + h \cdot n.$$

Paso 3: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = A_1 = 0 \Rightarrow z_n = \frac{h^2}{2} \cdot n^2 + h \cdot n.$$

Ejemplo 13.7.4: El matemático Leonardo de Pisa conocido como Fibonacci, que introdujo en Europa el sistema de numeración indo arábigo que hoy se usa y que sustituyó al romano, escribió el libro *Liber abaci* (1 202) donde utilizó la sucesión que lleva su nombre, la sucesión de Fibonacci, que modela el crecimiento de las parejas de conejos: “En un corral se deja una pareja de conejos recién nacidos. Al cabo de un mes están en situación de procrear y se aparean; al mes siguiente nace una nueva pareja de conejos, macho y hembra y acto seguido tiene lugar un nuevo apareamiento. El proceso se reitera de manera que cada pareja se aparee por primera vez al mes de nacer, y luego lo hace cada mes originando una pareja de descendientes. Se trata de saber el número de parejas al cabo de n meses”.

Si z_n es el número de parejas que existen en el mes n , y z_{n+1} lo es en el mes $n + 1$. Entonces: $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$. En el mes cero se tiene la primera pareja: $z_0 = 1$, y en el mes $n = 1$, se tiene $z_1 = 1$.

Paso 1: Se resuelve la ecuación homogénea

Ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ que es el

número de oro: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618\dots; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,618\dots$

$$\Rightarrow z_n = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Paso 2: Se imponen los valores iniciales:

$$z_0 = 1 \Rightarrow z_0 = A_1 + A_2 = 1.$$

$$z_1 = 1 \Rightarrow z_1 = A_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, A_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Como el primer sumando crece al crecer n , y el segundo tiende a cero, si n es grande las parejas de conejos crecen en una proporción aproximada de 61,8 %.

Ejercicios

13.11. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+1} = z_n(1 + h + h^2)$; con $z_0 = 0$.

$$(Solución: z_n = (1 + h + h^2)^n).$$

13.12. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = n$; con $z_0 = 0$.

$$(Solución: z_n = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{2}{6\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{3} \cdot (n-1)).$$

13.13. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + (\frac{-3}{2} - h)z_{n+1} + (\frac{1}{2} - \frac{h}{2})z_n = \frac{h}{2}$; con $z_0 = z_0$; $z_1 = z_1$.

13.14. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = 3$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.

$$(Solución: z_n = -4 + 4(2)^n - 3n).$$

13.15. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - z_n = 5$; con $z_0 = 0$, $z_1 = 2$.

$$(Solución: z_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} (-1)^n + \frac{5}{2} n).$$

13.16. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 3z_{n+2} + 3z_{n+1} - z_n = 12$; con $z_0 = 1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = 1 - \frac{5}{2} n - \frac{1}{2} n^2 + 2n^3).$$

13.17. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + 3z_n = 0$.

$$(Solución: z_n = A(\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \sen n\frac{\pi}{4}).$$

13.18. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+2} + z_{n+1} + z_n = 5$; con $z_0 = 1, z_1 = 0, z_2 = 10$.

$$(Solución: z_n = A\cos n\frac{\pi}{3} + B\sen n\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}).$$

13.19. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} - 7z_{n+3} + 18z_{n+2} - 20z_{n+1} + 8z_n = 0$; con $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 1$.

$$(Solución: z_n = 5 - 5(2)^n + 3n(2)^n - \frac{1}{2}n^2(2)^n).$$

13.8. EJERCICIOS

13.20. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,2$

y en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2} - x + 2y$,

$y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaños de paso $h = 0,05, h = 0,1$ respectivamente. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{x}{2} + e^{2x} \Rightarrow y(0,5) = 2,968\dots; y(0,2) =$

$$1,5918\dots; z_n = (1 + 2h)^n + hn/2; z(0,5) = z_5 = 2,73832, e(0,1) = 0,22996183;$$

$$z(0,2) = z_4 = 1,5641, e(0,05) = 0,0277)$$

13.21. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,2$ y en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = -1 + 2y$, $y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaños de paso $h = 0,05$, $h = 0,1$ respectivamente. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es: $y(x) = \frac{1+e^{2x}}{2} \Rightarrow y(0,5) = 1,85913091\dots;$

$$y(0,2) = 1,24591235\dots; z_n = \frac{1}{2}(1 + 2h)^n + \frac{1}{2}; z(0,5) = z_5 = 1,74416; e(0,1) =$$

$$0,11498091; z(0,2) = z_4 = 1,23205, e(0,05) = 0,01386235)$$

13.22. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en x de la solución del problema de valor inicial $y' = 1 - x + y$, $y(x_0) = y_0$ usando como $z_0 = y_0$ y tamaños de paso h para aproximar la solución exacta $y(x)$. Calcular el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero del valor obtenido.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = x + (y_0 - x_0)e^{x-x_0}$ y la solución aproximada es $z_n = x_0 + nh + (y_0 - x_0)(1 + h)^n$ que en el límite coincide con la exacta.)

13.23. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 2$ de la solución del problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$ usando como z_0

= 1 y tamaños de paso $h = 0,05$, $h = 0,1$, $h = 0,2$ respectivamente. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = e^x \Rightarrow y(2) = 7,38906$.

| | z(2) | y(2) - z(2) |
|------------|-------------|--------------------|
| $h = 0,2$ | 6,19174 | 1,19732 |
| $h = 0,1$ | 6,72750 | 0,66156 |
| $h = 0,05$ | 7,03999 | 0,34907 |

13.1. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en x de la solución de los problemas de valor inicial i) $y' = x$, $y(0) = 0$, ii) $y' = x^2$, $y(0) = 0$ usando como $z_0 = 0$ y tamaños de paso h para aproximar la solución exacta $y(x)$. Calcular el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero del valor obtenido.

(Solución: i) La solución exacta es $y(x) = x^2/2 \Rightarrow z_n = \frac{n^2 h^2}{2} - \frac{nh^2}{2}$ que en el

límite coincide con la exacta. ii) La solución exacta es $y(x) = x^3/3 \Rightarrow z_n =$

$$\frac{n^3 h^3}{3} - \frac{n^2 h^3}{2} + \frac{nh^3}{6} \text{ que en el límite coincide con la exacta.)}$$

13.2. Aplicar el método de Euler para calcular el valor aproximado en $x = 0,5$ de la solución del problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2} - x + 2y$, $y(0) = 1$ usando como $z_0 = 1$ y tamaño de paso $h = 0,1$. Lo mismo con $x = 0,2$, $h = 0,05$. Comparar los errores globales.

(Solución: La solución exacta es $y(x) = e^{2x} + \frac{x}{2}$ y $z_n = (1 + 2h)^n + \frac{x}{2} \Rightarrow$

| | z_n | $y(x)$ | $y(x) - z_n$ |
|---------------------|---------|----------------|--------------|
| $x = 0,5, h = 0,1$ | 2,73832 | 2,968281828... | 0,229961... |
| $x = 0,2, h = 0,05$ | 1,5641 | 1,591824698... | 0,027724... |

13.1. Calcular en función de h los errores local, global y de truncamiento en el punto x_n al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = (h/3)(f(x_{n+1}, z_{n+1}) + 2f(x_n, z_n))$ al problema $y' = y, y(0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Calcular el límite del error global cuando h tiende a cero, pero siendo nh constante.

(Solución: $e(h) = e^{nh} - \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^n, e_l(h) = \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^{n-1} e^h - \left(\frac{3+2h}{2-h}\right)^n, T_n = \left(1 - \frac{h}{3}\right) e^{nh} - \left(1 + \frac{2h}{3}\right) e^{(n-1)h}$, el límite es cero).

13.2. Calcular los errores local, global y de truncamiento en el punto $x = 2$ y $x = -2$, al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = (h/3)(f(x_{n+1}, z_{n+1}) + 2f(x_n, z_n))$ al problema $y' = y, y(0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$ y tamaño de paso $h = 0,1$ y $h = -0,1$ respectivamente.

(Solución: $x = 2, h = 0,1, n = 20, e(0,1) = 0,27696..., e_l(0,1) = 0,011179..., T_n = 0,011129....$ $x = -2, h = -0,1, n = 20, e(-0,1) = 0,004702..., e_l(-0,1) = 0,00023302..., T_n = 0,00024908...).$

13.3. Aplicar el método $z_{n+1} - z_n = h(f(x_n + h/2, z_n + (h/2)f(x_n, z_n)))$ al problema

$y' = x + 1$, $y(0) = 0$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso h .

b) Lo mismo tomando como valor iniciador $z_0 = 4h$. c) Lo mismo con $z_0 = 0,01$. ¿Es el método convergente?

(Solución: $z_n = z_0 + \frac{1}{2}(nh)^2 + nh$; $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$; En a) y b) z_n converge a la solución exacta. En c) no, pero esto no contradice la definición de convergencia).

13.4. Obtener la ecuación en diferencias finitas que resulte de aplicar el

método: $z_{n+1} - z_n = h(\frac{3}{4}f(x_n, z_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, z_n + 2hf(x_n, z_n)))$ al problema

$y' = y + 3$, $y(0) = y_0$, tomando como valor inicial $z_0 = y_0$.

(Solución: $z_n = (y_0 - 3)\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n - 3$).

13.5. Aplicar el método de Taylor de orden dos a $y' = 2x + 3y$, $y(0) = 0$, con tamaño de paso h para aproximar la solución en $x = nh$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$. Obtener la solución exacta de la ecuación y calcular el límite cuando h tiende a cero, siendo nh constante, del error global cometido.

(Solución: $z_n = \frac{2}{9}(1 + 3h + \frac{9}{2}h^2)^n - \frac{2hn}{3} - \frac{2}{9}$. $y(x) = \frac{2}{9}(e^{3x} - 6x - 1)$, el límite del error global es cero.).

13.6. Aplicar el método de Taylor de orden dos y de orden tres a $y' = y$, $y(0) = 1$, con tamaño de paso h para aproximar la solución en $x = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$. Obtener la solución exacta de la ecuación y valorar el error global cometido cuando $n = 1, 2, 4, 5, 10, 100$ y 1000 . Comparar los resultados obtenidos entre sí y con los del método de Euler.

(Solución:

| Resultados de aplicar el método de Euler y métodos de Taylor de orden dos y cuatro a: $y' = y$, $y(0)=1$, para aproximar la solución en $x = 1$. $y(x) = e = 2,7182818...$ | | | | | | | |
|--|---------|---------|----------|----------|-----------|-----------|-------------|
| n | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 100 | 1000 |
| Euler | 2 | 2,25 | 2,44... | 2,488... | 2,5937... | 2,7048... | 2,7169... |
| Error | 0,718 | 0,468 | 0,278 | 0,230 | 0,124 | 0,013481 | 0,00138 |
| | | | | | | 8 | |
| Taylor 2 | 2,5 | 2,64062 | 2,69485 | 2,702708 | 2,714080 | 2,718236 | 2,718281 |
| | | | | 1 | 8 | 8 | 3 |
| Error | 0,218 | 0,077 | 0,023 | 0,01557 | 0,000420 | 0,000045 | 0,000000528 |
| | | | | | | 0 | |
| Taylor 3 | 2,66667 | 2,70877 | 2,71683 | 2,71751 | 2,718177 | 2,718281 | |
| | | | | | | 7 | |
| Error | 0,0516 | 0,00951 | 0,001451 | 0,000771 | 0,000104 | 1,28 * E7 | |
| | | | 8 | 8 | 8 | | |

Se observa que en Euler varían como h , en Taylor 2 como h^2 , y en Taylor 3 como h^3 .

13.1. Aplicar el método de Taylor de orden dos y de orden tres a $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, con tamaño de paso $h = 0,1$ y $h = 0,2$, para aproximar la solución en $x = 0,4$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$. Obtener la solución exacta de la ecuación y valorar el error global cometido cuando $n = 1, 2, 4, 5, 10, 100, 1000$. Comparar los resultados con los del método de Euler.

(Solución: $z_2 = 0,016$; $z_4 = 0,020072$. La solución exacta es desconocida)

13.2. Escribir el tablero de Butcher para el método: $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{4} \cdot (f(x_n, z_n) + 3f(x_n + \frac{2h}{3}, z_n + \frac{2h}{3} \cdot f(x_n, z_n)))$.

13.3. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+4} + 2z_{n+2} + z_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

siendo $z_0 = 1, z_1 = 2, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = 4$.

(Solución: $z_n = (1 - n + n^2/8) \cdot \cos \frac{\pi n}{2} + (5 - 3n) \cdot \sen \frac{\pi n}{2}$).

13.4. Resolver la ecuación en diferencias finitas: $z_{n+3} - 4z_{n+2} + 8z_{n+1} - 8z_n = -3$ siendo $z_0 = 1, z_1 = z_2 = 0$.

(Solución: $z_n = 2^n \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{\pi n}{3} - \frac{5}{4\sqrt{3}} \cdot \sen \frac{\pi n}{3}) + 1$).

13.5. Obtener una fórmula que calcule $\sum_{n=1}^N n^4$ siendo N un número natural.

$$(Solución: s_{n+1} - s_n = 0 \Rightarrow s_n = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}).$$

13.6. ¿Para qué valores de a , b y c el método $z_{n+1} - z_n = h(af(x_n, z_n) + (1 - a)f(x_n + bh, z_n + chf(x_n, z_n)))$ es convergente? ¿Para qué valores de a , b y c dicho método obtiene el máximo orden de consistencia? ¿Es el método convergente? Si se aplica el primer método y el segundo al problema $y' = x + 1$, $y(x_0) = 1$, tomando como valor inicial $z_0 = 1$ y tamaño de paso h , ¿se puede asegurar que z_n coincide con el valor exacto de la solución en x_n ?

(Solución: Es convergente para todo a , b y c . Orden de consistencia máximo

$$p = 2 \Rightarrow b = c = \frac{1}{2(1-a)}).$$

13.7. ¿Para qué valores de a y b el método $z_{n+1} - z_n = h(af(x_n, z_n) + bf(x_n + \frac{1}{2}h, z_n + \frac{1}{2}hf(x_n, z_n)))$ tiene de orden de consistencia dos? Aplicar el método al problema $y' = y + 2$, $y(1) = 2$, tomando como valor inicial $z_0 = 2$ y tamaño de paso $h = 0,1$ para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 3$.

(Solución: $a = 0$, $b = 1$; $z_{20} = z(3) = 27,464939\dots$).

13.8. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{4}(f(x_n, z_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, z_n + ahf(x_n, z_n)))$ obtener el valor de a para que el orden de consistencia sea

máximo. ¿Cuál es ese orden? Aplicar el método al problema $y' = y - x^2$, $y(0) = 2$, tomando como valor inicial $z_0 = 2$ y tamaño de paso h , para obtener el valor aproximado de la solución en $x_n = nh$. ¿Se puede asegurar que la solución es exacta?

(Solución: $a = 2/3$; $p = 2$; $z_n = n^2 h^2 + 2nh + 2 = x^2 + 2x + 2$, solución exacta).

13.9. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2}(f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})) -$

$$\frac{h^2}{12}(g(x_n, z_n) - g(x_{n+1}, z_{n+1}))$$

donde f y g significan: $y' = f(x, y)$, $g(x, y) = f_x(x,$

$y) + f_y(x, y)$, aplicarlo al problema: $y' = y + x$, $y(0) = 0$, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 2$. Calcular $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nh = cte}} z_n$. Obtener el orden de

consistencia del método.

(Solución: $z_{20} = z(2) = 4,3890561$; $z_n = \left(\frac{12 + 6h + h^2}{12 - 6h + h^2} \right)^n - nh - 1 \rightarrow e^x - x - 1$; $p = 3$).

13.10. Dado el método numérico: $z_{n+1} - z_n = h\left(\frac{3}{4}f(x_n, z_n) + \frac{1}{4}f(x_n + 2h, z_n +$

$2hf(x_n, z_n))$, aplicarlo al problema: $y' = y + 2$, $y(0) = 3$, tomando como valor inicial $z_0 = 3$ y tamaño de paso h , para obtener el valor aproximado de la solución en $x_n = nh$. Calcular $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ nh = cte = x}} z_n$. ¿Coincide este límite con el

valor exacto de la solución del problema en x ? Calcular el valor

aproximado de la solución en $x = 3$ utilizando un tamaño de paso $h = 0,1$.

$$(Solución: z_n = 5 \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^n - 2 \rightarrow 5e^x - 2, \text{ valor exacto; } z_{30} = z(3) = 98,4227... \cong y(3) = 98,4276...).$$

13.11. Aplicar el método de Taylor de orden dos al problema:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 16x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tomando como valor inicial $\begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y tamaño de paso $h = 0,1$ para

obtener el valor aproximado de la solución en $x = 0,1$.

$$(Solución: z_1 = z(0,1) = \begin{pmatrix} -0,14 \\ 3,04 \end{pmatrix}).$$

13.12. Aplicar el método de Runge-Kutta cuatro al problema:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomando como valor inicial $\begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tamaño de paso h para obtener el

valor aproximado de la solución en $x = h$.

$$(Solución: z_1 = z(h) = \left(\begin{array}{c} \frac{h^4}{24} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{2} \\ \frac{11h^4}{24} + \frac{5h^2}{6} + h + 1 \end{array} \right)).$$

13.13. Aplicar el método de Taylor de orden dos al problema: $y'' + 2xy' + y = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, determinando previamente el sistema asociado a la ecuación diferencial, tomando como valor inicial $z_0 = 0$ y tamaño de paso $h = 0,2$, para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 0,2$.

13.14. Utilizar la técnica de la extrapolación de Richardson para estimar el valor de la solución y la fórmula del error estimado de Richardson para calcular el error en el método de Euler, (del ejemplo 13.1.2) en que $z_{0,1}(1) = 34,411490$ y $z_{0,05}(1) = 45,588399$.

13.15. Aplicar el método $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ siendo $k_1 = f(x_n, z_n)$, $k_2 = f(x_n +$

$$h, z_n + hk_1), \text{ al sistema: } \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}, \text{ con}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para calcular } z_1 \text{ tomando como valor inicial } \begin{pmatrix} z_{01}(0) \\ z_{02}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y tamaño de paso h .

CAPÍTULO 14

Métodos numéricos lineales multipaso

Los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales que se han considerado en el capítulo anterior proporcionan el valor aproximado z_{n+1} de la solución de un problema de valor inicial en el punto x_{n+1} a partir de otro valor aproximado z_n de la solución en el punto x_n . Para obtener z_{n+1} se han tenido que calcular previamente los valores aproximados de la solución en los puntos de la malla x_1, x_2, \dots, x_n . Parece entonces razonable desarrollar fórmulas numéricas que aprovechen la información obtenida en etapas anteriores para obtener el valor aproximado z_{n+1} . Se obtienen de esta forma los métodos lineales multipaso, que constituyen el segundo gran grupo de métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial y que son el objetivo de estudio de este capítulo. Por una mayor simplicidad se supone que los métodos que se presentan son de paso fijo, es decir, la diferencia entre x_{n+1} y x_n es siempre constante, $x_{n+1} - x_n = h$, aunque existen otros métodos de paso variable, como se comentará en la *sección 5ª*.

14.1. DEFINICIÓN

Se considera el problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición 14.1.1:

Un **método lineal de k pasos** viene determinado por una expresión de la forma:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

donde α_j y β_j son números reales.

Se suele representar a $f(x_{n+j}, z_{n+j})$ como f_{n+j} , por lo que se obtiene la expresión:

$$\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_k \cdot z_{n+k} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}] \quad (14.1.1)$$

Para que el método sea de k pasos se debe imponer que $|\alpha_0| + |\beta_0|$ sea distinto de cero y que el coeficiente α_k también sea distinto de cero. Sin pérdida de generalidad es posible, por tanto, normalizar el método imponiendo que $\alpha_k = 1$. Se trata entonces de obtener a través de esta fórmula el valor de z_{n+k} suponiendo conocidos los valores de z_n, z_{n+1}, \dots y de z_{n+k-1} .

Se observa que tanto los métodos de un paso como los métodos

multipaso vienen definidos por una ecuación en diferencias.

El objetivo de este capítulo es obtener fórmulas de estas características que proporcionen una aproximación razonable a la solución del problema de valor inicial al que se aplican.

Si el coeficiente β_k es igual a cero se dice que el método es **explícito** o de tipo abierto. En este caso se obtiene el valor de z_{n+k} directamente despejando en la ecuación:

$$z_{n+k} = -(\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_{k-1} \cdot z_{n+k-1}) + h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_{k-1} \cdot f_{n+k-1}]$$

Si β_k es distinto de cero se dice que el método es **implícito** o de tipo cerrado. En un método implícito para despejar z_{n+k} es preciso despejarlo también en f_{n+k} para lo que en general es necesario aplicar a la ecuación en diferencias un procedimiento de iteración adecuado a las características de la fórmula.

Una primera observación es que para poder aplicar un método lineal multipaso se necesita conocer previamente los **valores de arranque**. Si la fórmula es de k pasos se necesita conocer como valores de partida el valor de z_0, z_1, \dots , y de z_k , es decir, los valores de arranque de la fórmula. Como el problema de valor inicial sólo proporciona el primero de ellos, $z_0 = y_0$, los restantes valores se pueden obtener aplicando en primer lugar una fórmula de un paso, como puede ser alguno de los métodos de Taylor, de Runge-Kutta o el método de Euler.

Una segunda observación es que los métodos actuales combinan fórmulas de diferente número de pasos, y también aumentan o disminuyen el tamaño del paso, h , en la medida en que lo permite el control del error que se va cometiendo al aplicar las fórmulas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.1.1: Utilizando el teorema del valor medio se obtiene que:

$\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) = 2h \cdot \varphi'(c)$ donde c es un punto intermedio entre x_n y x_{n+2} . Si se toma como $c = x_{n+1}$ se tiene: $\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) = 2h \cdot \varphi'(x_{n+1})$.

Si se supone que $\varphi(x)$ es la solución del problema de valor inicial

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se tiene que $\varphi'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, \varphi(x_{n+1}))$, y por tanto $\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n)$

$= 2h \cdot f(x_{n+1}, \varphi(x_{n+1}))$, lo que da origen al método:

$$z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1},$$

que es uno de los métodos de Nyström.

Ejemplo 14.1.2: Comparar la fórmula anterior con la expresión general de un método multipaso y determinar el número de pasos y sus coeficientes.

Al comparar $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ con: $\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_k \cdot z_{n+k} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}]$ se obtiene que $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_0 = 0$, por lo que es un método explícito de dos pasos.

Ejercicios

14.1. Comparar el método de Nyström:

$$z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (7f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n)$$

con la expresión general de un método multipaso y determinar sus coeficientes y el número de pasos.

14.2. En los métodos de Milne-Simpson:

$$\text{a) } z_{n+2} = z_n + 2h \cdot f_{n+2}$$

$$\text{b) } z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

comparar con la expresión general de un método multipaso determinando sus coeficientes y el número de pasos. Determinar si son métodos implícitos o explícitos.

