Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A da ESO

Actividades e exercicios

ÍNDICE:

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores de Libros Marea Verde de Matemáticas (VVAA).

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e autores

CAPÍTULO 1: NÚMEROS RACIONAIS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

0.CONVENCHE RECORDAR

1. Calcula:

a) –20 + 15 b) –2 · (–20 + 15) c) –20 : (10 – 2(–20 + 15)) d) (–80 –20:(10 – 2(–20 + 15)))·(3 – 2·3^2)

2. Calcula:

a) –10 + 20 :(–5) b) (–10 + 20):(–5) c) –100:((–20):(–5)) d) (–100:(–20)):(–5) e) $\sqrt{36 \cdot 4}$

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot 3-2\cdot 5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$

c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot 3-3\cdot 4)^2-(2-4)^3$

1. NÚMEROS RACIONAIS

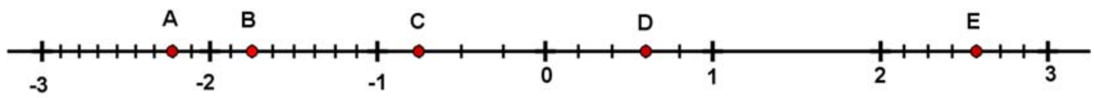
4. Pasa a forma mixta as seguintes fraccións: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

5. Pasa a forma mixta as fraccións $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

6. Representa na recta numérica as fraccións: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

7. Pasa a forma mixta e representa as fraccións: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

8. Calcula as fraccións que se corresponden cos puntos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, expresando en forma mixta e como fracción impropia as representadas polos puntos *A*, *B* e *E*.



9. Calcula as catro quintas partes das tres cuartas partes de 12.
10. As cinco sextas partes dun número son 100, que número é?

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

11. Copia esta táboa no teu caderno e redondea co número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95 549	100 000			
30 000	3 ·10^4			
1.9995				2.000
20.55				

12. Proba que 123.45 con EA = 0.005 e 0.12345 con EA = 0.000005 teñen o mesmo ER.
13. Contesta Verdadeiro ou Falso e xustifica a túa resposta:

a) Para unha mesma máquina de medir, o erro cometido é menor canto máis pequena sexa a medida.
b) Non se poden comparar erros relativos de distintas magnitudes.
c) Poñer prezos como 1.99 €/Kg é un intento de engano.
d) Comprar a 1.99 €/Kg fronte a 2 €/Kg supón un aforro.
e) Poñer moitas cifras nun resultado significa que un é un gran matemático.
f) A precisión mídese polo número de cifras decimais.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

3. FRACCIÓNS E DECIMAIS

14. Sen facer a división indica se as seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

15. Pasa a fracción e simplifica:

a) 1.4142 b) 0.125 c) 6.66

16. Pasa a fracción e simplifica:

a. 1.41424142… b. 0.125125… c. 6.666…

17. Pasa a fracción e simplifica:

1) 1.041424142… 2) 0.7125125… 3) 6.7666…

18. Pasa a fracción e calcula:

A. 0.333… + 0.666… B. 0.888… · 2,5 C. 0.65 : 0,656565…

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula paso a paso: (–5 + 4 · (–2) +7) : (7 – (3 – 4) · (–1))
2. Ordena de menor a maior: $\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$
3. Indica razoadamente que fracción é maior: $a)\ \frac{102}{101}\ e\ \frac{98}{99}\quad b)\ \frac{98}{99}\ e\ \frac{97}{98}\quad c)\ \frac{-102}{101}\ e\ \frac{-103}{102}$
4. Demostra que 4.999… = 5. Xeraliza: Canto vale *n*.999…?
5. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$
6. Representa de forma exacta na recta numérica: $\frac{760}{240}$; 3.125; $-\frac{46}{14}$; –2.1666…
7. Simplifica: $a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$
8. Calcula a fracción que cae xusto no medio de 3/2 e 9/4 na recta numérica. *Pista:* a media aritmética $\frac{a+b}{2}$

   Representa as 3 fraccións na recta numérica.
9. A media harmónica defínese como H(*a*, *b*) = $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, o inverso da media aritmética dos inversos.

   a) Demostra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$ b) Calcula $H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$
10. Calcula a fracción inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$
11. Opera e simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$
12. Resolve paso a paso: $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$
13. Calcula as dúas terceiras parte da sexta parte do 80% de 900.
14. Calcula o número tal que os seus catro terzos valen 520.
15. Cantos botes de tres oitavos de litro podo encher con 12 litros?
16. Calcula a fracción pola que hai que multiplicar 450 para obter 720.
17. Se 100 polgadas son 254 cm:

    a) Calcula o longo en centímetros dunha televisión se a altura son 19.2 polgadas e longo/alto = 4/3.

    b) Igual pero agora longo/alto = 16/9.

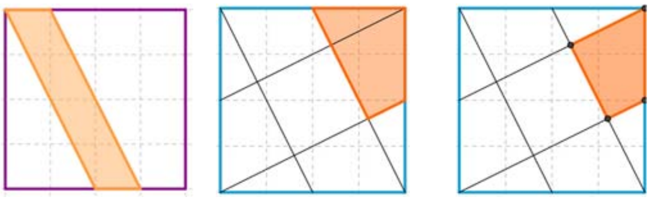
18. Se nunha clase o 77.777…% dos alumnos aproban e hai máis de 30 alumnos pero menos de 40, cantos alumnos son e cantos aproban?
19. Tres peregrinos deciden iniciar unha viaxe de 8 días. O primeiro dos peregrinos aporta 5 pans para o camiño, o segundo peregrino, 3 pans, e o terceiro non aporta ningún pero promete pagarlles ao seus compañeiros ao final da viaxe polo pan que coma. Cada un dos días que durou a viaxe, á hora de comer, sacaban un pan da bolsa, dividíano en tres anacos e cada peregrino comía un. Cando chegaron ao seu destino, o camiñante que non aportara ningún pan sacou 8 moedas e entregóullelas aos seus compañeiros: 5 moedas para o que puxera 5 pans e 3 moedas para o que contribuíra con 3 pans. Poderías explicar por que este reparto de moedas non é xusto? Cal sería o reparto xusto? (*Problema da Olimpíada de Albacete*. Débense ter en conta non os pans que cada un puxo senón o que realmente aportou (o posto menos o comido).
20. Aproxima os números 32 567 e 1.395 con 2 cifras significativas e di en cal se comete menor erro relativo.
21. π non pode representarse mediante unha fracción de enteiros pero podes calcular unha fracción que o aproxime con 5 cifras significativas?
22. Aproximamos π por: $$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}$$
   a) Simplifica ata unha fracción impropia irreducible.
   b) Calcula o erro absoluto e o erro relativo.
23. Cantas botellas de 3/4 de litro necesito para ter a mesma cantidade que en 60 botellas de 3/5 de litro?
24. Calcula un número enteiro de tal forma que: a súa metade, a súa terceira parte, a súa cuarta parte, a súa quinta parte, a súa sexta parte e a súa sétima parte sexan números enteiros.
25. Á unidade quítolle as súas 2 quintas partes. Por que fracción hai que multiplicar o resultado para chegar outra vez á unidade?
26. Calcula a fracción resultante:
    a)) Quito 1 terzo do que teño e logo engado 1 terzo do que queda.
    b) Engado 1 terzo do que teño e despois quito 1 terzo do resultado.
27. Estás aburrido e decides xogar ao seguinte: Avanzas un metro en liña recta, retrocedes a metade, avanzas a metade do que retrocediches no último paso, retrocedes a metade do que avanzaches no último paso, …

Se o fas moitas, pero que moitas veces, canto avanzas en total?

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$

28. Darío dá pasos de 3/5 de metro, o seu can Raio dá pasos de ¼ de metro. Se ambos os dous van a igual velocidade e Raio dá 360 pasos por minuto, cantos pasos por minuto dará Darío?
29. A figura do lado é un "*Tamgran*".
    a) Calcula a fracción que se corresponde con cada unha das 7 pezas.
    b) Se o lado do cadrado é de 20cm, calcula a área de cada peza.

30. Se o lado do cadrado é de 4cm calcula a fracción e a área da zona coloreada:



31. Calcula*:*

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

AUTOAVALIACIÓN

1. Sabes operar con números enteiros, coñeces a prioridade das operacións e o uso das parénteses. Resolve paso a paso:

$$(-8 - 7 \cdot (-4 + 6) : (2 + (-3)) + 5 - 4 \cdot 2^2) \cdot (-2)$$

2. Sabes obter fraccións equivalentes. Ordena de **maior a menor**:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fraccións de forma exacta na recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0.125$$

4. Sabes operar con fraccións. Resolve paso a paso e simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

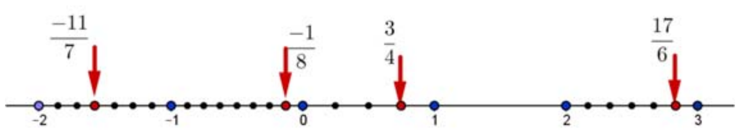
5. Sabes calcular a fracción dun número e a fracción dunha fracción.
   a) Calcula as catro quintas partes dos cinco oitavos de 360.
   b) Unha botella ten cheas as súas sete oitavas partes. Se contén 840 cm³, canto lle cabe chea?
6. Sabes redondear e calcular o erro relativo cometido. Aproxima os números 9 859 e 9.945 con 2 cifras significativas e calcula os erros relativos cometidos (en %), cal é menor?
7. Sabes distinguir cando unha fracción ten unha expresión decimal exacta.
   a) Di cales das seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica: $\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$
   b) cantos decimais ten $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{6}}$?
   c) cantas cifras como máximo pode ter o período de 1/97?
8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción e simplifica:
   a) 2.225 b) 2.2252525... c) $\frac{0.125}{0.125125125\ldots}$
9. Sabes resolver problemas mediante fraccións.
   Unha medusa medra cada semana un terzo do seu volume.
   a) cantas semanas deben pasar para que o seu volume se multiplique por máis de 3?
   b) Se o seu volume actual é de 1 200 cm³, cal era o seu volume hai 3 semanas?
10. A un traballador báixanlle o soldo a sexta parte, do que **lle queda** o 25 % vaise destinado a impostos e por último do resto que **lle queda** as dúas quintas partes gástaas en pagar a hipoteca do piso. Se aínda ten dispoñibles 450 €, canto cobraba antes da baixada de soldo?, canto paga de impostos e de hipoteca?

Solucións:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$

3)



4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180; b) 960 cm³.

6) 9 859 : 9 900 ➔ EA = 41 ➔ ER = 0.42 %.
9.945 : 9.9 ➔ EA = 0.045 ➔ ER = 0.45 %, é un peco menor o primeiro.

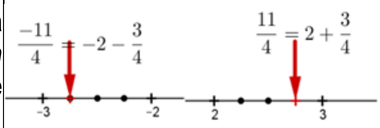
7) a) Primeiro simplifícanse, son exactas 6/120 e 42/150. 5/180 ten expresión decimal periódica.
b) 10 cifras decimais.
c) 96 cifras (de feito tena).

8) a) $\frac{89}{40}$ b) $\frac{2203}{990}$ c) $\frac{999}{1000} = 0.999$

9) a) 4 semanas. b) 506.25 cm³.

10) Cobraba 1 200 €. Agora cobra 1 000 €, paga 250 € de impostos e 300 € de hipoteca.

RESUMO

Prioridade das operacións	1º Parénteses interiores, 2º Potencias e raíces, 3º Produtos e divisións, 4º Sumas e restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo da suma	(+) + (+) = (+) súmanse, (–) + (–) = (–) súmanse. (+) + (–) = ? ten o signo do maior en valor absoluto.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signo do produto e a división	Se teñen igual signo dá positivo. (+)·(+) = (–)·(–) = (+) Se teñen signo contrario dá negativo. (+)·(–) = (–)·(+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* é racional se pode escribirse como *r* = *a*/*b* coa, *b* enteiros e $b \neq 0$.	2; –7/2 son racionais. Tamén 2.6777... $\sqrt{2}$ *e* π non o son.
Fracción irredutible	Obtense dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Numerador e denominador son primos entre si.	360/840 = 3/7, a última é irredutible.
Fraccións equivalentes	Son equivalentes as fraccións que teñen igual expresión decimal. Dúas fraccións equivalentes representan ao mesmo número racional. Os seus produtos cruzados valen o mesmo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ = 0.75 son equivalentes. 3 · 20 = 4 · 15
Ordenación de fraccións	Pásanse a común denominador ou calcúlase o seu valor decimal ou úsase a lóxica e o truco *a*/*b*<*c*/*d* se *ad*<*bc* para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ $ya\ que$ $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre outros motivos
Representación	Se é necesario pásanse á forma mixta. Para *n* + *a*/*b* dividimos a unidade que vai de *n* a *n* + 1 en *b* partes iguais e tomamos *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividimos a unidade que vai de –*n* a –*n* – 1 en *b* partes iguais e contamos *a* empezando en –*n*.	
Suma e resta de fraccións	Pásanse a común denominador e súmanse (réstanse) os numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Produto e división	a/b · c/d = ac/bd a/b : c/d = a/b · d/c = ad/bc	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$
Fracción dun número	a/b de x = a/b ·x = (ax)/b	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Cifras significativas	É o número de cifras "con valor" que se utilizan para aproximar un número	0.025 ten 2; 3.020 ten 4; 3 000 non sabemos as que ten
Erros	Erro absoluto: EA = $\lvert valorreal - valoraproximado \rvert$ Erro relativo: ER = $\frac{EA}{\lvert Valorreal \rvert}$ multiplícase por 100 para obter o % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0{,}033}{2/3} \approx 0.050 \Rightarrow 5\ \%$
Fraccións e decimais	A expresión decimal dunha fracción sempre é exacta ou periódica. Exacta se o denominador só ten como factores primos o 2 ou o 5. Periódica en caso contrario.	3/40 = 0.075 exacta 5/12 = 0.41666... periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: divídese o número sen a coma entre a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais. Expresión decimal periódica: Multiplícase *N* por potencias de *10* ata conseguir 2 números coa mesma parte decimal, réstanse e despéxase *N*.	3.175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2.0333... ➔ 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183 ➔ *N* = 183/90 = 61/30.

CAPÍTULO 2: POTENCIAS E RAÍCES

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. OPERACIÓNS CON POTENCIAS

1. Determina o signo das potencias: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$
2. Expresa en forma de unha única potencia: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$
3. Expresa en forma de potencia: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$
4. Expresa en forma de potencia: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$
5. Expresa en forma de potencia: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$
6. Expresa en forma de potencia: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(-2/7)^{-4}$ c)$(-1/6)^4$d) $(-5/2)^{-2}$
8. Expresa como única potencia: a) $(-3/4)^3 \cdot (-3/4)^2 \cdot ((-3/4)^{-8}$ b) $(1/8)^{-5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{-2}$
9. Expresa como única potencia: a) $(5/4)^6 \cdot (-2/3)^6 \cdot (-1/7)^6$ b) $(-3/5)^{-4} \cdot (-3/8)^{-4} \cdot (-1/4)^{-4}$
10. Calcula: a) $(-2/5)^4 : (-2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{-2}$
11. Calcula: a) $(1/5)^{-3} : (2/9)^{-3}$ b) $(-6)^5 : (-2/9)^5$
12. Calcula: a) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{2^5}{5^5}}{(-4)\cdot 4^5}$ b) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-1}{6}\right)^2}{\left(\dfrac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^6}$

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

13. Utiliza a túa calculadora para obter 2^{16}, 2^{32} e 2^{64} e observa como dá o resultado.
14. Utiliza a calculadora para obter a túa idade en segundos en notación científica.
15. Efectúa as operacións en notación científica: a) $0.000257 + 1.4 \cdot 10^{-5}$ b) $200\,000\,000 - 3.5 \cdot 10^6 + 8.5 \cdot 10^5$
16. Efectúa as operacións en notación científica: a) (1.3 · 105) · (6.1 · 10–3) b) (4.7 · 10–8) · (3 · 106) · (2.5 · 10–4)
17. Efectúa as operacións en notación científica: a) (5 · 10–8) : (1.5 · 10–3) b) (3.25 · 10–5) · (5 · 102) : (6.15 · 10^{-7})
18. Estímase que o volume da auga dos océanos é de 1 285 600 000 km³ e o volume da auga doce é de 35 000 000 km³. Escribe esas cantidades en notación científica e calcula a proporción da auga doce.
19. Sábese que nun átomo de hidróxeno o núcleo constitúe o 99 % da masa, e que a masa dun electrón é aproximadamente de $9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. Que masa ten o núcleo dun átomo de hidróxeno? (*Recorda*: Un átomo de hidróxeno está formado polo núcleo, cun protón, e por un único electrón)
20. A Xoán fixéronlle unha análise de sangue e ten 5 millóns de glóbulos vermellos en cada mm³. Escribe en notación científica o número aproximado de glóbulos vermellos que ten Xoán estimando que ten 5 litros de sangue.

5. RADICAIS

21. Calcula todas as solucións: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10\,000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$
22. Expresa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$
23. Extrae os factores posibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$
24. Expresa en forma de produto ou de cociente: a) $\sqrt[3]{a \cdot b}$ b) $\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\dfrac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$
25. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$
26. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{2^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$
27. Simplifica a expresión: a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:
   a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$
   e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$ f) $(-18)^4 : (-3)^4$ g) $(6)^5 : (6)^2$ h) $(-3)^2 : (-3)^4$
2. Expresa en forma de única potencia:
   a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$
   b) $[(2)^7 : (-3)^7] \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^4$
   c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$
   d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$
3. Expresa en forma de potencia de expoñente positivo: $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$
4. Expresa en forma de única potencia: $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$
5. Expresa en forma de única potencia: $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$
6. Expresa en forma de única potencia:
   a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
   d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$
7. Expresa en forma de única potencia:
   a) $\dfrac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$
   b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$
   c) $\dfrac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$
8. Expresa en forma de notación científica:
   a) 140 000 000 b) 32 800 c) 71 000 000 000 000 000 d) 0.0000075
   e) –18 000 000 f) 0.00000000042 g) –0.009 h) 0.00000000007
9. Busca información expresada en notación científica sobre:
   a) a distancia entre a Terra e a Lúa b) Unidade de masa atómica
   c) Km que corresponden a un ano luz d) Un gúgol d) a lonxitude de onda dos raios cósmicos
10. Realiza as operacións e expresa o resultado en notación científica:
    a) $4 \cdot 10^3 + 2.4 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2.3 \cdot 10^{-5} - 3.45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$
    c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4.5 \cdot 10^2$ d) $1.8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$
11. A estrela Sirio está a uns 8.611 anos luz do noso planeta. Expresa en metros, mediante notación científica a distancia que percorrería unha nave espacial que realizara un traxecto de ida e volta a Sirio. (*Recorda*: Un ano luz, a lonxitude que percorre a luz nun ano, é aproximadamente igual a 9.46×10^{12} km (9 460 730 472 580.8 km con máis aproximación))
12. A masa dun electrón en repouso estímase en $9.11 \cdot 10^{-31}$kg, a dun protón é de $1.672 \cdot 10^{-27}$kg, e a dun neutrón 1.64×10^{-27} kg. Calcula a masa dun átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protóns, seis electróns e 6 + 2 = 8 neutróns. (O C_{14} é un isótopo que ten dous neutróns máis que o carbono normal e que se utiliza para datar).
13. Calcula e expresa en notación científica:
    a) $0.00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7.45 \cdot 10^{-5} - 6.32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^6 - 2.8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^5$
    c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^2 + 1.4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2.7) \cdot 10^{-3} + 4.2 \cdot 10^{-6}$
14. Expresa o resultado desta operación en notación científica: a) $\frac{2.4 \cdot 10^{-3} - 1.5 \cdot 10^{-4}}{0.025 + 3 \cdot 10^{-4}}$ b) $\frac{(1.3 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^3)}{(4 \cdot 10^5) \cdot (2.3 \cdot 10^6)}$
15. Estímase que existen 40 millóns de bacterias nun gramo de terra. Expresa en notación científica de forma aproximada o número de bacterias que existen nuns camións que están descargando 50 toneladas métricas de area nunha praia.
16. Se $x = 240\,000$; $y = 0.00058$; $z = 7.2 \cdot 10^6$: Calcula e expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^7$ c) $3x - 5y$
17. *Arquímedes*, no seu tratado *O "arenario"* conta unha maneira para expresar números moi grandes, como o número de grans de area que hai en toda a Terra. Imos estimalos agora por outro procedemento. Estimamos cantos grans de area necesitamos para ter un gramo de area. Paréceche que 50 grans de area. Estímase que a masa da Terra é de:
    $M_T = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ g $= 598 \cdot 10^{25}$ g

    Calcula de forma aproximada o número de grans de area que hai en toda a Terra.

18. Vemos en Internet que a masa de Marte é de 639E21 kg, que a masa de Xúpiter é de 1.898E27 kg, e que a masa da Terra é de 5.972E24 kg. a) Calcula cantas veces cabería a Terra no planeta Xúpiter. b) Calcula a relación entre a masa da Terra e a de Marte.