14.2. MÉTODOS DE ADAMS

Los métodos de *Adams* son los métodos lineales multipaso más antiguos, ya que datan del siglo XIX. John C. Adams (1 819 – 1 892), al analizar, en 1 846, irregularidades en la órbita de Saturno hizo la conjetura de la existencia de otro planeta, por lo que cuando fue observado Urano, que

hasta entonces no se conocía, sus métodos adquirieron fama, incluso fuera de la comunidad científica. Los métodos que se conocen como métodos de *Adams*, éste no los publicó. Fueron publicados en 1885 los métodos que hoy se conocen como métodos de Adams-Bashforth o métodos explícitos, por *Bashford*, en un trabajo relacionado con el tratamiento numérico de problemas de capilaridad, tensión superficial y sobre la forma de una gota, aunque en dicho trabajo comentó que ya eran conocidos desde 1855 por *Adams*. Los métodos implícitos, o métodos de Adams-Moulton, aparecen en 1926, en un trabajo relacionado con problemas de balística.

A pesar de su antigüedad los métodos de Adams son los métodos lineales multipaso más utilizados y, debido a sus buenas propiedades, continúan en la actualidad siendo empleados mediante modernos algoritmos y, salvo problemas particulares, son los únicos métodos lineales multipaso de interés de propósito general. Aunque durante los años 1960-1970 se utilizaron muchos otros métodos, como los métodos de Nyström o los métodos de Milne-Simpson de los ejemplos y ejercicios del apartado anterior, todos ellos han perdido interés con la experiencia obtenida en el uso de los ordenadores y con el conocimiento adquirido sobre la convergencia de un método.

Los métodos de Adams son pues los más populares dentro de los métodos multipaso. Tienen la forma

$$z_{n+k} - z_{n+k-1} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}].$$

Las formulas de Adams son entonces fórmulas multipaso en las que los coeficientes α_{n+j} son todos cero salvo α_{n+k} y α_{n+k-1} , que valen 1 y -1 respectivamente. Los coeficientes β_{n+j} deben además tomar unos valores específicos que permitan obtener buenas aproximaciones a la hora de aplicar las fórmulas.

Si el coeficiente β_k es igual a cero se tienen los *métodos de Adams explícitos*, que se conocen como *métodos de Adams-Bashforth*.

Si β_k es distinto de cero, los métodos son *implícitos* y se conocen como *métodos de Adams-Moulton*.

Los métodos de Adams suelen aparecer representados de la forma:

$$z_{n+1} - z_n = h \cdot [\beta_0 \cdot f_{n-k+1} + \dots + \beta_k \cdot f_{n+1}].$$

Se construyen partiendo de la idea de aproximar la ecuación diferencial mediante la fórmula que se obtiene integrando la ecuación diferencial: $y' = f(x, y)$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} y' \cdot dx = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx \Rightarrow$$

$$y(x_n + h) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

El valor $y(x_n + h)$ de la solución $y(x)$ en el punto $x_n + h$ se puede expresar entonces como:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

La dificultad en la fórmula anterior estriba en el hecho de que no es posible integrar $f(x, y(x))$ sin conocer la solución $y(x)$. Sin embargo, al conocer los k puntos $(x_n, z_n), \dots, (x_{n-k+1}, z_{n-k+1})$, se puede sustituir la función $f(x, y)$ por el único polinomio $P_k(x)$ de grado $k - 1$ que verifica que:

$$P_k(x_i) = f(x_i, z_i), \text{ con } i = n - k + 1, \dots, n,$$

y a continuación integrar el polinomio en vez de la función:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_k(x) \cdot dx$$

Los métodos de *Adams-Moulton* resultan más precisos pero tienen la dificultad de ser implícitos, por lo que conllevan el tener que resolver una ecuación.

En las secciones siguientes se construyen de manera detallada los diferentes métodos de Adams utilizando polinomios interpoladores por el método de *Lagrange*, o mejor, por el método de *Newton*, pero antes se verán algunas de las expresiones de estos métodos que permitan familiarizarse con ellos.

Por ejemplo, la expresión que se obtiene de un método multipaso de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos con un error de truncamiento de orden $O(h^5)$ y que, si no se advierte el orden, es el que se suele denominar

simplemente como método de *Adams-Bashforth* es:

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

donde f_k representa el valor $f(x_k, z_k)$. Se observa que para poder comenzar a aplicar este método se deben conocer cuatro **valores iniciadores** z_0, z_1, z_2 y z_3 , con los que se puede calcular z_4 ; a partir de ese punto, para calcular el siguiente valor se utilizan valores de z ya calculados más uno nuevo en cada paso.

El método de *Adams-Moulton* más usado es el de tres pasos, que tiene la fórmula:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

con un error de truncamiento de orden $O(h^5)$. Se observa que para calcular f_{n+3} se debe conocer ya z_{n+3} , por lo que se tiene una ecuación implícita que se debe resolver. Es pues una fórmula cerrada.

14.2.1. Métodos de Adams-Bashforth

Las fórmulas de Adams-Bashforth de k pasos se obtienen al sustituir la función $f(x, y(x))$ que aparece en la expresión

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

por el polinomio interpolador de la función en los puntos $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$, en

los que se supone que ya es conocido el valor de la solución en $z_n, z_{n-1}, \dots, z_{n-k+1}$. Se sustituye entonces en la fórmula anterior la función $f(x, y(x))$ por el único polinomio $P_{k-1}(x)$ que verifica que:

$$P_{k-1}(x_i) = f(x_i, z_i), \text{ para } n - k + 1 \leq i \leq n$$

y se integra el polinomio en vez de la función. Se tiene entonces:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx.$$

Se busca el polinomio interpolador que pasa por un único punto $(x_n, f(x_n, z_n))$, siendo $f(x_n, z_n) = f_n$. Dicho polinomio es de grado cero, es decir, es una constante que coincide con el valor de f_n : $P_0(x) = f_n \Rightarrow$

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_n \cdot dx = z_n + f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx =$$

$$z_n + f_n(x_{n+1} - x_n) = z_n + f_n \cdot h \Rightarrow z_{n+1} = z_n + f_n \cdot h,$$

Se obtiene el método de Euler. Por tanto el método de Euler coincide con el método de Adams-Bashforth de un paso.

Para obtener el método de Adams-Bashforth de dos pasos se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos:

$$(x_n, f(x_n, z_n)) = (x_n, f_n) \text{ y } (x_{n-1}, f(x_{n-1}, z_{n-1})) = (x_{n-1}, f_{n-1}).$$

Es una recta, un polinomio de grado uno, $P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_n)$. Para $x = x_n$ se obtiene $P_1(x_n) = f_n = a_0 = P_0(x)$. Para $x = x_{n-1}$ se obtiene $P_1(x_{n-1}) = f_{n-1} =$

$a_0 + a_1 \cdot (x_{n-1} - x_n) \Rightarrow a_1 = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$. Se denota a $f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$, que se

denomina **diferencia regresiva** de f_n . Al ser $x_n - x_{n-1} = h$, se tiene

$$P_1(x) = P_0(x) + \frac{\nabla f_n}{h} \cdot (x - x_n).$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(P_0(x) + \frac{\nabla f_n}{h} (x - x_n) \right) \cdot dx =$$

$$z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx + \frac{\nabla f_n}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \cdot dx = z_n + f_n \cdot h + \frac{\nabla f_n}{h} \cdot \frac{h^2}{2} =$$

$$z_n + f_n \cdot h + \frac{h}{2} \cdot \nabla f_n,$$

por lo que se obtiene:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(f_n + \frac{1}{2} \cdot \nabla f_n \right) \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (3f_n - f_{n-1}),$$

que es el método de Adams-Bashforth de 2 pasos.

También se puede escribir según la expresión general de los métodos de k pasos:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2} \cdot (3f_{n+1} - f_n).$$

En general, usando la construcción de los polinomios interpoladores de Newton, se tiene que el polinomio que pasa por los k puntos:

$$(x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), \dots, (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}),$$

es $P_{k-1}(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_n) + a_2 \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \dots + a_k \cdot (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1})$

siendo $a_n = \frac{1}{n! h^n} \nabla^n f_n$, donde:

$$\nabla^0 f_n = f_n;$$

$$\nabla^1 f_n = \nabla f_n = f_n - f_{n-1};$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2};$$

y en general, se puede demostrar por inducción, que la expresión del **operador de diferencias regresivas** es:

$$\nabla^p f_n = \binom{p}{0} \cdot f_n - \binom{p}{1} \cdot f_{n-1} + \dots + (-1)^p \cdot \binom{p}{p} \cdot f_{n-p}. \quad (14.2.1)$$

Al calcular $z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx$, los coeficientes coinciden con

los de los métodos anteriores y sólo es preciso obtener un único coeficiente, el último, pues:

$$P_{k-1}(x) = P_{k-2}(x) + a_k \cdot (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}) \Rightarrow$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-2}(x) \cdot dx + \frac{1}{k!h^k} \nabla^k f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}) \cdot dx$$

Se denomina:

$$\gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \dots (x - x_{n-i+1}) \cdot dx$$

se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}] f_n.$$

Definición 14.2.1:

La expresión general de un **método de Adams-Bashforth de k pasos** es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}] f_n.$$

donde:

$$\gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \dots (x - x_{n-i+1}) \cdot dx.$$

Se ha utilizado esta expresión para obtener que: $\gamma_0 = 1$; $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. De la

misma forma pueden obtenerse los siguientes coeficientes: $\gamma_2 = \frac{5}{12}$; $\gamma_3 = \frac{3}{8}$;

$\gamma_4 = \frac{251}{720}$; $\gamma_5 = \frac{95}{288}$; $\gamma_6 = \frac{19087}{60480}$ Los métodos de *Adams-Bashforth* se

pueden expresar como:

$$z_{n+1} = z_n + h \left[\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1 + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \dots \right] f_n$$

El cálculo de las integrales correspondientes resulta cada vez más engorroso por lo que conviene encontrar otros caminos. Se puede demostrar por inducción que:

$$\gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1.$$

Al sustituir las diferencias regresivas mediante la *expresión 14.2.1* y aumentar el valor de n para tener escritos los métodos en su expresión general se obtienen otras expresiones de los métodos de *Adams-Bashforth* de 2, 3, 4 y 5 pasos:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2} (3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12} (23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24} (55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

$$z_{n+5} = z_{n+4} + \frac{h}{720} (1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} - 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n)$$

14.2.2. Métodos de Adams-Moulton

La diferencia esencial entre los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton es que mientras los primeros son explícitos, los segundos son implícitos. La construcción de estos últimos es similar a la de los métodos de Adams-Bashforth, pero en este caso se sustituye la función

por el polinomio interpolador que pasa por los puntos:

$$(x_{n+1}, f_{n+1}), (x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), \dots, (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}).$$

Si se busca el polinomio interpolador que pasa por un único punto (x_{n+1}, f_{n+1}) , dicho polinomio es de grado cero, por lo que el polinomio es una constante: $P_0(x) = f_{n+1}$.

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_{n+1} \cdot dx = z_n + f_{n+1} \cdot h$$

que es el método de Euler regresivo o implícito.

Para obtener el siguiente método de Adams-Moulton se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos (x_{n+1}, f_{n+1}) y (x_n, f_n) . Es un polinomio de grado uno, $P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_{n+1})$.

$$\text{Para } x = x_{n+1} \text{ se obtiene } P_1(x_{n+1}) = f_{n+1} = a_0 = P_0(x).$$

$$\text{Para } x = x_n \text{ se obtiene } P_1(x_n) = f_n = a_0 + a_1 \cdot (x_n - x_{n+1}) \Rightarrow a_1 = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

Al ser $x_{n+1} - x_n = h$ y al denotar a $f_{n+1} - f_n$ como ∇f_{n+1} mediante la diferencia regresiva de f_{n+1} se obtiene $P_1(x) = P_0(x) + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \cdot (x - x_{n+1})$. Sustituyendo en

la fórmula:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx =$$

$$z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \cdot dx =$$

$$z_n + f_{n+1} \cdot h + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \left(\frac{-h^2}{2} \right),$$

por lo que se obtiene:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1}) = z_n + h \cdot (\nabla^0 - \frac{1}{2} \nabla^1) f_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n).$$

que es un método implícito de un paso, la regla del trapecio.

Para $k = 2$ se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos (x_{n+1}, f_{n+1}) , (x_n, f_n) y (x_{n-1}, f_{n-1}) . Es un polinomio de segundo grado, $P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_{n+1}) + a_2 \cdot (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n)$.

Para $x = x_{n+1}$ se obtiene $P_2(x_{n+1}) = f_{n+1} = a_0 = P_0(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = x_n \text{ se obtiene } P_2(x_n) = f_n = a_0 + a_1 \cdot (x_n - x_{n+1}) &\Rightarrow a_1 = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n} \\ &= \frac{\nabla f_{n+1}}{h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x = x_{n-1} \text{ se obtiene } P_2(x_{n-1}) = f_{n-1} = a_0 + a_1 \cdot (x_{n-1} - x_{n+1}) + a_2 \cdot (x_{n-1} - \\ x_{n+1}) \cdot (x_{n-1} - x_n) &\Rightarrow a_2 = (f_{n-1} - a_0 - a_1 \cdot (x_{n-1} - x_{n+1})) / ((x_{n-1} - x_{n+1}) \cdot (x_{n-1} - x_n)) = \\ &= \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2}. \end{aligned}$$

Se verifica que $P_2(x) = P_1(x) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \cdot (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n)$, por lo que

integrando:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_2(x) \cdot dx =$$

$$z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n) \cdot dx =$$

$$z_n + f_{n+1} \cdot h - \frac{h}{2} \cdot \nabla f_{n+1} + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \cdot h^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\nabla^0 - \frac{1}{2} \cdot \nabla^1 - \frac{1}{12} \cdot \nabla^2\right) f_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} \cdot (5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

que es el método de Adams-Moulton de 2 pasos.

Definición 14.2.2:

La expresión general de un **método de Adams-Moulton de k pasos**

es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma^*_0 \cdot \nabla^0 + \gamma^*_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma^*_k \cdot \nabla^k] f_{n+1}$$

siendo:

$$\gamma_0^* = 1 \text{ y } \gamma_i^* = \frac{1}{i! h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \dots (x - x_{n-i+2}) \cdot dx$$

Se ha obtenido ya que: $\gamma_0^* = 1$ y $\gamma_1^* = -\frac{1}{2}$; $\gamma_2^* = -\frac{1}{12}$. Al utilizar la

fórmula anterior se obtiene que $\gamma^*_3 = -\frac{1}{24}$, $\gamma^*_4 = -\frac{19}{720}$, $\gamma^*_5 = -\frac{3}{160}$, $\gamma^*_6 = -$

$\frac{863}{60480}$... por lo que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\nabla^0 - \frac{1}{2} \nabla^1 - \frac{1}{12} \nabla^2 - \frac{1}{24} \nabla^3 \dots] f_{n+1}$$

Al sustituir las diferencias regresivas mediante la *expresión 14.2.1* y aumentar el valor de n para tener escritos los métodos en su expresión general se obtienen otras expresiones de los métodos de Adams-Moulton de 1, 2, 3 y 4 pasos:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n) \quad \text{Regla del trapecio}$$

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12} (5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24} (9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{720} (251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$$

Se puede demostrar por inducción que los coeficientes γ_i^* de las fórmulas de Adams-Moulton verifican la relación:

$$\gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0 \quad \text{con } \gamma^*_0 = 1.$$

Los coeficientes γ^*_i y γ_i de las fórmulas de Adams implícitas y explícitas están además relacionados entre sí. Se puede comprobar fácilmente que:

$$\gamma^*_0 = \gamma_0 \quad \text{y que } \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

Esta relación entre los coeficientes de las dos familias de métodos permite expresar de otra manera las fórmulas de Adams-Moulton, con lo que se tiene otra expresión general de los **métodos de Adams-Moulton de k pasos**:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}] f_n + \gamma_k \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}.$$

Esta manera de representar las fórmulas de Adams implícitas tiene interés en la práctica porque permite relacionarlas con las correspondientes fórmulas explícitas. Así, si $z_{n+1}^{[0]}$ representa el valor obtenido al aplicar al problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, en la etapa n la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos, la fórmula anterior permite asegurar que el valor z_{n+1} que se obtiene con la fórmula de Adams-Moulton correspondiente de k pasos es

$$z_{n+1} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_k \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}.$$

La expresión anterior permite hacer uso de las fórmulas de Adams implícita y explícita de forma simultánea, sin apenas coste adicional, siguiendo los pasos correspondientes. Son los métodos de predicción-corrección que evitan tener que despejar z_{n+1} en f_{n+1} , de manera que permiten “predecir” su valor mediante Adams-Bashforth y “corregirlo” mediante Adams-Moulton. Así, en la etapa n se tienen los siguientes pasos:

- Se calcula el valor de $z_{n+1}^{[0]}$ con la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos.
- Se evalúa la función $f(x, y)$ en el punto $(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$, es decir, se

calcula $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$.

- Se calcula el valor de $z_{n+1}^{[1]}$ con la fórmula de Adams-Moulton de k pasos.
- Se evalúa de nuevo la función $f(x, y)$ en el punto $(x_{n+1}, z_{n+1}^{[1]})$, es decir, se calcula $f_{n+1}^{[1]}$.
- Se calcula, a partir de $z_{n+1}^{[1]}$, el valor de $z_{n+2}^{[0]}$ con la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos y se repite el proceso.

Es interesante comparar los resultados obtenidos utilizando un método explícito de *Adams-Bashforth* de k pasos con los obtenidos usando un método implícito de *Adams-Moulton* de $k - 1$ pasos, pues ambos requieren k evaluaciones de la función f por paso y, como se verá más adelante, su error de truncamiento es del orden de $O(h^k)$. Se puede apreciar que en general los métodos de *Adams-Moulton* dan mejores resultados, tienen un error global menor y son más estables, pero tienen el inconveniente de tener que resolver una ecuación implícita, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Resultados de aplicar el **método de Adams-Bashforth** de cuatro pasos y el **método de Adams-Moulton** de tres pasos con tamaño de paso $h = 0,1$ y iniciadores los valores exactos a: $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$.

| Exacto | <i>Adams-Bashforth</i> | Error | <i>Adams-Moulton</i> | Error |
|------------|------------------------|------------------------|----------------------|------------------------|
| 1,36787944 | 1,36788995 | $1,052 \times 10^{-5}$ | 1,36787859 | $8,418 \times 10^{-7}$ |

En general, la eficiencia de los distintos métodos está muchas veces relacionada con el tipo de problema al que se van a aplicar, por lo que es conveniente reflexionar sobre las **ventajas** e **inconvenientes** de cada método. Para arrancar un método de k pasos se necesitan k puntos iniciales de la solución que se deben obtener mediante un método de un paso. Esta es una de las desventajas de los métodos lineales multipaso. Estos valores iniciadores z_j , $j = 0, \dots, k - 1$, si se supone que son aproximaciones de $y(x_j)$, es natural que converjan a y_0 cuando h tiende a cero. Por tanto es importante asegurar que el método de un paso con el que se generan los valores iniciadores sea también consistente del mismo orden.

Otra desventaja es que aunque el error de truncamiento, tanto en el método de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos como en el método de *Adams-Moulton* de tres pasos, es de igual orden al de *Runge-Kutta 4*, éste es más preciso.

Una ventaja de los métodos de *Adams* respecto de los métodos de *Runge-Kutta 4*, es el número de veces que se debe evaluar a la función. Un método de *Runge-Kutta* de orden cuatro necesita en n pasos $4n$ evaluaciones, mientras que uno de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos

necesita $n - 4$ más los iniciadores. Luego si la función es complicada, el método de *Adams* es más eficiente.

Los métodos de *Runge-Kutta* tienen la ventaja de ser autoiniciadores, estables, dar una buena precisión y ser fáciles de computar, y el inconveniente, además del ya comentado, de no proporcionar una estimación de la precisión para saber si el tamaño de paso es adecuado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.2.1: Comprobar los valores que se obtienen de los coeficientes en los métodos de Adams utilizando las expresiones:

$$a) \gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1.$$

$$b) \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0.$$

$$c) \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

$$a) \text{ Para } i = 0 \Rightarrow \frac{\gamma_0}{0+1} = 1 \Rightarrow \gamma_0 = 1.$$

$$\text{Para } i = 1 \Rightarrow \gamma_1 + \frac{\gamma_0}{1+1} = 1 \Rightarrow \gamma_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } i = 2 \Rightarrow \gamma_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_0}{2+1} = 1 \Rightarrow \gamma_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

$$b) \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0 \text{ con } \gamma^*_0 = 1, \text{ para } i = 1 \Rightarrow \gamma^*_1 + \frac{\gamma^*_0}{1+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^*_1 = -\frac{1}{2}, \text{ para } i = 2 \Rightarrow \gamma^*_2 + \frac{\gamma^*_1}{2} + \frac{\gamma^*_0}{2+1} = 0 \Rightarrow \gamma^*_2 = +\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

$$c) \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}; \gamma^*_1 = \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. \gamma^*_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}.$$

Ejemplo 14.2.2: Aplicar los métodos de Adams-Bashforth de dos y tres pasos al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0,1$ para aproximar $y(0,5)$, utilizando como $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta.

$$x_n = 0,5 = x_0 + n \cdot h = n \cdot h = 0,1 \cdot n \Rightarrow n = 5.$$

Los métodos de Adams-Bashforth de dos y tres pasos son:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

y al aplicarlos con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3z_{n+1} - z_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23z_{n+2} - 16z_{n+1} + 5z_n)$$

Para calcular z_2 con la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos se precisa conocer $z_0 = 1$ y z_1 que se calcula mediante el método de Euler:

$$z_1 = z_0 + h \cdot z_0 = 1,1.$$

$$\text{Se calcula } z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3z_1 - z_0) = 1,1 + 0,1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1,1 - \frac{3}{2} = 1,215.$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{2}(3z_2 - z_1) = 1,34225; z_4 = 1,4828375, z_5 = z(0,5) = 1,638150625.$$

Si se toma como método de arranque la fórmula de Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$. Se calcula $z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3z_1 - z_0) = 1,220946458$; $z_3 = 1,348829885$, $z_4 = 1,490107045$ y $z_5 = z(0,5) = 1,646181607$.

Para calcular z_3 con la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos se precisa conocer previamente z_0 , z_1 y z_2 . Si se obtienen con el método de Euler se tiene: $z_0 = 1$, $z_1 = 1,1$ y $z_2 = 1,21$. Se calcula $z_3 = z_2 + \frac{h}{12}(23z_2 - 16z_1 + 5z_0) = 1,336916667$, y del mismo modo $z_4 = 1,477659028$ y $z_5 = z(0,5) = 1,633038119$. Y si se utiliza como método de arranque Runge-Kutta 4 se tiene: $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$ y $z_2 = 1,22140257$. Se calcula $z_3 = z_2 + \frac{h}{12}(23z_2 - 16z_1 + 5z_0) = 1,349815285$, y del mismo modo $z_4 = 1,49172499$ y $z_5 = z(0,5) = 1,648555349$.

Puesto que el valor exacto es $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$ se observa que el mejor resultado se obtiene usando la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos arrancando con Runge-Kutta 4; la segunda mejor aproximación se obtiene usando la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos arrancando con

Runge-Kutta 4. Sin embargo se obtiene peor resultado con la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos arrancando con el método de Euler que con la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos arrancando con el método de Euler. La razón es que la mejor calidad de la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos queda arruinada al utilizar un mal método de arranque (Euler). Se estudiará, como en los métodos de un paso, el concepto de orden de consistencia y de orden de convergencia y se comprobará que se debe usar un método de arranque cuyo orden de consistencia sea al menos igual al del método multipaso usado.

Ejemplo 14.2.3: Aplicar los métodos de Adams-Moulton de tres y dos pasos al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0,1$ para aproximar $y(0,5)$, utilizando como $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4.

$$x_n = 0,5 = x_0 + n \cdot h = n \cdot h = 0,1 \cdot n \Rightarrow n = 5.$$

El método de Adams-Moulton de tres pasos es:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24} (9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

y al aplicarlo con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24} (9z_{n+3} + 19z_{n+2} - 5z_{n+1} + z_n)$$

Para calcular z_3 se precisa conocer $z_0 = 1$, $z_1 = 1,1$ y $z_2 = 1,21$ para lo

que se utiliza el método de Euler. Se obtiene que $z_3 = 1,337186147$, $z_4 = 1,477840745$, $z_5 = z(0,5) = 1,633267629$.

Si se toma como método de arranque Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$ y $z_2 = 1,22140257$ y utilizando el método: $z_3 = 1,349858924$, $z_4 = 1,491825192$ y $z_5 = z(0,5) = 1,648722219$.

Los métodos de Adams-Moulton exigen, al ser implícitos, resolver en cada paso una ecuación, que en este ejemplo es sencilla, pero puede complicarse en otros.

El método de Adams-Moulton de dos pasos es:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n),$$

y al aplicarlo con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5z_{n+2} + 8z_{n+1} - z_n).$$

Para calcular z_2 se precisa conocer $z_0 = 1$ y z_1 , para lo que se utiliza el método de Euler: $z_1 = 1,1$. Se obtiene que:

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{12}(5z_2 + 8z_1 - z_0) = 1,1 + \frac{0,1}{12}(5z_2 + 8(1,1) - 1), \text{ de donde se}$$

despeja z_2 . Se obtiene de igual modo que:

$$z_3 = 1,343508507, z_4 = 1,484812493, z_5 = z(0,5) = 1,640978179.$$

Si se toma como método de arranque Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_5 = z(0,5) = 1,648747592$.

Puesto que el valor exacto es $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$ se observa que el mejor resultado se obtiene usando la fórmula de Adams-Moulton de tres pasos arrancando con la fórmula de Runge-Kutta 4 ($z_5 = 1,648722219$), luego usando la fórmula de Adams-Moulton de dos pasos arrancando con la fórmula de Runge-Kutta 4 ($z_5 = 1,648747592$) y que se arruina el método de Adams-Moulton de tres pasos al utilizar el método de Euler (Adams-Moulton de dos pasos: $z_5 = 1,640978179$; Adams-Moulton de tres pasos: $z_5 = 1,633267629$).

Si se comparan entre sí los métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton del ejemplo anterior, usando como método de arranque el de Runge-Kutta 4, se obtiene:

- Adams-Moulton de tres pasos: $z_5 = 1,648722219$;
- Adams-Moulton de dos pasos: $z_5 = 1,648747592$;
- Adams-Bashforth de tres pasos: $z_5 = 1,648555349$;
- Adams-Bashforth de dos pasos: $z_5 = 1,646181607$;
- Valor exacto: $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$.

Se observa en este ejemplo la mayor precisión de los métodos de Adams-Moulton.

Ejemplo 14.2.4: Utilizar el método de Adams-Bashforth de dos pasos, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valor iniciador el proporcionado por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Utilizar la fórmula dada mediante las tablas de diferencias regresivas:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \cdot \nabla^1) f_n.$$

La forma usual de organizar estos cálculos es utilizando una hoja de cálculo, con lo que es posible simplificar el proceso

En la primera columna se escribe n , que varía desde 0 hasta el último valor que se quiera calcular, en este caso, $n = 4$.

En la segunda columna se calcula $x_n = x_0 + n \cdot h = 0 + 0,2 \cdot n = 0,2 \cdot n$.

Se calcula el valor iniciador usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

Se llevan las siguientes expresiones a la hoja de cálculo:

$$\nabla^0 f_n = f(x_n, z_n) = x_n + z_n - 1.$$

$$\nabla^1 f_n = \nabla^0 f_n - \nabla^0 f_{n-1}.$$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_n.$$

y se obtiene:

| n | x_n | z_n | $\nabla^0 f_n = f(x_n, z_n) = x_n + z_n - 1$ | $\nabla^1 f_n = \nabla^0 f_n - \nabla^0 f_{n-1}$ |
|-----|-------|------------------|--|--|
| 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0,2 | 1,0214 | 0,2214 | 0,2214 |
| 2 | 0,4 | 1,08782 | 0,48782 | 0,26642 |
| 3 | 0,6 | 1,212026 | 0,812026 | 0,324206 |
| 4 | 0,8 | 1,4068518 | 1,2068518 | 0,3948258 |

Por lo que $z(0,8) = z_4 = 1,4068518$.

Ejercicios

14.3. En la tabla adjunta: a) Completar los valores que faltan:

| | | | | | | | | | |
|------|----|----|----|---|----|----|----|----|-----|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| f(x) | 15 | 24 | 35 | | 63 | 80 | 99 | | 143 |

b) Calcular las diferencias regresivas y utilizarlas para obtener el polinomio interpolador de Newton de segundo grado que pasa por los puntos: (3, 15), (4, 24) y (5, 35).

(Solución: a) 48 y 120; b) $P_2(x) = 15 + 9 \cdot (x - 3) + (x - 3) \cdot (x - 4)$)

14.4. Escribir las expresiones de los métodos de Adams-Bashforth de 2, 3, 4 y 5 pasos utilizando diferencias regresivas. Utilizar la expresión 14.2.1 para obtener:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

$$z_{n+5} = z_{n+4} + \frac{h}{720}(1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} - 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n)$$

14.5. Escribir las expresiones de los métodos de Adams-Moulton de 2, 3 y 4 pasos utilizando los coeficientes γ^*_i y diferencias regresivas. Escribir las expresiones de esos mismos métodos utilizando los coeficientes γ_i . Utilizar la *expresión 14.2.1* para obtener:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{720}(251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$$

14.6. Calcular los valores de γ_4 , γ_5 , γ_6 , γ^*_3 , γ^*_4 y γ^*_5 utilizando las expresiones:

$$\text{a) } \gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1,$$

$$\text{b) } \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0,$$

$$\text{c) } \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

(Solución: $\gamma_4 = \frac{251}{720}$, $\gamma_5 = \frac{95}{288}$, $\gamma_6 = \frac{19087}{60480}$, $\gamma^*_3 = \frac{-19}{720}$, $\gamma^*_4 = \frac{-3}{160}$, $\gamma^*_5 = \frac{-863}{60480}$).

14.7. Calcular los valores de γ_2 , γ_3 y γ^*_3 utilizando las expresiones:

a) $\gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_n)\dots(x-x_{n-i+1}) \cdot dx$.

b) $\gamma^*_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_{n+1})\dots(x-x_{n-i+2}) \cdot dx$.

14.8. Escribir el polinomio interpolador de Newton de grado cuatro

de $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$ para x igual a $-2, -1, 0, 1$ y 2 .

(Sol: $P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{10}(x-2)(x-1) - \frac{1}{15}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{30}(x-2)(x-1)x(x+1)$).

14.9. Utilizando la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos con

diferencias regresivas: $z_{n+1} = z_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_n$. aproximar la

solución en $x = 1,2$ del problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$,

$y(1) = 1$, con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores

iniciadores $z_0 = 1$ y z_1 el obtenido mediante:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f(x_n + h, z_n + h \cdot f(x_n, z_n)) \right).$$

(Solución: $z_1 = 1,11$; $z_2 = 1,2415$).

- 14.10. Aplicar los métodos de Adams-Bashforth de tres y cuatro pasos al problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores iniciadores $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4. Calcular el error global cometido.
- 14.11. Aplicar los métodos de Adams-Moulton de tres y cuatro pasos al problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores iniciadores $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4. Calcular el error global cometido. Discutir el resultado obtenido comparándolo con el del ejercicio anterior.

14.3. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS LINEALES MULTIPASO

14.3.1. Definición de convergencia

La definición de convergencia coincide con la dada en los métodos de un paso, pero es necesario asegurar que los valores iniciadores están bien elegidos.

Definición 14.3.1:

Un método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0, \quad (14.3.1)$$

es **convergente** en $[a, b]$ si para todo $x \in [a, b]$, para cualquier problema de *Cauchy* bien planteado (con las condiciones de regularidad mencionadas): $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con una única solución $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ y para cualesquiera condiciones iniciales $z_0(h), \dots, z_{k-1}(h)$, que satisfagan que tienden a $y(x_0)$ cuando h tiende a cero, se verifica que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + nh = x}} \|z_n - \varphi(x)\| = 0, \quad (14.3.2)$$

siendo z_n la solución de la ecuación de diferencias 14.3.1.

La expresión 14.3.2 es equivalente a decir que: $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + nh = x}} z_n = \varphi(x)$, o a decir

que el error global $e(h) = \varphi(x) - z_n$ tiende a cero cuando h tiende a cero.

Definición 14.3.2:

Se dice que el método es **convergente de orden p** si

$$\|z_n - y(x)\| = O(h^p).$$

Una cuestión esencial a la hora de seleccionar un método multipaso es la elección adecuada de los coeficientes α_j y β_j , así como los valores iniciadores z_0, \dots, z_{k-1} , de manera que la solución aproximada que se obtenga al aplicarlo a la resolución de un problema de valor inicial converja en el sentido de la definición anterior a la solución del problema buscado.

Es importante, por lo tanto, establecer procedimientos sencillos que permitan garantizar la convergencia de un método.

La definición de convergencia que se acaba de introducir plantea la misma dificultad que tenía en el caso de los métodos de un paso. Sirve para saber si un método no es convergente, pero no se puede utilizar para saber si es convergente ya que sería preciso aplicar el método a **todo** problema de valor inicial bien propuesto. Por ello se requieren nuevos conceptos.

La convergencia de un método lineal multipaso está directamente

relacionada con los conceptos de consistencia y estabilidad, como en el caso de los métodos de un paso, pero a diferencia de estos, un método lineal multipaso puede ser consistente pero no estable, y por consiguiente no convergente. En las siguientes secciones se estudian detenidamente ambos conceptos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.1: Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n).$$

El método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ **no** es convergente pues al aplicarlo a $y' = y$, $y(0) = 1$ se obtiene la ecuación en diferencias lineal y homogénea $z_{n+2} - 2(1+h)z_{n+1} + (1+2h)z_n = 0$ cuya solución general es $z_n = C_1 + C_2(1+2h)^n$. Si se toman como valores iniciadores $z_0 = 1$ y $z_1 = 1 + 2h$, que tienden a $y_0 = 1$ cuando h tiende a cero, entonces $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, por lo que $z_n = (1 + 2h)^n$. Como $x_n = x = x_0 + n \cdot h = n \cdot h \Rightarrow h = \frac{x}{n} \Rightarrow z_n = \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^n$.

Al calcular su límite, cuando n tiende a infinito se obtiene e^{2x} , distinto de la solución exacta $\varphi(x) = e^x$.

Ejemplo 14.3.2: Analizar la convergencia del método: $z_{n+2} - z_n = 2hf_{n+1}$.

Si se aplica el método $z_{n+2} - z_n = 2hf_{n+1}$ al mismo problema de valor inicial con $z_0 = 1$ y $z_1 = 2$ se obtienen también valores muy dispares a $\varphi(x) =$

e^x . Sin embargo, en este caso, aplicando la definición, no se puede asegurar nada sobre la convergencia del método puesto que $z_1 = 2$ es muy distinto de $y_0 = 1$ y no tiende a este valor cuando h tiende a cero. Se observa, por tanto, que para poder analizar la convergencia se debe conocer que los valores iniciadores se aproximan al valor inicial y_0 cuando el tamaño del paso tiende a cero.

14.3.2. Orden de consistencia y error de truncamiento

Con el fin de simplificar la notación, se introduce a continuación la siguiente definición, que se utilizará en las restantes secciones del capítulo.

Definición 14.3.3:

Se denomina **operador asociado al método** lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al operador $L[\psi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \psi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \psi'(x + jh)$ siendo ψ una

función real suficientemente regular.

Definición 14.3.4:

Se denomina **error de truncamiento** del método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con solución φ :

$(a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ a la expresión:

$$T_{n+k} = L[\varphi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \varphi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \varphi'(x + jh).$$

Esta definición de error de truncamiento coincide con la del *capítulo 13* para los métodos explícitos de un paso, pues sigue siendo la diferencia entre la solución exacta en un punto y el valor obtenido al aplicar el método suponiendo que los valores anteriores coincidieran con la solución exacta, ya que si $\alpha_k = 1$ entonces:

$$z_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, \varphi(x_{n+j})) = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi'(x_{n+j}),$$

por lo que:

$$T_{n+k} = \varphi(x_{n+k}) - z_{n+k} = \varphi(x_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi'(x_{n+j}) = L[\varphi, x, h]. \quad \square$$

Definición 14.3.5:

Se denomina **orden de consistencia** del método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al mayor número natural p tal que para cualquier función real ψ suficientemente regular se tenga $L[\psi, x, h] = O(h^{p+1})$.

Se observa que si el orden de consistencia de un método es p entonces el error de truncamiento, al aplicarlo a cualquier problema de valor inicial, es un infinitésimo de orden mayor o igual a $p + 1$, ya que la diferencia estriba en que para el error de truncamiento la función φ debe ser una solución del problema de valor inicial, mientras que en el orden de consistencia ψ es una función cualquiera suficientemente regular.

Definición 14.3.6:

Se dice que un método es **consistente** si su orden de consistencia, p , es mayor o igual que uno.

14.3.3. Constante de error

La linealidad del operador L facilita el cálculo del orden de consistencia de un método pues:

$$L[\psi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \psi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \psi'(x + jh)$$

y utilizando el desarrollo de Taylor:

$$\psi(x + jh) = \psi(x) + jh\psi'(x) + \dots + \frac{1}{n!}(jh)^n \psi^{(n)}(x) + \dots$$

$$h \cdot \psi'(x + jh) = h \cdot \psi'(x) + h \cdot (jh)\psi''(x) + \dots + \frac{h}{n!}(jh)^n \psi^{(n+1)}(x) + \dots$$

Por tanto $L[\psi, x, h] = C_0 \cdot \psi(x) + C_1 \cdot h\psi'(x) + \dots + C_q \cdot h^q \psi^{(q)}(x) + \dots$

donde:

$$C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k;$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k);$$

...

$$C_q = \frac{1}{q!} \left(\sum_{j=0}^k j^q \cdot \alpha_j \right) - \frac{1}{(q-1)!} \left(\sum_{j=0}^k j^{q-1} \cdot \beta_j \right)$$

El orden de consistencia del método es p si y sólo si:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \neq C_{p+1}.$$

En consecuencia, para que un método sea consistente basta que $C_0 = C_1 = 0$, es decir, que se verifiquen las dos primeras condiciones:

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 0, \\ C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k) = 0. \end{cases}$$

La definición de estos coeficientes sugiere dos procedimientos

diferentes para obtener fórmulas de métodos multipaso: la integración numérica de los polinomios de interpolación, que es más popular, y el método de los coeficientes indeterminados, que suministra relaciones entre los coeficientes para obtener un orden de consistencia preestablecido.

Teorema 14.3.1:

Todo método lineal de k pasos convergente es consistente.

Demostración:

Sea el método lineal de k pasos:
$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$$

que se supone, por hipótesis, convergente: Si se toman límites cuando el tamaño de paso tiende a cero, debe verificarse que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_{n+j} = \varphi(x)$$

siendo $\varphi(x)$ la solución de un problema de valor inicial cualquiera al que se aplique el método. Por tanto al aplicar límites cuando el tamaño de paso tiende a cero en la expresión del método se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) = 0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \varphi(x) \Rightarrow \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$$

por lo que $C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 0$.

Entonces $\alpha_0 = -\alpha_1 - \dots - \alpha_k$ y sustituyendo en $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j}$ se tiene

$$\text{que: } \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (z_{n+j} - z_n).$$

Al ser, por hipótesis, el método convergente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_{n+j} - z_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} j \frac{z_{n+j} - z_n}{jh} = j \cdot \varphi'(x).$$

Por tanto, dividiendo por h y aplicando límites, cuando h tiende a cero:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (z_{n+j} - z_n) \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot j \cdot \varphi'(x) - \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \sum_{j=1}^k j \cdot \alpha_j - \sum_{j=0}^k \beta_j = 0,$$

por lo que $C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k) = 0$.

Por tanto el método es consistente. \square

Sin embargo, la consistencia por sí sola no garantiza la convergencia.

Por ejemplo, el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ es consistente y sin embargo no es convergente pues si se aplica al problema $y' = 0$, $y(0) = 0$, la

solución exacta es $\varphi(x) = 0$, mientras $z_n = nh$, por lo que tiende a x , distinto de $\varphi(x)$.

Definición 14.3.7:

Se denomina **constante de error** o **coeficiente de error** del método al primer coeficiente distinto de cero C_{p+1} de $L[\psi, x, h]$.

En consecuencia, el orden de consistencia del método es igual a p si:

$$L[\psi, x, h] = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \psi^{(p+1)}(x) + \dots = O(h^{p+1}),$$

siendo C_{p+1} la constante de error del método.

El error de truncamiento del método es igual a:

$$L[\varphi, x, h] = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \varphi^{(p+1)}(x) + \dots$$

donde φ es la solución exacta.

Un método lineal multipaso tiene un orden p de consistencia si se anulan $p + 1$ coeficientes C_0, C_1, \dots, C_p , con lo que se tienen $p + 1$ ecuaciones lineales entre los coeficientes α_j y β_j .

Si un método es explícito de k pasos se deben calcular $2k$ coeficientes y si es implícito $2k + 1$, luego el orden máximo de consistencia de un método explícito de k pasos es $2k - 1$, y el de un método implícito es $2k$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.3: Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}.$$

En este método $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 0$, por lo que:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - 2 = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 4/2 - 2 = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 2^3\alpha_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(8) - \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{3} \neq 0,$$

$$L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots = \frac{1}{3} \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$$

El orden de consistencia del método es 2.

Ejemplo 14.3.4: Calcular el error de truncamiento al aplicar el método

$$z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1} \text{ al problema de valor inicial: } y' = 3x^2, y(0) = 0.$$

El error de truncamiento es, por definición:

$$T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = \varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) - 2h\varphi'(x_{n+1}), \text{ donde } \varphi \text{ es solución del}$$

problema de valor inicial:

$\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $x_n = x_0 + n \cdot h = n \cdot h$, por tanto:

$$\varphi(x_{n+2}) = (n+2)^3 \cdot h^3, \varphi(x_n) = n^3 \cdot h^3, \varphi'(x_{n+1}) = 3(n+1)^2 \cdot h^2,$$

$$T_{n+2} = (n+2)^3 h^3 - n^3 h^3 - 2h \cdot 3(n+1)^2 h^2 = 2h^3.$$

El orden del error de truncamiento es 3.

Coincide este resultado con el obtenido en el ejemplo anterior donde $L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$, por lo que $T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \cdot \varphi'''(c) + \dots$, donde φ es solución del problema de valor inicial, y por tanto: $\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi''(x) = 6x$, $\varphi'''(x) = 6$, y $\varphi^{(iv)}(x) = \dots = 0$, $\forall x$, por lo que:

$$T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \cdot \varphi'''(x) = \frac{1}{3} \cdot h^3 \cdot 6 = 2h^3.$$

Ejemplo 14.3.5: Calcular el orden de consistencia del método de Adams-Bashforth de dos pasos $z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2} \cdot (3f_{n+1} - f_n)$ y la constante de error.

En este método $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = \frac{-1}{2}$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 0$, por lo que:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 - 1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -1 + 2 - \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} + 0\right) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = \frac{1}{2}(-1 + 4) - \left(\frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 2^3\alpha_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(-1 + 8) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12} \neq 0.$$

$$L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots = \frac{5}{12} \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$$

El método tiene orden de consistencia 2 y la constante de error es $C_3 =$

$$\frac{5}{12} = \gamma_2.$$

En todos los métodos de Adams-Bashforth el orden de consistencia p del método coincide con el número k de pasos: $p = k$, y la constante de error coincide con γ_k : $C_{k+1} = \gamma_k$.

14.3.4. Polinomios de estabilidad

Se ha calculado el error de truncamiento mediante un desarrollo en serie de *Taylor* y se expresa como una serie de potencias de h . Se deben tener en cuenta algunas dificultades pues a la solución se le ha impuesto que sea continua y con primera derivada continua, por lo que las derivadas de orden más alto que aparecen en el desarrollo de *Taylor* pueden no existir. Esta dificultad queda subsanada ya que se sustituye $\varphi(x)$ por una función arbitraria suficientemente regular $\psi(x)$ que no sea necesariamente la solución.

Al imponer que el error de truncamiento tienda a cero cuando el tamaño del paso tiende a cero (asumiendo que la función incremento no tienda a infinito cuando h tiende a cero como ciertamente ocurre en este caso) se tiene que el error de truncamiento tiende a:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$$

y únicamente depende de los coeficientes α_j del método. La expresión anterior es un polinomio en r de grado k directamente relacionado con el método, que tiene un interés especial.

Definición 14.3.8:

Dado un método lineal multipaso $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$,

$n \geq 0$, se denomina **primer polinomio de estabilidad** (o también **primer polinomio característico**) asociado al método al polinomio $\rho(r)$ de grado k definido como:

$$\rho(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$$

donde r puede tomar valores complejos.

Definición 14.3.9:

Dado un método lineal multipaso $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$,

$n \geq 0$, se denomina **segundo polinomio de estabilidad** (o también **segundo polinomio característico**) asociado al método al polinomio $\sigma(r)$ definido como:

$$\sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j.$$

Si el método es implícito el segundo polinomio característico es de grado k y si es explícito su grado es menor que k .

Siempre se tiene que $\rho(1) = C_0$ y $\rho'(1) - \sigma(1) = C_1$. Por tanto si un método es consistente se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$$

14.3.5. Estabilidad. Condición de raíz

Existen muchas formas de estabilidad que distintos autores denominan de diversas maneras. Unas se refieren al problema de valor inicial y otras al método numérico.