Raíces

19. Calcula: a) $\sqrt{12\,100}$ b) $\sqrt[3]{-0.008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0.49}$

20. Calcula: a) $\sqrt[4]{2.0736}$ b) $\sqrt[5]{-0.00001}$ c) $\sqrt{33\,640\,000}$ d) $\sqrt[3]{-2.7\cdot 10^{-6}}$

21. Expresa en forma de raíz: a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

22. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

23. Extrae os factores posibles destes radicais:

    a) $\sqrt{3^3\cdot 10^5\cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9\cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11}\cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4\cdot 5^6}$

24. Extrae os factores posibles destes radicais:

    a) $\sqrt[3]{a^7\cdot b^3\cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5}\cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5:6^8}$ d) $\sqrt{x^3\cdot x^8\cdot x}$

25. Simplifica: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3\cdot y^4}{x^8\cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5:\left(\frac{4}{3}\right)^5}$

26. Expresa en forma de produto: a) $\sqrt{3\cdot 50\cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2\cdot 2^4\cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8\cdot 3^4\cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8\cdot b^2\cdot c^6}$

27. Expresa en forma de cociente: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

28. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

29. Simplifica as operacións: a) $\sqrt[3]{3^5}\cdot\sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)\cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}}:\sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{10^5}:\sqrt{2^3}$

30. Simplifica as operacións: a) $\sqrt[3]{x^5}:\sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5\cdot(-2)^6\cdot(-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}}:\sqrt[5]{(-6)^7\cdot 3^{10}}$

31. Simplifica as operacións: a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}:5^{\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{(-4)^5\cdot\sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3:\sqrt{2^5}}}$ c) $\dfrac{\left(\left(-7^3\right)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

AUTOAVALIACIÓN

1. O resultado das operacións seguintes é: $(-6)^3 \cdot (-6)^{-5} \cdot (-6)$ e $(12)^7 : (12)^5$
   a) 6 e 12^2 b) 1/6 e 12^5 c) –1/6 e 12^2
2. O resultado das operacións seguintes é: $(-5)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (6)^4$ e $(-8)^7 : (5)^7$
   a) $(-30)^4$ e $(-3)^7$ b) 30^4 e $(-8/5)^7$ c) 30^4 e $(-3)^7$
3. O resultado das operacións seguintes é: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ e $((-5)^{2/3})^6$
   a) $(-2)^{15}$; (-1) e $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) e -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) e $(-5)^4$
4. O resultado das operacións seguintes é: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ e $(10^5)^{-2}$
   a) 1/512; 1/16 e $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ e $1/10^{10}$
5. O resultado das operacións seguintes é: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ e $(-2/5)^4$
   a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ e $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 e $2^4/5^4$
6. O resultado das operacións seguintes é: $(2/3)^3 \cdot (2/3)^2 \cdot (2/3)^{-5}$
   a) 1 b) 2/3 c) –2/3 d) $(2/3) \cdot (-3/2)$
7. As expresións $3.1 \cdot 10^8$ e 0.0000000095 corresponden a :
   a) 3 100 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-10}$ b) 310 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-10}$ c) 310 000 000 e $9.5 \cdot 10^{-9}$
8. O resultado desta operación é: $(0.00098 + 3 \cdot 10^{-6} - 4.2 \cdot 10^{-4}) \cdot 2.5 \cdot 10^5$
   a) 124.5 b) 2 407.5 c) 107.5 d) 140.75
9. O resultado das operacións seguintes é: $\sqrt[3]{-1\,331}$; $\sqrt{256}$ e $\sqrt[5]{-1}$
   a) –11, 16, –1 b) 11, 16, 1 c) –11, –16, –1
10. As seguintes expresións corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ e $(-5)^{4/3}$
    a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{-(5^4)}$
11. O resultado de extraer factores destes radicais é: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ e $\sqrt{2^3 \cdot 5^5}$
    a) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e $2 \cdot 5^3 \sqrt{2 \cdot 5}$ b) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e $50\sqrt{10}$ c) $(-5) \cdot \sqrt[3]{(-5)}$ e (-5)·3√(-5)
12. As operacións seguintes $\sqrt[3]{-(5):12}$ e $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$ poden expresarse:
    a) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[9]{-18}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ e $\sqrt[6]{-18}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ e $\sqrt[9]{18}$

RESUMO

	POTENCIAS E RAÍCES	*Exemplos*
Produto e cociente de potencias	No produto de potencias coa mesma base súmanse os expoñentes. No cociente réstanse os expoñentes. Co mesmo expoñente: No produto, multiplícanse as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente. No cociente divídense as bases e elévase o resultado ao mesmo expoñente.	$(-5)^4 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5 \cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia dun produto e dun cociente	A potencia dun produto é igual ao produto de cada un dos factores elevados a esta potencia: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$ A potencia dun cociente é igual ao cociente do dividendo e do divisor elevados a esta potencia: $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6 /(-2)^6$
Potencia doutra potencia	$((d)^m)^n = d^{mxn}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de expoñente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operacións	$a \cdot 10^{\pm n}$ sendo $1 \leq a \leq 9$. + n para grandes números –n para pequenos números	$320000000 = 3{,}2 \cdot 10^8$ $0{,}0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$
Radicais: raíces de índice calquera	$\sqrt{49} = 7; \sqrt[3]{-216} = -6; \sqrt[3]{64} = 4; \sqrt[4]{81} = 3; \sqrt[5]{-32} = -2$	
Potencias de expoñente racional	Unha potencia con expoñente racional pode expresarse en forma de raíz cuxo índice é o denominador do expoñente e o radicando queda elevado ao numerador do expoñente: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5} = \sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores dun radical	Se $m = n \cdot c + r$ entón $\sqrt[n]{a^m} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7} = 8^2 \cdot \sqrt[3]{8}$
Operacións con radicais	$\sqrt[n]{x \cdot y \cdot z} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2} =$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

CAPÍTULO 3: SUCESIÓNS. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS E XEOMÉTRICAS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

1. Escribe os dez primeiros termos das seguintes sucesións:
   a) –1, –2, –3, –4,… b) 1, 4, 9, 16,… c) 1, 3, 5, 7,…
2. Escribe o termo que ocupa o lugar 100 de cada unha das sucesións anteriores.
3. Sabemos que un corpo con densidade suficiente que cae libremente sobre a Terra ten unha velocidade que aumenta 9,8 m/s. Se no primeiro segundo a súa velocidade é de 15 m/s, escribe no teu caderno a velocidade nos segundos indicados na táboa. Observas algunha regra que che permita coñecer a velocidade ao cabo de 20 segundos? Representa graficamente esta función.

Tempo en segundos	1	2	3
Velocidade en m/s	15		

4. Escribe os catro primeiros termos das seguintes sucesións:
   i. $a_n = 2n^2 + 1$ $b_n = \frac{4n-1}{3n}$ $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$ $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$
5. Escribe a expresión do termo xeral das seguintes sucesións:
   a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…} , b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…} , c) {2, 4, 6, 8, 10,…} , d) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{9}{8}, \ldots\right\}$
6. Nunha sucesión o primeiro termo é 2 e os demais obtéñense sumando 4 ao termo anterior. Calcular os 6 primeiros termos da sucesión.
7. Un satélite artificial púxose en órbita ás 17 horas e 30 minutos. Tarda en dar unha volta completa á súa órbita 87 minutos. A) Completa no teu caderno a táboa adxunta. B) Escribe unha expresión xeral que che permita coñecer a hora en que completou a volta *n*-ésima. C) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da hora da órbita anterior. D) Busca unha expresión que che permita coñecer a hora en función da primeira. E) Cantas voltas completas terá dado 20 días máis tarde ás 14 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora na que a completa						

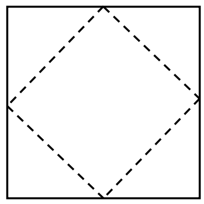
2. PROGRESIÓNS ARITMÉTICAS

8. Sinala razoadamente se a seguinte sucesión é unha progresión aritmética: {1, 10, 100, 1 000, 100 000, ….}.
9. Calcula os tres primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que o primeiro é 1 e a diferenza é –2.
10. Dada unha progresión aritmética dous de cuxos termos son: $a_3 = 4$ e $a_{10} = 18$. A) Calcula a súa diferenza. B) Calcula o seu termo xeral.
11. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética con diferenza 2 e $a_{30} = 60$.
12. Cal é o termo xeral dunha progresión aritmética con $a_{22} = 45$ e $d = 3$?
13. Os lados dun pentágono están en progresión aritmética de diferenza 5. Sabendo ademais que o seu perímetro é 65, calcula o valor dos lados.
14. Calcula os 5 primeiros termos dunha progresión aritmética de primeiro termo 2 e de diferenza 3. Represéntaos graficamente. Observa que a súa representación gráfica é un conxunto de puntos asilados que están sobre unha recta.
15. Calcula a expresión xeral das progresións aritméticas:
    a) De diferenza $d = 2.5$ e de primeiro termo 2.
    b) De diferenza $d = -2$ e de primeiro termo 0.
    c) De diferenza $d = 1/3$ e de segundo termo 5.
    d) De diferenza $d = 4$ e de quinto termo 1.
16. Cantos múltiplos de 7 están comprendidos entre o 4 e o 893?
17. Suma os 10 primeiros termos da progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}
18. Calcula a suma dos 50 primeiros múltiplos de 3.

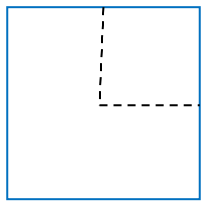
19. Nunha sucesión aritmética dun número impar de termos o central vale 12, canto valerá a suma do primeiro máis o último?
20. O dono dun pozo contrata a un rabdomante para coñecer a profundidade á que se encontra a auga e este ditamina que a 5 m hai auga en abundancia. Pide un orzamento a un contratista, que lle di que o primeiro metro lle custará 50 euros e por cada medio metro máis 6 euros máis que polo medio anterior. Canto lle custará o pozo si se cumpren as predicións?
21. Antón comprou un móbil, pero non pode pagalo ao contado. Paga 60 euros cada semana, pero o vendedor sóbelle 5 euros cada semana en concepto de pagamento aprazado. Logra pagalo en 10 semanas. Canto lle custou? Canto pagou de máis? Que porcentaxe supón esta recarga sobre o prezo de venda?
22. Un nadador adestra nunha piscina de 50 m e quere controlar as perdas de velocidade por cansazo. Cronometra en cinco días consecutivos os tempos que tarda en facer 2, 5, 8, 11, 14 longos. A) Calcula o termo xeral da sucesión a_n que dá os metros percorridos no día n. B) Cantos metros terá nadado nestas cronometraxes?

3. PROGRESIÓNS XEOMÉTRICAS

23. Averigua a razón dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é 27 e o cuarto é 8.
24. O cuarto termo dunha progresión xeométrica é 1/9 e a razón 1/3. Calcula o primeiro termo.
25. Calcula o sexto termo da seguinte progresión xeométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$
26. Dada unha progresión xeométrica dous de cuxos termos son: $a_3 = -8$ e $a_6 = -2\,048$. A) Calcula a súa razón. B) Calcula o seu termo xeral.
27. Certa clase de alga, chamada *clorella*, reprodúcese dobrando a súa cantidade cada dúas horas e media. Ao cabo doutras dúas horas e media volve dobrar a súa cantidade, e así sucesivamente. Se se ten no momento inicial un quilo, ao cabo de dúas horas e media hai dos quilos. A) Fai unha táboa de valores na que indiques para cada período de reprodución o número de quilos de *clorella*. B) Indica o termo xeral. C) Ao cabo de 4 días, transcorreron 40 períodos, consideras posible este crecemento?
28. O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 3 e o oitavo 384. Calcula a razón e o produto dos 8 primeiros termos.
29. Calcula o produto dos 5 primeiros termos da progresión: 3, 6, 12, 24, …
30. Un agricultor na súa granxa ten 59 049 litros de auga para dar de beber aos animais. Un día utiliza a metade do contido, ao seguinte a metade do que lle quedaba e así sucesivamente cada día. Cantos litros de auga utilizou ata o sexto día?
31. Suma os quince primeiros termos dunha progresión xeométrica na que $a_1 = 5$ e $r = ½$
32. Calcula a suma dos infinitos termos da sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…
33. Temos na man un cadrado de área 1. Cortamos as catro esquinas polos puntos medios dos lados. O novo cadrado, que área ten? Deixamos os recortes enriba da mesa. Que área de recortes hai sobre a mesa? Co novo cadrado que temos na man efectuamos a mesma operación de cortar as catro esquinas e deixalas sobre a mesa, e así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? E os recortes que quedan sobre a mesa? Calcula a suma das infinitas áreas de recortes así obtidas.



34. De novo temos un cadrado de área 1 na man, e cortámolo polas liñas de puntos como indica a figura. o trozo maior deixámolo sobre a mesa e quedamos na man co cadrado, que cortamos da mesma forma. E así sucesivamente. Que área teñen os sucesivos cadrados que teño na man? Medran o diminúen? Escribe o termo xeral da sucesión de áreas que temos na man. E os recortes que quedan sobre a mesa? Medra a área ou diminúe? Imos sumando áreas, calcula a suma destas áreas se fixeramos infinitos cortes.

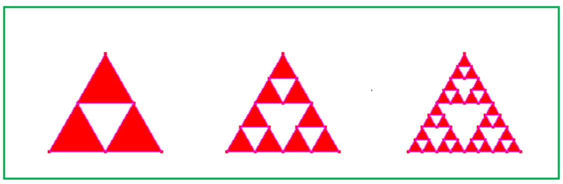


35. Calcula a fracción xeratriz do número $4.5\hat{6}\hat{1}$.
36. Un empresario acode a unha entidade financeira para informarse sobre como investir os 6 000 € de beneficios que obtivo nun mes. Propóñenlle dúas opcións.
    a) Manter ese capital durante 5 anos ao 3.5 % anual ou
    b) Recibir o 5 % do capital durante os dous primeiros anos e o 3 % os tres anos restantes. Que opción lle interesa máis?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula o termo que ocupa o lugar 100 dunha progresión aritmética cuxo primeiro termo é 4 e a diferenza é 5.
2. O décimo termo dunha progresión aritmética é 45 e a diferenza é 4. Calcula o primeiro termo.
3. Sabendo que o primeiro termo dunha progresión aritmética é 4, a diferenza 7 e o termo *n*-ésimo 88, calcula n.
4. Calcula o primeiro termo dunha progresión aritmética e a diferenza, sabendo que $a_3 = 24$ e $a_{10} = 66$.
5. O termo sexto dunha progresión aritmética é 4 e a diferenza 1/2. Calcula o termo 20.
6. Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que as súas medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferenza 3.
7. Calcula tres números que estean en progresión aritmética e tales que, aumentados en 5, 4 e 7 unidades respectivamente, sexan proporcionais a 5, 6 e 9.
8. Calcula a suma dos múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 e 2 000.
9. O produto de tres termos consecutivos dunha progresión aritmética é 80 e a diferenza é 3. Calcula estes termos.
10. Cantos termos hai que sumar da progresión aritmética 2, 8, 14,... para obter como resultado 1 064?
11. A suma de n números naturais consecutivos tomados a partir de 11 é 1 715. Cantos termos sumamos?
12. Sabendo que o quinto termo dunha progresión aritmética é 18 e a diferenza é 2, calcula a suma dos nove primeiros termos da sucesión.
13. A suma de tres números en progresión aritmética é 33 e o seu produto 1 287. Calcula estes números.
14. Tres números en progresión aritmética teñen por produto 16 640; o máis pequeno vale 20. Calcula os outros dous.
15. O produto de cinco números en progresión aritmética é 12 320 e a súa suma 40. Calcula estes números sabendo que son enteiros.
16. Calcula tres números sabendo que están en progresión aritmética, que a súa suma é 18 e que a suma do primeiro e do segundo é igual ao terceiro diminuído en dúas unidades.
17. A suma dos once primeiros termos dunha progresión aritmética é 176 e a diferenza dos extremos é 30. Calcula os termos da progresión.
18. Calcula catro números en progresión aritmética, coñecendo a súa suma, que é 22, e a suma dos seus cadrados, 166.
19. A diferenza dunha progresión aritmética é 4. O produto dos catro primeiros termos é 585. Calcula os termos.
20. Calcula os seis primeiros termos dunha progresión aritmética sabendo que os tres primeiros suman –3 e os tres últimos 24.
21. Nunha progresión aritmética o onceavo termo excede en 2 unidades ao oitavo, e o primeiro e o noveno suman 6. Calcula a diferenza e os termos mencionados.
22. Nunha progresión aritmética, os termos segundo e terceiro suman 19, e os termos quinto e sétimo suman 40. Calcúlaos.
23. Sabendo que as medidas dos tres ángulos dun triángulo están en progresión aritmética e que un deles mide 100º, calcula os outros dous.
24. Calcula as dimensións dun ortoedro sabendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m e que o volume do ortoedro é de 15 470 m.
25. Os seis ángulos dun hexágono están en progresión aritmética. A diferenza entre o maior e o menor é 60º. Calcula o valor de cada ángulo.
26. As lonxitudes dos tres lados dun triángulo rectángulo están en progresión aritmética e suman 36 metros. Canto mide cada lado?
27. Un coronel manda 5 050 soldados e quere formar con eles un triángulo para unha exhibición, de modo que a primeira fila teña un soldado, a segunda dous, a terceira tres, etc. Cantas filas ten que haber?
28. Polo aluguer dunha casa acórdase pagar 800 euros ao mes durante o primeiro ano e cada ano aumentarase o aluguer en 50 euros mensuais. Canto se pagará mensualmente ao cabo de 12 anos?
29. As idades de catro irmáns forman unha progresión aritmética e a súa suma é 32 anos. O maior ten 6 anos máis que o menor. Calcula as idades dos catro irmáns.
30. Un esquiador comeza a pretempada de esquí facendo pesas nun ximnasio durante unha hora. Decide incrementar o adestramento 10 minutos cada día. Canto tempo deberá adestrar ao cabo de 15 días? Canto tempo en total terá dedicado ao adestramento ao longo de todo un mes de 30 días?
31. Nunha sala de cine, a primeira fila de butacas dista da pantalla 86 dm e a sexta, 134 dm. En que fila estará unha persoa se a súa distancia á pantalla é de 230 dm?
32. Calcula o termo onceavo dunha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é igual a 1 e a razón é 2.
33. O quinto termo dunha progresión xeométrica é 81 e o primeiro é 1. Calcula os cinco primeiros termos da progresión.

34. Nunha progresión xeométrica de primeiro termo 7 e razón 2, un certo termo é 28 672. Que lugar ocupa este termo?
35. Sabendo que o sétimo termo dunha progresión xeométrica é 1 e a razón 1/2, calcula o primeiro termo.
36. Nunha progresión xeométrica sábese que o termo decimoquinto é igual a 512 e que o termo décimo é igual a 16. Calcula o primeiro termo e a razón.
37. Descompón o número 124 en tres sumandos que formen progresión xeométrica sendo 96 a diferenza entre o maior e o menor.
38. O volume dun ortoedro é de 3375 cm3. Calcula a lonxitude das súas arestas, sabendo que están en progresión xeométrica e que a aresta intermedia mide 10 cm máis que a menor.
39. Calcula o produto dos oito primeiros termos da progresión 3, 6, 12, 24,...
40. Calcula a suma dos dez primeiros termos da progresión xeométrica 3, 6, 12, 24,...
41. A suma dos oito primeiros termos dunha progresión xeométrica é 17 veces a suma dos catro primeiros. Calcula o valor da razón.
42. Calcula a suma dos termos da progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...
43. Calcula tres números en progresión xeométrica sabendo que a súa suma é 26 e o seu produto 216.
44. Calcula o produto dos once primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o termo central vale 2.
45. Tres números en progresión xeométrica suman 525 e o seu produto vale un millón. Calcula estes números.
46. Determina catro números en progresión xeométrica de maneira que os dous primeiros sumen 0,5 e os dous últimos 0,125.
47. Cantos termos se tomaron nunha progresión xeométrica sabendo que o primeiro termo é 7, o último 448 e a súa suma 889?
48. A suma dos sete primeiros termos dunha progresión xeométrica de razón 3 é 7 651. Calcula os termos primeiro e sétimo.
49. Calcula tres números en progresión xeométrica cuxo produto é 328 509, sabendo que o maior excede en 115 á suma dos outros dous.
50. Tres números están en progresión xeométrica; o segundo é 32 unidades maior que o primeiro e o terceiro, 96 unidades maior que o segundo. Calcula os números.
51. Calcula os catro primeiros termos dunha progresión xeométrica sabendo que o segundo é 20 e a suma dos catro primeiros é 425.
52. Calcula os ángulos dun cuadrilátero se se sabe que están en progresión xeométrica e que o maior é 27 veces o menor.
53. As dimensións dun ortoedro están en progresión xeométrica. Calcula estas dimensións sabendo que o seu perímetro é 420 m e o seu volume 8 000 m^3.
54. Divide o número 221 en tres partes enteiras que forman unha progresión xeométrica tal que o terceiro termo sobre pasa ao primeiro en 136.
55. A suma de tres números en progresión xeométrica é 248 e a diferenza entre os extremos 192. Calcula estes números.
56. Calcula catro números en progresión xeométrica sabendo que a suma dos dous primeiros é 28 e a suma dos dous últimos 175.
57. Nunha progresión xeométrica, os termos primeiro e decimoquinto son 6 e 54, respectivamente. Calcula o termo sexto.
58. Unha progresión xeométrica ten cinco termos, a razón é igual á cuarta parte do primeiro termo e a suma dos dous primeiros termos é 24. Calcula os cinco termos.
59. Calcula x para que x – 1, x + 1, 2(x + 1) estean en progresión xeométrica.
60. A unha corda de 700 m de lonxitude dánselle dous cortes, de modo que un dos anacos extremos teña unha lonxitude de 100 m. Sabendo que as lonxitudes dos anacos están en progresión xeométrica, determina a lonxitude de cada anaco.
61. Calcula a fracción xeratriz do número decimal 0.737373..., como suma dos termos dunha progresión xeométrica ilimitada.
62. Tense un bocoi de viño que contén 1 024 litros. O 1 de outubro baleirouse a metade do contido; ao día seguinte volveuse baleirar a metade do que quedaba, e así sucesivamente todos os días. Que cantidade de viño se sacou o día 10 de outubro?
63. Dado un cadrado de 1 m de lado, unimos dous a dous os puntos medios dos seus lados; obtemos un novo cadrado, no que volvemos efectuar a mesma operación, e así sucesivamente. Calcula a suma das infinitas áreas así obtidas.
64. Tres números cuxa suma é 36 están en progresión aritmética. Calcula estes números sabendo que se se lles suma 1, 4 e 43, respectivamente, os resultados forman unha progresión xeométrica.
65. *Triángulo de Sierspinky*: Imos construír un fractal. Pártese dun triángulo equilátero. Únense os puntos medios dos lados e fórmanse catro triángulos. Elimínase o triángulo central. En cada un dos outros tres triángulos repítese o proceso. E así sucesivamente. A figura formada por iteración infinita denomínase *Triángulo de Sierspinky*, e é un fractal. Imaxina que o primeiro triángulo ten unha área A. Cando aplicamos a primeira iteración, a área é (3/4)A. E na segunda? Escribe a sucesión das áreas. É crecente ou decrecente? Imaxina agora que a lonxitude de cada lado do triángulo inicial é L. Escribe a sucesión das lonxitudes. É crecente o decrecente?



AUTOAVALIACIÓN

1. Cal é a razón da seguinte progresión xeométrica: $a_n = 5\cdot 3^{n-1}$?
   a) 5 b) 3 c) 2 d) non é unha progresión xeométrica
2. Na sucesión de múltiplos de 13, o 169 ocupa o lugar:
   a) 1 b) 2 c) 13 d) 169
3. A suma dos dez primeiros termos da progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,… é:
   a) 170 b) 34 c) 19 d) 340
4. A sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
   a) é unha progresión xeométrica de razón 5 b) é unha progresión aritmética de diferenza 5
   c) é unha progresión xeométrica de razón 3 d) é unha progresión aritmética de diferenza 3.
5. Sexa a sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... o seu termo xeral é:
   a) $a_n = 2\cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2\cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5\cdot 5^{n-1}$ d) $a_n = 5\cdot 2^{n-1}$
6. Canto suman as potencias de 2 comprendidas entre 2^1 e 2^{10}?
   a) 1 022 b) 2 046 c) 1 024 d) 2 048
7. A progresión aritmética cuxo primeiro termo é 1 e a súa diferenza 2, ten como termo xeral:
   a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$
8. Cal é o valor da suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?
   a) 500 000 b) 250 000 c) 50 000 d) 25 000
9. María está preparando o exame de selectividade. Para non deixar toda a materia para o final decidiu estudar cada día o dobre de páxinas que o día anterior. Se o primeiro día estudou tres páxinas, cantas terá estudado ao cabo de 7 días?
   a) 381 b) 192 c) 765 d) 378
10. A Roberto tocáronlle 6 000 € na lotería e decide depositalos no banco a un tipo de interese composto do 4 %. Canto diñeiro terá ao cabo de 5 anos?
    a) 6 240 € b) 6 104 € c) 7832.04 € d) 7299.92 €

RESUMO

Progresión aritmética	É unha sucesión de números reais na que a diferenza entre dous termos consecutivos da sucesión é constante. A esta constante chámaselle diferenza da progresión e soe denotarse coa letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Termo xeral	$a_n = a_k + (n - k)$ sendo a_k o termo que ocupa o lugar *k*	$a_n = 2 + 3n$
Suma dos *n* primeiros termos	$S_n = \dfrac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$	$S_8 = (8/2)\cdot(2 + (2 + 3\cdot 8)) =$ $4\cdot(4 + 24) = 4\cdot 28 = 112$
Progresión xeométrica	É unha sucesión de números reais na que o cociente entre cada termo e o anterior é constante. A esta constante chámaselle razón da progresión e soe denotarse coa letra *r*. É dicir, $\dfrac{a_{i+1}}{a_i} = r$ sendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Termo xeral	$a_n = a_k\cdot r^{n-k}$ sendo a_k o termo da sucesión que ocupa o lugar *k*	$a_n = 3\cdot 2^{n-1}$; $a_n = 1\cdot(1/2)^n$
Suma	- Para $r\neq 1$, e un <u>número finito</u> de termos: $S_n = \frac{r\cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ - Para $r\neq 1$, e unha <u>cantidade ilimitada</u> de termos: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ $3(256 - 1) = 3(255) = 765.$ $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Produto dos *n* primeiros termos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n} = \pm a_1\cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = +\sqrt{(3\cdot 3\cdot 2^8)^9} = (3\cdot 2^4)^9$

CAPÍTULO 4: EXPRESIÓNS ALXÉBRICA. POLINOMIOS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICA

1. Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (*N*) así como a cantidade total de minutos de conversan (*M*). Xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

2. Escribe as expresións alxébrica que nos proporcionan a lonxitude dunha circunferencia e a área dun trapecio.
3. Reescribe, en linguaxe alxébrica, os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

   a) o triplo da súa diferenza b) a suma dos seus cadrados c) o cadrado da súa suma
   d) o inverso do seu produto e) a suma dos seus opostos f) o produto dos seus cadrados

4. Unha tenda de roupa anuncia no seu escaparate que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 30 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha prenda en función do que aparece na súa etiqueta.
5. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébrica para o valor ou valores que se indican:

   a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ para $x = -2$. b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ para $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada caso, o valor numérico da expresión $x - 2y + 3z$:

   a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = -1$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$

7. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébrica para o valor ou os valores que se indican:

   a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ e $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

8. En cada un dos seguintes monomios sinala o seu coeficiente, a súa parte literal e o seu grao:

   $-12x^3$ a^4b^3c $4xy^2$

9. Para cada un dos seguintes polinomios destaca o seu grao e os monomios que o constitúen:

   $5x^4 + 7x^2 - x$ $6x^2 + 10 - 2x^3$ $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

10. Consideremos o polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Calcula os seguintes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ e $p(1/2)$.
11. Realiza as seguintes sumas de polinomios:
    - $(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)$
    - $(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2$
12. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

    a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 9$ b) $-5x$ c) $-x^3 + 7x$

13. Considera os polinomios $p \equiv x^2 - x + 1$, $q \equiv -x^3 + 2x - 3$, así como o polinomio suma $s \equiv p + q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x = -2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ e $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.
14. Obtén o valor do polinomio $p \equiv 4x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x = 2$?

15. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

    $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$ $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$
    $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$ $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

16. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:
a) $(5x^2+2)-(-2x)$ b) $(-2x^3+4x)-(-2x-1)$ c) $(7x^2-2x)-(3x^3+4x^2-x+1)$
17. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:
a) $3x^2-x+2$ b) $-6x^3+2x-3$ c) $-x^2+9x-2$
18. Calcula e simplifica os seguintes produtos:
a) $x\cdot(-2x+4)$ b) $(2x-3)\cdot(3x+2)$ c) $(a-2)\cdot(4-3a)$ d) $(3a-b^2)\cdot(2b-a^2)$
19. Realiza os seguintes produtos de polinomios:
a) $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$ b) $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$ c) $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$
20. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:
a) $-10x^3-15x^2+20x$ b) $30x^4+24x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- as tres etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \\ \underline{4x^2-2x+6} & \\ -11x+4 & \end{array}$$

22. Divide os seguintes polinomios:
a) $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1
b) $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$
c) $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$
d) $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3
e) x^5-4x-6 entre x^2+3
23. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente e $r(x)=2x^2-3$ como resto.
24. Realiza os cálculos:
a) $(1+x)^2$ b) $(-x+2)^2$ c) $(x-2)^2$ d) $(2a-3)^2$ e) $(x^2+1)^3$ f) $(2b-4)^3$
25. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:
a) $(a+b+c)^2$ b) $(a-b+c)^2$
26. Desenvolve as seguintes potencias:
a) $(3x-y)^2$ b) $(2a+x/2)^2$ c) $(4y-2/y)^2$
d) $(5a+a^2)^2$ e) $(-a^2+2b^2)^2$ f) $[(2/3)y-1/y]^2$
27. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébrica:
a) a^2-6a+9 b) $4x^2+4x+1$ c) $b^2-10b+25$
d) $4y^2-12y+9$ e) a^4+2a^2+1 f) $y^4+6xy^2+9x^2$

28. Efectúa estes produtos:

a) $(3x+2)\cdot(3x-2)$ b) $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$ c) $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$ d) $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$ e) $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

29. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

30. Realiza as seguintes divisións de polinomios a partir da conversión do dividendo na potencia dun binomio o nun produto da forma suma por diferenza:

a) $x^2+12x+36$ entre $x+6$ b) $4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$ c) $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$ d) x^2-5 entre $x+\sqrt{5}$

31. Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$ c) $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

32. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, só un dos denominadores, e o seu respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

33. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(2x^3-8x^2+6x):2x$ b) $(5a^3+60a^2-20):5$ c) $(16x^3+40x^2):8x^2$ d) $(6x^2y^3-4xy^2):xy^2$

34. Comproba as seguintes identidades simplificando a expresión do lado esquerdo de cada igualdade:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$ b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$ c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$ d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

35. Simplifica as seguintes fraccións alxébrica:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

36. En cada unha das seguintes fraccións alxébrica escribe, cando sexa posible, o polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia dun binomio ou de suma por diferenza para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Unha empresa maiorista de viaxes está confeccionando unha oferta para distribuíla en diferentes axencias de viaxe. Trátase dunha viaxe en avión, de ida e volta, a Palma de Mallorca cuxo prezo dependerá do número final de viaxeiros. Os datos concretos son:
   A) Se non hai máis de 100 persoas interesadas, o voo custará 150 euros por persoa.
   B) Se hai máis de 100 persoas interesadas, por cada viaxeiro que pase do centenar o prezo da viaxe reducirase en 1 euro. Porén o prezo do voo en ningún caso será inferior a 90 euros.

   Estuda e determina o prezo final do voo, por persoa, en función do número total de viaxeiros. Así mesmo, expresa a cantidade que ingresará a empresa segundo o número de viaxeiros.
2. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o que imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxebraica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.
   i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número par e que non o amose.
   ii. Que o multiplique por 5.
   iii. Que ao resultado anterior lle sume 5.
   iv. Que multiplique por 2 o obtido .
   v. Que ao resultado anterior lle sume 10.
   vi. Que multiplique por 5 o obtido.
   vii. Que divida entre 100 a última cantidade.
   viii. Que ao resultado precedente lle reste a metade do número que escribiu.
   ix. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

3. Os responsables dunha empresa, en previsión duns futuros altibaixos nas vendas dos produtos que fabrican, pensan propoñer aos seus traballadores a finais do ano 2014 o seguinte:
   i. A diminución dos soldos, para o próximo ano 2015, nun 10%.
   ii. Para 2016 ofrecen aumentar un 10 % os salarios de 2015.
   iii. En xeral, suxiren que o soldo diminúa un 10% cada ano impar e que aumente un 10 % cada ano par.

   Se finalmente se aplica o exposto, estuda se os traballadores recuperarán no ano 2016 o salario que tiñan en 2014. Analiza que ocorre cos soldos tras o paso de moitos anos.

4. Os responsables da anterior empresa, despois de recibir o informe dunha consultora, alteran a súa intención inicial e van propoñer aos seus traballadores, a finais do ano 2014, o seguinte:
   a) Un aumento dos soldos, para o próximo ano 2015, dun 10 %.
   b) Para 2016, unha redución do 10 % sobre os salarios de 2015.
   c) En xeral, suxiren que o soldo aumente un 10% cada ano impar e que diminúa un 10 % cada ano par.

   Se se aplica o exposto, analiza se o salario dos traballadores do ano 2016 coincidirá co que tiñan en 2014. Estuda como evolúen os soldos tras o paso de moitos anos.
5. Observa se hai números nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:

   a) $\frac{x-3}{x+1}$ b) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ c) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ d) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$
6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións nos números que se indican:

   a) $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$ b) $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$ c) $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$

   d) $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$ e) $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$
7. Unha persoa ten aforrados 3 000 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 2.5 %. Se decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?
8. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.
9. Considera os polinomios $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$ e $r(x)=x^2-3x+2$. Fai as seguintes operacións:

   a) $p+q+r$ b) $p-q$ c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$
10. Calcula os produtos:

    a) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0.1x+0.2y-0.3z)\cdot(0.3x-0.2y+0.1z)$ c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$
11. Efectúa as divisións de polinomios:

    a) $2x^3+x^2-12x+7$ entre $x+3$; b) $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$ entre $2x^2-3x+1$;

    c) $-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$ entre $-x^3-2x+3$
12. Calcula os cocientes:

    a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2)$ c) $(x^4-4x^2y+4y^2):(x^2-2y)$
13. Realiza as operacións entre fraccións alxébrica:

    a) $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$ b) $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$ d) $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$ e) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$
14. Encontra un polinomio $p(x)$ tal que ao dividir $p(x)$ entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$ se obteña como polinomio resto $r(x)=-3x^2+1$.
15. Calcula as potencias:

    a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$
16. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo expresa a súa procedencia.

    a) x^2-6x+9 b) x^4+8x^2+16 c) $x^2-\sqrt{12}\,xy+3y^2$ d) $y^4+2y^3+y^2+2y+1$
    e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ f) x^2-25 g) x^2+5 h) $5x^2-1$
    i) x^2-8y^2 j) x^4-1 k) x^2-y^2 l) $x^2-2y^2z^2$

17. Analiza se o numerador e o denominador das seguintes expresións alxébrica proceden do desenvolvemento dun binomio, ou dun produto suma por diferenza, e simplifícaas:

a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{xy^3-yx}{y^4-1}$

18. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\frac{3}{x(3-x)}-\frac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4-5x^3+\frac{x^4-1}{x^3}\cdot\frac{x^5}{x^2+1}$ c) $\frac{x-2y}{a-b}+\frac{4x+5y}{3a-3b}$

19. Simplifica todo o posible:

a) $\left(yx^4-\frac{y}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{b^3+3ab^2+3a^2b+a^3}{b-a}:\frac{b+a}{b-a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{4}{a-b}$

20. Simplifica todo o posible:

a) $\frac{\frac{1}{a+y}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y}+\frac{1}{x}}:\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}$ b) $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}$

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébrica:

a) $3\cdot\sqrt{5}\cdot x\cdot y^2$ b) $-3x^4-x^3+x+7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2}+6xa^2-\frac{3}{a}+9$

2. Destaca as variables, ou indeterminadas, das precedentes expresións alxébrica.

3. Do polinomio $5x^4-8x^2-x+9$ indica o seu grao e os monomios que o integran.

4. A expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ non ten sentido para : a) $x=7$, b) $x=2$, c) $x=7$ e $x=2$,d) $x=0$

5. Calquera polinomio:
   a) pode ser avaliado en calquera número.
   b) non pode ser avaliado no número cero.
   c) non pode ser avaliado en certos números concretos.

6. O valor numérico da expresión $\frac{x+7}{4-2y^2}+6xz^2-\frac{3}{z}$ en $x=1, y=2, z=-1$ é:

a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adecuadamente as seguintes oracións:
   a) A suma de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
   b) A suma de tres polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
   c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
   d) A diferenza de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….

8. Finaliza adecuadamente as seguintes oracións:
   a) A suma de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
   b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
   c) A diferenza de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

9. Ao dividir o polinomio $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ o polinomio resto resultante:
   a) debe ser de grao 2.
   b) pode ser de grao 2.
   c) debe ser de grao 1.
   d) ningunha das opcións precedentes.

10. Para que unha fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sexa *equivalente* a un polinomio:
   a) os polinomios $p(x)$ e $q(x)$ deben ser do mesmo grao.
   b) non importan os graos de $p(x)$ e $q(x)$.
   c) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior ou igual ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.
   d) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.

RESUMO

Expresión alxebraica	Constrúese con números e as operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división.	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	O non concretado nunha expresión alxebraica.	As variables, ou indeterminadas, do exemplo anterior son *x*, *y*, *z*
Valor numérico dunha expresión alxebraica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxebraica obtense un número, ou **valor numérico** desa expresión alxebraica para tales valores das indeterminadas.	Se facemos *x* = 3, y = –2, *z* = 1/2 obtemos $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números e indeterminadas.	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$, $7 \cdot x^2$
Coeficiente dun monomio	O número que multiplica á indeterminada, ou indeterminadas, do monomio	Os coeficientes dos anteriores monomios son, respectivamente, –5 e 7
Parte literal dun monomio	A indeterminada, ou produto de indeterminadas, que multiplica ao coeficiente do monomio	A parte literal de $-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ é $x \cdot y^3 \cdot z^2$
Grao dun monomio	Cando hai unha única indeterminada é o expoñente desta indeterminada. Se aparecen varias, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.	Os graos dos monomios precedentes son 6 e 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construída a partir da suma de monomios.	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios.	O anterior polinomio é de grao 3
Suma, resta e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio.	$p \equiv x+3,\ q \equiv x^2-2$ $p+q \equiv x^2+x+1$ $p-q \equiv -x^2+x+5$ $p \cdot q \equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dous polinomios	Obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente (*c*(*x*)) e resto (*r*(*x*)), ligados aos polinomios iniciais: os polinomios dividendo (*p*(*x*)) e divisor (*q*(*x*)).	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

CAPÍTULO 5: ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO E SISTEMAS LINEAIS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. ECUACIÓNS DE 2º GRAO

1. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:
   a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$
   b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7.3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$
2. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c*.
   a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$ c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$
3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:
   a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$
4. Averigua cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:
   a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$
5. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:
   a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$
6. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:
   a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$
   d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$
7. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 3 e 7.
8. O perímetro dun rectángulo mide 16 cm e a súa área 15 cm^2. Calcula as súas dimensións.
9. Se 3 é unha solución de $x^2 - 5x + a = 0$, canto vale *a*?

2. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

10. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

11. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

12. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

13. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

14. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

15. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor có seu cadrado?
16. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cuadrados sexa 365.
17. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?
18. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.
19. A suma das idades de Raquel e Luís son 65 anos. A idade de Luís máis catro veces a idade de Raquel é igual a 104. Que idade ten cada un?
20. A suma das idades de María e Alberto é de 32 anos. Dentro de 8 anos, a idade de Alberto será dúas veces a idade de María. Que idade ten cada un na actualidade?
21. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 123.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de segundo grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao

    a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

    d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

    g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$ h) $x \cdot (x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

2. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

    a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

    d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

3. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

    a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

    d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

    g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 5, escribe:

    $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot (x - 5) = 0$.

    Observa que se o coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

5. Cando o coeficiente b é par ($b = 2B$), podes simplificar a fórmula:

    $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

    Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta dicir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, logo as súas solucións son 2 e 4.

    Utiliza esa expresión para resolver:

    a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

6. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

    a) $(x - 2) \cdot (x - 6) = 0$ b) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$ c) $(x - 9) \cdot (x - 3) = 0$

    d) $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$ e) $(x + 7) \cdot (x - 2) = 0$ f) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$

7. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e despois resólveas.

    a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

    d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

8. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.
9. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.
10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.
11. Poderías escribir unha ecuación de segundo grao con unicamente unha solución real que non fose dobre?

Sistemas lineais de ecuacións

12. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

13. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

14. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

15. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

16. Resolve os seguintes sistemas polo método que creas máis apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

17. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

A súa solución sexa x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

A súa solución sexa x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

18. Escribe tres sistemas lineais que sexan incompatibles.
19. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles indeterminados.
20. Escribe tres sistemas lineais que sexan compatibles determinados.
21. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

22. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 51 vehículos cun total de 133 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?
23. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15 lle faltan 100 unidades para completar o seu cadrado?
24. Descompón 8 en dous factores cuxa suma sexa 6.
25. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Que número é?
26. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 394. Determina estes números.
27. Van cargados un asno e un mulo. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O mulo contestoulle: Se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti, pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?
28. Que número multiplicado por 3 é 40 unidades menor que o seu cadrado?
29. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 365.
30. Dentro de 11 anos, a idade de Mario será a metade do cadrado da idade que tiña hai 13 anos. Que idade ten Mario?
31. Dous números naturais diferéncianse en 2 unidades e a suma dos seus cadrados é 580. Cales son estes números?

32. A suma de dous números é 5 e o seu produto é –84. De que números se trata?
33. María quere formar bandexas dun quilogramo con mazapáns e polvoróns. Se os polvoróns lle custan a 5 euros o quilo e os mazapáns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 6 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 25 bandexas, que cantidade de polvoróns e de mazapáns vai necesitar?
34. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 7 cm e a hipotenusa mide 5 cm.
35. O produto de dous números é 4 e a suma dos seus cadrados 17. Calcula estes números.
36. A suma de dous números é 20. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 45. De que números se trata?
37. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 100 rodas, cantos coches e motos hai no garaxe?
38. A idade actual de Pedro é o dobre da de Raquel. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 65. Cantos anos teñen actualmente Pedro e Raquel?
39. Na miña clase hai 35 persoas. Regalarónnos a cada moza 2 bolígrafos e a cada mozo 1 caderno. Se en total había 55 regalos. Cantos mozas e mozos somos na clase?
40. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 56 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis que o meu irmán, que idade ten cada un?
41. Dous bocadillos e un refresco custan 5€. Tres bocadillos e dous refrescos custan 8 €. Cal é o prezo do bocadillo e o refresco?
42. Nunha granxa hai polos e vacas. Se se contan as cabezas, son 50. Se se contan as patas, son 134. Cantos polos e vacas hai na granxa?
43. Un rectángulo ten un perímetro de 172 metros. Se o longo é 22 metros maior que o ancho, cales son as dimensións do rectángulo?
44. Nunha bolsa hai moedas de 1 € e 2 €. Se en total hai 40 moedas e 53 €, cantas moedas de cada valor hai na bolsa?
45. Nunha pelexa entre arañas e avespas, hai 70 cabezas e 488 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?
46. Unha clase ten 32 estudantes, e o número de alumnos é o triplo do de alumnas, cantos rapaces e rapazas hai?
47. Iolanda ten 6 anos máis có seu irmán Paulo, e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos. Que idades teñen?

AUTOAVALIACIÓN

1. As solucións da ecuación $3(x^2 – 1) + 2(x^2 – 2x) = 9$ son:
   a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = –3$ c) $x = 1$ y $x = –2/3$ d) $x = 2$ y $x = –6/5$
2. As solucións da ecuación $156 = x(x – 1)$ son:
   a) $x = 11$ y $x = –13$ b) $x = 13$ y $x = –12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = –12$ y $x = –11$
3. As solucións da ecuación $3x^2 –14x + 15 = 0$ son:
   a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$
4. As solucións da ecuación $(x – 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:
   a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$
5. As solucións da ecuación $2(x + 2) – x(2 – x) = 0$ son:
   a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) non ten solución d) $x = 1$ y $x = 4$
6. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 4y = 9 \end{cases}$ son:
   a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse
7. A solución do sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ é:
   a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) Non ten solución
8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ é:
   a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = –1$ d) $x = 5$ e $y = 1$
9. Nunha granxa, entre polos e porcos hai 27 animais e 76 patas. Cantos polos e porcos hai na granxa?
   a) 16 polos e 11 porcos b) 15 polos e 12 porcos c) 13 polos e 14 porcos
10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 15, lle faltan 100 unidades para chegar ao seu cadrado?
   a) 16 anos b) 17 anos c) 20 anos d) 18 anos

RESUMO

Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxebraica na que a maior potencia da incógnita é 2. Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* son números reais, co $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuacións de 2º grao completas	Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de solucións dunha ecuación de 2º grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, ten dúas solucións 5 e –1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. Non ten solución real
Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $\boldsymbol{x = \pm\sqrt{9} = \pm 3}$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: unha única solución, ou punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: non ten solución, as rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas por números adecuados.	

CAPÍTULO 6: PROPORCIONALIDADE

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1. Estima cantas persoas caben de pé nun metro cadrado. Houbo unha festa e encheuse completamente un local de 260 m^2, cantas persoas estimas que foron a esa festa?
2. Nunha receita dinnos que para facer unha marmelada de morango necesitamos un quilogramo de azucre por cada dous quilogramos de morangos. Queremos facer 5 quilogramos de marmelada, cantos quilogramos de azucre e cantos de morangos debemos poñer?
3. A altura dunha árbore é proporcional á súa sombra (a unha mesma hora). Unha árbore que mide 1.2 m ten unha sombra de 2.3 m. Que altura terá unha árbore cuxa sombra mida 4.2 m?
4. Copia no teu caderno e completa a táboa de proporción directa. Calcula a razón de proporcionalidade.

Litros	16	4.5		1		50
Euros	36		8.10		10	

5. Gastamos 72 l de gasolina para percorrer 960 km. Cantos l necesitaremos para unha distancia de 1 500 km?
6. O meu coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km. Cantos litros gastará nunha viaxe de 1 250 km?
7. Un libro de 420 páxinas pesa 200 g. Canto pesará un libro da mesma colección de 300 páxinas?
8. Seis persoas realizan unha viaxe de oito días e pagan en total 40 800 €. Canto pagarán 15 persoas se a súa viaxe dura 5 días?
9. Calcula o prezo final dun lava vaixelas que custaba 430 € máis un 21 % de IVA, ao que se lle aplicou un desconto sobre o custe total do 15 %.
10. Calcula os termos que faltan para completar as proporcións: a) $\frac{24}{100}=\frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80}=\frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8}=\frac{x}{60}$
11. Dous pantalóns custáronnos 32 €, canto pagaremos por 5 pantalóns?
12. Copia no teu caderno e completa:
    a) Dunha factura de 127 € paguei 111 €. Aplicáronme un ……… % de desconto
    b) Descontáronme o 12 % dunha factura de …………….. € e paguei 365 €.
    c) Por pagar ao contado un moble descontáronme o 15 % e aforrei 100 €. Cal era o prezo do moble sen desconto?
13. A distancia real entre dúas vilas é 18.5 km. Se no mapa están a 10 cm de distancia. A que escala está debuxado?
14. Que altura ten un edificio se a súa maqueta construída a escala 1:300 presenta unha altura de 12 cm?
15. Debuxa a escala gráfica correspondente á escala 1:60000.
16. As dimensións dunha superficie rectangular no plano son 6 cm e 14 cm. Se está debuxado a escala 1:40, calcula as súas medidas reais.

2. PROPORCIONALIDADE INVERSA

17. Copia no teu caderno a táboa seguinte, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade inversa:

Magnitude A	36	0.09		12	
Magnitude B	0.25		6		72

18. Ao cortar unha cantidade de madeira conseguimos 6 paneis de 2.25 m de longo. Cantos paneis conseguiremos se agora teñen 1.5 m de longo?
19. Para encher un depósito ábrense tres billas que lanzan 2 litros por minuto cada unha e tardan 6 horas. Canto tempo tardarán 4 billas similares que lanzan 5 litros por minuto cada unha?
20. Tres máquinas fabrican 1 200 pezas funcionando 5 horas diarias. Cantas máquinas se deben poñer a funcionar para conseguir 6 000 pezas durante 9 horas diarias?
21. Na construción dunha ponte de 900 m utilizáronse 250 vigas, pero o enxeñeiro non está moi seguro e decide reforzar a obra engadindo 75 vigas máis. Se as vigas se colocan uniformemente ao longo de toda a ponte, a que distancia se colocarán as vigas?
22. Nunha horta ecolóxica utilízanse 3 000 kg dun tipo de esterco de orixe animal que se sabe que ten un 10 % de nitratos. Cámbiase o tipo de esterco, que agora ten un 15 % de nitratos, cantos quilogramos se necesitarán do novo esterco para que as plantas reciban a mesma cantidade de nitratos?
23. Esa mesma horta necesita 1 200 caixas para envasar as súas mandarinas en caixas dun quilogramo. Cantas caixas necesitaría para envasalas en caixas de medio quilogramo? E para envasarlas en caixas de 2 quilogramos?

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

24. Cinco persoas comparten lotería con 10, 6, 12, 7 e 5 participacións respectivamente. Se obtiveron un premio de 18 000 € canto corresponde a cada un?
25. Nun concurso acumúlase puntuación de forma inversamente proporcional ao número de erros. Os catro finalistas, con 6, 5, 2 e 1 erro, deben repartir os 1 400 puntos. Cantos puntos recibirá cada un?
26. No testamento, o avó establece que quere repartir entre os seus netos 22 200 €, de maneira proporcional ás súas idades, 12, 15 e 18 anos, coidando que a maior cantidade sexa para os netos menores. Canto recibirá cada un?
27. Tres socios investiron 20 000 €, 34 000 € e 51 000 € este ano na súa empresa. Se os beneficios a repartir a final de ano ascenden a 31 500 €, canto corresponde a cada un?
28. Calcula o prezo do quilo de mestura de dous tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg e 5.20 kg a 6 €/kg.
29. Cantos litros de zume de pomelo de 2.40 €/l deben mesturarse con 4 litros de zume de laranxa a 1.80 €/l para obter unha mestura a 2.13 €/l?
30. Calcula a lei dunha xoia sabendo que pesa 110 g e contén 82 g de ouro puro.
31. Cantos quilates, aproximadamente, ten a xoia anterior?