Se supone que en un problema de valor inicial se perturban la función f y el valor inicial y_0 ; se pretende conocer la sensibilidad de la solución a tal

perturbación. La perturbación $(\delta(x), \delta)$ y la solución perturbada $z(x)$ son definidas por: $z' = f(x, z) + \delta(x)$; $z(x_0) = y_0 + \delta$; $x \in [x_0, b]$

Una definición dice:¹

Definición 14.3.10:

Sean $(\delta(x), \delta)$ y $(\delta^*(x), \delta^*)$ dos perturbaciones cualesquiera de un problema de valor inicial y sean $z(x)$ y $z^*(x)$ las soluciones perturbadas resultantes. Entonces si existe una constante positiva s tal que para todo $x \in [x_0, b]$, $\|z(x) - z^*(x)\| \leq s \cdot \varepsilon$ siendo $\|\delta(x) - \delta^*(x)\| \leq \varepsilon$ y $\|\delta - \delta^*\| \leq \varepsilon$, entonces el problema de valor inicial dado se dice que es **totalmente estable**.

Afirmar que un problema de valor inicial sea totalmente estable (o bien propuesto) no es afirmar demasiado, pues s puede ser una constante (finita) muy grande. Gear² prueba que las hipótesis de los teoremas de existencia y unicidad son suficientes para que el problema de valor inicial sea totalmente estable.

Cualquier método numérico aplicado a un problema de valor inicial introduce errores debidos a la discretización y al redondeo, lo que puede ser interpretado de forma equivalente a perturbar un problema. Si las condiciones de la definición de estabilidad no se satisfacen entonces no se

¹ Hahn, G. (1967): *Stability of Motion*. Springer-Verlag. Stetter, H. J. (1971): *Stability of discretization on infinite intervals*: in Conf. of Applications of Numerical Analysis, Dundee, 1971, edir. J. Morris: Lecture Notes in Mathematics nº 228, Springer-Verlag. Página 207-222.

² Gear, C. W. (1971): *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall.

puede esperar que un método numérico proporcione una solución aceptable. Pero esto también puede ser cierto si el método es sensible a las perturbaciones. Se pueden estudiar los efectos que producen las perturbaciones de la función incremento y los valores iniciadores.

Definición 14.3.11:

Sean $\{\delta_n\}$ y $\{\delta^*_n\}$ dos perturbaciones cualesquiera de un método numérico, y sean $\{z_n\}$ y $\{z^*_n\}$ las soluciones resultantes perturbadas. Si existen unas constantes s y h_0 tales que para todo $h \in (0, h_0]$ si $\|\delta_n - \delta^*_n\| \leq \varepsilon$ entonces $\|z_n - z^*_n\| \leq s \cdot \varepsilon$, $0 \leq n \leq N$, se dice que el método numérico es **cero-estable**.

La **cero-estabilidad** debe su nombre a que controla la forma en la que se acumulan los errores en el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero.

La **cero-estabilidad** es una propiedad del método, no del problema de valor inicial si éste está bien propuesto.

La **estabilidad** de los métodos lineales multipaso se analiza teniendo en cuenta que las ecuaciones en diferencias asociadas generan en su mayoría soluciones parásitas, denominadas así porque no tienen nada que ver con la solución exacta del problema de valor inicial. Es pues interesante saber si un método introduce soluciones parásitas y si éstas tienden a cero cuando n tiende a infinito.

Definición 14.3.12:

Se dice que un método numérico lineal multipaso es **estable** (Lambert³) si las raíces del primer polinomio característico del método son de módulo menor o igual a la unidad, siendo estrictamente menores que uno si son raíces múltiples.

Es decir, un método numérico lineal multipaso es estable si los valores r_i tales que $\rho(r_i) = 0$ verifican que $|r_i| \leq 1$, y si $|r_i| = 1$ entonces $\rho'(r_i)$ es distinto de cero.

Esta condición se denomina **condición de raíz**.

La primera propiedad indica que las raíces del primer polinomio característico deben estar en el círculo unidad $\{z: |z| \leq 1\}$ del plano complejo, y la segunda indica que todas las raíces de la frontera del círculo deben ser raíces simples.

Se puede observar además que si un método numérico consistente es tal que $\rho(1) = 0$ y $\sigma(1) = 0$, entonces $\rho(1) = \rho'(1) = 0$ con lo que $r = 1$ es una raíz doble del primer polinomio característico; el método entonces no verifica la condición de raíz y no es un método estable. Por eso todo método consistente y estable debe verificar que $\sigma(1) \neq 0$.

Si no se cumple la condición de raíz el error crece exponencialmente, lo que puede comprobarse aplicando un método a $y' = 0$ con $y(0) = y_0$, ya que se obtiene: $z_n = C_1 \cdot r_1^n + \dots + C_k \cdot r_k^n$, y si alguna de las raíces r_j del primer

³ Lambert, J. D.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial*

polinomio característico tiene su módulo mayor que 1, entonces r_j^n crece al crecer n , con lo que z_n también crece.

Se estudió que el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ es consistente pero no es convergente. Su primer polinomio de estabilidad $\rho(r) = r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$ tiene a $r = 1$ como raíz doble, por lo que no verifica la condición de raíz, luego el método no es estable. Si se aplica al problema $y' = 0$, $y(0) = 0$, de solución exacta $\varphi(x) = 0$, $\forall x$, se obtiene que $z_n = n \cdot h = x$, cuyo límite cuando h tiende a cero es distinto de $\varphi(x)$.

Definición 14.3.13:

Se llaman **inestables** aquellos métodos numéricos que no son estables.

Se observa que si el método es convergente, $r = 1$ es siempre una raíz del primer polinomio característico, y se denomina a esta raíz, r_1 o **raíz principal**, y al resto de las raíces, **raíces parásitas**.

14.3.6. Condición de raíz fuerte

Definición 14.3.14:

Se dice que un método numérico lineal multipaso verifica la **condición de raíz fuerte** si todas las raíces parásitas del primer polinomio característico del método tienen su módulo estrictamente menor que uno.

En algunos textos se denomina a esta propiedad, condición de raíz y a la anterior condición débil de raíz y se denominan métodos débilmente estables aquellos que tienen todas las raíces con módulo menor o igual que uno y alguna raíz parásita con módulo uno.

El método de *Adams-Bashforth* de cuarto orden tiene como primer polinomio característico: $\rho(r) = r^3 \cdot (r - 1)$ por lo que tiene las raíces 1, 0, 0 y 0, y en consecuencia es un método numérico fuertemente estable.

En general, un método de *Adams* de k pasos tiene como primer polinomio característico: $\rho(r) = r^k - r^{k-1}$, por lo que, salvo la raíz principal que vale uno, todas las raíces parásitas valen cero, y en consecuencia todos los métodos de Adams son estables y fuertemente estables.

Sin embargo en los métodos de *Nyström* explícitos (como la regla del punto medio: $z_{n+2} = z_n + 2h \cdot f_{n+1}$), o los métodos generalizados de *Milne-Simpson* implícitos, como por ejemplo: $z_{n+2} = z_n + (h/3) \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$, el primer polinomio característico es: $\rho(r) = r^k - r^{k-2}$. Tiene las raíces 0, 1 y -1 . Estos métodos son estables pero no son fuertemente estables.

Si se buscan métodos de máxima estabilidad es razonable pensar que las raíces de su primer polinomio de estabilidad deberán ser, la raíz 1, simple y las raíces 0, con orden de multiplicidad $k - 1$, con lo que ya se conocen los valores de α_j . Si además se imponen órdenes de consistencia establecidos se encuentran de nuevo las expresiones de los métodos de *Adams*, por un

camino menos laborioso que el de buscar el polinomio interpolador.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.6: Determinar α y β para que el método

$$z_{n+3} + \alpha \cdot z_{n+2} - \alpha \cdot z_{n+1} - z_n = h \cdot (\beta \cdot f_{n+2} + \beta \cdot f_{n+1})$$

tenga el mayor orden de consistencia posible. Estudiar la convergencia del método. Aplicarlo al problema $y' = y + 4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso h y valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = h^4$, $z_2 = 16h^4$ para obtener z_3 y z_4 . Calcular el error global.

Orden de consistencia del método:

$$C_0 = 0 = 1 + \alpha - \alpha - 1 = 0, \forall \alpha$$

$$C_1 = 0 = 3 + 2\alpha - \alpha - (\beta + \beta) \Rightarrow \alpha = 2\beta - 3; \quad (1)$$

$$C_2 = 0 = \frac{1}{2}(9 + 4\alpha - \alpha) - (2\beta + \beta) \Rightarrow \alpha = 2\beta - 3;$$

$$C_3 = 0 = \frac{1}{6}(27 + 8\alpha - \alpha) - \frac{1}{2}(4\beta + \beta) \Rightarrow 27 + 7\alpha = 15\beta; \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que $\alpha = 9$ y $\beta = 6$.

$$C_4 = \frac{1}{24}(81 + 16\alpha - \alpha) - \frac{1}{6}(8\beta + \beta) = \frac{1}{24}(81 + 15\alpha - 36\beta) \Rightarrow \text{Si } \alpha = 9 \text{ y}$$

$\beta = 6$ entonces $C_4 = 0$. Sin embargo $C_5 \neq 0$. Por tanto el mayor orden de

consistencia posible del método se obtiene para $\alpha = 9$ y $\beta = 6$, y éste es $\rho = 4$.

Estudio de la estabilidad:

El polinomio característico o polinomio de estabilidad es $\rho(r) = r^3 + \alpha r^2 - \alpha r - 1 = r^3 + 9r^2 - 9r - 1$ de raíces: $r_1 = 1$, $r_2 = -5 \pm \sqrt{24}$. Como $|-5 - \sqrt{24}| > 1$ el método es inestable. Aunque el método es consistente, como no es estable, no es convergente.

Al aplicarlo al problema $y' = y + 4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso h se tiene que $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = nh$.

$$z_{n+3} + 9z_{n+2} - 9z_{n+1} - z_n = 6h \cdot (f_{n+2} + f_{n+1}) = 6h \cdot [(z_{n+2} + 4x_{n+2}^3 - x_{n+2}^4) + (z_{n+1} + 4x_{n+1}^3 - x_{n+1}^4)] \Rightarrow z_{n+3} + (9 - 6h) \cdot z_{n+2} - (9 + 6h) \cdot z_{n+1} - z_n = 6h \cdot [4(h \cdot (n + 2))^3 - (h \cdot (n + 2))^4 + 4(h \cdot (n + 1))^3 - (h \cdot (n + 1))^4].$$

$$z_3 = - (9 - 6h) \cdot z_2 + (9 + 6h) \cdot z_1 + z_0 + 6h \cdot [4(2h)^3 - (2h)^4 + 4h^3 - h^4] = - (9 - 6h) \cdot 16h^4 + (9 + 6h) \cdot h^4 + 6h \cdot [32h^3 - 16h^4 + 4h^3 - h^4] = -144h^4 + 96h^5 + 9h^4 + 6h^5 + 216h^4 - 102h^5 = 81h^4 = (3h)^4.$$

$$z_4 = - (9 - 6h) \cdot z_3 + (9 + 6h) \cdot z_2 + z_1 + 6h \cdot [4h^3 \cdot 3^3 - h^4 \cdot 3^4 + 4h^3 \cdot 2^3 - h^4 \cdot 2^4] = 256h^4 = (4h)^4.$$

En general $z_n = (nh)^4$.

Para calcular el error global se resuelve la ecuación diferencial $y' = y +$

$4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ y se obtiene que $\varphi(x) = x^4$. Por tanto el error global en $x = x_4 = 4h$ es: $e(h) = \varphi(x_4) - z_4 = (4h)^4 - (4h)^4 = 0$ a pesar de que el método no sea convergente.

Ejemplo 14.3.7: Determinar α y β para que el método:

$$z_{n+2} + \alpha \cdot z_{n+1} + \beta \cdot z_n = h(\alpha^2 \cdot f_{n+1} - \frac{5}{2} \alpha f_n)$$

sea convergente. Aplicarlo al problema $y' = 4$, $y(0) = 0$, con una longitud de paso de 0,5, tomando como valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = 5$, para obtener un valor aproximado en $x = 1$.

Para que el método sea convergente debe ser consistente y estable.

Estudio de la consistencia:

$$C_0 = 0 = 1 + \alpha + \beta \Rightarrow \beta = -1 - \alpha:$$

$$C_1 = 0 = 2 + \alpha - (\alpha^2 - \frac{5}{2} \alpha) = -\alpha^2 + \frac{7}{2} \alpha + 2 \Rightarrow \alpha_1 = 4; \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Estudio de la estabilidad:

El primer polinomio característico o primer polinomio de estabilidad es:

$\rho(r) = r^2 + \alpha \cdot r + (-1 - \alpha)$ de raíces: $r_1 = 1$ y $r_2 = -1 - \alpha$. Para $\alpha_1 = 4$ el método no es estable pues $r_2 = -1 - \alpha = -5$ de módulo mayor que 1. Para $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ el método es estable pues $r_2 = -1 - \alpha = -\frac{1}{2}$ de módulo menor que 1.

Si se impone que:

$$|-1 - \alpha| < 1 \Rightarrow -1 < -1 - \alpha < 1 \Rightarrow 0 < -\alpha < 2 \Rightarrow -2 < \alpha < 0,$$

se obtiene de nuevo que el valor de $\alpha_1 = 4$ no hace estable al método

mientras que $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ si lo hace.

Para $\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ y se tiene el método:

$$z_{n+2} - \frac{1}{2}z_{n+1} - \frac{1}{2}z_n = \frac{h}{4} \cdot (f_{n+1} + 5f_n)$$

que se quiere aplicar al problema $y' = 4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso de 0,5, tomando como valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = 5$ para obtener un valor aproximado en $x = 1$, $x_0 = 0$, por lo que $x = 1 = x_0 + n \cdot h = 0,5 \cdot n \Rightarrow n = 2$; $f_n = f_{n+1} = 4 \Rightarrow$

$$z_2 - \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_0 = \frac{h}{4} \cdot (f_{n+1} + 5f_n) \Rightarrow z_2 = \frac{5}{2} + 0 + \frac{h}{4}(24) = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{11}{2}.$$

14.3.7. Relaciones entre convergencia, consistencia y estabilidad

La relación entre **convergencia, consistencia y estabilidad** en los métodos lineales multipaso es diferente de la que existe en los métodos de un paso. La consistencia es una condición necesaria para la convergencia, pero ahora no es una condición suficiente. Para que un método sea

convergente debe cumplirse, según probó *Dahlquist*, que sea consistente y estable. Es más, estabilidad y consistencia de orden p implican convergencia del mismo orden.

Se observa que al aplicar la expresión del error de truncamiento a los métodos de *Runge-Kutta* estudiados en el capítulo anterior, ésta depende de derivadas parciales de f , mientras que en los métodos lineales de k pasos sólo depende de la derivada de la solución. Esto tiene importancia en los casos donde la solución sea muy regular y sin embargo las derivadas parciales de f tomen valores muy grandes.

En *Atkinson*⁴ se encuentran las demostraciones de los siguientes teoremas y para un tratamiento más completo se puede consultar a *Isaacson&Keller*.⁵

Teorema 14.3.2:

“Si un método lineal multipaso es consistente, entonces dicho método es cero-estable si y sólo si satisface la condición de raíz”.

Corolario 14.3.3:

“Un método lineal multipaso consistente es convergente si y sólo si es estable”.

Teorema 14.3.4:

“La condición necesaria y suficiente para que un método lineal multipaso sea convergente es que sea consistente y estable (verifique la condición de raíz)”.

Este último teorema se puede considerar el fundamental en esta materia. Fue probado en 1956 para métodos lineales multipaso por *Gel'mund Dahlquist*,⁶ primer artículo donde se trabajó de una forma matemática el problema de la convergencia. Y una demostración más general se encuentra en la obra ya mencionada de *Isaacson&Keller*.

14.3.8. Orden máximo de convergencia: Primera barrera de Dahlquist

Una cuestión interesante es buscar el mayor orden de convergencia de un método lineal de k pasos. Para ello se puede pensar en escoger fórmulas que tengan un orden de consistencia máximo. Sin embargo, en general, las fórmulas que tienen órdenes altos de consistencia son inestables.

En un método lineal multipaso de k pasos se dispone, como ya se ha comentado, de $2k + 1$ parámetros y para que sea consistente de orden p debe verificar $p + 1$ condiciones, por tanto, si el método es implícito se puede obtener el orden máximo de consistencia $p = 2k$; y si es explícito $p = 2k - 1$. Sin embargo estos métodos pueden no satisfacer la condición de raíz y no

⁴ Atkinson, K. (1989): *An introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York. (2ª edición).

⁵ Isaacson, E; Keller, H. (1966): *Analysis of Numerical Methods*. Wiley.

⁶ Dahlquist, G. (1956): *Convergence and stability in the numerical integrations of*

ser estables.

El teorema de la **primera barrera de Dahlquist** impone una limitación entre el orden máximo de consistencia de un método de k pasos y su estabilidad. Este resultado fue obtenido por *Dahlquist* en 1956. Es interesante observar la fecha tan reciente de este resultado.

Teorema 14.3.5: Teorema de la primera barrera de Dahlquist

Dado un método lineal de k pasos, estable y consistente de orden p .

- a) Si k es par, entonces $p \leq k + 2$.
- b) Si k es impar, entonces $p \leq k + 1$.
- c) Si $\frac{\beta_k}{\alpha_k} \leq 0$, entonces $p \leq k$ (en particular, si $\beta_k = 0$, es decir, si el método es explícito).

En consecuencia el máximo orden de consistencia posible para un método lineal de k pasos estable es $k + 1$, si k es impar, y $k + 2$, si k es par.

Un método lineal estable de k pasos de orden de consistencia $k + 2$ se llama un **método óptimo**.

Los métodos de estas características en general no son buenos desde el punto de vista práctico. Se puede comprobar fácilmente que son simétricos en el sentido de que los coeficientes verifican que: $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ y $\beta_j = \beta_{k-j}$.

Estas consideraciones encajan con el hecho de que los métodos de Adams hayan sido tan utilizados, aunque no sean métodos óptimos. Se puede decir que los métodos de Adams proporcionan el orden máximo de convergencia que se puede esperar dentro de las fórmulas de k pasos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.8: Analizar el orden de convergencia de los métodos de Adams utilizando el teorema de la primera barrera de Dahlquist.

En el método de Euler, que es el método de Adams-Bashforth de un paso se tiene que $k = 1$, $p = 1$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p = 2$. Pero al ser un método explícito, entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos impar $k = 1$.

En el método de Adams-Bashforth de dos pasos se tiene que $k = 2$, $p = 2$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (b) para que sea estable, siendo k par, es $p \leq k + 2 = 4$. Pero al ser un método explícito, entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos $k = 2$ par.

En el método de Adams-Bashforth de tres pasos se tiene que $k = 3$, $p = 3$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 4$. Pero al ser un método explícito,

entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos $k = 3$ impar.

En general los métodos de Adams-Bashforth alcanzan el máximo orden de consistencia permitido para un método explícito, $k = p$.

En el método de Adams-Moulton de un paso se tiene que $k = 1$, $p = 2$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 2$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método implícito de un número de pasos $k = 1$ impar.

En el método de Adams-Moulton de dos pasos se tiene que $k = 2$, $p = 3$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (b) para que sea estable, siendo k par, es $p \leq k + 2 = 4$.

En el método de Adams-Moulton de tres pasos se tiene que $k = 3$, $p = 4$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 4$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia que permite la barrera de Dahlquist.

Ejemplo 14.3.9: Determinar el valor que debe tomar b para que el método lineal de dos pasos:

$$z_{n+2} + 4b \cdot z_{n+1} - (4b + 1) \cdot z_n = h \cdot ((3b + 1) \cdot f_n + (b + 1) \cdot f_{n+2})$$

sea de orden de convergencia máximo. Utilizar el método con el valor de b

calculado para hallar el valor aproximado de $x = 2$ de la solución $y(x)$ del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tomando la longitud de paso $h = 0,1$ y valores iniciadores $z_0 = z_1 = 1$. Demostrar la convergencia o no convergencia del método para el valor de b hallado.

Orden de consistencia:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -4b - 1 + 4b + 1 = 0, \text{ para todo } b.$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 4b + 2 - (3b + 1) - (b + 1) = 0, \forall b.$$

$$C_2 = 1/2(\alpha_1 + 4\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 1/2(4b + 4) - 2(b + 1) = 0, \text{ para todo } b.$$

$$C_3 = 1/6(\alpha_1 + 8\alpha_2) - 1/2(\beta_1 + 4\beta_2) = 1/6(4b + 4) - 1/2(4(b + 1)) = (-4/3)b - 2/3 = 0 \Rightarrow b = -1/2.$$

$$C_4 = 1/24(\alpha_1 + 16\alpha_2) - 1/6(\beta_1 + 8\beta_2) = 1/24(4b + 4) - 1/6(8(b + 1)) \neq 0 \text{ si } b = -1/2.$$

Para $b = -1/2$ se tiene el máximo orden de consistencia, $p = 3$.

Valor aproximado de $x = 2$

$$x_0 = 0, x_n = 2 = x_0 + nh = 0,1n \Rightarrow n = 20.$$

El método para $b = -1/2$ es: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (-1/2f_n + 1/2f_{n+2})$.

Aplicándolo a $y' = 2y$, se tiene: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (-z_n + z_{n+2}) \Rightarrow$

$(1 - h)z_{n+2} - 2z_{n+1} + (1 + h)z_n = 0$. Se resuelve la ecuación en

diferencias, de raíces: $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1+h}{1-h}$, por lo que $z_n = A\left(\frac{1+h}{1-h}\right)^n + B(1)^n$.

Como $z_0 = 1 \Rightarrow 1 = A + B$. Como $z_1 = 1 \Rightarrow 1 = A\left(\frac{1+h}{1-h}\right) + B$

$\Rightarrow A = 0$ y $B = 1 \Rightarrow z_n = 1$ para todo n , por lo $z_{20} = 1$.

Estudio de la convergencia

Un método es convergente si y sólo si es consistente y estable.

El método es consistente, pues su orden de consistencia es $p = 3 > 1$.

Polinomio de estabilidad: $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r - 1)^2$. 1 es raíz doble, luego el método no es estable, por lo que no es convergente.

14.3.9. Métodos multipaso vectoriales

Los métodos descritos para el caso escalar pueden generalizarse rápidamente para resolver **sistemas de ecuaciones diferenciales** de primer orden (o ecuaciones diferenciales de orden superior), siendo válidas las expresiones interpretándolas ahora de forma vectorial. En concreto x sigue siendo escalar, y es un vector de \mathfrak{R}^n , la función $f(x, y)$ es por tanto una

función de \mathfrak{R}^{n+1} en \mathfrak{R}^n , y cada solución z_n es un vector de \mathfrak{R}^n .

El método definido por:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h\Phi_f(z_{n+k}, z_{n+k-1}, \dots, z_n, x_n, h), \quad z_\mu = \eta_\mu(h), \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1$$

es **convergente** si, para todo problema de valor inicial que satisface el teorema de existencia y unicidad de *Picard-Lindelöf*, se tiene que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=a+nh}} z_n = y(x) \text{ para todo } x \in [a, b] \text{ y para todas las soluciones } \{z_n\} \text{ de la}$$

ecuación en diferencias que satisfacen los valores iniciadores para los cuales

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_\mu(h) = y_0, \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1.$$

Un método que no es convergente se dice que es **divergente**.