4. INTERESE

32. Calcula o interese simple que producen 105 000 € ao 4.8 % durante 750 días.
33. Ao 5 % de interese composto durante 12 anos, cal será o capital final que obteremos ao depositar 39 500 €? Axuda: tamén podes utilizar a folla de cálculo.
34. Que capital hai que depositar ao 1.80 % durante 6 anos para obter un interese simple de 777.6 €?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade directa:

litros	6.25		0.75	1.4	
euros		15	2.25		4.5

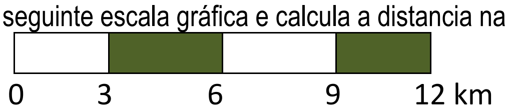
2. Con 76 € pagamos 12.5 m de tea, canto nos custarán 22.5 m?
3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. Canto gastaremos os meses de xuño e xullo?
4. Para tapizar cinco cadeiras utilicei 2.3 m de tela, cantas cadeiras poderei tapizar coa peza completa de 23 m?
5. Un camión transportou en 3 viaxes 220 sacos de patacas de 24 kg cada un. Cantas viaxes serán necesarias para transportar 550 sacos de 30 kg cada un?
6. Unha edición de 350 libros de 210 páxinas cada un acada un peso total de 70 kg. Cantos kg pesará outra edición de 630 libros de 140 páxinas cada un?
7. Sabendo que a razón de proporcionalidade directa é $\frac{A}{B}$ = 1.8, copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Magnitude A	12.6			4.14	
Magnitude B		9	0.1		2.7

8. O modelo de teléfono móbil que custaba 285 € + IVA está agora cun 15 % de desconto. Cal é o seu prezo rebaixado? (IVE 21 %)
9. Por retrasarse dous meses no pagamento dunha débeda de 1 520 €, unha persoa debe pagar unha recarga do 12 %, canto ten que devolver en total?
10. Que tanto por cento de desconto se aplicou nunha factura de 1 820 € se finalmente se pagaron 1 274 €?
11. Ao comprar un televisor obtiven un 22 % de desconto, polo que ao final paguei 483.60 €, cal era o prezo do televisor sen desconto?
12. Por liquidar unha débeda de 3 500 € antes do previsto, unha persoa paga finalmente 3 080 €, que porcentaxe da súa débeda aforrou?
13. O prezo dunha viaxe anúnciase a 907.50 € IVE incluído. Cal era o prezo sen IVE? (IVE 21 %)
14. Que incremento porcentual se efectuou sobre un artigo que antes valía 38 € e agora se paga a 47.12 €?
Un mapa está debuxado a escala 1:700000. A distancia real entre dúas cidades é 21 km. Cal é a súa distancia no mapa?
15. A distancia entre Oviedo e A Coruña é de 340 km. Se no mapa están a 10 cm, cal é a escala á que está debuxado?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

16. Interpreta a seguinte escala gráfica e calcula a distancia na realidade para 21 cm.



17. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Tamaño no debuxo	Tamaño real	Escala
24 cm longo e 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

18. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa:

Magnitude A	4	7.5		3.6	
Magnitude B		12	0.18		10

19. Que velocidade debe levar un automóbil para percorrer en 4 horas certa distancia se a 80 km/h tardou 5 horas e 15 minutos?
20. A razón de proporcionalidade inversa entre A e B é 5.4. Copia no teu caderno e completa a táboa seguinte:

A	18		9		10.8
B		0.03		2.7	

21. Na granxa faise o pedido de forraxe para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Se vende 60 vacas, cantas semanas lle durará a forraxe? E se en lugar de vender, compra trinta vacas? E se decide rebaixar a ración unha cuarta parte coas 240 vacas?
22. Con doce paquetes de 3.5 kg cada un poden comer 80 galiñas diariamente. Se os paquetes fosen de 2 kg, cantos necesitariamos para dar de comer ás mesmas galiñas?
23. Determina se as dúas magnitudes son directa ou inversamente proporcionais e completa a táboa no teu caderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

24. Se a xornada laboral é de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un traballo. Se rebaixamos a xornada en media hora diaria, cantos operarios serán necesarios para realizar o mesmo traballo?
25. Nun almacén gárdanse reservas de comida para 80 persoas durante 15 días con 3 racións diarias, cantos días duraría a mesma comida para 75 persoas con 4 racións diarias?
26. Dez operarios instalan 3 600 m de valla en 6 días. Cantos días tardarán 12 operarios en instalar 5 040 m de valla?
27. Nun concurso o premio de 168 000 € repártese de forma directamente proporcional aos puntos conseguidos. Os tres finalistas conseguiron 120, 78 e 42 puntos. Cantos euros recibirá cada un?
28. Repartir 336 en partes directamente proporcionais a 160, 140, 120.
29. Un traballo págase a 3 120 €. Tres operarios realízano aportando o primeiro 22 xornadas, o segundo 16 xornadas e o terceiro 14 xornadas. Canto recibirá cada un?
30. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionais a 18, 30, 45.
31. Cinco persoas comparten un microbús para realizaren distintos traxectos. O custe total é de 157.5 € máis 20 € de suplemento por servizo nocturno. Os quilómetros percorridos por cada pasaxeiro foron 3, 5, 7, 8 e 12 respectivamente. Canto debe pagar cada un?
32. Decidiuse penalizar ás empresas que máis contaminan. Para iso repártense 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % e 15 % de grao de contaminación. Canto recibirá cada unha?
33. Mesturamos 3 kg de améndoa a 14 €/kg, 1.5 kg de noces a 6 €/kg, 1.75 kg de anacardios a 18 €/kg. Calcula o prezo final do paquete de 250 g de mestura de froitos secos.
34. Calcula o prezo do litro de zume que se consegue mesturando 8 litros de zume de ananás a 2.5 €/l, 15 litros de zume de laranxa a 1.6 €/l e 5 litros de zume de uva a 1.2 €/l. A canto debe venderse unha botella de litro e medio se se lle aplica un aumento do 40 % sobre o prezo de custe?
35. Para conseguir un tipo de pintura mestúranse tres produtos 5 kg do produto X a 18 €/kg, 19 kg do produto Y a 4.2 €/kg e 12 kg do produto Z a 8 €/kg. Calcula o prezo do kg de mestura.
36. Un lingote de ouro pesa 340 g e contén 280.5 g de ouro puro. Cal é a súa lei?
37. Cantos gramos de ouro contén unha xoia de 0.900 de lei, que se formou cunha aliaxe de 60 g de 0.950 de lei e 20 g de 0.750 de lei?
38. Que capital hai que depositar ao 3.5 % de rédito en 5 anos para obter un interese simple de 810 €?
39. Cal é o capital final que se recibirá por depositar 25 400 € ao 1.4 % en 10 anos?
40. Cantos meses debe depositarse un capital de 74 500 € ao 3 % para obter un interese de 2 980 €?
41. Ao 3 % de interese composto, un capital converteuse en 63 338.5 €. De que capital se trata?

AUTOAVALIACIÓN

1. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade directa son

A	8	0.75			4.5	100
B		15		6		

a) 160; 0.3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos os gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:
a) 1 850 € b) 1 875 € c) 1 687.5 €
3. Un artigo que custaba 1 600 € rebaixouse a 1 400 €. A porcentaxe de rebaixa aplicada é:
a) 12.5 % b) 14 % c) 15.625 % d) 16.25 %
4. Para envasar 360 litros de auga, cantas botellas necesitaremos se queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas
5. Tres agricultores repártense os quilogramos da colleita de forma proporcional ao tamaño das súas parcelas. A maior, que mide 15 recibe 24 toneladas; a segunda é de 10 ha e a terceira de 8 ha recibirán:
a) 16 t e 5 t b) 12.8 t e 16 t c) 16 t e 12.8 t d) 16 t e 11 t
6. A escala á que se debuxou un mapa no que 3.4 cm equivalen a 1.02 km é:
a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300
7. Con 4 rolos de papel de 5 m de longo, podo forrar 32 libros. Cantos rolos necesitaremos para forrar 16 libros se agora os rolos de papel son de 2 m de longo?
a) 3 rolos b) 5 rolos c) 4 rolos d) 2 rolos
8. O prezo final do kg de mestura de 5 kg de fariña clase A, a 1.2 €/kg, 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg e 4 kg clase C a 1 €/kg é:
a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.05 €
9. A lei dunha aliaxe é 0.855. Se o peso da xoia é 304 g, a cantidade de metal precioso é:
a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d) 306 g
10. A 2 % de interese composto, durante 6 anos, 14500 € teranse convertido en:
a) 16 225.35 € b) 16 329.35 € c) 15 632.35 € d) 14 550 €

RESUMO

Proporcionalidade directa	Dúas magnitudes son **directamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade directa** *k* é o valor que se obtén mediante o cociente de calquera dos valores dunha variable e os correspondentes da outra.	Para empapelar 300 m^2 utilizamos 24 rolos de papel, se agora a superficie é de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rolos, pois $k = 300/24 = 12.5$, e $12.5 = 104/x$, polo que $x = 104/12.5 = 8.32$.
Proporcionalidade inversa	Dúas magnitudes son **inversamente** proporcionais cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k´* é o produto de cada par de magnitudes: k' = a · b = a´· b´	Dúas persoas pintan unha vivenda en 4 días traballando 9 h diarias. Para pintar a mesma vivenda, 3 persoas, traballando 8 h diarias, tardarán… 3 días.
Porcentaxes	Razón con denominador 100.	O 87 % de 2 400 é $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2\,088$
Escalas	A escala é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.	A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km na realidade.
Reparto proporcional directo	Recibe máis cantidade quen máis partes ten.	Repartir directamente a 6, 10 e 14, 105 000 € 6 + 10 + 14 = 30 105 000 : 30 = 3 500 6 · 3 500 = 21 000 €; 10 ·3 500 = 35 000 €; 14 · 3 500 = 49 000 €
Reparto proporcional inverso	Recibe máis cantidade quen menos partes ten.	Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 e 6; 1/3 + 1/5 + 1/6 = $\frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5 670 : 21 = 270 270 · 10 = 2 700; 270 · 6 = 1620; 270 · 5 = 1350
Mesturas e aliaxes	Mesturar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos. A **lei** dunha **aliaxe** é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.	Unha xoia que pesa 245 g e contén 195 g de prata, a súa lei é: $\frac{195}{245} = 0.795$
Interese simple e composto	O interese é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo	$C = 3\,600$; $r = 4.3$ %; $t = 8$ anos $I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4$ €

CAPÍTULO 7: XEOMETRÍA NO PLANO

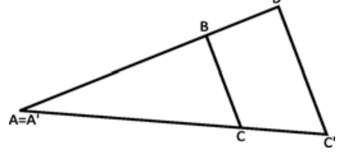
ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. LUGARES XEOMÉTRICOS

1. Un agricultor encontra no seu campo unha bomba da Guerra Civil. As autoridades establecen unha distancia de seguridade de 50 metros. Como se debe acordoar a zona?
2. Un xogo de dous participantes consiste en que se sitúan a unha distancia de dous metros entre si e póñense varias bandeiras á mesma distancia de ambos os dous. A primeira a 5 metros, a segunda a 10 metros, a terceira a 15 e así sucesivamente. Sobre que liña imaxinaria estarían situadas as bandeiras?
3. Cando nunha acampada sentan arredor do lume fano formando un círculo. Por que?
4. Utiliza regra e compás para debuxar a bisectriz dun ángulo e a mediatriz dun segmento.
5. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 7, 6 e 4 cm. Traza nel as circunferencias inscritas e circunscritas.
6. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 8 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 40º e 30º. Encontra o seu ortocentro e o seu baricentro.
7. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 40º comprendido entre dous lados de 6 e 4 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.
8. Que pasa coas rectas e os puntos notables nun triángulo equilátero?
9. Debuxa un triángulo isósceles co ángulo desigual de 40º. Traza as rectas notables para o lado desigual e para un dos lados iguais. Que pasa?
10. Queremos situar unha farola nunha praza triangular. Onde a poñeriamos?
11. Unha formiga anda por unha mediana dun triángulo partindo do vértice. Cando chega ao baricentro percorreu 8 centímetros. Que distancia lle falta para chegar ao punto medio do lado oposto ao vértice de onde partiu?
12. Temos un campo triangular sen cercar e queremos atar unha cabra de forma que non saia do campo pero que acceda ao máximo de pasto posible. Onde poñeriamos o poste?
13. A Alba e ao seu irmán Aitor encántalles a torta. A súa nai fíxolles unha triangular. Alba ten que cortala pero Aitor elixirá primeiro o seu anaco. Como debería cortar Alba a torta?
14. O ortocentro dun triángulo rectángulo, onde está?
15. Comproba que o circuncentro dun triángulo rectángulo está sempre no punto medio da hipotenusa.
16. O baricentro é o centro de gravidade. Constrúe un triángulo de cartolina e debuxa o seu baricentro. Se pos o triángulo horizontalmente no aire só suxeito pola punta dun lapis no baricentro comprobarás que se suxeita.
17. Calcula o lado dun triángulo equilátero inscrito nunha circunferencia de 10 cm de radio. [*Axuda*: Aplica que neste caso o circuncentro coincide co baricentro e que este último está ao dobre de distancia do vértice que do lado oposto.]
18. Repite as actividades resoltas con *Xeoxebra*. Modifica ao teu gusto cores e liñas.
19. Move un dos vértices orixinais do triángulo e indica que cousas permanecen invariantes.
20. Comproba que se verifican as propiedades do *circuncentro*, como centro da circunferencia circunscrita, e do *incentro*, como centro da circunferencia inscrita.
21. O *baricentro* divide á mediana en dúas partes, sendo unha dous terzos da outra. Compróbao.
22. A recta de *Euler* pasa polo *circuncentro*, o *baricentro* e o *ortocentro*, e o *incentro* non sempre pertence á recta de *Euler*. Como debe ser o triángulo para que pertenza?
23. Move os vértices do triángulo para determinar se é posible que os seus catro puntos notables coincidan.

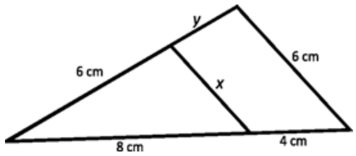
2. SEMELLANZA

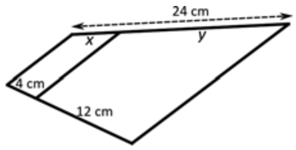
24. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:
    a) Un ángulo de 80º e outro de 40º. Un ángulo de 80º e outro de 60º.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
    c) $A = 30º$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30º$, $b' = 3.5$ cm, $c' = 4.5$ cm
    d) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 10$ cm, $b' = 12.5$ cm, $c' = 24.5$ cm
25. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:
    a) $a = 9$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, c'?
    b) $A = 45º$, $b = 8$ cm, c = 4 cm. $A' = 45º$, $b' = 8$ cm, a'?



26. Un triángulo ten lados de 6 cm, 7 cm e 7 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 60 cm. Canto miden os seus lados?

27. Calcula os valores de *x* e y nas seguintes figuras.

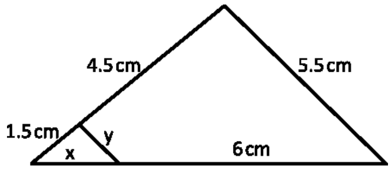


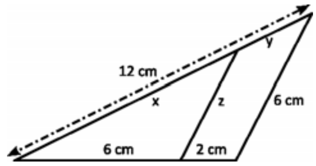


28. Un poste moi alto suxéitase con cables de aceiro que van do seu extremo superior ao chan. A distancia da ancoraxe dun dos cables á base do poste é de 6 metros. Poñemos unha barra de 120 centímetros de forma que estea perpendicular ao chan e xusto toque o chan e o cable. A súa distancia á ancoraxe do cable é 90 centímetros. Calcula a lonxitude do poste e a lonxitude do cable de aceiro.

29. María mide 160 cm. A súa sombra mide 90 cm. Nese mesmo instante mídese a sombra dun edificio e mide 7.2 m. Canto mide o edificio?

30. Calcula as lonxitudes que se indican:





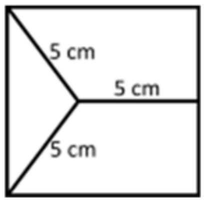
3. ÁNGULOS, LONXITUDES E ÁREAS

31. É posible encontrar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 5 e 12 *cm* e a súa hipotenusa 24 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 5 e 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividade se che resulta necesaria.

32. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:
a) 6 *cm* e 8 *cm* b) 4 *m* e 3 *m* c) 8 *dm* e 15 dm d) 13.6 *km* e 21.4 *km*.

33. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:
a) 26 *cm* e 10 *cm* b) 17 *m* e 8 *m* c) 37 *dm* e 35 *dm* d) 14.7 *km* e 5.9 *km*

34. Calcula o lado do cadrado da figura da marxe:



35. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula a área dun hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 8 *cm*.

40. Unha portería de fútbol mide 7.32 m de ancho por 2.44 m de alto. O punto de penalti está a 10 metros. Calcula a distancia que percorre o balón en:
a) Un tiro directo á base do poste.
b) Un tiro directo á escuadra.

41. Demostra que o diámetro dun cadrado de lado *x* é $d = \sqrt{2}x$.

42. Demostra que a altura dun triángulo equilátero de lado *x* é $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

43. Calcula os ángulos central e interior do triángulo equilátero, cadrado, pentágono regular, hexágono regular e enneágono regular.

44. Xustifica que un hexágono regular se pode descompoñer en 6 triángulos equiláteros.

45. Dous ángulos dun triángulo isósceles miden 36º e 72º, canto pode medir o ángulo que falta?

46. Dous ángulos dun trapecio isósceles miden 108º e 72º, canto miden os ángulos que faltan?

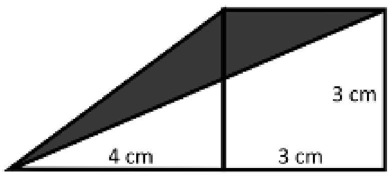
47. Canto mide a suma dos ángulos interiores dun decágono irregular?

48. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 50 cm e 26 cm e altura 5 cm.

49. Calcula a área e perímetro dun trapecio rectángulo de bases 100 cm e 64 cm, e de altura 77 cm.

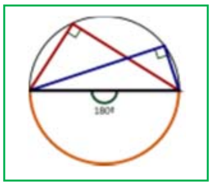
50. Calcula a área e o perímetro dun trapecio isósceles de bases 100 cm e 60 cm e lados laterais 29 cm.

51. Utiliza o teorema de Tales para determinar a área e o perímetro da zona sombreada da figura.



52. Tendo en conta que un hexágono regular se pode dividir en seis triángulos equiláteros (cuxa altura é a apotema do hexágono regular), calcula a área dun hexágono regular de 5 cm de lado.

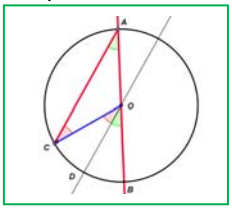
53. Queremos cubrir o plano con polígonos regulares de 100 cm^2. As únicas opcións posibles son o triángulo equilátero, o cadrado e o hexágono. Calcula cal destas tres figuras ten menor perímetro. Que polígono aplica este resultado? [Utiliza a relación entre lado e altura dun triángulo equilátero obtida anteriormente]



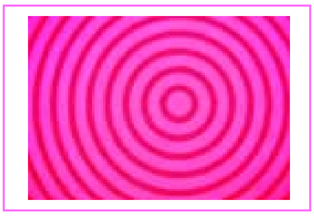
54. Tales observou que en calquera triángulo rectángulo o circuncentro sempre estaba no punto medio da hipotenusa. Observa a figura e razoa a afirmación.

55. Un ángulo inscrito na circunferencia que abrangue un diámetro é un ángulo recto. Por que? Razoa a resposta.

56. En que posicións ten un futbolista o mesmo ángulo de tiro que desde o punto de penalti?



57. *Outra demostración. Intenta comprendela. T*razamos un ángulo inscrito na circunferencia *CAB* que teña un lado que pase polo centro *O* da circunferencia. Trazamos o seu central *COB*. O triángulo *OAC* é isósceles pois dous dos seus lados son radios da circunferencia. Trazamos por O unha recta paralela a *AC*. O ángulo *CAO* é igual ao ángulo *DOB* pois teñen os seus lados paralelos. O ángulo *ACO* é igual ao ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, e é igual ao ángulo *CAO* por ser o triángulo isósceles. Polo tanto o central mide o dobre que o ángulo inscrito.



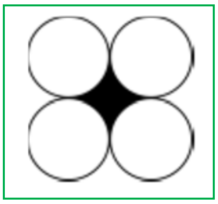
58. As circunferencias de tamaño real da ilustración da marxe teñen como radio, a menor 1 *cm*, a seguinte, un poco máis escura 2 *cm*, a clara seguinte 3 *cm*, e así, aumenta un centímetro. Calcula as lonxitudes das 10 primeiras circunferencias.

59. A Terra é aproximadamente unha esfera de radio 6.379 *km*. Canto mide o Ecuador?

60. Antigamente definíase un metro como: *"a dezmillonésima parte do cuadrante do meridiano terrestre que pasa por París"*. Segundo esta definición, canto mide (en metros) o diámetro terrestre?

61. Un faro xira describindo un arco de 170º. A unha distancia de 5 *km*, cal é a lonxitude do arco de circunferencia no que se ve a luz?

62. Determina a área do triángulo equilátero de 10 cm de radio.



63. Calcula a área encerrada por unha circunferencia de radio 9 cm.

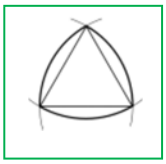
64. Calcula a área da coroa circular de radios 12 e 5 *cm*.

65. Calcula a área do sector circular e do segmento circular de radio 6 *cm* e que forma un ángulo de 60º.

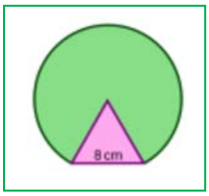
66. Calcula a área do sector de coroa circular de radios 25 *cm* e 18 *cm* e que forma un ángulo de 60º.

67. Calcula a área encerrada entre estes círculos de 5 cm de radio.

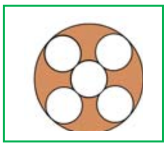
68. Queremos construír unha rotonda para unha estrada de 9 metros de ancho de forma que o círculo interior da rotonda teña a mesma área que a coroa circular que forma a estrada. Que radio debe ter a rotonda?



69. Unha figura típica da arquitectura gótica debúxase a partir dun triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada un dos seus vértices e que pasan polos dous vértices restantes. Calcula a área dunha destas figuras se se constrúe a partir dun triángulo equilátero de 2 metros de lado.



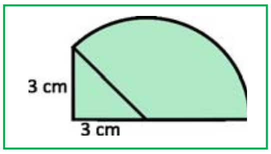
70. Calcula a área e o perímetro da figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre o que se constrúe un sector circular.



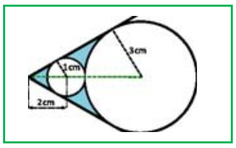
71. Hai 5 circunferencias inscritas nunha circunferencia de 12 cm de radio tal como indica a figura. Canto vale a área sombreada?

72. Un queixo cilíndrico ten unha base circular de 14 cm de diámetro e unha etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Córtase unha porción de 70º.Que área ten o trozo de etiqueta cortada?

73. Dun queixo de 18 cm de diámetro cortamos unha porción de 50º. A etiqueta ten 7 cm de radio. Que área do queixo está visible?

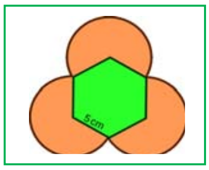


74. A partir dun triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construímos un sector circular. Calcula a área da figura.



75. En dúas rectas que forman 60º inscríbense dúas circunferencias tanxentes entre si. A primeira ten o centro a 2 centímetros do vértice e o radio de 1 centímetro. A segunda ten de radio 3 centímetros. Canto vale a área sombreada?

76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices dun hexágono de 5 cm de lado. Calcula a área e o perímetro da figura.



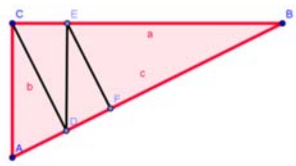
EXERCICIOS E PROBLEMAS

Lugares xeométricos

1. Debuxa no teu caderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm e 4 cm. Traza nel, utilizando regra e compás, as mediatrices e bisectrices. Determina o circuncentro e o incentro. Traza as circunferencias inscritas e circunscritas.
2. Debuxa no teu caderno un triángulo de lado 5 cm e ángulos adxacentes ao mesmo de 30º e 50º. Traza nel, utilizando regra e compás, as medianas e as alturas. Determina o seu ortocentro e o seu baricentro.
3. Debuxa no teu caderno un triángulo cun ángulo de 50º comprendido entre dous lados de 5 e 8 cm. Obtén o seu circuncentro e o seu incentro.
4. Como son as rectas e os puntos notables dun triángulo rectángulo?
5. Como son as rectas e os puntos notables dun triángulo isósceles?

Semellanza

6. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:
   a) Un ángulo de 70º e outro de 20º. Un ángulo de 90º e outro de 20º.
   b) Triángulo isósceles cun ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 50º.
   c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm
   d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm
7. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:
   a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, c'?
   b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, a'?
8. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 12 cm, 14 cm e 14 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 90 cm. Canto miden os seus lados?
9. Debuxa no teu caderno un pentágono regular. Traza as súas diagonais. O triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto denomínase triángulo áureo, pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro, canto miden os seus ángulos? Busca na figura que trazaches outros triángulos áureos. Cal é a relación de proporcionalidade?
10. Canto é a suma dos ángulos interiores dun rombo?
11. A sombra dun edificio mide 15 m, e a do primeiro piso 2 m. Sabemos que a altura dese primeiro piso é de 3 m, canto mide o edificio?
12. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo ABC, de lados a = 60, b = 45 e c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF e EFB, e o escriba calcula a lonxitude do lado AD como 27. Utilizou a semellanza de triángulos? Como se podería calcular? Que datos necesitas? Calcula a área do triángulo ABC e do triángulo ACD. Determina a lonxitude dos segmentos CD, DE e EF.



13. Demostra que en dous triángulos semellantes as medianas son proporcionais.
14. Un triángulo rectángulo isósceles ten un cateto de lonxitude 7 cm igual á hipotenusa doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?
15. O mapa a escala 1:3000000 dunha vila ten unha área de 2 500 cm^2, canto mide a superficie verdadeira da vila?
16. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Como son? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?
17. A altura e a base dun triángulo rectángulo miden respectivamente 4 e 7 cm; e é semellante a outro de base 26 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.

Ángulos, lonxitudes e áreas

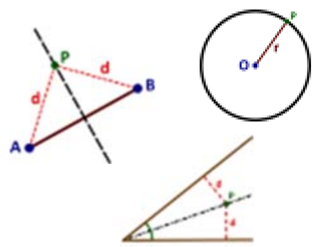
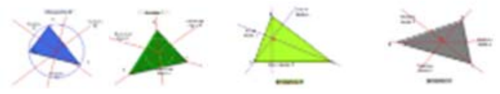
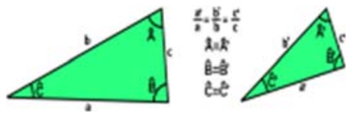
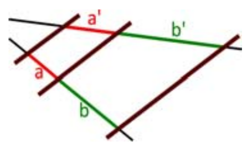
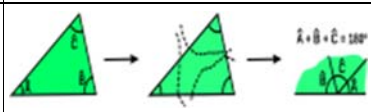
18. Constrúe un triángulo coñecendo a altura sobre o lado a, o lado a e o c.
19. Calcula a lonxitude do lado dun octógono regular inscrito nunha circunferencia de radio 5 cm.
20. Calcula a apotema dun hexágono regular lado 7 cm.

21. Calcula a área dun círculo cuxa circunferencia mide 50 cm.
22. Calcula a lonxitude dunha circunferencia cuxo círculo ten unha superficie que mide 50 cm^2.
23. A Terra dá unha volta cada 24 horas, a que velocidade se move un punto do Ecuador?
24. Que relación hai entre as áreas dun triángulo inscrito nun círculo e a do círculo?
25. Os gregos coñecían as dúas seguintes posibles formas de construír un triángulo rectángulo cos seus tres lados de lonxitude un número natural, sen máis que dar valores a *n*. Comproba se se verifican para n = 1, 2, ….
    a) Catetos: $2n$ e $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ e $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.
26. Ao aumentar en 3 cm o lado dun cadrado a súa área aumenta 32 cm^2, canto mide o lado destes cadrados?
27. Quérese cubrir un terreo circular de 25 m de diámetro con grava, botando 10 kg por cada metro cadrado. Canta grava se necesita?
28. Unha escaleira de 4 m de lonxitude está apoiada sobre unha parede. O pé da escaleira dista 1,5 m da parede. Que altura acada a escaleira sobre a parede?
29. Calcula a área da circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 e 9 cm.
30. Calcula a área dun hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga os lados do hexágono e debuxa un hexágono estrelado. Calcula a súa área.
31. O sinal de tráfico de STOP ten forma de octógono regular. A súa altura mide 90 cm, e o seu lado 37 cm, canto mide a súa superficie?
32. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 10 cm.
33. Calcula a área dun hexágono regular de perímetro 60 cm.
34. Calcula a área dun trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm e altura 4 cm.
35. Calcula a área dun trapecio isósceles de bases 8 e 6 cm e lado 3 cm.
36. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lado 4 cm e diagonal 7 cm.
37. Calcula a área e o perímetro dun cadrado de diagonal 9 cm.
38. Calcula a área e o perímetro dun triángulo isósceles de base 8 cm e altura 6 cm.
39. Un triángulo mide de altura π e de base $\pi + 1$. É rectángulo?
40. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles de catetos de lonxitude 1, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto igual a 1 debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 4 veces, canto mide a última hipotenusa?
41. Debuxa un triángulo rectángulo de catetos de lonxitude 1 e 2 cm, canto mide a hipotenusa? Tomando esta hipotenusa como cateto e co outro cateto de lonxitude 1 cm debuxa un novo triángulo rectángulo. Canto mide a nova hipotenusa? Continúa o proceso 3 veces, canto mide a última hipotenusa?
42. Calcula a altura dunha pirámide regular cuadrangular de lado da base 10 m e de aresta 15 m.
43. Calcula a xeratriz dun cono de radio da base 5 m e de altura 7 m.
44. Dous ascetas indús viven no alto dun cantil de 10 m de altura cuxo pé está a 200 metros da vila máis próxima. Un dos ascetas baixa do cantil e vai á vila. O outro, que é mago, ascende unha distancia *x e* viaxa voando en liña recta á vila. Ambos percorren a mesma distancia. Canto ascendeu o mago?
45. Canto mide a aresta da base da pirámide de Keops se mide 138 m de altura e 227 m de aresta?

AUTOAVALIACIÓN

1. Todos os puntos que están á mesma distancia de dous puntos dados están en:
   a) unha bisectriz b) unha circunferencia c) unha elipse d) unha mediatriz
2. As tres medianas dun triángulo córtanse no:
   a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro
3. O circuncentro é o centro de:
   a) gravidade do triángulo b) a circunferencia inscrita c) a circunferencia circunscrita
4. Dous triángulos son semellantes se:
   a) teñen dous ángulos iguais b) teñen dous lados proporcionais
   c) teñen un ángulo igual d) as súas áreas son semellantes
5. Sabemos que os triángulos *ABC* e *A'B'C'* son semellantes. Calcula o valor de a' e c' para que o sexan, sabendo que a = 10 cm, b = 6 cm, b' = 3 cm, c = 8 cm:
   a) a' = 4 cm e c' = 6 cm b) a' = 5 cm e c' = 6 cm
   c) a' = 4 cm e c' = 4 cm d) a' = 5 cm e c' = 4 cm
6. Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 7 cm e un cateto mide 3 cm, entón o outro cateto mide aproximadamente:
   a) 6.3 cm b) 5 cm c) 5.8 cm d) 6.9 cm
7. A suma dos ángulos interiores dun polígono irregular de dez lados vale:
   a) 1 440º b) 1 620º c) 1 800º d) 1 260º
8. A área dun rombo de lado 5 cm e unha diagonal de 8 cm mide:
   a) 48 cm^2 b) 36.7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21.2 cm^2
9. O ángulo central do inscrito na circunferencia que abrangue un ángulo de 72º mide:
   a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º
10. A lonxitude da circunferencia e a área do círculo de radio 3 cm son respectivamente:
   a) 6π cm e 9π cm^2 b) 9π cm e 6π cm^2 c) 3π cm e 3π cm^2 d) 18 cm e 27 cm^2

RESUMO

Lugares xeométricos	**Circunferencia** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan do centro. **Mediatriz dun segmento** é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dos extremos do mesmo. Dado un ángulo delimitado por dúas rectas, a **bisectriz** do ángulo é o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan das mesmas.	
Rectas e puntos notables dun triángulo	Mediatrices e circuncentro. Bisectrices e incentro. Alturas e ortocentro. Medianas e baricentro.	
Semellanza	Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: 1) Teñen 2 ángulos iguais. 2) Teñen os 3 lados proporcionais. 3) Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema de Tales	Establece unha relación entre os segmentos formados cando dúas rectas calquera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\,cm.$	
Suma dos ángulos dun polígono	A suma dos ángulos interiores dun triángulo é $180 \cdot n$.	

CAPÍTULO 8: MOVEMENTOS NO PLANO E NO ESPAZO

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS

1. No teu caderno debuxa un triángulo. Cálcao e copia a figura calcada de novo no teu caderno. Mide todos os lados das figuras homólogas. Miden o mesmo? Mide todos os seus ángulos. Miden o mesmo?
2. Debuxa no teu caderno unha letra B e fai un deseño con ela, trasladándoa, xirándoa ou debuxando letras B simétricas.
3. No teu caderno debuxa unha letra b minúscula e a continuación outra letra b minúscula o dobre de grande. Como son as súas lonxitudes e os seus ángulos? É unha semellanza?
4. Debuxa agora unha letra d minúscula. É semellante á letra b anterior?
5. No teu caderno marca unha trama formada por cadrados de dous cadradiños de lado. Nun cadradiño fai un garabato, unha poligonal, unha liña curva… Debuxa a simétrica tomando como eixe de simetría un lado do cadrado. Debuxa a figura simétrica do conxunto obtido tomando como eixes sempre os lados da trama inicial. Colorea a figura obtida. Trasládaa horizontal e verticalmente.

2. TRANSLACIÓNS

6. Debuxa no teu caderno os puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) e *C* (2, –3). Calcula as coordenadas dos vectores fixos *AB*, *AC*, *BC*, *CA* e *CB*. Comproba no teu debuxo que esas son as súas coordenadas.
7. O vector fixo *AB* ten de coordenadas (4, 2), calcula as coordenadas da súa orixe *A* sabendo que as coordenadas do seu extremo *B* son (–1, 1). Represéntao graficamente.
8. As coordenadas de A son (2, 3) e as do vector fixo *AB* son (4, –2). Calcula as coordenadas do punto *B*. Represéntao graficamente.
9. Nomea os vectores fixos da figura e indica cales son representantes dun mesmo vector libre.
10. Debuxa no teu caderno catro vectores equipolentes ao vector fixo con orixe en *A* (–3, 4) e extremo *B* (5, 0), con orixes nos puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) e *F* (–2, –5).
11. Debuxa no teu caderno os puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) e *G* (2, –4). Cos vectores fixos de orixe e extremo nestes puntos, indica cales deles son equipolentes.
12. Cos puntos do exercicio anterior, calcula as coordenadas dos vectores fixos *DE* e *FG*. Como son? Son dous representantes dun mesmo vector libre?
13. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia cartesiano e sinala nel os puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) e *C* (2, –5). a) Chama **u** ao vector fixo *AB* e indica os seus compoñentes. b) Chama **v** ao vector fixo *BC* e indica os seus compoñentes. c) Calcula as compoñentes do vector w = u + v. d) Representa no teu caderno os vectores libres **u** e **v** con orixe na orixe de coordenadas e representa tamén ao vector suma **w**. Observa que está sobre a diagonal do paralelogramo construído sobre **u** e **v**.
14. Debuxa no teu caderno o punto *A* (1, 2), debuxa agora o vector **u** = (2, 3) con orixe en *A*, e o vector **v** = (4, –1) tamén con orixe en A. Calcula as coordenadas do vector suma **u** + **v**, e debúxao con orixe en *A*. O resultado coincide co que obtiveches graficamente? Observa que o vector suma é a diagonal dun paralelogramo construído sobre **u** e **v**.
15. Efectúa as seguintes operacións con vectores:
    a) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot (4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]
    c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)] d) 9,3·(2, 6) + (3,7, 5,2)
16. Efectúa as seguintes operacións cos vectores *u*= (–5, 6), *v*= (4, –7) e *w* = (3, 4):
    a) 2*u* – (*v*+ *w*) b) 3*w* – 2*u* + *v* c) 2(*u* + *v*) – 3*w*

17. Debuxa no teu caderno unha figura e utiliza escuadra e cartabón para trasladala 5 centímetros cara á dereita.
18. Debuxa no teu caderno unha figura. (Se non se che ocorre ningunha outra, debuxa a letra G). Coloca enriba un papel vexetal e cálcaa. Despraza en liña recta o papel vexetal e volve calcar a figura. As dúas figuras que obtiveches, teñen todas as súas medidas, tanto lonxitudes como ángulos, iguais? Traza as rectas que unen pares de puntos correspondentes, como son esas rectas? Que traxectoria seguiron os puntos no desprazamento?
19. Coa axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha translación unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.
20. Observa este friso dun templo de Cambodia. É unha figura que se repite por translación. Que dirección ten o vector de translación? De onde a onde iría?
21. Utiliza papel cuadriculado e debuxa no teu caderno unha letra F de 2 cadradiños de alto e 1 cadradiño de ancho e aplícalle a translación de vector (2, 5).

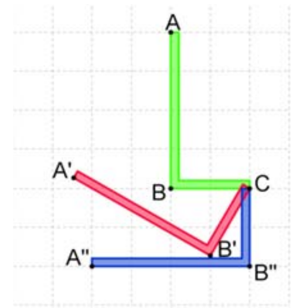
Un friso en Cambodia

22. Debuxa no teu caderno uns eixes cartesianos e o triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) e *C* (1, 3). Aplícalle a translación de vector (4, 2): 4 unidades á dereita e 2 unidades cara arriba. Cales son as coordenadas dos puntos trasladados *A'*, *B'* e *C'*?
23. As puntillas deséñanse a partir dun motivo que se foi trasladando a todo o longo. Debuxa no teu caderno un motivo, unha flor, un V, un zigzag… e trasládao compoñendo varias translacións dun mesmo vector de translación. Debuxaches un friso.
24. Traslada unha figura (por exemplo unha letra L) mediante a translación de vector (–4, 5) e repite o proceso coa figura trasladada empregando o vector (3, –6). Que movemento utilizas para ir da primeira figura á última? É unha translación? Cal é o seu vector?
25. O mosaico da marxe está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se despraza por todo o mosaico. Se utilizas como motivo mínimo a estrela de seis puntas, sen ter en conta os cambios de cor, determina os vectores de translación de dúas translacións, unha horizontal e outra vertical, que mediante composicións che permitan ter o resto do mosaico. Observa que ao sumar a translación horizontal coa vertical obtés translacións oblicuas. Debuxa no teu caderno unha figura e trasládaa de forma similar para ter un mosaico.

26. En edificación utilízanse moito as translacións. Pensa nas ventás dun edificio e elixe unha. Podes obter outra distinta mediante translación? Fai un debuxo que represente esta situación.
27. Na fachada de esta torre mudéxar de Teruel podemos ver distintas translacións. Na parte superior hai dos conxuntos de catro ventás. Un é trasladado do outro. E cada ventá forma ás outras catro mediante unha translación. Ao seguir baixando, os dous arcos trasládanse formando outros dous arcos. Observa que neste caso todas as translacións teñen un vector de translación horizontal. Continúa describindo as translacións que ves no deseño desta torre.

3. XIROS OU ROTACIÓNS

28. Debuxa no teu caderno un punto *O* e outro punto distinto *A*. Xira o punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo e denomina *A'* o punto xirado.
29. Debuxa no teu caderno un punto *O* e dous segmentos, un *OA* que pase por *O*, e outro *BC* que non pase por *O*. Debuxa os segmentos xirados *OA'* e *B'C'* do xiro de centro *O* e ángulo 60º.
30. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) e *C* (5, 0). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro na orixe de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do triángulo xirado?
31. Coa axuda de papel cuadriculado, transforma mediante un xiro, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.
32. Debuxa no teu caderno dos puntos calquera *P* e *P'*. Encontra o seu centro de simetría.
33. Que ocorre ao aplicar un xiro de 60º a unha figura? Hai rectas invariantes? E nun xiro de 180º? As rectas que pasan polo centro de xiro, en que rectas se transforman? E cun xiro de 0º? e cun xiro de 360º?
34. Debuxa un triángulo *ABC* e o seu simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. Como son os seus lados? Son iguais? E os seus ángulos? Mantense o sentido dos ángulos? Comproba como é o ángulo *ABC* e o ángulo *A'B'C'*. É un movemento directo?

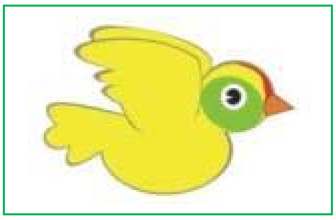


35. Imos analizar as letras maiúsculas. Indica cales das seguintes letras non teñen simetría central e cales si a teñen, indicando entón o seu centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recorda, buscas un punto tal que a simetría central de centro ese punto deixe invariante á letra.
36. Escribe cinco exemplos de obxectos do espazo que xiren.
37. Mediante un xiro no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.
38.

4. SIMETRÍAS

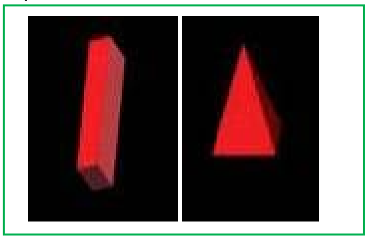
39. Debuxa no teu caderno un eixe *r* de simetría oblicuo, e un punto *P*. Debuxa o punto P' simétrico respecto de *r*. Comproba que a recta *r* é a mediatriz do segmento *PP'*. (*Recorda*: a mediatriz dun segmento é a perpendicular polo punto medio).
40. Debuxa no teu caderno dous puntos calquera *P* e *P'*. Debuxa o eixe de simetría *r* respecto ao que son simétricos.
41. Debuxa en papel cuadriculado unha letra L e un eixe de simetría vertical. Debuxa a letra L simétrica respecto a ese eixe. Calca unha delas, e move o papel de calco para intentar facelas coincidir. É imposible, porque a simetría é un movemento inverso.
42. Debuxa no teu caderno unha figura. Debuxa un eixe de simetría oblicuo e debuxa a figura simétrica.

43. Calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto do eixe de ordenadas do triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). O mesmo respecto do eixe de abscisas.
44. Indica cales das seguintes letras maiúsculas son simétricas, e se o son, indica se os seus eixes de simetría son horizontais ou verticais: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
45. Con axuda de papel cuadriculado, transforma mediante unha simetría, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza a resposta.
46. Debuxa un rectángulo *ABCD*. Debuxa o eixe de simetría que transforma *AB* en *CD*, e o eixe de simetría que transforma *AD* en *BC*.
47. Debuxa un hexágono regular e debuxa os seus eixes de simetría. Cantos ten? Ten 6. Descríbeos.
48. Debuxa un pentágono regular e os seus eixes de simetría. Cantos ten? Descríbeos.
49. Reproduce no teu caderno a figura P da marxe.

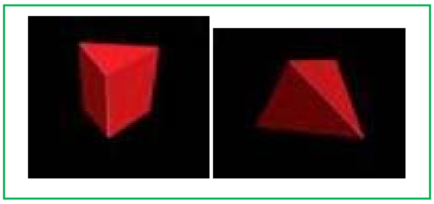


a) Debuxa o paxaro P' simétrico respecto ao eixe de ordenadas.
c) Debuxa o paxaro P'' simétrico respecto ao eixe de abscisas.
d) Existe algunha simetría axial que trasforme P' en P''? Existe algunha simetría central que transforme P' en P''?
e) Se o pico do paxaro P tivera unhas coordenadas (–2, 5), que coordenadas tería o pico do paxaro P'? E o do paxaro P''?

50. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría paralelos e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é unha translación e determina o vector de translación.
51. Debuxa no teu caderno dous eixes de simetría secantes e unha letra F. Debuxa a composición de ambas as simetrías a esta letra, comprobando que a composición delas é un xiro e determina o centro e o ángulo de xiro.
52. Se aplicamos unha simetría a unha figura, que transformación debemos aplicarlle para obter a figura inicial?
53. A composición de dúas simetrías planas de eixes secantes é un xiro. Como deben ser os eixes para que sexa un xiro de 180 º (ou unha simetría central)?
54. Escribe cinco obxectos que estean ao teu arredor que sexan simétricos e indica o seu plano de simetría. Mira na aula e busca simetrías. Son simétricas as cadeiras, a lámpada, a ventás, as mesas...? Cal é o seu plano de simetría?
55. Define os planos de simetría e os eixes de rotación das seguintes figuras:



a) Un prisma recto de base cadrada. E se é oblicuo?
b) Unha pirámide recta de base cadrada.
c) Se o prisma e a pirámide son rectos, pero as súas bases son rectángulos, que simetrías se manteñen?



56. Determina os planos de simetría e os eixes de rotación destas figuras:
a) Un prisma recto cuxa base é un triángulo equilátero.
b) Unha pirámide recta de base un triangulo equilátero. E se é oblicua?
c) Se o prisma e a pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, que simetrías se manteñen?

57. Mediante unha simetría especular, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.
58. Cales son os puntos invariantes dunha simetría axial? E as rectas invariantes?
59. Utiliza a ferramenta **Rota obxecto en torno a un punto**, o ángulo indicado para estudar os xiros no plano. Define un punto *O* como centro de xiro, por exemplo, o centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar co **ángulo** un de 45º.
   a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman mediante este xiro.
   b) Investiga se ao realizar un xiro existen puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.
60. Utiliza a ferramenta **Reflicte obxecto por punto** para estudar a simetría central. Define un punto *O* como centro de simetría, por exemplo, o centro de coordenadas.
   a) Debuxa rectas e polígonos e observa como se transforman por unha simetría central.
   b) Comproba que unha simetría central equivale a un xiro de 180º.
   c) Investiga se nunha simetría central hai puntos e/ou rectas que permanecen invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS E ROSETÓNS

60. Mira este azulexo dun mosaico de Istambul. A cela unidade é cada un dos azulexos con que se constrúe todo o mosaico mediante translacións. Indica os vectores de translación. Pero podes reducir o motivo mínimo. Utilizando xiros? Utilizando simetrías? Mira a ampliación: Comproba que podes utilizar como motivo mínimo a oitava parte do azulexo.

61. Análises de mosaicos da Alhambra: Observa o mosaico da marxe. Imaxina que é infinito, que completa todo o plano. Podes tomar como motivo mínimo un par de folliñas. Para pasar dun par de folliñas ao outro par adxacente, que trasformación utilizaches? É unha simetría? É un xiro? Hai centros de xiro de 60º? E de 180º? E de 30º?

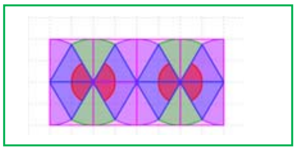
62. Utiliza unha trama de triángulos, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 60º, de 180º e de 30º. Debuxa un motivo mínimo sinxelo, por exemplo unha poligonal ou unha folla, e móveo usando esas transformacións.

63. Xeración dun mosaico mediante xiros e translacións: animación. Observa como primeiro debuxa unha trama de cadrados, debuxa un motivo mínimo formado por dous segmentos, logo aplícalle isometrías a ese motivo: xiros de 90º, cos que debuxa a estrela, que por simetría completa a cela unidade á que por último traslada por todo o mosaico.