Otra forma equivalente es comprobar que: $\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - z_n\| \rightarrow 0$

cuando h tiende a cero, siendo constante $nh = x - x_0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.10: Aplicar el método de Adams-Bashforth de dos pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,1$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,2) \\ y_2(0,2) \end{pmatrix}$, utilizando como valores iniciadores: z_0

$$= z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El método de Adams-Bashforth de dos pasos es:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

donde los z_n y f_n son vectores de \mathfrak{R}^2 , mientras x_n pertenece a \mathfrak{R} , siendo $f_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} z_n + \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $x_0 = 0$ y $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como $x_1 = 0,1$ y $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular z_2 se usa la fórmula de Adams-Bashforth:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n) \Rightarrow$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,05(3 \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1,015 \\ 1,15 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

- 14.12. Calcular el orden de consistencia del método $z_{n+2} - z_n = h(f_{n+1} + f_n)$ y el error de truncamiento cometido al aplicarlo al

problema de valor inicial $y' = y + x$, $y(0) = 1$.

14.13. Calcular el orden de consistencia del método $z_{n+2} - \frac{1}{2}z_{n+1}$

$$- \frac{1}{2}z_n = h \cdot \left(\frac{-9}{8}f_{n+2} + 4f_{n+1} + \frac{-11}{8}f_n \right) \text{ y el error de truncamiento}$$

cometido al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = y + 3$, $y(0) = 1$.

14.14. Comprobar que en el método de Adams-Bashford de k pasos, el orden de consistencia del método es $p = k$ y que la constante de error C_{p+1} coincide con γ_k .

14.15. Comprobar que en el método de Adams-Moulton de k pasos, el orden de consistencia del método es $p = k + 1$. ¿Con qué coincide la constante de error C_{p+1} ?

14.16. Comprobar que el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (2f_{n+1} - 2f_n)$ no es convergente pues al aplicarlo a $y' = y$, $y(0) = 1$ no se obtiene un valor que se aproxime a la solución exacta. Estudiar si es consistente y calcular su orden de consistencia. Estudiar si es estable.

14.17. Determinar α_1 , α_0 y β para que el método

$$z_{n+2} + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \alpha_0 \cdot z_n = h \cdot (2f_{n+1} + \beta \cdot f_n)$$

tenga el mayor orden de consistencia posible. Estudiar la

convergencia del método. Si el método no fuera convergente, determinar α_1 , α_0 y β para que lo sea. Aplicarlo al problema $y' = 5y + x$, $y(1) = 0$ con una longitud de paso h y valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = h$, para obtener la solución aproximada en $x = 1 + 2h$.

(Solución: $p = 2$, con $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$ y $\beta = 0$. $z_2 = 12h^2$)

14.18. Aplicar el método de Adams-Bashforth de tres pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,1$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,2) \\ y_2(0,2) \end{pmatrix}$, utilizando como valores

iniciadores: $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los obtenidos mediante el método de

Euler. Calcular el error global cometido.

14.19. Analizar el orden de convergencia de los métodos siguientes utilizando el teorema de la primera barrera de Dahlquist.

a) El método: $z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$.

b) El método: $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$.

c) El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$.

d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$.

14.4. ESTABILIDAD ABSOLUTA Y ESTABILIDAD RELATIVA

La condición de raíz no es la única forma de estabilidad pertinente en la solución numérica de un problema de valor inicial. Se ha visto que la estabilidad está relacionada con la convergencia del método, por lo que, el valor obtenido mediante éste debe tender a la solución exacta cuando el tamaño de paso tiende a cero ($h \rightarrow 0$, $nh = x - x_0 = \text{constante}$). Pero al aplicar un método el tamaño de paso está fijado, no tiende a cero, y es conveniente saber a priori si dicho tamaño va a proporcionar un valor adecuado, por lo que es preciso considerar otras definiciones de estabilidad. En la valoración del comportamiento de un método numérico al aplicarlo a un problema de valor inicial, aunque el método sea convergente, y por tanto consistente y estable, es importante tener en cuenta que a pesar de que el valor aproximado que se obtiene debe tender a la solución exacta cuando el tamaño de paso tiende a cero, puede ocurrir que para que esto suceda el tamaño del paso tenga que ser muy pequeño, con lo que se necesitaría aplicar el método un número demasiado grande de veces, aumentarían los errores de redondeo y el coste podría ser excesivo.

Es por ello interesante estudiar la eficiencia de un método desde un punto de vista diferente: Estudiar su comportamiento para un valor fijado de h cuando n se hace cada vez más grande, es decir, cuando los valores que aproxima el método están muy alejados de la condición inicial. De esta forma se pueden conocer los valores h del tamaño de paso para los que el método se va a comportar adecuadamente, independientemente de su proximidad o lejanía a la condición inicial de partida.

En esta sección se estudian los conceptos de **estabilidad absoluta** y estabilidad relativa, utilizando el **polinomio de estabilidad absoluta** y sus raíces, que proporcionan los valores de tamaño de paso que garantizan el comportamiento adecuado del método para un problema de valor inicial dado.

El conjunto de valores h del tamaño de paso para los que un método proporciona buenas aproximaciones independientemente de su proximidad al punto de partida se puede obtener estudiando el comportamiento del método al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, cuya solución es bien conocida.

Definición 14.4.1:

Se denomina **ecuación de prueba** al problema de valor inicial: $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$.

La ecuación de prueba tiene la ventaja de que al ser un problema de

valor inicial muy sencillo de manejar, se estudia fácilmente el comportamiento de una fórmula numérica al aplicarla a ese problema. Pero además tiene un interés especial porque el comportamiento de un método frente a la ecuación de prueba se puede tomar como muestra del comportamiento que tendrá dicho método frente a un problema de valor inicial general $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, ya que el valor λ de la ecuación de prueba se puede considerar aproximadamente igual a la derivada parcial de f respecto a y en el punto (x_0, y_0) , como ocurría en el caso de los métodos de un paso.

14.4.1. Estabilidad absoluta

Se considera el método lineal multipaso convergente definido por la fórmula:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}.$$

Se aplica al problema de valor inicial $y' = \lambda \cdot y$, con $y(0) = y_0$, con un tamaño h del paso que se supondrá previamente fijado.

Se tiene entonces $\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j z_{n+j}$, es decir:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot z_{n+j} = 0 \quad (14.4.1)$$

El error de truncamiento se obtiene:

$$T_{n+k} = y_{n+k} - z_{n+k} = y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda \cdot y_{n+j} =$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j}$$

Teniendo en cuenta la expresión 14.4.1 vale 0, sustituyendo se tiene:

$$T_{n+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} + \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot z_{n+j} =$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j (y_{n+j} - z_{n+j}) - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j (y_{n+j} - z_{n+j}) \Rightarrow$$

$$T_{n+k} = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot (y_{n+j} - z_{n+j}).$$

Por simplificar, se supone ahora que el error de truncamiento es esencialmente constante en cada etapa, es decir $T_{n+k} = T$. Llamando $e_{n+j} = y_{n+j} - z_{n+j}$ y $\bar{h} = \lambda \cdot h$, se tiene la ecuación en diferencias en $\{e_{n+j}\}$

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot e_{n+j} = T.$$

La solución general de la ecuación en diferencias se puede expresar de la forma

$$e_n = \sum_{i=0}^k A \cdot \bar{r}_i^n + \text{solución particular},$$

siendo $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{h})$ tales que $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot \bar{r}_i^j = 0$, para $i = 1, \dots, k$.

Las raíces \bar{r}_i verifican que $\bar{r}_i \neq 1$, ya que si alguna de ellas fuera igual a uno, entonces $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) = 0$. Al ser el método convergente, se tiene

que $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, con lo que necesariamente $\sum_{j=0}^k \beta_j = 0$. Pero $\sum_{j=0}^k \beta_j =$

$\sum_{j=0}^k j \cdot \alpha_j = 0$. Por tanto el primer polinomio característico del método tendría a

1 como raíz doble, y el método, al no ser estable, no sería convergente.

Como $\bar{r}_i \neq 1$, la solución particular de la ecuación en diferencias $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot e_{n+j} = T$ es una constante C que verifica $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot C = T$, y como

$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, entonces:

$$-\sum_{j=0}^k \bar{h} \cdot \beta_j \cdot C = T \Rightarrow C = -\frac{T}{\bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j}.$$

La solución general se puede expresar por tanto de la forma:

$$e_n = \sum_{i=0}^k A_i \bar{r}_i^n - \frac{T}{h \sum_{j=0}^k \beta_j}.$$

Esta expresión permite conocer el comportamiento del error cuando el número de pasos crece. El crecimiento del error depende esencialmente del primer sumando, de manera que si una de las raíces \bar{r}_i tiene módulo mayor que uno, el error crece cuando n crece, mientras que si $|\bar{r}_i| < 1$ para $i = 1, \dots, k$, el error no crece por muy grande que sea n .

Definición 14.4.2:

Se denomina **polinomio de estabilidad absoluta** del método lineal multipaso al polinomio:

$$\pi(r, \bar{h}) = \pi(r, \lambda \cdot h) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot r^j = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot r^j$$

Para $h = 0$ el polinomio de estabilidad se reduce al primer polinomio de estabilidad o primer polinomio característico, $\pi(r, 0) = \rho(r)$. Las raíces del polinomio de estabilidad absoluta son funciones continuas de los coeficientes, y por tanto cada una de sus raíces tiende a una raíz del polinomio característico cuando h tiende a cero. Se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{r}_i(\bar{h}) = r_i.$$

Ya se comprobó que si el método lineal es consistente, $\rho(r)$ siempre tiene una raíz igual a uno a la que se denomina raíz principal. Si el método es estable esta raíz debe ser simple. Ahora bien,

Se llama **raíz principal del polinomio de estabilidad absoluta** a la raíz \bar{r}_i tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{r}_i(\bar{h}) = 1$. A esta raíz se la denominará en adelante \bar{r}_1 .

Definición 14.4.3:

Un método es **absolutamente estable** para un valor $\bar{h} = \lambda \cdot h$, si para ese valor \bar{h} las raíces del polinomio de estabilidad verifican que $|\bar{r}_i(\bar{h})| < 1$ para $i = 1, \dots, k$.

Definición 14.4.4:

Se denomina **intervalo de estabilidad absoluta** del método al conjunto de valores reales de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ para los que el método es absolutamente estable:

$$I = \{\bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathfrak{R}; |r_j(\lambda \cdot h)| < 1, \pi(r_j(\lambda \cdot h), \lambda \cdot h) = 0\}.$$

Aunque usualmente se utiliza esta denominación, se observa que no es totalmente correcta, en el sentido de que dicho conjunto de valores reales pueden no constituir un intervalo, sino que puede ser, por ejemplo, una unión de intervalos.

Se observa también que si el problema de valor inicial estudiado: $y' =$

$f(x, y)$ se supone definido en $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, es posible que tenga interés considerar que λ pueda tomar valores complejos, por lo que \bar{h} podría pertenecer al campo complejo. Este caso se estudia con detalle en la *sección 14.4.2* en la que analiza la estabilidad absoluta cuando el problema de valor inicial es un sistema lineal.

Por ello se define:

Definición 14.4.5:

Al conjunto de valores de $\bar{h} = \lambda \cdot h$, reales o complejos, que hacen que los módulos de las raíces del polinomio de estabilidad absoluta del método lineal multipaso sean menores que uno se le denomina **región de estabilidad absoluta**, A , del método:

$$A = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathbf{C}; |r_j(\bar{h})| < 1, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}$$

Por lo tanto la intersección de la región de estabilidad absoluta con el eje real es lo que antes se ha denominado **intervalo de estabilidad absoluta**.

En el ejemplo siguiente se observa que el error es inaceptable en todos los casos. Esto se debe a que $\lambda = -30$ y $h = 0,1$ por lo que $\bar{h} = -3$ que no pertenece al intervalo de estabilidad absoluta de ninguno de los tres métodos, como se comprobará en el *ejemplo 14.4.1*.

| | | | |
|---|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Resultados de aplicar el método de Euler, Runge-Kutta , y el método de Adams-Bashforth con tamaño de paso $h = 0,1$ a: $y' = -30y$, $y(0) = 1/3$, para aproximar la solución en $x = 1,5$. | | | |
| Exacto | Euler | Runge-Kutta | Adams |
| $9,54173 \times 10^{-21}$ | $-1,09225 \times 10^4$ | $3,95730 \times 10^5$ | $8,03840 \times 10^5$ |

Las ecuaciones con λ negativo, pero grande en magnitud, forman parte de un grupo especial de ecuaciones que se llaman ecuaciones diferenciales *stiff*. Su error de truncamiento puede ser satisfactoriamente pequeño para tamaños de paso muy pequeños, porque el valor absoluto de λ puede forzar a hacer muy pequeño el tamaño de paso para que $\lambda \cdot h$ esté en la región de estabilidad absoluta. Para estas ecuaciones diferenciales se deben elegir métodos implícitos con una amplia región de estabilidad (o un tamaño de paso muy pequeño).

| | | | |
|---|-----------------------------|------------------------|--------------------------------|
| Resultados de aplicar el método de Euler , y el método de Adams-Moulton con tamaño de paso $h = 0,5$ a: $y' = \lambda \cdot y + (1 - \lambda) \cdot \text{sen } x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 2$. | | | |
| λ | $\bar{h} = \lambda \cdot h$ | Error con Euler | Error con Adams-Moulton |
| -1 | -0,5 | -0,255 | -0,0113 |
| -10 | -5 | 6,9 | -0,00278 |
| -50 | -25 | 1880 | -0,000791 |

Se observa que el error al aplicar el método de Adams-Moulton es siempre pequeño, mientras que al aplicar el método de Euler, es aceptable

cuando $\bar{h} = -0,5$, pero inaceptable en el resto de los casos. Esto se debe, de nuevo, a que, como se comprobará en el *ejemplo 14.4.1* el intervalo de estabilidad absoluta del método de Adams-Moulton es $(-\infty, 0)$, mientras que el del método de Euler es $(-2, 0)$.

14.4.2. Estabilidad relativa

Otro concepto de interés en el estudio de la estabilidad de los métodos multipaso es el de **estabilidad relativa**. En ocasiones, aunque el error cometido sea grande, puede ocurrir que la solución aproximada obtenida sea admisible, por ejemplo si la solución crece en valor absoluto y el error relativo es aceptable, con lo cual el método podría ser válido.

Definición 14.4.6:

Un método es **relativamente estable** para un valor $\bar{h} = \lambda \cdot h$, si para ese valor \bar{h} las raíces del polinomio de estabilidad verifican que $|\bar{r}_i| < |\bar{r}_1|$, para $i = 2, \dots, k$, siendo \bar{r}_1 la raíz principal del polinomio de estabilidad absoluta del método.

Definición 14.4.7:

Se denomina **región de estabilidad relativa**, R , del método al conjunto de valores de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ que hacen que el método sea relativamente estable:

$$R = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathbf{C}; |r_j(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|, j = 2, \dots, k, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = \pi(r_1(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}$$

Definición 14.4.8:

Se denomina **intervalo de estabilidad relativa** del método al conjunto de valores reales de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ para los que el método es relativamente estable:

$$I = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathfrak{R}; |r_j(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|, j: 2 \dots k, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = \pi(r_1(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}.$$

Es por tanto la intersección de la región de estabilidad relativa con el eje real. Se observa que, como en el caso del intervalo de estabilidad relativa, puede no ser un intervalo, sino estar formado por una unión de intervalos.

14.4.3. Estabilidad absoluta de los métodos lineales multipaso en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ya se vio en el *capítulo 12* que para estudiar un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales, éste se podía linealizar, y estudiar el sistema lineal asociado: $y' = A(x) \cdot y + b(x)$, que a su vez se puede aproximar, de manera similar al caso escalar, por un sistema de la forma $y' = A \cdot y$.

Se considera ahora un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias $y' = A \cdot y$, donde A es una matriz $m \times m$ de coeficientes constantes, con m autovalores λ_s distintos entre sí, para $s = 1, \dots, m$.

Al aplicarle la fórmula numérica:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$$

se tiene:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j A) \cdot z_{n+j} = 0, \quad (14.4.1)$$

donde I representa la matriz identidad y z_{n+j} son vectores.

Sea $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con $|P| \neq 0$ y D una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores λ_s . Al sustituir en la ecuación se tiene:

$$P \cdot \sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j D) \cdot P^{-1} \cdot z_{n+j} = 0 \Rightarrow P \cdot \sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j D) \cdot z^*_{n+j} = 0$$

donde $z^*_{n+j} = P^{-1} \cdot z_{n+j}$. Al ser D una matriz diagonal, la expresión anterior da lugar a las m ecuaciones escalares:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - h \cdot \beta_j \lambda_s) \cdot z^*_{n+j} = 0, \quad s = 1, \dots, m.$$

Llamando $h \cdot \lambda_s = \bar{h}$ cada una de las ecuaciones anteriores se convierte en una ecuación similar a la del caso escalar. El problema es, como en el caso escalar, buscar los valores de \bar{h} para los que las raíces \bar{r}_i del polinomio de estabilidad del método tengan módulo menor que 1.

Ahora los valores de los λ_s pueden ser complejos, con lo cual \bar{h} puede

también tomar valores complejos; tiene entonces sentido hablar de región de estabilidad absoluta asociada al método numérico, contenida en el plano complejo, cuya intersección con el eje real debe coincidir con el intervalo de estabilidad absoluta del método.

En el *ejemplo 14.4.3* se muestra una fórmula que permite calcular en la práctica la frontera de la región de estabilidad absoluta de un método numérico. Una vez conocida la frontera, se toma como región de estabilidad absoluta del método la que contiene al intervalo de estabilidad absoluta.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.4.1: Estudiar el intervalo de estabilidad absoluta de:

- a) El método de Euler
 - b) El método de Adams-Bashforth de dos pasos
 - c) El método de Adams-Moulton de dos pasos
- a) El método de Euler es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$$

que al sustituir la ecuación de prueba $y' = \lambda y$ se obtiene que: $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h}$ y al imponer que $|r(\bar{h})| < 1 \Rightarrow |1 + \bar{h}| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \bar{h} < 1 \Rightarrow -2 < \bar{h} < 0$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

- b) El método de Adams-Bashforth de dos pasos es:

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

por lo que su polinomio de estabilidad absoluta es:

$$\pi(r, \bar{h}) = r^2 - \left(1 + \frac{3}{2}\bar{h}\right) \cdot r + \frac{1}{2}\bar{h} \text{ de raíces } r_j(\bar{h}) = \frac{1 + \frac{3}{2}\bar{h} \pm \sqrt{\frac{9}{4}\bar{h}^2 + \bar{h} + 1}}{2}$$

siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo. Se verifica que $|r_1(\bar{h})| < 1$ si $\bar{h} < 0$ y $|r_2(\bar{h})| < 1$ si $-1 < \bar{h}$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es la intersección de ambos: $(-\infty, 0) \cap (-1, +\infty) = (-1, 0)$.

c) El método de Adams-Moulton de dos pasos es:

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{12} \cdot (5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

por lo que su polinomio de estabilidad absoluta es:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{5}{12}\bar{h}\right) \cdot r^2 - \left(1 + \frac{8}{12}\bar{h}\right) \cdot r + \frac{1}{12}\bar{h}$$

cuyas raíces verifican que su módulo es menor que 1 si $\bar{h} < 0$; el intervalo de estabilidad absoluta es pues: $(-\infty, 0)$.

En este ejemplo se comprueba que para el método de *Euler* el intervalo de estabilidad absoluta es $(-2, 0)$. En general, a igual orden de consistencia, es preferible un método con una región de estabilidad absoluta mayor. Por

esta razón los métodos de *Adams-Moulton* son preferibles a los de *Adams-Bashforth* pues los primeros tienen una región de estabilidad absoluta mayor. Por ejemplo, el método de *Adams-Bashforth* de orden 2 tiene como intervalo de estabilidad absoluta a $(-1, 0)$ mientras que el método de *Adams-Moulton* del mismo orden lo tiene de $(-\infty, 0)$.

Ejemplo 14.4.2: Estudiar el intervalo de estabilidad absoluta y relativa de los siguientes métodos:

a) El método: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$

b) El método: $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$

c) El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$

d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$

a) Al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$ a la ecuación de

prueba se obtiene:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}\right) \cdot z_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}\right) \cdot z_n$$

y el polinomio de estabilidad absoluta:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}\right) \cdot r - \left(1 + \frac{1}{2}\bar{h}\right) \Rightarrow \pi(r, \bar{h}) = 0 \text{ si } r = \frac{1 + \frac{\bar{h}}{2}}{1 - \frac{\bar{h}}{2}}.$$

El método es absolutamente estable si $\bar{h} \in (-\infty, 0)$. Como sólo existe la raíz principal la estabilidad relativa coincide con la estabilidad absoluta.

En los métodos de un paso coinciden la región de estabilidad absoluta con la región de estabilidad relativa.

- b) Al aplicar el método $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$ de dos pasos a la ecuación de prueba da como resultado el polinomio de estabilidad absoluta: $\pi(r, \bar{h}) = r^2 - 4r + (3 + 2\bar{h})$ de raíces: $r_j(\bar{h}) = 2 \pm \sqrt{1 - 2\bar{h}}$ siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo negativo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo positivo. Para todo valor de \bar{h} la raíz parásita tiene su módulo mayor que 1, luego los intervalos de estabilidad absoluta y de estabilidad relativa son el conjunto vacío. El método no es estable pues las raíces del polinomio de estabilidad son 1 y 3, y esta última tiene su módulo mayor que 1.
- c) Al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ a la ecuación de prueba se obtiene el polinomio de estabilidad absoluta:

$$\pi(r, \bar{h}) = r^2 - 2\bar{h} \cdot r - 1 \text{ de raíces: } r_j(\bar{h}) = \bar{h} \pm \sqrt{\bar{h}^2 + 1} \text{ siendo la}$$

raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo. Si $\bar{h} > 0$ entonces $|r_1(\bar{h})| > 1$ y si $\bar{h} < 0$ entonces $|r_2(\bar{h})| > 1$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es el conjunto vacío, ya que para todo valor de \bar{h} una de las dos raíces tiene su módulo mayor que 1.

Para estudiar la estabilidad relativa se buscan los valores de \bar{h} donde $|r_2(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|$ dibujando la gráfica de las funciones y se observa que se verifica si $\bar{h} > 0$, por lo que para $\bar{h} > 0$, hay estabilidad relativa siendo el intervalo de estabilidad relativa $(0, +\infty)$.

- d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ tiene como polinomio de estabilidad absoluta:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{1}{3}\bar{h}\right) \cdot r^2 - \frac{4}{3}\bar{h}r - \left(1 + \frac{1}{3}\bar{h}\right)$$

de raíces: $r_j(\bar{h}) = \frac{2}{3}\bar{h} \pm \sqrt{\frac{1}{3}\bar{h}^2 + 1}$ siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo.