64. Tamén podes ver na seguinte animación como se realiza un estudo do mosaico da marxe, buscando a cela unidade, o motivo mínimo e estudando os seus xiros (de 90º e 180º) e os seus eixes de simetría.

65. Utiliza unha trama de cadrados, ou debuxa unha no teu caderno, para deseñar un mosaico parecido a este. Marca na trama os centros de xiros de 90º e de 180º. Marca os eixes de simetría. Debuxa un motivo mínimo sinxelo, por exemplo unha poligonal, e móveo usando esas transformacións. Completa primeiro a cela unidade, e logo trasládaa.

5.2. Frisos

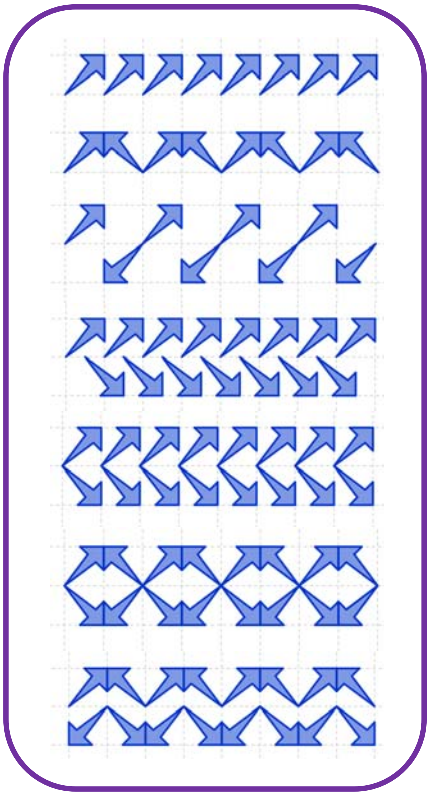


As puntillas, as grecas dos bordados, as teas estampadas, as reixas... utilizan moi a miúdo as translacións nos seus deseños. Son os frisos.

Observa o friso da marxe. Como todos os frisos obtense trasladando un motivo. Pero poden ter outras isometrías ademais da translación. A combinación de translación, simetrías e xiros permiten obter sete tipos de frisos diferentes.

66. Formamos frisos utilizando as letras do alfabeto. Todos eles fórmanse por translación. Pero en ocasións hai outras isometrías. A) En cales hai unha simetría de eixe horizontal. B) En cales hai xiros de 180º. C) En cales hai simetrías de eixe vertical? D) Hai simetrías con deslizamento? E) Sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (suposto que se prolongue ata o infinito).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp



67. Sae á rúa ou na túa casa e busca frisos. Fotografa reixas, mira puntillas e grecas… e fai un estudo dos diferentes frisos que encontres. Debuxa no teu caderno o seu deseño e intenta clasificalos segundo o esquema das letras do problema anterior, segundo as transformacións que utilicen. Para iso pregúntate o seguinte: 1) Ten xiros? Se a resposta é NON, entón: 2) Ten simetría horizontal? Se a resposta é SI, é un L4, que, como o friso formado pola letra C ou a letra D, non ten xiros e si, simetría de eixe horizontal. Se a resposta é NON, entón: 3) Ten simetría vertical? Se a resposta é SI, é un L3, como o friso formado pola letra V ou a letra A, que non ten nin xiros, nin simetría horizontal e si simetría vertical. Se a resposta é NON, entón: 4) Ten simetría con deslizamento? Se o ten é un L6, e se non é un L1. Pero se ten xiros pode ter tamén simetría horizontal e é un L5, ou ter simetría con deslizamento e ser un L7, ou só ter o xiro e ser un L2, como o friso formado pola letra N ou a letra S.

68. Nos frisos seguintes sinala todas as familias de simetrías respecto a un eixe, de xiros e de translacións polas cales un punto do friso se transforma noutro punto do mesmo (suposto que se prolongue ata o infinito).

69. **Análise dos pratos das rodas:** Observa os seguintes pratos das rodas. Indica, para cada un deles, as seguintes cuestións:

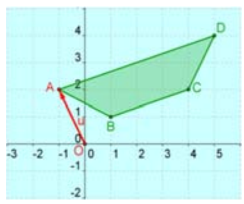
 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12

a) Ten simetría central?
b) Ten eixes de simetría axial. Cantos?
c) Ten centro de xiro, cal é o menor ángulo de xiro que o deixa invariante?
d) Sae á rúa e fotografa ou debuxa os pratos das rodas que vexas e che parezan interesantes. Fai un estudo deles.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Translación

1. Debuxa no teu caderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia e unha cuadrícula. Tes catro segmentos orientados. Determina as coordenadas dos vectores sobre estes segmentos. Cales teñen as mesmas coordenadas?
2. Temos os puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) e *D* (7, 3). Calcula as coordenadas dos vectores *AB*; *AC*; *AD*; *BC*; *BD*; *CD*; *DC*; *BA*.
3. Determina o vector de translación que traslada o punto *A* (3, 7) ao punto *A'* (1, 5).
4. Pola translación de vector **u** = (2, 8) trasládase o punto *A* (9, 4) ao punto *A'*. Cales son as coordenadas de A'?
5. Pola translación de vector **u** = (–3, –1) trasládase o punto *A* ao punto *A'* (3, 3). Cales son as coordenadas de A?
6. Trasladamos a circunferencia de centro *C* (5, 2) e radio 3 unidades coa translación de vector **u** = (–5, –2). Determina o centro e o radio da circunferencia trasladada.
7. Debuxa no teu caderno uns eixes coordenados e neles un cadrado de lado 2 unidades ao que chamas *C*, aplícalle unha translación segundo o vector *u* = (4, 1) e chamas *C*' ao seu trasladado. Agora aplicas a *C'* unha translación segundo o vector *v* = (–2, 4). A isometría que transforma *C* en *C*'', é unha translación? Escribe as coordenadas do seu vector. Mediante esa translación, en que punto se transforma a orixe de coordenadas?
8. O vértice inferior esquerdo dun cadrado é A (3, 1) e o vértice superior esquerdo é B (1, 3). Aplícalle unha translación de vector *u* = (–2, 4), cales son as coordenadas dos catro vértices do cadrado transformado?

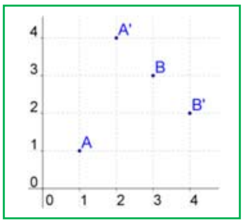


9. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao trapecio da figura a translación de vector *OA* = (–1, 2). Determina as coordenadas dos puntos transformados de A (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) e *D* (5, 4) por esta translación.
10. Aplica a translación de vector *u* = (–3, 4) ao triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), e calcula as coordenadas do triángulo transformado.
11. Debuxa no teu caderno un círculo de centro a orixe e radio 2 unidades.
    a) Trasládao coa translación de vector **u** = (3, 0).
    b) Trasládao despois mediante a translación de vector **v** = (0, 4).
    c) Indica as coordenadas do centro do segundo círculo trasladado.
    d) Indica as coordenadas do trasladado do punto (0, 2) ao aplicarlle cada unha das dúas translacións.
12. Trasladamos o triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) e *C* (0, 8), mediante a translación de vector **u** = (7, 1), e logo mediante a translación de vector **v** = (2, 8). Determina as coordenadas do triángulo transformado analítica e graficamente.
13. A composición de dúas translacións ten por vector (5, 9). Se unha delas é a translación de vector u = (7, 3), que compoñentes ten o outro vector de translación?
14. a) Debuxa no teu caderno un triángulo *ABC* e trasládao 5 cm á dereita. Denomina *A'B'C'* ao triángulo obtido.
    b) Traslada *A'B'C'* agora 4 cm cara arriba e denomina *A''B''C''* ao novo triángulo.
    c) Debuxa o vector que permite pasar directamente do triángulo *ABC* ao *A''B''C''* e mide a súa lonxitude. Cales son as súas coordenadas?
15. Determina o vector de translación da translación inversa á de vector *u* = (–2, 5).

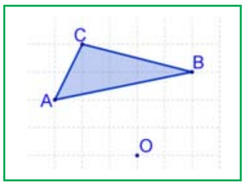
16. a) Debuxa no teu caderno unha figura, e repite o debuxo trasladando a figura 4 veces coa mesma translación. Ao facelo, debuxarás un friso.
    b) Un friso confeccionado con letras L é: L L L L L. Debuxa un friso confeccionado con letras J. Outro confeccionado con letras M. Ademais de translación, ten simetrías?
    c) Busca un friso. Mira as reixas da túa rúa, un bordado ou unha puntilla, as grecas duns azulexos… e debuxa o seu deseño no teu caderno.
17. Mediante unha translación no espazo, en que se transforma un plano? E unha esfera? E un cono? E dous planos paralelos? E dous planos ortogonais? Analiza os resultados.

Xiros

18. Debuxa no teu caderno o punto *A* (5, 4). Indica as coordenadas do punto *A'* que se obtén ao xirar 180º e con centro a orixe ou punto *A*. Indica as coordenadas do punto *A''* obtido ao xirar *A'* 90º co mesmo centro de xiro.
19. Debuxa unha figura no teu caderno, cálcaa, recórtaa e pégaa inclinada ao lado da inicial. As dúas figuras, teñen todas as lonxitudes iguais? E os seus ángulos? Determina, con compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro.
20. Debuxa no teu caderno unha letra F e a letra F xirada 30º con centro de xiro o seu punto máis inferior.
21. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo isósceles e con centro no vértice de un dos ángulos agudos aplícalle un xiro de 45º en sentido positivo. Logo aplícalle outro xiro de 45º, e así sucesivamente ata chegar ao triángulo inicial. Que xiros estiveches facendo?
22. Debuxa no teu caderno un círculo de centro *O*, dous diámetros perpendiculares *AB* e *CD* e unha corda *CB*. Sobre o mesmo debuxo traza as figuras obtidas facendo xirar a figura formada polos dous diámetros e a corda, con xiros de centro *O* e ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º e 315º. Terás feito a composición de xiros de 45º varias veces.
23. A letra H ten centro de simetría? Indica tres obxectos cotiáns que teñan simetría central.
24. Sobre uns eixes cartesianos representa os puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) e os seus simétricos respecto á orixe *A', B'* e *C'*. Que coordenadas teñen *A'*, *B'* e *C'*?
25. Debuxa no teu caderno o triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) e *C* (7, 2). Debuxa o triángulo que se obtén ao xiralo con centro no punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. É unha simetría central. Cales son as coordenadas dos vértices *A'*, *B'* e *C'* do novo triángulo?
26. Debuxa nun sistema de referencia un punto *P* e o seu simétrico *P'* respecto da orixe. Se as coordenadas de *P* son (*x*, *y*), cales son as de *P'*?
27. Dado o triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), calcula as coordenadas dos vértices do triángulo simétrico respecto da orixe.
28. Debuxa un triángulo equilátero *ABC* e con centro no vértice *A* aplícalle un xiro de ángulo 60º. O triángulo dado e o transformado, que figura forman? Volve aplicar ao triángulo transformado o mesmo xiro de centro *A*, que xiros estiveches facendo? Cantos xiros debes aplicarlle ao triángulo inicial para que volva ocupar a posición inicial?



29. Debuxa no teu caderno os catro puntos da figura. Determina, con regra, compás e transportador, o centro e o ángulo de xiro sabendo que os puntos *A* e *B* se transformaron mediante un xiro en *A'* e *B'*.

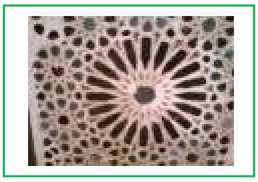


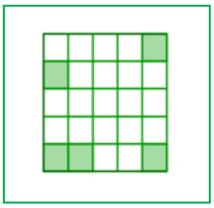
30. Debuxa a imaxe que resulta de aplicar ao triángulo da figura o xiro de centro *O* que transforma o punto *A* no punto *B*.
31. Utiliza un transportador de ángulos, regra e compás, para xirar unha recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ela (é suficiente xirar dous puntos desta recta). Mide os ángulos que forman as dúas rectas, a inicial e a xirada. Observas algunha regularidade? Investiga un método para xirar unha recta transformando un só punto. Que punto debes elixir e por que?
32. Xogo para dous xogadores: Forma sobre a mesa un polígono regular utilizando moedas (ou fichas ou boliñas de papel) como vértices. Alternativamente cada xogador retira ou unha moeda ou dúas moedas adxacentes. Gaña quen retire a última moeda. (*Axuda*: é un xogo de estratexia gañadora que podes descubrir utilizando a simetría central).
33. No deseño deste mosaico utilizáronse xiros no plano. Non o vemos completo, pero podemos imaxinar que fora infinito. Indica os centros de xiro que vexas. No centro da figura hai un centro de xiro clarísimo, de que ángulo? Hai xiros de 45º? Cales son os seus centros de xiro? Hai centros de simetría? Indícaos.

34. Para cada un dos seguintes polígonos indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixan invariantes a cada un deles:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

35. Indica se o mosaico da Alhambra da marxe ten centro de xiro, e determina cal é o menor ángulo de xiro que fai que o mosaico se superpoña (sen ter en conta os cambios de cor). Hai centros de simetría?

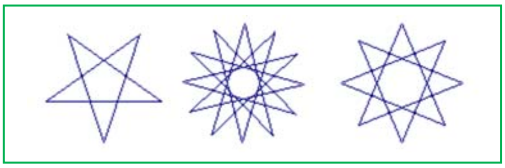




36. Con axuda de papel cuadriculado transforma mediante unha simetría central, unha recta, unha circunferencia, un segmento, un triángulo, dúas rectas paralelas e dúas rectas perpendiculares. En que se transforman? Analiza os resultados.

37. Que número mínimo de cadrados é necesario pintar de verde para que o cadrado grande teña un centro de simetría?

38. Xiramos o punto *A* (3, 5) e obtivemos o punto *A'* (7, –2). Determina o centro de xiro e o ángulo utilizando regra, compás e transportador de ángulos.



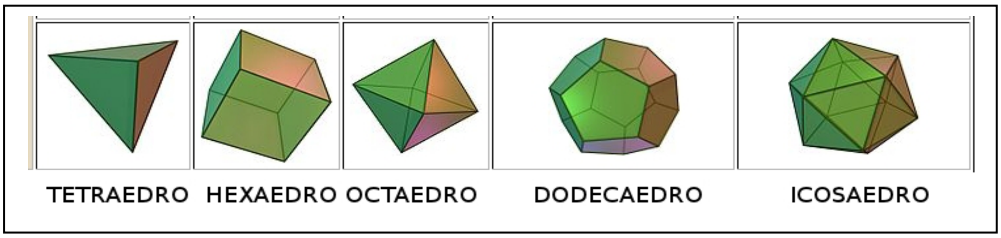
39. Cales dos polígonos estrelados da figura da marxe teñen centro de simetría? Indica o centro de xiro e o mínimo ángulo de xiro que deixa invariantes a cada un deles.

40. Determina tres obxectos cotiáns que teñan algún eixe de xiro.

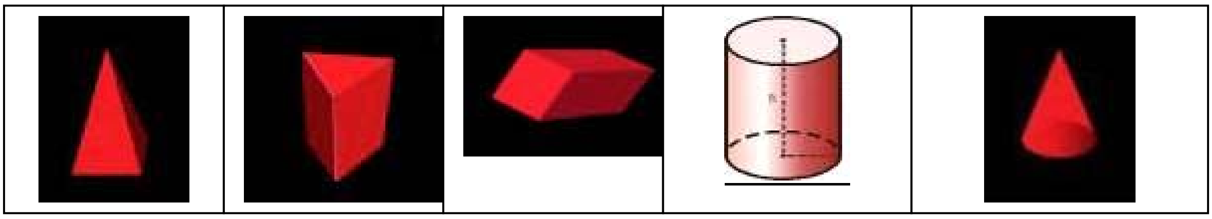
41. Na simetría central de centro (2, 3) vimos que o simétrico do punto *A* (8, 1) é o punto *A'* (–4, 5). Calcula os simétricos dos puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) e *E* (7, 6).

42. Observa esta torre mudéxar de Teruel. Está deseñada utilizando xiros no espazo. Cal é o seu eixe de xiro? E o ángulo de xiro?

43. Pensa nos cinco poliedros regulares. Uns teñen simetría central no espazo, outros non. Cales a teñen?



44. Pensa agora nos seguintes corpos xeométricos: unha pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro e un cono. Cales poden formarse mediante xiros no espazo? Cal é o seu eixe de xiro? Cales teñen simetría central e cales non?



Simetrías

45. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia e unha letra B. Debuxa a letra simétrica de B respecto do eixe de abscisas e respecto do eixe de ordenadas.

46. Clasifica as letras maiúsculas do alfabeto, a) nas que son simétricas respecto dun eixe de simetría horizontal e un eixe de simetría vertical, b) nas que só son simétricas respecto dun eixe de simetría vertical, c) nas que só o son respecto do eixe de simetría horizontal, e d) nas que non teñen ningún eixe de simetría. e) Comproba que as letras que teñen dous eixes de simetría teñen centro de simetría. A razón xa a sabes: a composición de dúas simetrías de eixes secantes é un xiro.

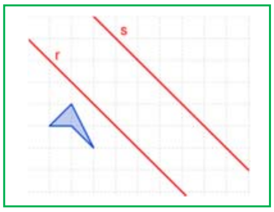
47. Cales das seguintes sucesións de letras teñen un único eixe de simetría? Cales teñen dous eixes? Cales ningún? Cales teñen centro de simetría?

a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica os eixes de simetría das seguintes figuras:

a) Cadrado.	b) Triángulo equilátero.	c) Trapecio isósceles.	d) Hexágono.
e) Circunferencia.	f) Rectángulo.	g) Rombo.	h) Pentágono.

49. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes paralelos, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.



a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas por esta composición de simetrías.

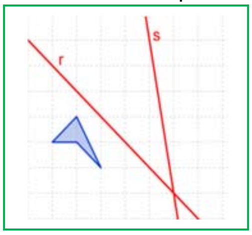
Se chamamos *C* ao cuadrilátero inicial, *C′* ao seu simétrico respecto ao eixe *r* e *C″* ao simétrico de *C′* respecto ao eixe *s*:

b) Que isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C″*?

c) Que elementos a definen?

d) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Cales son agora as coordenadas dos vértices da figura *C‴* transformada?

50. Considera que os vértices do cuadrilátero da figura teñen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) e (2, 4). Aplícalle dúas simetrías axiais de eixes secantes, a primeira respecto ao eixe *r* e a segunda respecto ao eixe *s*.



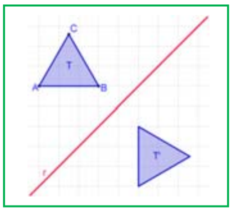
a) Indica as coordenadas dos vértices das figuras transformadas pola composición de simetrías.

b) Se chamamos *C* ao polígono inicial, *C′* ao simétrico respecto ao eixe *r* e *C″* ao simétrico de *C′* respecto ao eixe *s*: Que isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C″*. Que elementos a definen?

c) Que ocorre se aplicamos as dúas simetrías en distinta orde, primeiro respecto ao eixe *s* e despois respecto ao eixe *r*? Que isometría temos agora? Que elementos a definen?

d) Indica as coordenadas dos vértices da figura transformada se primeiro aplicamos a simetría de eixe *s e* logo a de eixe *r*.

51. Debuxa nun papel o contorno dunha figura irregular, en polo menos cinco posicións. (Se non se che ocorre ningunha figura, debuxa unha letra G). a) Son iguais estas figuras? Explica o teu razoamento. b) Como podes pasar dunha figura a outra? c) Colorea coa mesma cor todas as figuras que podes acadar desde a posición inicial, desprazando a figura sen levantala. Utiliza outra cor para as restantes. Pódese pasar sempre dunha figura a outra da mesma cor, deslizando a figura sen darlle a volta? Cambian as dimensións da figura?

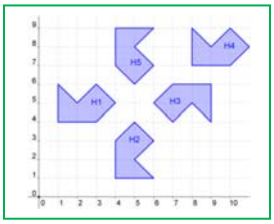


52. O triángulo equilátero T da figura transformouse no triángulo T' mediante unha simetría axial de eixe *r*. a) Copia o debuxo no teu caderno e nomea no debuxo a *A′*, *B′* e *C′*, que son os transformados de A*, B e C* respectivamente. b) Encontra un xiro que transforme T en T', indicando o centro e o ángulo de xiro, cales son agora os transformados dos vértices *A, B* e *C*?

53. Libro de espellos: Utiliza un libro de espellos para obter simetrías. Podes construír un con dous rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira polo libro de espellos un segmento, unha circunferencia, diferentes figuras…

Problemas

54. Indica os puntos invariantes e as rectas invariantes en cada un dos seguintes movementos.



a) Unha translación segundo o vector (1, 3).

b) Unha simetría axial respecto ao eixe de ordenadas.

c) Unha simetría central respecto ao centro de coordenadas.

55. Na figura adxunta o hexágono 1, denominado H1, cambiou de posición mediante movementos. A) Indica o tipo de movemento: translación, xiro ou simetría que trasforma H1 en cada un dos outros hexágonos. B) Determina, en cada caso, os elementos básicos que definen cada transformación indicando as coordenadas de cada un dos vértices de H1 que coordenadas ten en cada un dos transformados, e se é posible, xeraliza.

56. Sabemos que as translacións non deixan ningún punto invariante, pero a) deixa algunha recta invariante?, b) a simetría central deixa un punto invariante, o centro, pero, que rectas deixa invariantes unha simetría central no plano? e unha simetría central no espazo?

c) unha simetría axial deixa invariantes todos os puntos do seu eixe, que é unha recta invariante de puntos invariantes, pero que outras rectas invariantes deixa unha simetría axial? e que outros puntos?

d) unha simetría especular, no espazo, deixa un plano invariante de puntos invariantes, ou plano de simetría, que outros planos deixa invariantes? Que outras rectas? Que outros puntos?

57. Copia no teu caderno e completa as seguintes táboas:

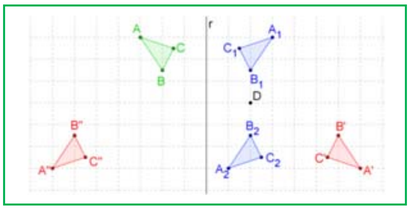
Táboa I: No plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamento			

Táboa II: No espazo	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Translación			
Simetría central			
Xiro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamento			

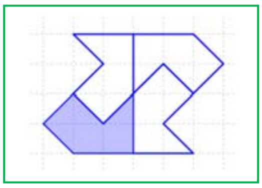
58. Debuxa o triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) e *C* (1, 3)
    a) Aplica a T unha translación segundo o vector ***u*** = (–3, 2), chama T' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.
    b) Debuxa o triángulo T'' que resulta de aplicar a T un xiro de 270º respecto á orixe de coordenadas e indica as coordenadas dos seus vértices.
59. Debuxa o cadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) e *D* (3, 4).
    a) Aplica a *K* unha translación segundo o vector ***u*** = (–3, –1), chama *K*' ao seu transformado e indica as coordenadas dos seus vértices.
    b) Debuxa o cadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* unha simetría central respecto ao punto (3, 0) e indica as coordenadas dos seus vértices.

Problemas de ampliación

60. Transforma a letra L mediante dúas isometrías consecutivas. Podes obter o resultado final mediante unha única isometría? Analiza posibles situacións.
61. Prega unha tira de papel como un acordeón. Fai algúns cortes e desprégaa. Confeccionaches un friso. Sinala nel todas as isometrías. Ensaia outros deseños de frisos.
62. A composición de isometrías non é conmutativa. Observa a figura adxunta:



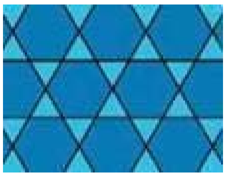
    a) Determina a isometría que transforma o triángulo ABC en $A_1B_1C_1$ e a que transforma este en $A_2B_2C_2$
    b) Indica a isometría que transforma o triángulo *ABC* en *A'B'C'* e a que transforma este en *A''B''C''*.
    c) Que conclusión obtés?