Para todo valor de \bar{h} una de las dos raíces tiene su módulo mayor que 1, por lo que el método no es absolutamente

estable para ningún \bar{h} y la región de estabilidad absoluta es el conjunto vacío.

Para estudiar la estabilidad relativa se buscan los valores de \bar{h} donde se verifica que $|r_2(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|$ dibujando la gráfica de las funciones, y se observa que se verifica si $\bar{h} > 0$, por lo que para $\bar{h} > 0$ hay estabilidad relativa siendo el intervalo de estabilidad relativa $(0, +\infty)$.

Ejemplo 14.4.3: Demostrar que los puntos, \bar{h}^* , de la frontera de la región de estabilidad absoluta del método:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}),$$

verifican que:

$$\bar{h}^* = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j}.$$

El polinomio de estabilidad absoluta de dicho método es:

$$\pi(r, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot r(\bar{h})^j$$

y se buscan los valores de \bar{h} que hacen que las raíces $r_j(\bar{h})$ sean tales que

verifiquen: $|r_j(\bar{h})| < 1$.

Los puntos de la frontera, \bar{h}^* , verificarán que $|r_j(\bar{h}^*)| = 1$, por lo que $r_j(\bar{h}^*) = m \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta}$ y al sustituir en el polinomio e igualar a cero si se sustituye \bar{h} por \bar{h}^* , se obtiene:

$$\pi(r, \bar{h}^*) = 0 = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h}^* \cdot \beta_j) \cdot (e^{i\theta})^j.$$

Despejando se tiene la expresión pedida:
$$\bar{h}^* = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j}.$$

Ejemplo 14.4.4: Encontrar la región de estabilidad absoluta del método de Euler.

El método de Euler es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$$

por lo que los puntos de la frontera de su región de estabilidad absoluta

verifican que:
$$\bar{h}^* = x + i \cdot y = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j} = \frac{e^{i\theta} - 1}{1} = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta - 1 \Rightarrow x =$$

$\cos \theta - 1$; $y = \text{sen } \theta$. Eliminando el ángulo se tiene: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ por lo que

la frontera de la región de estabilidad absoluta es la circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 1. En el *ejemplo 14.4.1* se comprobó que el intervalo de estabilidad absoluta de dicho método es $(-2, 0)$, por lo que la región de estabilidad absoluta es el interior de dicha circunferencia, siendo el intervalo de estabilidad absoluta su intersección con el eje real.

Por tanto la región de estabilidad absoluta del método de Euler es:

$$A = \{\bar{h} = x + i \cdot y \in \mathbf{C}; (x + 1)^2 + y^2 < 1\} = \{\bar{h} \in \mathbf{C}; |\bar{h} + 1| < 1\}.$$

Ejercicios

14.20. Encontrar la región de estabilidad absoluta del método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}.$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1\}$).

14.21. Determinar los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{2}{3}z_{n+1} - \frac{1}{3}z_n = h(f_{n+1} + \frac{1}{3}f_n)$$

14.22. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar que al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = h \cdot (-3f_{n+1} + 5f_n)$ al problema $y' = 3y + x^2$, $y(0) = 1$, se tiene estabilidad absoluta.

14.23. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar

que al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = h \cdot (-3f_{n+1} + 5f_n)$ al problema $y' = 3y + x^2$, $y(0) = 1$, se tiene estabilidad relativa.

14.24. Determinar los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{4}{3}z_{n+1} + \frac{1}{3}z_n = \frac{2}{3}hf_n$$

14.25. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar

que al aplicar el método $z_{n+2} - \frac{4}{3}z_{n+1} + \frac{1}{3}z_n = \frac{2}{3}h \cdot f_n$ al problema

$y' = -4y + e^{x^2}$, $y(0) = 0$, $x > 0$, se tiene estabilidad absoluta.

(Solución: Intervalo de estabilidad absoluta: $[-\frac{1}{6}, 0)$, $\lambda = -4 \Rightarrow h \in (0, \frac{1}{24})$.)

14.5. OTROS MÉTODOS DE k PASOS

Se han utilizado otras fórmulas y otros métodos numéricos lineales de k pasos, como los métodos de *Nyström*, los de *Milne-Simpson* y los métodos de *Milne*. Estos métodos actualmente están en desuso debido a los problemas de estabilidad que plantean. Otros métodos que se estudian en esta sección son los métodos de predicción-corrección, y se comenta algo sobre métodos de paso variable o los métodos adecuados para problemas

stiff.

14.5.1. Métodos de Nyström y de Milne-Simpson

Los métodos de Nyström y Milne-Simpson son fórmulas de k pasos que tienen como primer polinomio característico $\rho(r) = r^k - r^{k-2}$, es decir, son de la forma:

$$z_{n+k} - z_{n+k-2} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}.$$

Las fórmulas que siguen son ejemplos de ellos.

Métodos de *Nyström*:

El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ (Regla del punto medio).

El método: $z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (7f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n)$

... ..

Métodos de *Milne-Simpson*:

El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+2}$

El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3} (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ (Regla de Simpson)

El método: $z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n)$

... ..

Los métodos de Nyström son explícitos mientras que los métodos de Milne-Simpson son implícitos. Se construyen de forma similar a los métodos de Adams, integrando un polinomio interpolador, pero ahora el incremento que se utiliza es $2h$.

14.5.2. Métodos predictor-corrector

Los métodos implícitos tienen la dificultad de tener que resolver una ecuación implícita de la forma: $z_{n+k} = h \cdot \beta_k \cdot f(x_{n+k}, z_{n+k}) + g$ donde g es una función previamente computada. Si la fórmula es no lineal es necesario evaluar z_{n+k} mediante un método aproximado. Si la función f es lipschiziana respecto de la segunda variable y la constante de *Lipschitz* L es moderada se suele utilizar el método del punto fijo, y si la constante de Lipschitz es muy grande, lo que ocurre con los problemas “*stiff*”, se suele utilizar el método de Newton.

Ya se estudió en el capítulo anterior algún método implícito como: $z_{n+1} = z_n + (h/2) \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1}))$ cuyo error de truncamiento es del orden de $O(h^3)$, donde se observa que z_{n+1} aparece en el segundo miembro de la igualdad y se debe despejar, lo que usualmente puede ser difícil, con lo que se aproxima, bien mediante iteraciones del punto fijo, o haciendo una predicción por medio de la fórmula de *Euler*.

Para subsanar la dificultad de evaluar z_{n+k} se usan los métodos de

predicción-corrección. La idea del par predictor-corrector se basa en la observación de que en un método implícito se deben resolver en cada paso un sistema de ecuaciones algebraicas. Si para resolver dicho sistema se utiliza el teorema de la iteración del punto fijo basta tomar h suficientemente pequeño para garantizar la convergencia cualesquiera que sean las condiciones iniciales. Pero sin embargo se pueden ahorrar un buen número de iteraciones tomando un valor próximo a la solución, por lo que parece adecuado evitar la iteración y tomar en su lugar el valor obtenido con el método explícito.

Los métodos de **predicción-corrección** combinan en cada paso una fórmula explícita para *predecir* un valor de la solución y una fórmula implícita para *corregirlo*.

Los métodos de **predicción-corrección** mas utilizados son los métodos de *Adams-Bashforth-Moulton* (ABM). Se usan simultáneamente dos fórmulas, generalmente con el mismo orden de convergencia, una explícita o de tipo abierto que se llama **predictora**, y otra implícita o de tipo cerrado que se llama **correctora**. La fórmula correctora suele ser más precisa que la predictora, aunque se elijan con error de truncamiento del mismo orden. Por ejemplo con la fórmula de *Adams-Moulton* de tres pasos como correctora se utiliza como predictora la fórmula de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos. Ambas fórmulas son convergentes de orden cuatro.

Para obtener el valor aproximado z_{n+1} a partir de un valor z_n calculado

previamente, mediante un par predictor-corrector, se procede de la siguiente forma:

- Se *predice* un valor $z_{n+1}^{[0]}$, obtenido aplicando la fórmula explícita (P).
- Se *evalúa* la función: $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$ (E).
- Se *corrige* el valor $z_{n+1}^{[0]}$ mediante la fórmula implícita, obteniéndose una nueva aproximación $z_{n+1}^{[1]}$ (C).
- Se *evalúa* de nuevo la función: $f_{n+1}^{[1]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[1]})$ (E).

Se puede tomar $z_{n+1} = z_{n+1}^{[1]}$ como valor definitivo de la etapa $n + 1$ y comenzar de nuevo el proceso para obtener el valor de z_{n+2} a partir de z_{n+1} . Este proceso se suele denotar como PECE, y es la forma mas utilizada en los métodos predictor-corrector. Pero también se puede mejorar el valor $z_{n+1}^{[1]}$ antes de pasar a la etapa siguiente, añadiendo un número determinado de veces, m , los dos últimos pasos

- Se *corrige* el valor $z_{n+1}^{[1]}$ mediante la fórmula implícita, obteniéndose una nueva aproximación $z_{n+1}^{[2]}$ (C).
- Se *evalúa* de nuevo la función: $f_{n+1}^{[2]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[2]})$ (E).

El proceso se denota en este caso como PE(CE)^m.

Observación:

La razón por la que se suelen tomar dos métodos de Adams con el mismo orden de convergencia es que en esta situación los cálculos se simplifican. En efecto, si el orden de convergencia de los métodos es $p = k$, el valor de $z_{n+1}^{[0]}$ se obtiene a partir de la fórmula explícita de Adams-Bashforth de k pasos: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n$, mientras que la fórmula implícita es la de Adams-Moulton de $k - 1$ pasos, que se puede expresar de la forma:

$$z_{n+1} = z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-2} \cdot \nabla^{k-2}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^{k-1} f_{n+1} =$$

$$z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \dots + \gamma_{k-2} \cdot \nabla^{k-2} + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot (\nabla^{k-1} f_{n+1} - \nabla^{k-1} f_n) =$$

$$z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}.$$

Se tiene entonces que:

$$z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1},$$

con lo que se simplifica el proceso.

El orden de consistencia de un par predictor-corrector implementado como PE(CE)^m depende del orden de consistencia de los métodos que forman el par y del valor de m . En este sentido se puede demostrar que si el orden de convergencia del método predictor es mayor o igual que el del método corrector, el par predictor-corrector tiene el mismo orden de convergencia y el mismo error de truncamiento que la fórmula correctora.

El error de truncamiento de un método lineal multipaso con orden de

convergencia p viene dado por la expresión:

$$T_{n+k} = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}).$$

La estimación del error de truncamiento presenta la dificultad de tener que estimar numéricamente $y^{(p+1)}(x_n)$. Los métodos de predicción corrección, en el caso en que ambos métodos (implícito y explícito) sean del mismo orden tienen la ventaja adicional de que se puede estimar la parte principal del error de truncamiento sin necesidad de calcular $y^{(p+1)}(x_n)$ mediante la estimación de *Milne*. La idea es la siguiente.

Se considera un método predictor-corrector de la forma PE(CE)^m. Sean T_{n+k}^* y T_{n+k} los errores de truncamiento correspondientes a los métodos explícito e implícito, respectivamente, que tienen un orden de convergencia p . Se tiene entonces:

$$T_{n+k}^* = C_{p+1}^* \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) = y(x_{n+k}) - \bar{z}_{n+k}^{[0]}.$$

$$T_{n+k} = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) = y(x_{n+k}) - \bar{z}_{n+k}^{[m]}.$$

Las expresiones $\bar{z}_{n+k}^{[0]}$ y $\bar{z}_{n+k}^{[m]}$ representan los valores obtenidos al aplicar las correspondientes fórmulas numéricas en el paso $n + k$, suponiendo que los valores de partida son exactos. Restando ambas expresiones se tiene:

$$(C_{p+1}^* - C_{p+1}) \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) = \bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]} + O(h^{p+2}).$$

Si ahora se despeja :

$$h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) = \frac{1}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} (\bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]}) + O(h^{p+2}),$$

se tiene así una estimación de $h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n)$. El error de truncamiento del par predictor-corrector, que coincide con el de la fórmula correctora se puede expresar entonces de la forma:

$$T_{n+k} = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} (\bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]}) + O(h^{p+2}).$$

Si se comparan los métodos *Runge-Kutta* con los métodos multipaso se observa que los métodos *Runge-Kutta* consiguen mejorar la aproximación eliminando la linealidad. En ellos es difícil saber cuando se debe cambiar la longitud de paso pues la estructura del error de truncamiento es complicada, pero sin embargo es fácil cambiarlo. Mientras que en los métodos lineales multipaso es fácil controlar el error de truncamiento, y por tanto decidir cuando se debe cambiar el paso, y sin embargo es complicado cambiarlo.

Los métodos de predicción-corrección tienen pues la ventaja fundamental de que es muy sencillo estimar el error de truncamiento, lo que se puede utilizar para ajustar el tamaño del paso. Un inconveniente es que cualquier cambio en el tamaño del paso h conlleva un coste en el número de cálculos. Pero existen estrategias de paso variable que, almacenando valores previos de la función, resultan eficientes.

14.5.3. Métodos multipaso de tamaño de paso variable

Existen algoritmos que utilizan una fórmula de *Adams-Moulton* como correctora y otra de *Adams-Bashforth* como predictora y calculan una estimación del error, que cuando indica que el tamaño de paso es demasiado grande, se reemplaza este por la mitad y si el error es demasiado pequeño se reemplaza por un tamaño de paso doble, diciéndose entonces que se utiliza un **método de paso variable**. La utilización de métodos de predicción-corrección de paso variable requiere tener un buen método para obtener los valores iniciadores, y métodos para reducir a la mitad el intervalo o para doblarlo, lo que aumenta la complejidad de computación.

Un algoritmo predictor-corrector de *Adams* con tamaño de paso variable se encuentra en *Burden&Faires*⁷. Una mayor información sobre algoritmos de paso variable para estos métodos se puede obtener en el libro de *J. D. Lambert*⁸.

Los métodos lineales multipaso pueden formularse mediante matrices definidas por columnas, y las relaciones entre las columnas se conocen como forma de *Nordsieck*, en la que el cambio de paso es sencillo, no así el cambio de orden.

Es posible también introducir otros algoritmos que permitan **modificar**

⁷ Burden, R. L.; Faires, J. D. (1996): *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericano. (2ª edición). 275-277.

⁸ J. D. Lambert, *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*, J. Wiley, 1991.

la longitud de paso, lo que es un ingrediente clave en la eficiencia del método. Mediante la extrapolación de *Richardson* (estudiada en el capítulo anterior) se puede calcular una cantidad que permite obtener una aproximación de un orden mayor, y que se puede utilizar para ajustar la longitud de paso. Pero es un procedimiento costoso, con lo que pueden buscarse otras alternativas de razonamiento.

La experiencia demuestra que no se deben efectuar cambios de paso con excesiva frecuencia, siendo aconsejable modificar el tamaño de paso tras al menos $k - 1$ pasos con un mismo valor h .

14.5.4. Problemas “*stiff*”

Existen problemas de valor inicial de un determinado tipo, los **problemas “*stiff*” o sistemas rígidos**, para los que muchos métodos multipaso con buenas propiedades de convergencia, como los métodos de *Adams*, son en general ineficaces. Existen distintas definiciones para describir este tipo de problemas.

Lambert⁹, trata sobre el fenómeno de la “*stiffness*”, ya que en su opinión es mas un fenómeno que una propiedad, en el sentido de que no se puede describir en términos matemáticos precisos, y presenta diferentes definiciones en función de los distintos aspectos cualitativos que muestra un problema *stiff*.

⁹ J. D. Lambert, Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem, J. Wiley, 1991.

En general, se puede decir que se engloban bajo esta denominación aquellos problemas cuyas soluciones experimentan cambios bruscos en intervalos de pequeña longitud, o aquellos en los que la solución exacta del problema consta de un término estacionario que no varía significativamente con el tiempo, junto con un término transitorio que decaiga rápidamente a cero.

Estos problemas aparecen en diversas situaciones de interés como en la cinética química con reacciones muy rápidas, reacciones nucleares o fotodisociación, en circuitos eléctricos con los transistores de alta velocidad y en sistemas amortiguados de resortes.

Para la resolución numérica de estos métodos se requieren unos métodos lineales de k pasos implícitos específicos, que se conocen como **métodos de diferenciación regresiva** o métodos **BDF**, y son tales que su segundo polinomio característico es de la forma $\sigma(r) = \beta_k r^k$, por lo que tienen

la forma:
$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h \beta_k f_{n+k}.$$
 Los coeficientes α_j y el coeficiente β_k se

deducen partiendo del polinomio interpolador $P_k(x)$ que pase por $(x_n, z_n), \dots, (x_{n+k}, z_{n+k})$ e imponiendo que $P'_k(x_{n+k}) = f(x_{n+k}, z_{n+k})$. Presentan la ventaja del tamaño de su región de estabilidad absoluta. Se utilizan siempre métodos de orden a lo sumo seis, ya que en éstos la región de estabilidad absoluta contiene a todo el semieje real negativo. La idea de predictor-corrector aquí no es adecuada, por lo que se usa el método de *Newton* para obtener las

sucesivas aproximaciones de z_{n+1} .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.5.1: Utilizar el método de Adams-Bashforth de dos pasos como predictor y el de Adams-Moulton de un paso como corrector, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar el valor $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Utilizar las fórmulas de dichos métodos

$$a) z_{n+1}^{[0]} = z_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}); z_{n+1}^{[1]} = z_n + \frac{h}{2}(f_{n+1}^{[0]} + f_n).$$

b) Resolver el problema utilizando las fórmulas de dichos métodos dadas mediante las tablas de diferencias regresivas: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + h(\nabla^0 + \frac{1}{2}\nabla^1)f_n$; $z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2}\nabla^2 f_{n+1}$.

a) Se utiliza el método de Adams-Bashforth de dos pasos como predictor: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (3f_n - f_{n-1})$. Se denomina $f_{n+j}^{[0]} = f(x_{n+j}, z_{n+j}^{[0]})$. Se utiliza el método de Adams-Moulton de un paso como corrector: $z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2}\nabla^2 f_{n+1}$.

Se calculan los valores iniciadores usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} k_1) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

$$z^{[0]}_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0) \text{ con } f(x, z) = x + z - 1, f_0 = f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0; f_1 = f(x_1, z_1) = f(0,2, 1,0214) = 0,2214 \Rightarrow z^{[0]}_2 = 1,0214 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,2214 - 0) = 1,08782 \text{ que es el valor predictor.}$$

$$f^{[0]}_2 = f(x_2, z^{[0]}_2) = f(0,4, 1,08782) = 0,4 + 1,08782 - 1 = 0,48782.$$

Utilizando el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z^{[1]}_2 = z_1 + \frac{h}{2}(f^{[0]}_2 + f_1) = 1,0214 + 0,1 \cdot (0,48782 + 0,2214) = 1,092322.$$

$$f^{[1]}_2 = f(x_2, z^{[1]}_2) = f(0,4, 1,092322) = 0,492322.$$

Se repite el proceso:

$$z^{[0]}_3 = z_2 + \frac{h}{2} \cdot (3f_2 - f_1) = 1,092322 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,492322 - 0,2214) = 1,2178786.$$

$$f^{[0]}_3 = f(x_3, z^{[0]}_3) = f(0,6, 1,2178786) = 0,8178786.$$

$$z^{[1]}_3 = z^{[1]}_2 + \frac{h}{2} \cdot (f^{[0]}_3 + f^{[1]}_2) = 1,092322 + 0,1 \cdot (0,8178786 + 0,492322) = 1,22334206.$$

$$f^{[1]}_3 = f(x_3, z^{[1]}_3) = f(0,6, 1,22334206) = 0,82334206.$$

Se repite el proceso:

$$z^{[0]}_4 = z^{[1]}_3 + \frac{h}{2} \cdot (3f^{[1]}_3 - f^{[1]}_2) = 1,22334206 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,82334206 - 0,492322) = 1,421112478.$$

$$f^{[0]}_4 = f(x_3, z^{[0]}_4) = f(0,8, 1,421112478) = 1,221112478.$$

$$z^{[1]}_4 = z^{[1]}_3 + \frac{h}{2} (f^{[0]}_4 + f^{[1]}_3) = 1,22334206 + 0,1 \cdot (1,221112478 + 0,82334206) = \mathbf{1,4277875138} = z(0,8).$$

b) Utilizar las fórmulas de dichos métodos dadas mediante las tablas de diferencias regresivas:

$$z^{[0]}_{n+1} = z^{[1]}_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f^{[1]}_n;$$

$$z^{[1]}_{n+1} = z^{[0]}_{n+1} + \frac{1}{2} \nabla^2 f^{[0]}_{n+1}.$$

La forma usual de organizar estos cálculos es utilizando una hoja de cálculo, con lo que es posible simplificar el proceso, de forma similar al ejemplo 14.2.4.

Al utilizar las fórmulas:

$$z^{[0]}_{n+1} = z^{[1]}_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f^{[1]}_n;$$

$$z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2} \nabla^2 f_{n+1}^{[0]}$$

se obtiene:

| n | $x_n = x_0 + h \cdot n$ | $z_n^{[0]}$ | $f_n^{[0]}$ | $z_n^{[1]}$ | $f_n^{[1]}$ |
|-----|-------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0,2 | 1,0214 | 0,2214 | 1,0214 | 0,2214 |
| 2 | 0,4 | 1,08782 | 0,48782 | 1,092322 | 0,492322 |
| 3 | 0,6 | 1,2178786 | 0,8178786 | 1,22334206 | 1,22334206 |
| 4 | 0,8 | 1,421112478 | 1,221112478 | 1,42971758 | 1,42778714 |

Para obtener las diferencias que se utilizan en las fórmulas se construyen las siguientes tablas:

| | $f_n^{[0]}$ | $\nabla^1 f_n^{[0]}$ | $\nabla^2 f_n^{[0]}$ |
|-------------|-------------|----------------------|--|
| $f_0^{[0]}$ | 0 | | |
| $f_1^{[0]}$ | 0,2214 | 0,2214 | |
| $f_2^{[0]}$ | 0,48782 | 0,26642 | 0,04502 = $\nabla^2 f_2^{[0]}$ |

$$z_2^{[1]} = z_2^{[0]} + \frac{1}{2} \nabla^2 f_2^{[0]} = 1,08782 + \frac{1}{2} 0,04502 = 1,092322.$$

| | $\nabla^0 f_n^{[1]}$ | $\nabla^1 f_n^{[1]}$ | $\nabla^2 f_n^{[1]}$ |
|-------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $f_0^{[1]}$ | 0 | | |
| $f_1^{[1]}$ | 0,2214 | 0,2214 | |
| $f_2^{[1]}$ | 0,492322 | 0,270922 | 0,049522 |

$$z_3^{[0]} = z_2^{[1]} + h(\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_2^{[1]} = 1,092322 + 0,2(0,492322 + \frac{1}{2} 0,270922)$$

= 1,2178786.

| | $\nabla^0 f_n$ | $\nabla^1 f_n$ | $\nabla^2 f_n$ |
|-------------|----------------|----------------|--|
| $f_0^{[0]}$ | 0 | | |
| $f_1^{[0]}$ | 0,2214 | 0,2214 | |
| $f_2^{[1]}$ | 0,492322 | 0,270922 | 0,049522 |
| $f_3^{[0]}$ | 0,8178786 | 0,3255566 | 0,0546346 = $\nabla^2 f_3^{[0]}$ |

$$z^{[1]}_3 = z^{[0]}_3 + \frac{1}{2} \nabla^2 f^{[0]}_3 = 1,2178786 + \frac{1}{2} 0,0546346 = 1,22334206$$

| | $\nabla^0 f_n$ | $\nabla^1 f_n$ | $\nabla^2 f_n$ |
|-------------|---|---|----------------|
| $f^{[0]}_0$ | 0 | | |
| $f^{[0]}_1$ | 0,2214 | 0,2214 | |
| $f^{[1]}_2$ | 0,492322 | 0,270922 | 0,049522 |
| $f^{[1]}_3$ | 0,82334206 = $\nabla^0 f^{[1]}_3$ | 0,33102006 = $\nabla^1 f^{[1]}_3$ | 0,06009806 |

$$z^{[0]}_4 = z^{[1]}_3 + h(\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f^{[1]}_3 = 1,22334206 + 0,2(0,82334206 +$$

$$\frac{1}{2} 0,33102006) = 1,421112478.$$

| | $\nabla^0 f_n$ | $\nabla^1 f_n$ | $\nabla^2 f_n$ |
|-------------|----------------|----------------|---|
| $f^{[0]}_0$ | 0 | | |
| $f^{[0]}_1$ | 0,2214 | 0,2214 | |
| $f^{[1]}_2$ | 0,492322 | 0,270922 | 0,049522 |
| $f^{[1]}_3$ | 0,82334206 | 0,33102006 | 0,06009806 |
| $f^{[0]}_4$ | 1,22111248 | 0,39777042 | 0,06675036 = $\nabla^2 f^{[0]}_4$ |

$$z^{[1]}_4 = z^{[0]}_4 + \frac{1}{2} \nabla^2 f^{[0]}_4 = 1,421112478 + \frac{1}{2} 0,06675036 = 1,42971758.$$

Ejemplo 14.5.2: Utilizar el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como predictor y el de Adams-Moulton de tres pasos como corrector, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Calcular el error global.

Se utiliza el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como

predictor: $z^{[0]}_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24} (55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$. Se denomina $f^{[0]}_{n+j}$
 $= f(x_{n+j}, z^{[0]}_{n+j})$.

Se utiliza el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24} (9f_{n+3}^{[0]} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n).$$

Se calculan los valores iniciadores usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} k_1) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } x_1 = 0,2, k_1 = f(x_1, z_1) = 0,2214; k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, z_1 + \frac{h}{2} k_1) = 0,34354; k_3 = 0,355754; k_4 = 0,4925508 \Rightarrow z_2 = 1,09181796.$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } x_2 = 0,4, k_1 = f(x_2, z_2) = 0,49181796; k_2 = f(x_2 + \frac{h}{2}, z_2 + \frac{h}{2} k_1) = 0,640999756; k_3 = 0,6559179356; k_4 = 0,82300154712 \Rightarrow z_3 = 1,222106456.$$

$$z_4^{[0]} = z_3 + \frac{h}{24} (55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \text{ con } f(x, z) = x + z - 1, f_0 = f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0; f_1 = f(x_1, z_1) = f(0,2, 1,0214) = 0,2214; f_2 = f(x_2, z_2) = f(0,4, 1,09181796) = 0,49181796; f_3 = f(x_3, z_3) = f(0,6, 1,222106456) = 0,6 + 1,222106456 - 1 = 0,822106456 \Rightarrow z_4^{[0]} = 1,42535975 \text{ que es el valor}$$

predictor.

$$f_4^{[0]} = f(x_4, z_4^{[0]}) = f(0,8, 1,42535975) = 0,8 + 1,42535975 - 1 = 1,22535975.$$

Utilizando el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z_4^{[1]} = z_3 + \frac{h}{24} (9f_4^{[0]} + 19f_3 - 5f_2 + f_1) = 1,42552788 = z(0,8).$$

La solución exacta es $y(0,8) = e^{0,8} - 0,8 = 1,42554093$.

El error global:

$$e(0,2) = y(0,8) - z(0,8) = 1,42554093 - 1,42552788 = 0,00001305.$$

Ejercicios

- 14.26. Utilizar el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como predictor y el de Adams-Moulton de tres pasos como corrector, un tamaño de paso $h = 0,1$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,5)$ de la solución de $y' = y$, $y(0) = 1$.

(Solución: $z_4^{[0]} = 1,491820106$; $z_4^{[1]} = 1,491824539$; $z_5^{[0]} = 1,648716439$; $z_5^{[1]} = 1,648721307$).

- 14.27. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 14.28. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

14.6. EJERCICIOS

- 14.29. Buscar todos los métodos lineales de un solo paso consistentes.

(Solución: El único explícito es el método de Euler. Implícitos hay infinitos, con $\beta_0 + \beta_1 = 1$)

- 14.30. Obtener un método lineal de dos pasos cuyo error de truncamiento sea cero al aplicarlo a un problema de valor inicial cuya solución exacta sea un polinomio de grado cuatro.

$$(Solución: z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n))$$

- 14.31. Aplicar el método $z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ al problema $y' = y + x$, $y(0) = 0$, tomando como tamaño de paso h y

como $z_0 = 0$ y $z_1 = e^h - h - 1$, para obtener z_2 .

$$(Solución: z_2 = \frac{2h(2e^h + h - 2)}{3 - h})$$

14.32. Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+2} = z_n + 2hf_{n+1}.$$

Aplicar el método al problema de valor inicial $y' = 3x^2$, $y(0) = 0$ y calcular su error de truncamiento.

$$(Solución: p = 2. T_{n+2} = 2h^3)$$

14.33. Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} = z_n + h(-f_{n+2} + 4f_{n+1} - f_n).$$

Aplicar el método al problema de valor inicial $y' = x$, $y(0) = -2$, tomando a) como $z_0 = -2$, b) como $z_0 = -2 + h$, y en ambos casos como z_1 el valor obtenido aplicando el método de Taylor de orden dos. Calcular z_n y verificar si coincide con el valor exacto.

(Solución: El método es estable y su orden de consistencia es 2, luego

es convergente. a) $z_n = -2 + \frac{1}{2}h^2n^2$ que coincide con el valor exacto y =

$-2 + \frac{1}{2}x^2$. b) $z_n = -2 + h + \frac{1}{2}h^2n^2$ que no coincide con el valor exacto).

14.34. Se considera el método implícito: $z_{n+2} = (a + 1)z_n - az_{n+1}$

+ $\frac{h}{4}((3a + 4)f_n + (a + 4)f_{n+2})$. a) Determinar para que valores de a el método es convergente. b) Calcular a de modo que el orden de consistencia sea 3. c) Aplicar el método obtenido para $a = 0$, al problema de valor inicial: $y' = y$, $y(0) = 1$, para obtener el valor aproximado de la solución en $x = 1$, con $h = 0,2$, y valores iniciadores $z_0 = z_1 = 1$.

(Solución: a) Convergente si $-2 < a \leq 0$. b) Para $a = -2$ el orden de consistencia es 3, pero no es convergente. c) $z(1) = 2,25$).

14.35. Obtener α y β para que el método: $z_{n+2} - \frac{3}{2}z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n =$

$h(\alpha f_{n+1} + \beta f_n)$ tenga orden de consistencia 2. Calcular en función de h el error de truncamiento que se comete en el paso n -ésimo al aplicarlo a $y' = 6x^2 + 2$, $y(0) = 0$.

(Solución: $\alpha = \frac{5}{4}$ y $\beta = -\frac{3}{4}$. $T_{n+k} = \frac{11}{2}h^3$).

14.36. Hallar el método lineal de dos pasos explícito, estable y consistente de mayor orden posible tal que su coeficiente de error sea el menor posible. Estudiar su estabilidad absoluta y relativa.

(Solución: $z_{n+2} = z_n + 2hf_{n+1}$. $C_3 = \frac{1}{3}$. Región de estabilidad absoluta: \emptyset .

Intervalo de estabilidad relativa: $(0, +\infty)$).

14.37. Hallar el método lineal de dos pasos implícito, estable y consistente de mayor orden posible tal que su coeficiente de error sea el menor posible. Estudiar su estabilidad absoluta y relativa.

14.38. Calcular el error de truncamiento en el paso n -ésimo al aplicar el método:

$$z_{n+2} - \frac{1}{2}z_{n+1} - \frac{1}{2}z_n = \frac{h}{8}(-9f_{n+2} + 32f_{n+1} - 11f_n).$$

con un tamaño de paso h al problema: $xy' = 3(y + 1)$, $y(1) = 0$.

(Solución: $T_{n+2} = 6h^3$).

14.39. Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} + 4z_{n+1} - 5z_n = h(4f_{n+1} + 2f_n).$$

(Solución: No es estable, por lo que no es convergente).

14.40. a) Estudiar los valores de α que hacen que sea convergente el método: $z_{n+3} - z_{n+1} = h(\alpha f_n - 2\alpha f_{n+1} + (2 + \alpha)f_{n+2})$.

b) Determinar α para que el error de truncamiento que se comete en el paso n -ésimo al aplicarlo a $xy' + y = 4x^3$, $y(1) = 1$ sea $T_n = 2h^3$.

(Solución: El método es convergente para todo α . b) $\alpha = 0$).

- 14.41. Estudiar la convergencia y los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{3}{2}z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n = \frac{1}{2}hf_n.$$

(Solución: Es convergente. Intervalo de estabilidad absoluta = $(-1, 0)$).

Intervalo de estabilidad relativa: $(-\frac{1}{8}, +\infty)$.

- 14.42. Deducir desde la expresión de las fórmulas de Adams-Moulton: $z_{n+1} = z_n + h[\gamma_0\nabla^0 + \gamma_1\nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1}\nabla^{k-1}]f_n + \gamma_k\nabla^k f_{n+1}$, la expresión donde aparecen solamente las $\nabla^i f_{n+1}$.

- 14.43. Calcular α , β y γ para que al aplicar el método:

$$z_{n+3} - z_{n+2} = h(\alpha f_n + \beta f_{n+1} + \gamma f_{n+2})$$

al problema: $y' = (ax + b)\sqrt{y}$ se obtenga un error de truncamiento T_{n+3} proporcional a $\frac{3}{8}h^4$. Calcular a y b para que valga exactamente $\frac{3}{8}h^4$.

$$(Solución: \alpha = \frac{5}{12}, \beta = \frac{-4}{3}, \gamma = \frac{23}{12}, a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \forall b).$$

- 14.44. Obtener un método lineal implícito de 3 pasos en el que $1/2$ y -1 sean raíces de su ecuación característica, siendo su

orden de consistencia tan elevado como sea posible. El método obtenido, ¿es estable?, ¿es convergente?, ¿qué orden de consistencia tiene?

$$(Solución: z_{n+3} - \frac{1}{2}z_{n+2} - z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n = h(\frac{-1}{6}f_n - \frac{1}{3}f_{n+1} + \frac{7}{6}f_{n+2} + \frac{1}{3}f_n),$$

estable, consistente de orden 4 y convergente).

14.45. Aplicar el método de Adams-Bashforth de dos pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,2$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,4) \\ y_2(0,4) \end{pmatrix}$, utilizando como valores

iniciadores: $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z_1 mediante Runge-Kutta 4.

$$(Solución: z_2 = \begin{pmatrix} 0,08782 \\ 0,60226 \end{pmatrix}).$$

14.46. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1; \lambda = -3 \pm 3i \Rightarrow h < 1/3.\}$)

- 14.47. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1\}$; $\lambda = -6 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow h < \frac{-2}{-6 - 3\sqrt{2}} \cong$

0,055.)

- 14.48. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 14.49. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 14.50. Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$. Estudiar la región de estabilidad absoluta.

- 14.51. Aplicar el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ con un

tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener en $x = 0,4$ la solución del problema de valor inicial del sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con valores iniciadores $z_0 = y_0$, y los obtenidos por el método de Euler.

14.52. Aplicar el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ con un tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener en $x = 0,4$ la solución del problema de valor inicial del sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con valores iniciadores $z_0 = y_0$, y los obtenidos por el método de Euler.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía de consulta recomendada

Bibliografía de variable compleja

1. Ahlfors, L. V.: *Variable Compleja*. Editorial Aguilar. 1966. 1971.
2. Ash, R. B.: *Complex Variables*. Academic Press.
3. Bak, J.; Newmann, D. J.: *Complex Analysis*. Springer-Verlang. 1991
4. Burckel, R. B.: *An Introduction to Classical Complex Analysis*. Birkhauser. 1979
5. Churchill, R. V.; Brown, J. W.: *Variable compleja y sus aplicaciones*. Mc Graw-Hill. (4ª edición). 1987-1992-1998.
6. Conway, J.: *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlang. (2ª edición). 1984.
7. Kreyszing, E.: *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Limusa. 1984.
8. Lang, S.: *Complex Analysis*. Addison-Wesley. 1976.
9. López Gómez, J.: *Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja*. Prentice Hall, 2001.
10. Markushevich, A. I.: *Theory of functions of a complex variable*. Chelsea Publ. 1977.
11. Marsden, J. E.; Hoffmann, M. J.: *Análisis Básico de Variable Compleja*. Ediciones Trillas, 1966.
12. Mendizabal, A.: *Análisis Matemático*. Servicio de Publicaciones de la E. T. S. Ingenieros de Caminos. Madrid. 1985.
13. Needham, T.: *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press. 1997.
14. Pestana, D; Rodríguez, J. M. y Marcellán, F.: *Variable Compleja. Un curso práctico*. Editorial Síntesis. 1999.
15. Polya, G. y Latta, G.: *Variable Compleja*. Noriega-Limusa. 1976. 1986. 1991.
16. Priestley, H. A.: *Introduction to Complex Analysis*. Clarendom Press. 1985.
17. Rudin, W.: *Análisis real y complejo*. Alhambra. 1985.
18. Saameño, J. J.: *Lecciones de Matemáticas para ingeniería. Variable Compleja y Análisis de Fourier*. Ágora Universidad. 1997.

19. Silverman, R.: *Complex Analysis with Applications*. Dover Publications. 1984.
20. Wilde, I. F.: *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press, 2006.

Bibliografía de ecuaciones diferenciales

1. Arnold, V. I. (1981): *Equations différentielles ordinaires*. Mir.
2. Arnold, V. I. (1980): *Classical Mechanics, Mathematical Methods of Classical Mechanic*. Springer-Verlag.
3. Bender, C. M.; Orszag, S. A. (1978): *Advanced mathematical methods for scientists and engineer*. McGraw-Hill
4. Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa. (1ª edición). 1967. (10ª reimpresión) 1992.
5. Braun, M. (1975): *Differential equations and their applications*. Springer Verlag. 1993, 1983, 1978, 1975.
6. Carrier, G. M.; Pearson, C. E. (1991): *Ordinary differential equations*. SIAM.
7. Coddington, E. A. y Levinson, N. (1955): *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill. 1991.
8. Dou, A. (1969): *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. (2ª edición). Dossat.
9. Drazin, P. G. (1992): *Nonlinear Systems*. Cambridge University Press.
10. Elsgoltz, L. (1977): *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir.
11. Fernández, C. (1992): *Ecuaciones diferenciales I. Ecuaciones lineales*. Ediciones Pirámide.
12. Guzmán, M. (1975): *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Alhambra.
13. Kreyszing, E. (1984): *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Editorial Limusa.
14. Mendizabal, A. (1985): *Análisis Matemático*. Servicio de Publicaciones de la E. T. S. Ingenieros de Caminos. Madrid.
15. Nagle, R. K., Saff, E. B. (1992): *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana.
16. Lambert, J. D. (1973): *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. Editorial John Wiley & Sons.
17. Simmons, F. (1992): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.
18. Stakgold, I. (1979): *Green's Functions and Boundary Value*

Problems. Wiley.

19. Zill, D. G. (1997): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Editorial.

Bibliografía de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Ascher, U.; Petzold, L.: *Computer Methods for Ordinary Differential Equations*. Siam, 1998.
2. Atkinson, K.: *Elementary Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. 1985. (2ª edición). 1993.
3. Atkinson, K. (1989): *An introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York. (2ª edición).
4. Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. (1992): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa. (1ª edición). 1967. (10ª reimpresión).
5. Burden, R. L.; Faires, J. D. (1996): *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericano. (2ª edición).
6. Conte, S. D. y Carl de Boor (1974): *Análisis Numérico elemental. Un enfoque algorítmico*. Mc Graw-Hill.
7. Dahlquist, G.; Bjorck, A.: *Numerical Methods*. Dover, 2003.
8. García Orden, J. C. (1999): *Dinámica no lineal de sistemas multicuerpo flexibles mediante algoritmos conservativos*. Tesis doctoral presentada en la Escuela T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.
9. Ixaru, Liviu: *Numerical Methods for differential equations and applications*. Editura Academiei. 1979, 1984.
10. Keller, H. B. (1968): *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Braisdell, Waltham, Mass.
11. Kincaid, D.; Cheney, W. (1994): *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. Addison - Wesley Iberoamericana.
12. Lambert, J. D. (1973): *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.
13. Lambert, J. D. (1991): *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problem*. John Wiley & Sons.
14. Mendizabal, A. (1985): *Análisis Matemático*. Servicio de Publicaciones de la E. T. S. Ingenieros de Caminos. Madrid.
15. Sanz-Serna, J. M.: *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*. Universidad de Valladolid, 1998.

Referencias

- ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley. 1985.
- ADAMS, R.: *Sobolev spaces*. Academic Press. 1975.
- AGMON, S.: *Elliptic boundary value problems*. Van Nostrand. 1965.
- AHLFORS, L.: *Variable Compleja*. Editorial Aguilar. 1966.
- AHMED, N.U.: *Semigroup theory with applications to systems and control*. Longman, 1991.
- AMANN, H.: *Ordinary differential equations*. Walter de Gruyter and Co. 1.990.
- AMANN, H.: *Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems*. J. Math. Anal. Appl. 65. (1.978). 432-467.
- AMBROSETTI, A.: *Critical points and nonlinear variational problems*. Bulletin de la Société Mathématique de France; Mémoire (nouvelle série) n° 49, 1.992.
- AMBROSETTI, A. y PRODI, G.: *A primer of nonlinear analysis*. Cambridge University Press. 1.993.
- ARNOLD, V. I.: *Classical Mechanics. Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlang. 1980.
- ARNOLD, V. I.: *Equations différentielles ordinaires*. Mir. 1981.
- ARNOLD, V. I.: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag, 1.983.
- ARROWSMITH, D. K. y C. M. PLACE.: *An introduction to Dynamical systems*. Cambridge University Press, 1.990.
- ASCHER, U.; PETZOLD, L.: *Computer Methods for Ordinary Differential Equations*. Siam, 1998.
- ASH, R. B.: *Real variables with basic metric space topology*. IEEE Press. 1992
- ASH, R. B.: *Complex Variables*. Academic Press.
- ATKINSON, K.: *Elementary Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York. (2ª edición). 1993
- ATKINSON, K.: *An introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York. (2ª edición). 1989
- AUBIN, J. P. y EKELAND, I.: *Applied nonlinear analysis*. John Wiley and Sons. 1984.
- AYRES, F.: *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill, 1.969.
- BAK, J.; NEWMANN, D. J.: *Complex Analysis*. Springer-Verlang. 1991
- BARBU, V.: *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff Int. Publ. 1976.
- BARROS-NETO, J.: *An introduction to the theory of distributions*. Marcel Dekker, 1.973.
- BATHIA, N. P. y HAJEK, O.: *Local semidynamical systems*. Lecture Notes in Mathematics n° 90. Springer-Verlag, 1.969.

- BATHIA, N. P. y SZEGO, G.: *Stability theory of dynamical systems*. Springer Verlag, 1.970.
- BEARDON, A.: *A primer on Riemann surfaces*. Cambridge University Press. 1984.
- BELLENI-MORANTE, A.: *Applied semigroups and evolution equations*. Claredon Press, 1.979.
- BELLMAN, R.: *Stability theory of differential equations*. Dover. 1953.
- BENDER, C. M.; ORZAG, S. A.: *Advanced mathematical methods for scientist and engineers*. McGraw-Hill. 1978.
- BERGER, M.: *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press, 1.977.
- BERS, L.; JOHN, F. y SCHECHTER, M.: *Partial differential equations*. Interscience Publishers, 1.964.
- BIEBERBACH, L.: *Conformal Mapping*. Chelsea Pub. 1986.
- BIRKHOFF, G. y ROTA, G.: *Ordinary differential equations*. Blaisdel Publishing Company, 1.969.
- BITSADZE, A. V.: *Equations of Mathematical Physics*. Mir, 1.980.
- BOAS, R.: *Entire functions*. Academic Press. 1954.
- BOAS, R. P.: *Invitation to Complex Variable*. Random House. 1987.
- BOCHER, M.: *An introduction to the study of integral equations*. Hofner Publishing Company, 1.971.
- BOYD, J. P. (1988): Book Reviews, SIAM Rev. **30**, 666-668.
- BOMBAL, F.; RODRIGUEZ, L; VERA, G.: *Problemas de Análisis Matemático*. Vol. I. Editorial AC. 1976.
- BOWMAN, F.: *Introduction to Elliptic Functions, with Applications*. English Univ. Press. 1953.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa. (1ª edición). 1967. (10ª reimpresión) 1992.
- BOYCE, W. y DIPRIMA, R.: *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. Limula-Wiley, 1.972.
- BOYD, J. P.: Book Reviews, SIAM Rev. **30**, 666-668. 1988.
- BRAUER, F. y NOHEL, J.: *Ordinary differential equations: a first course*. Benjamín, 1.973.
- BRAUER, F. y NOHEL, J.: *Qualitative theory of ordinary differential equations*. Benjamín, 1.969.
- BRAUER, F. y NOHEL, J.: *Problems and solutions in ordinary differential equations*. Benjamín, 1.969.
- BRAUN, M.: *Differential equations and their applications*. Springer-Verlag, 1.983.
- BRENNER, J.: *Problems in differential equations*. Freeman, 1.966.
- BREZIS, H.: *Análisis Funcional*. Alianza Editorial, 1.984.