63. Indica as isometrías que hai que aplicar á figura coloreada en azul para obter a figura completa. Determina os elementos que definen cada isometría. Colorea de distinta cor cada un dos catro polígonos e constrúe un friso.

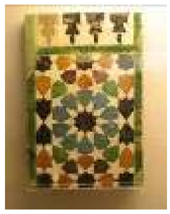
64. 1) A letra A ten un eixe de simetría vertical. 2) A letra H ten dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, ademais dun centro de simetría. 3) A letra Z ten centro de simetría, pero ningún eixe de simetría. 4) A letra E ten un eixe de simetría horizontal. 5) A letra F non ten centro de simetría nin ningún eixe de simetría. Clasifica as letras do abecedario nestes grupos, no primeiro grupo estarán as que teñen un eixe de simetría vertical, como a letra A, no segundo as que teñen dous eixes de simetría, un vertical e o outro horizontal, como a letra H, no terceiro as que só teñen centro de simetría como a letra Z, e no cuarto as que como a letra E teñen un eixe de simetría horizontal. Por último, nun quinto grupo as que non teñen ningún tipo de simetría como a letra F.

65. Análise dun mosaico: Debuxa no teu caderno unha trama de triángulos, nela un esquema do mosaico da marxe e sinala no teu debuxo todos os eixes de simetría, os centros de xiro e os vectores de translacións polos cales o transformado dun punto do mosaico (suposto que se prolonga ata o infinito) é tamén un punto do mosaico.



   a) Hai xiros de 60º? Se os hai marca os centros destes xiros cun asterisco *.
   b) Hai xiros de 180º? Se os hai marca os centros destes xiros cun círculo o.
   c) Sinala os eixes de simetría que encontres cunha liña de puntos.
   d) Debuxa á marxe os vectores de translación, horizontais e verticais, que haxa.
   e) Deseña o teu propio mosaico que manteña os mesmos movementos facendo algo sinxelo (un arco, unha poligonal) que se vaia movendo.

66. Analiza estoutro mosaico. Indica as transformacións que temos que aplicar ao elemento mínimo do mosaico adxunto para deixalo invariante. Indica tamén os elementos que as caracterizan.



67. Na animación seguinte observa a forma de obter un mosaico. Tomou unha cela unidade de 4 cadradiños, seleccionou un motivo mínimo… Indica que simetrías utilizou, que xiros e que translacións.

68. Determina os eixes e centros de simetría das seguintes gráficas de funcións. Sinala cales son pares e cales impares. (Debuxa previamente a súa gráfica).
   a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$

69. Un tetraedro regular ten 6 planos de simetría, debúxaos no teu caderno e indica a forma de determinalos.

70. Un octaedro ten 9 planos de simetría, debúxaos, 6 pasan polos puntos medios de arestas opostas, sabes caracterizar os outros 3? Intenta encontrar planos de simetría nun dodecaedro e nun icosaedro.

71. Un ser humano é máis o menos simétrico. Os mamíferos, paxaros e peixes tamén o son. Teñen un plano de simetría. A) E as estrelas de mar como a da figura, teñen un plano de simetría? B) Teñen máis? Cantos? C) Ten un eixe de xiro? De que ángulos? D) Ten simetría central? E) Debuxa no teu caderno unha estrela de cinco puntas e indica os seus eixes de simetría e o seu centro de xiro. (É un grupo de Leonardo D_5)

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

73. Unha pirámide regular de base un triángulo equilátero, ten simetría central? Ten planos de simetría? Cantos? Descríbeos. Ten eixes de xiro? Descríbeos. De que ángulos?

74. Describe as isometrías que deixan invariantes os seguintes corpos xeométricos, analizando os seus elementos:
   a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cadrada
   d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

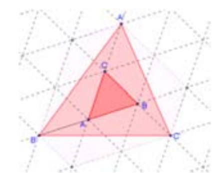
75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócao no libro de espellos de forma que dous lados queden apoiados na superficie dos espellos, e o outro sobre a mesa. Move as páxinas do libro de forma que vexas distintas pirámides, nas que a súa base son polígonos regulares. Isto permítenos estudar o xiro das pirámides, de que ángulo é. (Podes construír un libro de espellos con dous espellos pequenos ou dúas follas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

76. Pensa nos poliedros regulares. Copia a seguinte táboa no teu caderno e complétaa:

POLIEDRO	Ten centro de simetría? SI/NON	Ten eixes de xiro? SI/NON	Cantos eixes de xiro ten? De que ángulos?	Ten planos de simetría? SI/NON	Cantos planos de simetría ten?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

77. Contesta ás seguintes preguntas xustificando as respostas.
   a) É posible que unha figura teña dous eixes de simetría paralelos?
   b) A intersección de dous eixes de simetría, é sempre un centro de simetría?
   c) Por que un espello cambia a dereita pola esquerda e non cambia o de arriba polo de abaixo?
   d) É certo que dous círculos simétricos respecto a un plano son sempre cortes dunha esfera?

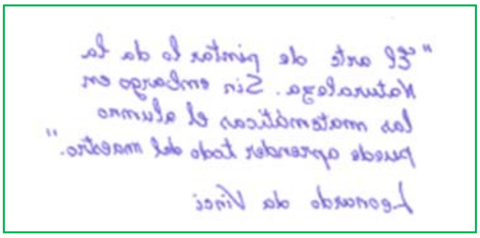
78. A partir dun triángulo calquera *ABC* construímos o triángulo *A'B'C'*, no que *A'* é o simétrico de A con respecto ao centro *C*, *B'* é o simétrico de *B* con respecto ao centro *A* e *C'* é o simétrico de *C* con respecto ao centro *B*. Utiliza a trama de triángulos para calcular a área do triángulo *A'B'C'* sabendo que o valor da área do triángulo *ABC é* 1 u^2.



79. Caleidoscopios diédricos: Miraches algunha vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dous espellos formando ángulo e anaquiños de plástico ou cristaliños que combinan as súas imaxes dando lugar a preciosas composicións cheas de simetrías. Fabrica un, e estuda os xiros e simetrías que observes.

80. Simetrías pregando papel: a)Dobra unha folla de papel e recorta unha figura. Ao desdobrar obterás a figura simétrica. b) Dobra unha folla de papel mediante dúas dobras perpendiculares. (Terás que facer coincidir a dobra consigo mesma). Mantendo o papel dobrado recorta unha figura. Ao desdobrar, a figura obtida terá unha dobre simetría. c) Con outra folla de papel, volve dobrar mediante dúas dobras perpendiculares. Dobra de novo pola metade o ángulo recto obtido. Recorta os deseños que máis che gusten. Estás construíndo modelos de folerpa. Cantos eixes de simetría obtiveches? d) Intenta agora dobrar a folla de papel para obter eixes de simetría que formen ángulos de 60º e de 30º. Utiliza a túa imaxinación para obter novos deseños de folerpas..

81. A simetría na escrita de Leonardo Da Vinci: Sabías que se miras o escrito por Leonardo nun espello podes lelo con facilidade? É un bo exemplo de simetría especular. Le o seguinte texto de Leonardo.



82. Utiliza a propiedade da composición de dúas simetrías de eixes secantes para demostrar que un ángulo inscrito nunha circunferencia é a metade do central que abrangue o mesmo arco. *Axuda*: Traza a circunferencia, un ángulo inscrito e o seu central. Traza dúas rectas perpendiculares polo centro da circunferencia aos lados do ángulo inscrito.

83. Estuda as isometrías que deixan invariante a un triángulo equilátero. Nomea os seus vértices e os seus eixes de simetría. a) Aplica ao triángulo un xiro de 120º e logo unha simetría. Podes obter o mesmo resultado cunha única transformación? b) Repite o mesmo cun xiro de 240º e outra simetría. c) Comproba que sempre a composición dun xiro por unha simetría é outra simetría. d) Fai agora un xiro de 120º e outro de 240º, que obtés? e) E con dous xiros de 240º? f) Comproba que a composición de dous xiros do mesmo centro é sempre un xiro (ou a identidade).

84. Ao pasear pola cidade, mirar a aula, en todo o que nos rodea podemos ver como a Xeometría permite explicalo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, é dicir, un anaco de mosaico que che permite, mediante movementos, recompoñelo. No deseño deste mosaico, utilizáronse simetrías?

- Hai simetrías de eixe vertical?
- Hai simetrías de eixe horizontal?
- Hai outros eixes de simetría? Cales?
- Hai xiros de 90º?
- Hai xiros de 45º?
- Hai translacións?

85. Deseña no teu caderno un motivo mínimo (se non se che ocorre ningún, usa a letra L), e utiliza as mesmas simetrías, xiros e translacións que se usan neste mosaico para facer o teu propio deseño de mosaico.

Observa o teu deseño, e responde ás seguintes preguntas:

- Se compós dúas simetrías de eixes paralelos, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño de mosaico en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes paralelos e describe completamente o movemento que obtiveches.
- Se compós dúas simetrías de eixes secantes, que movemento obtés? É outra simetría? É un xiro? É unha translación? Indica no teu deseño en que ocasión compuxeches dúas simetrías de eixes secantes e describe completamente o movemento que obtiveches..

86. Mira estoutro mosaico. É o famoso mosaico Nazarí dos ósos. Non imos ter en conta a cor. Para deseñar o óso, debuxa no teu caderno un cadrado. Mira a figura. Corta nos lados verticais un trapecio e colócao sobre os lados horizontais. Xa tes o óso. É simétrico? Ten un eixe de simetría vertical e outro horizontal, polo que poderiamos tomar como motivo mínimo a cuarta parte do óso.

- Para pasar dun óso de cor a un óso branco, que transformación se usou?
- Debuxa no teu caderno, en cor vermella, eixes de simetría verticais e en cor azul, eixes de simetría horizontais.
- Sinala, cun asterisco, (*), centros de xiro de 90º, e cun círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando o óso debuxa no teu caderno o mosaico completo.

87. Debuxa no teu caderno unha letra F maiúscula, e traza tamén dúas rectas *m* e *n* que formen un ángulo de 30º e se corten nun punto *O*. Debuxa o seu transformado por:
    a) Un xiro de centro o punto *O* e ángulo 60º.
    b) A simetría de eixe *n.*
    c) A simetría de eixe *m.*
    d) A composición da simetría de eixe *n* coa de eixe *m.*
    e) Compara o resultado obtido no apartado a) co do apartado d). Que observas?

AUTOAVALIACIÓN

1. Coa translación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos o punto *P* (5, –4) ata o punto *P'* e as coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4)   b) (2, 4)   c) (2, 12)   d) (6, 3)
2. Ao trasladar *A* (–1, 8) ata *A'* (4, 6) utilízase o vector **u**:
   a) **u** = (3, 2)   b) **u** = (3, –2)   c) **u** = (5, –2)   d) **u** = (5, 14)
3. A transformación que leva o punto *A* (2, 0) no punto *A'* (0, 2) non pode ser:
   a) Un xiro de centro a orixe e ángulo 90º   b) unha translación de vector **u** = (2, 2)
   c) Un xiro de centro a orixe e ángulo 270º   d) unha simetría de eixe y = *x*.
4. A transformación identidade tamén se chama:
   a) Simetría central   b) Simetría axial   c) Xiro de 180º   d) Translación de vector nulo (0, 0)
5. Como debe ser un triángulo para ter máis de dous eixes de simetría?
   a) rectángulo   b) isósceles   c) equilátero   d) rectángulo isósceles
6. A simetría central no plano é un xiro de:
   a) 360º   b) 180º   c) 90º   d) 0º
7. No plano, a composición de dúas simetrías de eixes secantes sempre é:
   a) unha translación   b) un xiro   c) outra simetría   d) a simetría central
8. As coordenadas do punto simétrico ao punto *A* (3, 7) respecto do eixe de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7)   b) *A'* (3, –7)   c) *A'* (–3, –7)   d) *A'* (7, 3)
9. Indica cal das seguintes letras non ten simetría central:
   a) O   b) H   c) S   d) D
10. Sempre se obtén un xiro facendo sucesivamente:
    a) Dous xiros de distinto centro   b) Dúas simetrías de eixes secantes
    c) Un xiro e unha simetría   d) Dúas simetrías de eixes paralelos.

RESUMO

Semellanza	Transformación xeométrica que conserva os ángulos e as distancias son proporcionais.	Unha fotocopia reducida
Translación	Vén determinada polo seu vector de translación. Son isometrías directas. A composición de dúas translacións é unha translación.	O trasladado do punto P (1, 2) pola translación de vector v = (4, 5) é P' (5, 7).
Xiro ou rotación no plano Xiro no espazo	Vén determinado polo centro de xiro e o ángulo de xiro. Vén determinado polo eixe de xiro e o ángulo	O xirado do punto P (1, 2) polo xiro de centro a orixe e ángulo 90º é P' (2, –1)
Simetría axial Simetría especular	Coñécese polo seu eixe de simetría Coñécese polo su plano de simetría	O simétrico do punto P (1, 2) pola simetría de eixe ou eixe de ordenadas é P' (–1, 2)
Isometrías	Son trasformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.	Translacións, xiros e simetrías
Composición de isometrías	A composición de dúas isometrías directas é unha isometría directa. A composición de dúas isometrías inversas é unha isometría directa. A composición dunha isometría directa cunha inversa é unha isometría inversa.	
Composición de isometrías no plano	A composición de dous xiros do mesmo centro é un xiro do mesmo centro. A composición de dúas simetrías é un xiro ou unha translación.	
Elementos invariantes no plano	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. O **xiro** deixa invariante **un** punto, o centro de xiro. A **simetría** deixa invariante unha **recta**, o eixe de simetría A **identidade** deixa invariante **todo** o plano.	
Elementos invariantes no espazo	A **translación** non deixa **ningún** punto invariante. A **simetría central** deixa invariante **un** único punto, o centro de simetría. O **xiro** deixa invariante unha **recta**, o eixe de xiro. A **simetría** deixa invariante o **plano** de simetría A **identidade** deixa invariante **todo** o espazo.	

Un bo resumo deste capítulo telo neste Power Point.

CAPÍTULO 9: XEOMETRÍA NO ESPAZO. GLOBO TERRÁQUEO

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. PERPENDICULARIDADE E PARALELISMO NO ESPAZO

1. Busca na habitación na que te encontras, exemplos de:
   a. Planos paralelos e perpendiculares.
   b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares e coplanarias, rectas perpendiculares e non coplanarias.
   c. Recta paralela ao plano, recta e plano secantes, recta contida no plano.
2. As follas dunha porta xiratoria forman entre si 5 ángulos diedros consecutivos e iguais. Canto mide cada un deles?
3. Desde un punto interior a unha sala de planta hexagonal regular trázase unha recta perpendicular a cada parede. Canto medirá o ángulo que forman dúas perpendiculares consecutivas?
4. Dous triedros teñen as tres caras iguais, pódese asegurar que son iguais? Razoa a resposta.

2. POLIEDROS

5. Investiga se os seguintes corpos son poliedros e, en caso afirmativo, se cumpren o teorema de *Euler*. Indica tamén se son cóncavos ou convexos:

6. É posible demostrar cun crebacabezas o teorema de *Pitágoras* no espazo. Propoñémosche que o intentes. Poderás encontrar na revista e entre os recursos para imprimir as pezas que che axudarán. Na fotografía amósase o puzzle resolto.

7. É posible construír un prisma cóncavo triangular? E un prisma cóncavo regular? Razoa as respostas.
8. Entre os poliedros regulares, hai algún que sexa prisma? En caso afirmativo clasifícao.
9. Basta que un paralelepípedo teña dúas caras rectangulares para que sexa un prisma recto?
10. Debuxa un prisma pentagonal regular e comproba que cumpre a relación de *Euler*.
11. Unha caixa ten forma cúbica de 2 dm de aresta. Canto mide a súa diagonal?
12. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 10 metros de longo, 4 metros de ancho e 3 metros de altura.
13. Clasifica os seguintes poliedros

14. Hai algunha pirámide regular que sexa poliedro regular? E pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un exemplo e, en caso negativo, xustifica as túas respostas.
15. Debuxa unha pirámide hexagonal regular e distingue a apotema da pirámide da apotema da base. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

3. ÁREA LATERAL E TOTAL DUN POLIEDRO

16. Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular regular sabendo que as arestas das bases miden 2 cm e cada aresta lateral 8 m.
17. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 63 m^2 e ten 7 m de altura. Calcula o perímetro da base.
18. O lado da base dunha pirámide hexagonal regular é de 6 cm e a altura da pirámide 10 cm. Calcula o apotema da pirámide e a súa área total.
19. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 4 e 7 dm e que a altura de cada cara lateral é de 8 dm.

20. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular é 104 cm^2, calcula o apotema da pirámide e a súa altura.

4. CORPOS DE REVOLUCIÓN

21. Unha columna cilíndrica ten 76 cm de diámetro e 4 m de altura. Cal é a súa área lateral?
22. O radio da base dun cilindro é de 38 cm e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.
23. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 m e a súa xeratriz 8 m. Calcula a área total.
24. Unha esfera ten 4 m de radio. Calcula: a) a lonxitude da circunferencia máxima; b) a área da esfera.

5. VOLUME DUN CORPO XEOMÉTRICO

22. Calcula o volume dun prisma recto de 12 dm de altura cuxa base é un hexágono de 4 dm de lado.
23. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 12 cm de diámetro e que a auga acada 1 dm de altura.
24. O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 m de altura e 2 m de diámetro. Irene chamou ao subministrador de gasóleo porque no depósito soamente quedan 140 litros.
    a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
    b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?
25. Comproba que o volume da esfera de radio 5 dm sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 10 dm de altura coincide co volume dun cilindro que ten 10 dm de altura e 5 dm de radio da base.

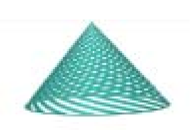
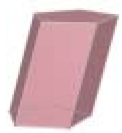
6. GLOBO TERRÁQUEO

29. Un avión percorre 20º en dirección oeste ao longo do Ecuador. Se chega a un punto cuxa lonxitude é de 170º leste, cales son as coordenadas do lugar de partida?
30. Xoán sae da súa casa e percorre 10 Km en dirección sur, 20 Km cara ao leste e 10 Km cara ao norte. Se se encontra de novo na casa, onde está situada a súa casa?
31. Na esfera terrestre, que paralelo mide máis?, que meridiano mide máis? Razoa as túas respostas.
32. Busca as coordenadas xeográficas do lugar no que vives.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ángulos poliedros. Paralelismo e perpendicularidade. Poliedros: elementos e tipos

1. Se estamos nunha habitación sen columnas, atendendo ao chan e ás súas catro paredes, cantos ángulos diedros se forman?
2. Dobra pola metade unha folla de papel, constrúe un ángulo diedro e traza o seu rectilíneo. Poderías medir a amplitude de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?
3. Determina a amplitude dos ángulos diedros que forman as caras laterais dun poliedro que é un prisma recto de base un octógono regular.
4. Dúas caras dun triedro miden 60º e 118º, entre que valores pode oscilar a outra?
5. Pódese formar un ángulo poliedro cun ángulo dun triángulo equilátero, dous ángulos dun rectángulo e un dun pentágono regular?
6. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.
7. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?
8. Podes encontrar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?
9. Prolonga unha parella de arestas nunha pirámide pentagonal, de modo que se obteñan rectas non coplanarias.
10. Debuxa un prisma regular de base cadrada e sinala: a) dúas arestas que sexan paralelas, b) dúas arestas que sexan perpendiculares e coplanarias, c) dúas arestas perpendiculares e non coplanarias, d) dúas caras paralelas, e) dúas caras perpendiculares.
11. Se un poliedro convexo ten 16 vértices e 24 arestas, cantas caras ten? Podería ser unha pirámide? E un prisma?
12. Con 12 variñas de 5 cm de longo cada unha, usando todas as variñas que poliedros regulares se poden construír?
13. Dun prisma sabemos que o número de vértices é 16 e que o número de arestas é 24, cantas caras ten?
14. Clasifica os seguintes corpos xeométricos e indica, cando sexan poliedros, o número de vértices, caras e arestas que teñen. Cales cumpren o teorema de *Euler*?

15. Describe a diferenza entre un prisma recto e un prisma oblicuo. É suficiente que un paralelepípedo teña dúas caras paralelas rectangulares para que sexa un ortoedro?

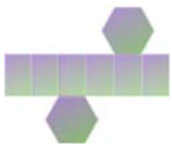
Teorema de Pitágoras no espazo

16. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 cm, 5 cm e 6 cm que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.
17. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

18. Un vaso de 12 cm de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 4 cm. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 cm?
19. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 cm, 3 cm e 12 cm un bolígrafo de 13 cm de lonxitude?
20. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 cm e a altura do prisma 8 cm.
21. Se un ascensor mide 1 m de ancho, 1.5 m de longo e 2.2 m de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 m de altura?
22. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 m de ancho, 8 m de longo e 4 metros de altura?
23. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 cm.
24. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 cm e 2 cm, e altura 10 cm.

Área lateral, total e volume de corpos xeométricos

25. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:

26. Un prisma de 8 dm de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm e 4 dm. Calcula as áreas lateral e total do prisma.
27. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 4 cm de aresta basal e 1 dm de altura e calcula as áreas da base e total.
28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.
29. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 3.5 dm, 8.2 dm e 75 cm.
30. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 8 m de altura e 5cm de radio da base.
31. Calcula a área total dunha esfera de 5 cm de radio.

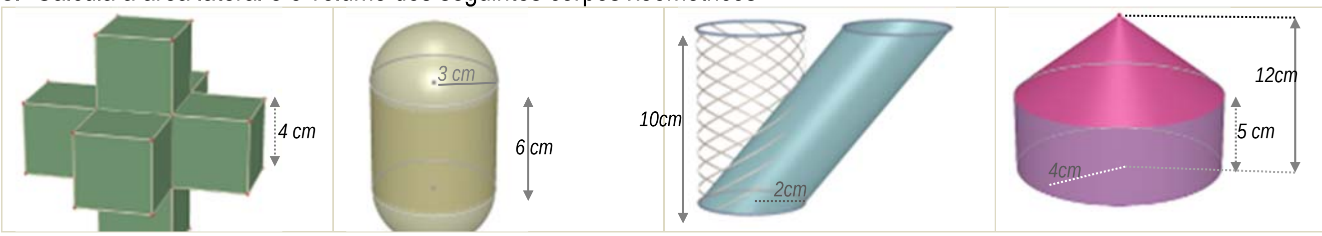
32. Calcula o apotema dunha pirámide regular sabendo que su área lateral é de 120 m^2 e sa base é un hexágono de 5 m de lado.
33. Calcula o apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 32 dm e a altura da pirámide é de 4 dm. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.
34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm xira arredor de un dos seus catetos xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.
35. Tres bólas de metal de radios 12 dm, 0,3 m e 4 m fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?
36. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro e 20 metros de profundidade?
37. Canto cartón necesitaremos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 10 cm e que a súa altura sexa de 25 cm?

38. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 cm de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 cm de lado e 800 cm3 de volume.
39. Cal é a área da base dun cilindro de 1.20 m de alto e 248 dm^3 de volume?
40. A auga dun manancial condúcese ata unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio da base e 20 m de altura. Logo embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

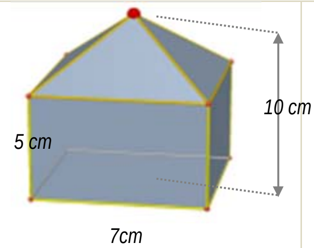
41. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un anel de 10 tetraedros cada un dos cales ten 2 cm de aresta.
42. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultou un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

43. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado da base e 2 m de altura.
44. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a Terra, ten 80 cm de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 cm. Calcula o volume de Terra que enchería unha xardineira por completo.