- BREZIS, H.: *Operateurs Maximaux monotones et semigroups de contractions dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland, 1.973.
- BROWN, G. H.; HOYLER, C. N.; BIERWIRTH, R. A.: *Theory and application of radio-frequency heating*. Van Nostrand. 1947.
- BUDAK, B. M.; SAMARSKI, A. A. y TIJONOV, A. N.: *Problemas de la Física Matemática*. Vol 1 y 11. Mir, 1.984.
- BURCKEL, R. B.: *An Introduction to Classical Complex Analysis*. Birkhauser. 1979
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.: *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericano. (2ª edición). 1996
- BURGHES, D. N. y BORRIE, M. S.: *Modelling with differential equations*. John Wiley & Sons, 1.981.
- BURTON, T. A.: *Volterra integral and differential equations*. Academic Press, 1.983.
- BUTCHER, J. C.: *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Son. 1987.
- BUTCHER, J. C.; WANNER, G.: *Runge-Kutta methods: some historical notes*. Appl. Num. Math. 22. (1996). 131-151.
- CANNON, J. R.: *The one-dimensional heat equation*. Addison-Wesley, 1.984.
- CAÑADA, A.: *Series y transformada de Fourier y aplicaciones*. Vol. 1. Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada, 1.994.
- CARATHEODORY, C.: *Conformal Representation*. Cambridge Univ. Press. 1952.
- CARATHEODORY, C.: *Theory of functions of a complex variable*. Vol. I, II. Chelsea Publishing Company. 1954.
- CARLESON, L.; GAMELIN, T. W.: *Complex dynamics*. Springer Verlag. 1993.
- CARRIER, G. F.; PEARSON, C. E.: *Ordinary differential equations*. SIAM. 1991.
- CESARI, L.: *Asymptotic behavior and stability problems*. Springer, 1.959.
- CESARI, L.; KANNAN, R. y SCHUUR, J. D. (editores): *Nonlinear functional analysis and differential equations*. Marcel Dekker, 1.976.
- CHURCHILL, R. V.: *Operational Mathematics*. Mc Graw-Hill. 1972.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W.: *Fourier Series and boundary value problems*. Mc Graw-Hill. 1978. 1987.
- CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W.: *Variable compleja y sus aplicaciones*. Mc Graw-Hill. (4ª edición). 1987.
- CODDINGTON, E. A.: *An introduction to ordinary differential equations*. Prentice-Hall, 1.961.
- CODDINGTON, E. A. y LEVINSON, N.: *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, 1.955; 1.991.
- COHN, H.: *Conformal mapping of Riemann Surfaces*. Dover. 1980.

- COLTON, D. y KRESS, R.: *Integral equations methods in scattering theory*. Wiley, 1.983.
- CONWAY, J.: *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlang. (2ª edición). 1984.
- CONTE, S. D. Y CARL DE BOOR: *Análisis Numérico elemental. Un enfoque algorítmico*. Mc Graw-Hill. 1974.
- COPSON, E. T.: *Theory of Functions of a Complex Variable*. Oxford Univ. Press. 1962.
- COURANT, R. D.: *Dirichlet's Principle, conformal mapping and minimal surfaces*. Interscience Publ. 1960.
- COURANT, R. D. y HILBERT, D.: *Methods of mathematical physics*. Volúmenes 1 y 11. Interscience, 1.962. John Wiley&Sons, 1987.
- COPPEL, W. A.: *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. Heath Mathematical Monographs, 1.965.
- CORDUNEANU, C.: *Principles of differential and integrations*. Chelsea Publishing Company, 1.971.
- CRYER, C. W.: *Numerical functional analysis*. Clarendon Press, 1982.
- CVITANOVIC, P.: *Universality in chaos*. Institute of Physics publishing. 1993.
- DAHLQUIST, G.; BJORCK, A.: *Numerical Methods*. Dover, 2003.
- DAUTRAY, T. y LIONS, J. L.: *Analyse mathématique et calcul numérique pour las sciences et les techniques*. Vol. 1 al IX. Masson, 1987.
- DEIMLING, K. *Ordinary differential equations in Banach spaces*. Lecture Notes in Mathematics, nº 596, Springer-Verlag, 1.977.
- DEIMLING, K.: *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 1.985.
- DEKKER, K.; VERWER, J. G.: *Stability of Runge Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. North Holland. 1984.
- DEO, S. G. y RAGHAVENDRA, V.: *Ordinary differential equations and stability theory*. McGraw-Hill, 1.980.
- DEVANEY, R. L.: *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison Wesley. 1989.
- DIEUDONNE, J.: *History of functional analysis*. North-Holland, 1981.
- DONGARRA, J. J.; DUFF; I. S.; SORENSEN, D. C.; VAN DER VORST, H. A.: *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*. SIAM. 1991.
- DOU, A.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. (2ª edición). Dossat. 1969.
- DRAZIN, P. G.: *Nonlinear Systems*. Cambridge University Press. 1992.
- DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J.: *Linear operators*. Vol. 1. Interscience, 1.959.
- DYM, H. y McKEAN, H. P.: *Fourier series and integrals*. Academic Press, 1972.
- EKELAND, I.: *Convexity methods in hamiltonian mechanics*. Springer-Verlag, 1.990.

- EKELAND, I. y TEMAN, R.: *Convex analysis and variational problems*. North-Holland Publishing Company, 1.976.
- ELSGOLTZ, L.: Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Mir. 1977; 1983.
- EVANS, G. C.: *The Logarithmic Potential*. Chelsea. Publ. 1927.
- FERNÁNDEZ, C.: Ecuaciones diferenciales I. Ecuaciones lineales. Ediciones Pirámide. 1992
- FISHER, S. D.: *Complex Variables*. Wadsworth. 1986.
- De FIGUEIREDO, D. G.: *Equacoes elipticas nao lineares*. D. De Figueiredo, editor. Instituto de matematica pura e aplicada, Río Janeiro. 1.977
- De FIGUEIREDO, D.G.: *The Ekeland variational principle with applications and detours*. Tata Institute of fundamental research, Springer-Verlag, 1.989.
- FLANIGAN, F. J.: *Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions*. Dover Publ. 1983.
- FLETCHER, C. A.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer - Verlag. 1988.
- FOLLAND, G.: *Introduction to partial differential equations*. Princenton University Press, 1.976.
- FORSYTHE, G. E.; MALCOM, M. A.; MOLER, C. B.: *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall. 1977.
- FOWLER, A. C.; MCGUINNESS, M. J.: *A description of the Lorenz attractor and high Prandtl number*. Physica D. 149-182. (1982)
- FRIEDMAN, A.: *Partial differential equations*. Holt, Rinehart and Winston, 1.969.
- FRIEDMAN, A.: *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice- Hall, 1.964.
- FUCHS, W.: *The theory of functions of one complex variable*. Van Nostrand. 1967.
- GARABEDIAN, R.: *Partial differential equations*. Wiley, 1.964.
- GEAR, C. W.: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall. 1971.
- GELFAND, I. M. y SHILOV, G. E.: *Generalized functions*. Varios volúmenes. Academic Press, 1.964.
- GOLDSTEIN, J.A. *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford University Press, 1.985.
- GREEN, R.; KRANTZ, S. G.: *function Theory of One Complex Variable*.(3ª ed.) American Mathematical Society, 2006.
- GREENSPAN, D.: *Introduction to partial differential equations*. McGraw-Hill, 1.961.
- GRIPENBERG, G.; LONDEN, S. O. y STAFFANS, O.: *Volterra integral and functional equations*. Cambridge University Press, 1990.

- GROVE, E. A.; LADAS, G.: *Introduction to Complex Variables*. Houghton Mifflin Com. 1974.
- GUZMÁN, M.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*. Alhambra. 1975.
- GUZMAN, M.; PERAL, I. y WALIAS, M.: *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Alhambra, 1.978.
- HAIRER, E; NORSETT, S. P.; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer Verlag. 1987.
- HAIRER, E; NORSETT, S. P.; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer Verlag. 1991.
- HAIRER, E.; WANNER, G.: *Analysis by its history*. Springer. 1996.
- HALE, J. K.: *Ordinary differential equations*. Krieger, 1.980.
- HALE, J. K.: *Theory of functional differential equations*. Springer-Verlag, 1.977.
- HALE, J. K.: *Applications of alternative problems*. Brown University lecture notes, 71-1, 1.971.
- HARTMAN, P.: *Ordinary differential equations*. Wiley, 1.964.
- HAYT, W. H.: *Engineering Electromagnetics*. McGraw-Hill. 1981.
- HEADING, J.: *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Limusa, 1.972.
- HELLWIG, G.: *Partial Differential Equations*. Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Company, 1.964.
- HENRICI, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*. John Wiley & Sons. 1974, 1977, 1986.
- HILDEBRANDT, S. y TROMBA, A.: *Matemáticas y formas óptimas*. Prensa científica, 1.990.
- HILLE, E. y PHILLIPS, R. S.: *Functional analysis and semigroups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol 31, 1.957.
- HILLE, E.: *Lectures in ordinary differential equations*. Addison-Wesley. 1969.
- HILLE, E.: *Analytic Function Theory*, Vol. I, 1959; Vol. II, 1962. Chelsea Publ. Company. 1973.
- HIRSCH, M. y SMALE, S.: *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, 1.974.
- HOCHSTADT, H.: *Integral equations*. John Wiley and Sons, 1.973.
- HORMANDER, L.: *The analysis of linear partial differential operators*. Vols. 1 y 11. Springer-Verlag, 1.983.
- HORVATH, J.: *Topological vector spaces and distributions*. Addison-Wesley, 1.966.
- HUBBARD, J. H. y WEST, B. H.: *Differential equations. A dynamical systems approach*. Springer-Verlag, 1.991.

- HUMI, M. y MILLER, W.: A second course in ordinary differential equations for scientists and engineers. Springer-Verlag, 1.988.
- HUNTLEY, I. D. y JOHNSON, R. M.: *Linear and nonlinear differential equations*. I. D. Huntley y R. M. Johnson, 1.983.
- HUREWICZ, W.: Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Rialp, 1966.
- HUTSON, V y PYM, J. S.: Applications of functional analysis and operator theory. Academic Press Inc., 1.980.
- INCE, E. L.: Ordinary differential equations. Dover, 1.956.
- INCE, E. L. y SNEDDON, I. N.: *The solution of ordinary differential equations*. Longman Group UK Limited, 1.987.
- ISTRATESCU, V. I.: *Fixed point theory*. D. Reidel Publishing Company, 1981.
- ITO, S.: *Diffusion equations*. American Mathematical Society, 1992.
- IXARU, LIVIU: *Numerical Methods for differential equations and applications*. Editura Academiei.
- JERRI, A. J.: Introduction to integral equations with applications. Marcel Dekker, Inc., 1985.
- JOHN, F.: *Partial differential equations*. Springer-Verlag, 1980.
- JONES, G. A.; SINGERMANN, D.: *Complex Functions*. Cambridge University Press. 1987.
- JULIA, G.: *Principes Géométriques de L'Analyse*. Vol. I, II. Gauthiers-Villars. 1955.
- KAPLAN, W.: *Advanced Calculus*. Addison-Wesley. 1984.
- KAPLAN, W.: *Advanced Mathematics for Engineers*. Addison-Wesley. 1981.
- KELLER, H. B.: *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Braisdell, Waltham, Mass. 1968.
- KELLOG, O. D.: *Foundation of Potential Theory*. Dover. 1953.
- KINCAID, D.; CHENEY, W.: *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1994.
- KNOPP, K.: *Elements of the Theory of Funtions*. Dover. 1952.
- KOBER, H.: *Dictionary of Conformal Representations*. Dover. 1952.
- KRANTZ, S.: *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*. The Mathematical Association of America, 1990.
- KREYSZING, E.: *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Editorial Limusa. 1984
- KRZYZ, J. G.: *Problems in Complex Variable Theory*. Elsevier Publ. 1971.
- LADAS, G. E. y LAKSHMIKANTHAM, V.: *Differential equations in abstract spaces*. Academic Press, 1.972.
- LADYZHENSKAYA, O. A., SOLONNIKOV, V. y URALTSEVA, N.: *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Amer. Math. Soc., 1968.
- LADYZHENSKAYA, O. A. y URALTSEVA, N. N.: *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, 1968.

- LADYZHENSKAYA, O. A.: The boundary value problems of Mathematical Physics. Springer-Verlag, 1.985.
- LAKSHMIKANTHAM, V. y LEELA, S.: *Differential inequalities*. Academic Press, 1.969.
- LAKSMIKANTHAM, V.; LEELA, S. y MARTYNYUK.: *Stability analysis of nonlinear systems*. Marcel Dekker, 1.989.
- LAMB, H.: *Hydrodynamics*. Dover. 1945.
- LAMBERT, J. D.: *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. Editorial John Wiley & Sons. 1973.
- LAMBERT, J. D.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problem*. John Wiley & Sons. 1991.
- LANDESMAN, E. M. y LAZER, A. C.: Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. *J. Math. Mech.*, 19, 1979, 609-623.
- LANG, S.: *Complex Analysis*. Addison-Wesley. 1976.
- LASALLE, J. P. y LEFSCHETZ, S.: *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, 1.961.
- LEBEDEV, N. N.: *Special Functions and Their Applications*. Dover. 1972.
- LEFSCHETZ, S.: *Differential equations: geometric theory*. Interscience, 1959.
- LEIS, R.: *Initial boundary value problems in Mathematical Physics*. John Wiley, 1.986.
- LEVINSON, N.; REDHEFFER, R. M.: *Complex Variables*. Holder-Day. 1971.
- LIAPUNOV, A. M.: *Stability of motion*. Academic Press, 1.966.
- LIÑAN, A.: *Analytical description of chaotic oscillation in a toroidal thermosyphon*. Fluid Physics. Lecture Notes of Summer Schools. (Edt. M. G. Velarde y C. I. Christor) pp. 507-523. Word Scientific. 1884.
- LIONS, J. L. y MAGENES, E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (3 volúmenes). Dunod, 1968.
- LÓPEZ GÓMEZ, J.: *Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja*. Prentice Hall, 2001.
- LYUSTERNIK, L.: *Líneas más cortas. Problemas de variaciones*. Lecciones populares de Matemáticas. Mir. 1979.
- MARSDEN, J. E.; HOFFMANN, M. J.: *Análisis Básico de Variable Compleja*. Ediciones Trillas, 1966.
- MARKUSHEVICH, A. I.: *Teoría de las funciones analíticas*. Mir. 1970.
- MARKUSHEVICH, A. I.: *Theory of functions of a complex variable*. Chelsea Publ. 1977.
- MARTÍNEZ CARACEDO; SANZ ALIX M. A.: *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Reverté. 1991.
- MATHEWS, J. H.: *Complex Variables for Mathematics and Engineering*. Brown. 1988.

- MENDIZABAL, A.: *Análisis Matemático*. Servicio de Publicaciones de la E. T. S. Ingenieros de Caminos. Madrid. 1985.
- MILLER, R. K.: *Nonlinear Volterra integral equations*. Benjamín, Menlo Park, CA, 1971.
- MILLER, R. K.: *Introduction to differential equations*. Prentice-Hall, 1987.
- MILLER, R. K. y MICHEL, A. M.: *Ordinary differential equations*. Academic Press, 1.982.
- MILNE-THOMSON, L. M.: *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan&Co. 1955.
- MINORSKY, N. *Nonlinear oscillations*. Van Nostrand, 1.962.
- MITRINOVIC, D. S.: *Calculus of Residues*. Noordhoff, Ltd. 1966.
- MIYADERA, I. *Nonlinear Semigroups*. Amer. Math. Soc., 1992.
- MORSE, M.: *The calculus of variations in the large*. American Mathematical Society, 1934.
- MORSE, M.; FESHBACH, H.: *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill. 1953.
- MYINT, U, T.: *Ordinary differential equations*. North-Holland, 1.978.
- NAGLE, R. K. y SAFF, E. B.: *Fundamentals of differential equations*. The Benjamin Cummings Publishing Company, 1986.
- NAGLE, R. K., SAFF, E. B.: *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1992
- NECAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.
- NEEDHAM, T.: *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press. 1997.
- NEHARI, Z.: *Conformal Mapping*. Dover. 1975.
- NIRENBERG, L.: *Topics in Nonlinear Analysis*. Courant Institute. Lec. Not. Math., 1973.
- PALKA, B.: *An introduction to Complex Function Theory*. Springer. 1991.
- PERKO, L.: *Differential equations and dynamical systems*. Springer Verlag, 1991.
- PESTANA, D; RODRÍGUEZ, J. M. Y MARCELLÁN, F.: *Variable Compleja. Un curso práctico*. Editorial Síntesis. 1999.
- PETROVSKII, I. G.: *Ordinary differential equations*. Prentice Hall, 1966.
- PETROVSKII, I. G.: *Lectures on the theory of Integral equations*. Graylock Press, 1.957.
- PICCININI, C.; STAMPACCHIA, G. y VIDOSSICH, G.: *Equazioni differenziali ordinarie in R^n* . Lignori Editore, 1.978.
- PLATT, O.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Reverté, 1.974.
- POINCARÉ, H.: *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*. 3 volúmenes. Librairie Albert Blanchard, 1.987.

- POLYA, G. Y LATTA, G.: *Variable Compleja*. Noriega-Limusa. 1976. 1986. 1991.
- POLYA, G. y SZEGÖ, G.: *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*. Princenton University Press, 1.951.
- PORTER, D. y STIRLING, D. S. G.: *Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications*. Cambridge University Press, 1.990.
- POWERS, D. L.: *Boundary value problems*. Harcourt Brace Jovanovich, 1987.
- PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.: *Numerical recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. 1986.
- PRIESTLEY, H. A.: *Introduction to Complex Analysis*. Clarendon Press. 1985.
- PROTTER, M. H. y WEINBERGER, H. F.: *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall, 1.967.
- RABINOWITZ, P.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. American Mathematical Society, 1986.
- RANSFORD, T.: *Potential theory in the complex plane*. Cambridge Univ. Press. 1995.
- RAO, M.; STEEKAER, H.: *Complex Analysis: an invitation*. Word Scientific. 1991.
- REES, C. S.; SHAH, S. M. y STANOJEVIC, C. V.: *Theory and applications of Fourier analysis*. Marcel Dekker, 1.981.
- REID, M.: *Ordinary differential equations*. Wiley, 1.971.
- ROTHER, R.; OLLEDORF, F. POHLHAUSEN, K.: *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*. Technology Press. 1948.
- ROUCHE, H.; HABETS, P. y LALOY, M.: *Stability theory by Liapunov's direct method*. Springer-Verlag, 1.977.
- ROUCHE, N. y MAWHIN, J.: *Equations différentielles ordinaires*. Vol. I y II. Masson et Cie, 1973.
- RUDIN, W.: *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1.973.
- RUDIN, W.: *Análisis funcional*. Reverté, 1.979.
- RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1.970.
- RUDIN, W.: *Análisis real y complejo*. Alhambra, 1985, 1.988.
- SAAMEÑO, J. J.: *Lecciones de Matemáticas para ingeniería. Variable Compleja y Análisis de Fourier*. Ágora Universidad. 1997.
- SAFF, E. B.; SNIDER, A. D.: *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*. Prentice- Hall. 1976.
- SANSONE, G. y CONTI, R.: *Nonlinear differential equations*. Pergamon Press, 1.964.
- SAKS, S; ZYGMUND, A.: *Fonctions Analytiques*. Masson et Cie. 1970.
- SANZ-SERNA, J. M.: *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*. Universidad de Valladolid, 1998.
- SCHECHTER, M.: *Modern methods in partial differential equations*. McGraw-Hill, 1.977.

- SCHIFF, J.: *Normal families*. Springer. 1993.
- SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*. Hermann, 1.973.
- SCHWARTZ, J. T. *Nonlinear functional analysis*. Gordon and Breach, 1.969.
- SEGAL, S.: *Nine introductions in Complex Analysis*. North-Holland Mathematics Studies. 1981.
- SELL, G.: *Topological dynamics and ordinary differential equations*. Van Nostrand, 1.971.
- SHANPINE, L. F.; GORDON, M. K.: *Computer Solution of Ordinary Differential Equations. The Initial value Problem*. W. H. Freeman & Company. 1975.
- SHOWALTER, R.: *Hilbert space methods for partial differential equations*. Pitman, 1.977.
- SIEGDERG, H.W.: *Some historical remarks concerning degree theory*. Amer. Math. Month., 88, 1.981, 125-139.
- SILVERMAN, R.: *Complex Analysis with Applications*. Dover Publications. 1984.
- SIMMONS, F.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill. 1992.
- SMOLLER, J.: *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, 1.983.
- SOBOLEV, S. L.: *Partial differential equations of Mathematical Physics*. Pergamon Press, 1.964.
- SOKOLNIKOFF, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. Krieger Publ. 1983.
- SPIEGEL, M. R.: *Variable compleja*. Serie Schaum. McGraw-Hill. 1991.
- SPERD, R.: *Maximum principles and their applications*. Academic Press, 1.981.
- SPRINGER, G.: *Introduction to Riemann Surfaces*. Chelsea. Publ. 1981.
- STAKGOLD, I.: *Boundary value problems of mathematical physics*. McMillan, 1.967.
- STAKGOLD, I.: *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley. 1979.
- STEIN, E.; SHAKARCHI, R.: *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.
- STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag. 1993.
- STRANG, G.: *Introduction to applied mathematics*. Wellesley Cambridge Press. 1986.
- STREETER, V. L.; WYLIE, E. B.: *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill. 1979.
- STRUWE, M.: *Variational methods*. Springer-.Verlag, 1.990.
- TANABE, H.: *Equations of evolution*. Pitman, 1.979.
- TEMPLE, G.: *100 years of Mathematics*. Gerald Duckworth & Co. Ltd., 1.981.
- TENENBAUM, M. y POLLARD, H.: *Ordinary differential equations*. Dover. 1985.
- THRON, W. J.: *Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*.

- John Wiley & Sons. 1953.
- TIJONOV, A. N. y SAMARSKY, A. A.: *Ecuaciones de la Física Matemática*. Mir, 1.980.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*. Mc Graw-Hill. 1970.
- TITCHMARSH, E. C.: *Theory of functions*. Oxford University Press, 1.932.
- TREVES, F.: *Linear partial differential equations with constant coefficients*. Gordon and Breach, 1.966.
- TRICOMI, F. G.: *Integral equations*. Interscience Publishers, Inc., 1.970.
- TROUTMAN, J. L.: *Variational calculus with elementary convexity*. Springer-Verlag, 1.983.
- VAINBERG, M. M.: *Variational methods in the study of nonlinear operators*. Holden Day, 1.964.
- VLADIMIROV, V. S.: *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., 1.971.
- VLADIMIROV, V. S. y otros: *A collection of problems on the equations of Mathematical Physics*. Mir, 1.986.
- VOLKOVSKI, L.; LUNTS, G.; ARAMANOVICH, I.: *Problemas sobre la teoría de funciones de una variable compleja*. Mir. 1977.
- VOLTERRA, V.: *Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations*. Dover, 1.959.
- WALTER, W.: *Differential and integral inequalities*. Springer-Verlag, 1.970.
- WEINBERGER, H.: *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Reverté, 1.970.
- WIDDER, D. V.: *The heat equation*. Academic Press, 1.975.
- WILDE, I. F.: *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press, 2006.
- YOSHIZAWA, T.: *Stability theory by Liapunov's second method*. Mathematical Society of Japan, 1.966.
- YOSIDA, K.: *Lectures on differential and integral equations*. Interscience Publishers, 1.960.
- YOSIDA, K.: *Functional analysis*. Springer, 1.974.
- ZILL, D. G.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Editorial. 1997