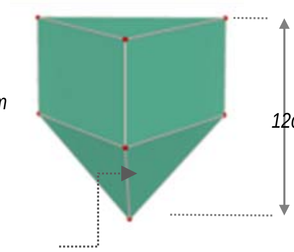
45. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 3, 5 e 7. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 14.5 m.
46. Un ortoedro ten 1 dm de altura e 6 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?
47. Se o volume dun cilindro de 10 cm de altura é de 314 cm^3, calcula o radio da base do cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de π).
48. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. (Tomar π = 3.14). b) Cantos litros de auga caben no depósito?
49. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 cm de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.
50. Unha circunferencia de lonxitude 2.24 cm xira arredor de un dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume. (Tomar π = 3.14).
51. Unha porta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho e 4 cm de espesor. O prezo de instalación é de 200 € e cóbrase 6 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 300 € cada m^3. A) Calcula o volume de madeira dunha porta. B) O custe da madeira dunha porta máis a súa instalación. C) O custe do vernizado de cada porta, se só se cobra o vernizado das dúas caras principais.
52. A auga contida nun recipiente cónico de 18 cm de altura e 24 cm de diámetro da base vérquese nun vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. Ata que altura chegará a auga?
53. Segundo *Arquímedes*, que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 5 cm de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.
54. Cal é o volume dunha esfera na que unha circunferencia máxima mide 31.40 m?
55. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



56. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



A base é cadrada

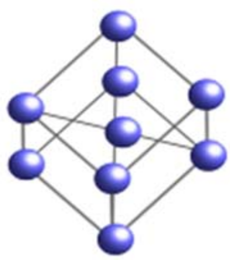


Tetraedro de 5 cm de aresta

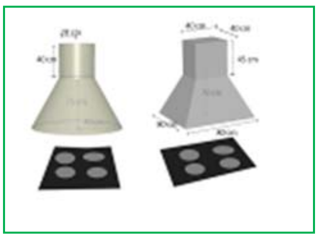

Octaedro de 6cm de aresta


Pirámides construídas no interior dunha estrutura cúbica de 5 dm de aresta.

57. Na construción dun globo aerostático de radio de 2.5 m emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.
58. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.
59. O *Atomium* é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?



60. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapa de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?
61. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.
    a. cantos litros de auga son necesarios para enchela?
    b. canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/m^2?



62. Cal das dúas cambotas da figura da esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?
63. Nunha vasilla cilíndrica de 8 dm de diámetro e que contén auga, introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.3 metros o nivel da auga?
64. O prezo das tellas é de 14.30 €/m^2 canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura e 8 metros de lado da base?

65. Enrólase unha cartolina rectangular de lados 30 cm e 25 cm das dúas formas posibles, facendo coincidir os lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?
66. Cada un dos cubos da figura ten 2 cm de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

67. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1.5 cm e a altura total é de 15 cm, calcula cantos centílitros de líquido caben nel.
68. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 50 cm de altura e bases de radios 20 e 30 cm. Calcula a súa superficie.
69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio e 40 cm de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.

70. Construímos un cono con cartolina recortando un sector circular de 120º e radio 20 cm. Calcula o volume do cono resultante.
71. Un funil cónico de 20 cm de diámetro debe ter 2 litros de capacidade, cal será a súa altura?
72. Nun depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, unha billa verque 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois dun cuarto de hora?
73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura e 45 cm de lado da base. Fíxase nun mastro no chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 m. No momento en que os raios do sol son verticais, que espazo de sombra determina?

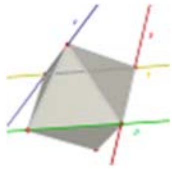
74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 56 litros de auga. Se ten 48 cm de longo e 36 cm de ancho, cal é a súa profundidade?
75. Un rectángulo de 1 m de base e 10 m de altura xira 360º arredor dunha recta paralela á altura que está situada a 2 m de distancia. Calcula a superficie e o volume do corpo que resulta.
76. Nun xeado de cornete a galleta ten 15 cm de altura e 5 cm diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos gramos de xeado contén?

Fusos horarios

77. Que diferenza de lonxitude existe entre dúas cidades se a diferenza horaria entre ambas as dúas é de 5 horas? Podemos saber se existe diferenza entre as súas latitudes?
78. Un avión emprende viaxe cara a unha cidade situada ao oeste de Madrid. A viaxe dura 10 horas e o seu rumbo mantén en todo momento a latitude de partida. Se a diferenza de lonxitude entre Madrid e a cidade de chegada é de 45º e o avión despega do aeroporto Adolfo Suárez ás 9 da mañá. A que hora local aterrará na cidade de destino?
79. A distancia entre Londres e Pequín é de 8 149 Km e a distancia entre Londres e São Paulo é de 9 508 Km, porén en Pequín o reloxo marca 7 horas máis que en Londres e en São Paulo 3 horas menos que en Londres. Como explicas esta diferenza?

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
LONDRES	0º	51º 30´latitude N
PEKÍN	116º lonxitude E	40º latitude N
SÃO PAULO	46º 30´de lonxitude W	23º 30´de latitude S

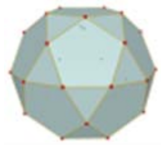
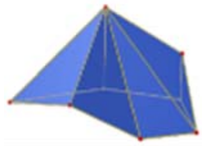
AUTOAVALIACIÓN



1. Cada unha das rectas r, s, t e p pasa por dous vértices consecutivos dun octaedro tal como se observa na figura. Sinala que afirmación das seguintes é verdadeira:

a) As rectas r e s son coplanarias e secantes. **b)** As rectas t e p non son coplanarias. **c)** As rectas r e p crúzanse. **d)** r e s conteñen arestas dunha mesma cara do octaedro

2. Observa os seguintes corpos xeométricos e selecciona a opción verdadeira:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Os corpos I), II), IV) e V) cumpren a relación de Euler. **b)** . Hai dous corpos de revolución III) e VI). **c)** Son poliedros regulares II) e IV). **d)** Son cóncavos I) e V).

3. Se a altura dun prisma de base cadrada é 10 cm e o lado da base é 4 cm, a súa área total é:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura e lado da base 1 m. Se só contén as tres cuartas partes da súa capacidade, o número aproximado de litros de auga que hai nel é:

a) 13 000 L **b)** 9 750 L **c)** 3 750 L **d)** 3 520 L

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura e 80 cm de lado da base. Se se precisan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, en total utilizaranse:

a) 38 tellas **b)** 76 tellas **c)** 72 tellas **d)** 36 tellas

6. Unha caixa de dimensións $30 \times 20 \times 15 \quad cm$, está chea de cubos de 1 *cm* de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 *cm* de lado, a altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 dm de radio da base e 120 cm de altura é:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura e 3 cm de radio da base. O número de envases necesario é:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. A área lateral dun tronco de cono que ten 20 cm de altura e bases de radios 30 e 15 cm, é:

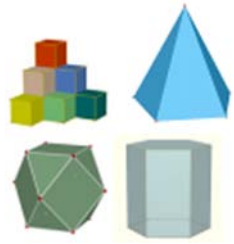
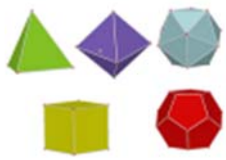
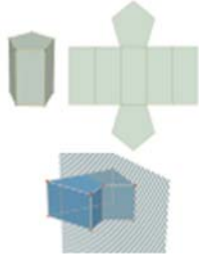
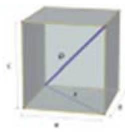
a) 2 250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1 125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

10. A partir das coordenadas xeográficas das cidades A, B , C deduce que afirmación é correcta

CIDADE	LONXITUDE	LATITUDE
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas menos. **b)** As cidades A e B teñen a mesma hora e a cidade C dúas horas máis. **c)** As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas máis. **d)** As cidades A e C teñen a mesma hora e a cidade B dúas horas menos.

RESUMO

Poliedro. Elementos dun poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro é unha rexión pechada do espazo limitada por polígonos. Os seus principais elementos son: caras, arestas, vértices, ángulos diedros e poliedros, así como as diagonais. Os poliedros poden ser cóncavos e convexos dependendo de que algunha das súas caras sexa un polígono cóncavo ou ningunha o sexa. Entre os poliedros destacan poliedros regulares, prismas e pirámides.	
Teorema de Euler	En todo poliedro convexo o número de caras máis o número de vértices coincide co número de arestas máis 2.	C + V = A + 2
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro que cumpre que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	Un prisma é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases. Poden ser cóncavos ou convexos; rectos ou oblicuos, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais… Destacan os paralelepípedos que son prismas con todas as súas caras paralelogramos e dentro destes os ortoedros que son paralelepípedos con todas as súas caras rectangulares.	
Teorema de Pitágoras no espazo	A diagonal dun ortoedro é a raíz cadrada da suma dos cadrados das súas arestas.	
Pirámides	Unha pirámide é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común, como lados ten a base. Poden ser cóncavas ou convexas; rectas ou oblicuas, regulares ou irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonais…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide é o poliedro resultante ao cortar unha pirámide por un plano paralelo á base. As bases son polígonos semellantes e as caras laterais son trapecios.	
Corpos de revolución	Os corpos de revolución son corpos xeométricos que se obteñen ao facer xirar unha liña arredor dunha recta fixa denominada *eixe*. A liña que xira chámase *xeratriz*. Entre os corpos de revolución destacan cilindros, conos e esferas.	
Áreas lateral e total dun prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$	
Áreas lateral e total dunha pirámide regular	$A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	

Áreas lateral e total dun tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base\ 1} + Área_{Base\ 2}$	
Áreas lateral e total dun cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	
Áreas lateral e total dun cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Áreas lateral e total dun tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r) G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área e volume dunha esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volume = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Volume dun prisma e dun cilindro	$Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Volume dunha pirámide e dun cono	$Volume = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Coordenadas xeográficas	**Latitude**: Distancia do punto xeográfico ao Ecuador medida sobre o meridiano que pasa polo punto. **Lonxitude:** Distancia do punto xeográfico ao meridiano cero ou de Greenwich, medida sobre o paralelo que pasa polo punto.	
Fusos horarios	Cada **fuso horario** é unha zona do globo terráqueo comprendida entre dous meridianos que se diferenzan en 15º de lonxitude.	

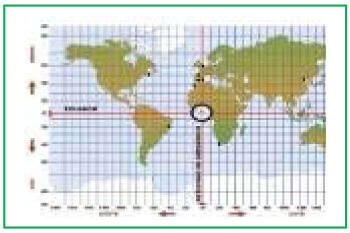
CAPÍTULO 10: FUNCIÓNS E GRÁFICAS

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NO PL ANO

26. Fíxate no mapa seguinte, localiza os países ou cidades que se piden e indica no teu caderno:

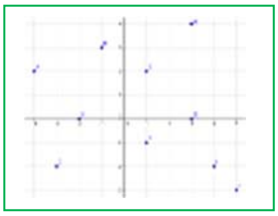
a) Os cuadrantes onde se encontran os seguintes países:



- México:
- España:
- Arabia Saudí:
- Madagascar:
- Arxentina:
- Alemaña:
- India:
- Australia:
- EEUU:
- Chile:
- Xapón:
- Marrocos:

b) As coordenadas (aproximadas) das seguintes cidades:

- Cidade do Cabo
- Pequín:
- Londres:
- Nova York:
- Rabat:
- Córdoba (México):
- Río de Janeiro:
- Sidney:
- Oviedo:
- Alacant



27. Copia no teu caderno e indica as coordenadas de todos os puntos que están sinalados no plano:

28. Representa graficamente no teu caderno os seguintes puntos do plano:

A (0, –2) *B* (–2, 0) *C* (4, 0) *D* (–6, 0) *E* (0, 6) *F* (1, 7) *G* (7, 1) *H* (–4, 8) *I* (–1, –4) *J* (–4, –1)

K (5, –3) *L* (9, 6) *M* (–2, 1) *N* (7, –4) *Ñ* (–3, –3) *O* (0, 0) *P(–2, –1)* *Q*(2,1) *R*(2, –1) *S*(–2, 2)

2. FUNCIÓNS

29. Das seguintes relacións entre dúas variables, razoa cales son funcionais e cales non:

a. Idade – altura da persoa ao longo da súa vida
b. Altura – idade da persoa
c. Prezo da gasolina – día do mes
d. Día do mes – prezo da gasolina
e. Un número e a súa quinta parte
f. Un número e o seu cadrado
g. Un número e a súa raíz cadrada

30. Se hoxe o cambio € a $ está 1 € = 1.37 $, completa no teu caderno a seguinte táboa de equivalencia entre as dúas moedas:

€	2	5	10	27	60
$					

Expresa mediante unha fórmula a relación que existe entre ambas as dúas. Pódese expresar de forma única esta relación? É unha función? Se realizas o cambio nunha oficina, cóbranche unha pequena comisión fixa por realizar a operación de 1.5 €. Como quedaría/n a fórmula/s neste caso?

31. A ponte Golden Gate permite a comunicación entre os dous lados da baía de San Francisco. As súas torres, de 746 pés de altura, están separadas por unha distancia de 4200 pés aproximadamente. A calzada, que ten unha anchura de 90 pés e se encontra a unha altura de 220 pés sobre o nivel da auga, está suxeita ás torres mediante dous cables, de 3 pés de diámetro, que teñen forma de parábola e que tocan a calzada no centro da ponte.

-Realiza un debuxo onde queden reflectidos os datos máis significativos do problema.

-Determina a relación que existe entre a altura á que se encontra un punto do cable e a distancia da súa proxección vertical ao centro da ponte.

-Aplica esta fórmula para calcular a altura dun punto do cable cuxa vertical está a 1 000 pés do centro da ponte.

32. Realiza no teu caderno o debuxo de dúas gráficas, unha que corresponda a unha función e a outra non. Identifica cada cal e explica o porque desta correspondencia.

33. Realiza no teu caderno unha táboa con 10 valores da función $e(t) = 5t + 20$, represéntaos graficamente e indica a figura que determinan. Se esta función representa o espazo (en quilómetros) que percorre unha persoa que leva andados 20 km e camiña a unha velocidade de 5 km/h, en función do tempo que tarda en percorrerlo (en horas), indica cales serían os valores que non tería sentido dar á variable independente e en que se traduce iso na gráfica.

34. Razoa se os valores da seguinte táboa poden corresponder aos dunha función e por que:

x	–13	–7	10	–13	24
f(x)	–15	0	14	3	0

35. Nunha folla de papel cuadriculado raia un cadrado de lado un cadradiño. Cal é a súa área? Agora fai o mesmo cun cadrado de lado 2. Continúa tomando cadrados de lados 3, 4, 5… e calcula as súas áreas. Cos resultados completa unha táboa de valores e debuxa a súa gráfica. Ten sentido para valores negativos da variable? Busca unha fórmula para esta función.

36. Para estacionar en zona azul (no residentes) hai unhas tarifas. Representa unha gráfica da función cuxa variable independente sexa o tempo e a variable dependente o prezo (en euros) que hai que pagar.

37. Un fabricante quere construír vasos cilíndricos medidores de volume, que teñan de radio da base 4 cm e de altura total do vaso 24 cm. Escribe unha fórmula que indique como varía o volume ao ir variando a altura do líquido. Constrúe unha táboa cos volumes correspondentes ás alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe tamén unha fórmula que permita obter a altura coñecendo os volumes. A que altura haberá que colocar a marca para ter un decilitro?

38. Escribe tres funcións cuxas gráficas sexan tres rectas que pasen pola orixe de coordenadas e as súas pendentes sexan 3, –2, e 1/2 respectivamente.

39. Que ángulo forma co eixe de abscisas a recta $y = x$? E a recta $y = -x$?

40. Un metro de certa tea custa 1.35 €, canto custan 5 metros? E 10 m? E 12.5 m? Canto custan "*x*" metros de tea? Escribe a fórmula desta situación.

41. Calcula a ecuación e debuxa a gráfica das rectas seguintes:

a) A súa pendente é 2 e a súa ordenada na orixe é 3.

b) Pasa polos puntos *A*(1, 3) e *B*(0, 4).

c) A súa ordenada na orixe é 0 e a súa pendente é 0.

d) Pasa polos puntos *C*(–1, 3) e *D*(–2, 5).

e) Pasa polo punto (*a*, *b*) e ten de pendente *m*.

Como son entre si dúas rectas de igual pendente e distinta ordenada na orixe?

42. Debuxa no teu caderno, sen calcular a súa ecuación, as rectas seguintes:

a) De pendente 3 e ordenada na orixe 0.

b) Pasa polos puntos *A*(2, 3) e *B*(4, 1).

c) A súa pendente é 2 e pasa polo punto (4, 5).

43. Fai unha táboa de valores e representa graficamente no teu caderno: $\boxed{y = 3x + 3}$

44. Fai unha táboa de valores e representa graficamente no teu caderno: $\boxed{y = \frac{-x}{2}}$

45. Fai unha táboa de valores e representa graficamente no teu caderno: $\boxed{y = -3x^2 + 6x - 4}$

46. Fai unha táboa de valores e representa graficamente no teu caderno: $\boxed{y = 2x^2 - 8}$

47. Debuxa a gráfica da función $y = x^2$.

a) Para iso fai unha táboa de valores, tomando valores da abscisa positiva.

b) Tomando valores da abscisa negativa.

c) Que lle ocorre á gráfica para valores grandes de "*x*"? E para valores negativos grandes en valor absoluto?

d) A curva é simétrica? Indica o seu eixe de simetría.

e) Ten un mínimo? Cal é? Coordenadas do vértice.

f) Recorta un modelo desta parábola marcando o seu vértice e o eixe de simetría, que usaremos noutros problemas.

48. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un RESUMO indicando o que obtiveches. Observarías que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido vertical, cara arriba no caso de $y = x^2 + 2$; e cara abaixo no caso de $y = x^2 - 3$. A parábola $y = -x^2$; é simétrica (cara abaixo) de $y = x^2$. En xeral, se trasladamos *q* unidades na dirección do eixe de ordenadas temos a parábola $y = x^2 + q$.

49. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un RESUMO indicando o que obtiveches. Observarías que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido horizontal, cara á dereita no caso de $y = (x - 3)^2$; e cara á esquerda no caso de $y = (x + 2)^2$. Polo que, en xeral, se trasladamos *p* unidades na dirección do eixe de abscisas obtemos a parábola $y = (x - p)^2$.

50. Escribe a ecuación dunha parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal á dereita e 3 unidades en sentido vertical cara arriba. Que coordenadas ten o seu vértice?

51. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas:

    $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

Observa que agora xa non che serve o modelo empregado. Agora as parábolas estréitanse ou ensánchanse.

52. Completa este RESUMO. A gráfica de $y = ax^2$ obtense da de $y = x^2$:
    a) Se $a > 1$ entón…?
    b) Se $0 < a < 1$ entón…?
    c) Se $a < -1$ entón…?
    d) Se $-1 < a < 0$ entón…?

53. Volvemos usar o modelo.
    a) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (4, 2). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.
    b) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (–3, –1). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

54. Debuxa nos mesmos eixes coordenados as rectas que pasan polos seguintes puntos:
    i) (0, 0) e (1, –2) ii) (1, 1) e (0, 3) iii) (–2, 0) e (0, –4)
    a) Como son as rectas?
    b) Calcula a ecuación das tres rectas do apartado anterior. Que teñen en común as ecuacións das rectas?
    En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e debuxa outras rectas paralelas para comprobala.

55. Debuxa nos mesmos eixes coordenados as rectas que pasan polos puntos:
    i) (0, 3) e (1, 1) ii) (1, 4) e (–1, 2) iii) (–2, 4) e (2, 2) iv) (–2, –1) e (–1, 1)
    a) Calcula as ecuacións das catro rectas.
    b) Que teñen en común as ecuacións das rectas que calculaches?

56. Cal é o valor da ordenada na orixe das catro rectas que debuxaches no exercicio anterior?
    En función dos resultados anteriores realiza unha conxectura e compróbaa debuxando outras rectas que pasen polo mesmo punto.

57. Observa as ecuacións das catro rectas que debuxaches, dúas delas teñen pendente positiva *a* e *d* e as outras dúas, *b* e *c* teñen pendente negativa. Relaciona o signo da pendente da recta co crecemento ou decrecemento da función que representan.

58. Calcula dous puntos das rectas de ecuacións: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para debuxalas con Xeoxebra. Indica dúas propiedades comúns de ambas as gráficas.

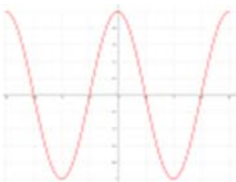
59. Representa, tamén, as rectas de ecuacións: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

60. Que condición deben verificar as pendentes de dúas rectas para que sexan perpendiculares?

3. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

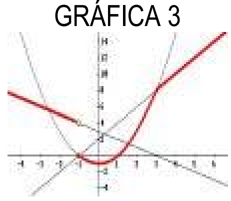
61. Sinala todas as características que poidas das funcións representadas mediante as súas gráficas: dominio e rango, simetría, puntos de intersección cos eixes coordenados, continuidade, crecemento e decrecemento, máximos e mínimos.

GRÁFICA 1



GRÁFICA 2

GRÁFICA 3

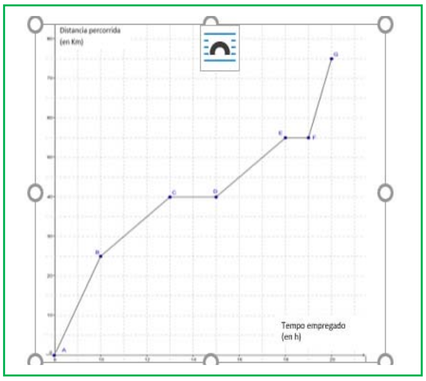


GRÁFICA 4

EXERCICIOS E PROBLEMAS

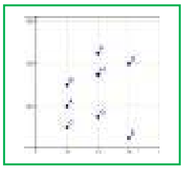
Sistemas de representación

1. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes, elixindo unha escala nos eixes que permita debuxalos todos de forma cómoda: $A(5, 4)$; $B(0, 2)$; $C(-2, 0)$; $D(3, -1.3)$; $E(1.5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$. Sinala en cada caso a que cuadrante pertence o punto ou, no seu caso, en que eixe está.
2. Escribe as coordenadas de tres puntos situados no terceiro cuadrante.
3. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes:
   A(0, 4); B(0, 2.3); C(0, –2); D(0, –1). Que teñen en común todos eles?
4. Escribe as coordenadas e representa tres puntos do eixe de ordenadas. Que teñen en común?
5. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo cun cateto igual a 3, e o vértice do ángulo recto na orixe de coordenadas. Indica as coordenadas de todos os vértices.
6. A seguinte gráfica resume a excursión que realizamos pola serra de Guadarrama:
   a) Canto tempo durou a excursión?
   b) Canto tempo se descansou? A que horas?
   c) Cantos quilómetros se percorreron?
   d) En que intervalos de tempo se foi máis rápido que entre as 11 e as 13 horas?
   e) Fai unha breve descrición do desenvolvemento da excursión.
   f) Constrúe unha táboa de valores a partir dos puntos sinalados na gráfica.
   g) Se no eixe de ordenadas representaramos a variable “distancia ao punto de partida”, sería a mesma gráfica? Cos datos que dispós, podes facela?



Funcións e tipos de funcións.

7. Indica cales das seguintes correspondencias son funcións:
   a) A cada número natural asócianselle os seus divisores primos.
   b) A cada circunferencia do plano asóciaselle o seu centro.
8. A altura e a idade dos compoñentes dun equipo de baloncesto están relacionados segundo mostra a seguinte gráfica:



   a) Se Xoán ten 14 anos, cal pode ser a súa altura?
   b) Se María mide 165 cm, cal pode ser a súa idade?
   c) A relación entre a altura e a idade dos diferentes compoñentes do equipo, é unha relación funcional? Por que?
   d) E a relación entre a idade e a altura? Realiza unha gráfica similar á anterior para representar esta situación.
9. A distancia, d, percorrida por un tren depende do número de voltas, n, que dá cada roda da locomotora.
a) Escribe a fórmula que permite obter d coñecido n, sabendo que o diámetro das rodas da locomotora é de 78 cm.
b) Debuxa a gráfica.
c) Que distancia terá percorrido o tren cando a roda teña dado mil voltas? (toma como valor de π o número 3,14).
d) Cantas voltas terá dado a roda ao cabo de 7 km?
10. Un globo sonda utilizado polo Servizo Meteorolóxico dos Pireneos para medir a temperatura a distintas alturas leva incorporado un termómetro. Obsérvase que cada 180 m de altura a temperatura diminúe un grao. Certo día a temperatura na superficie é de 9º C. Determina:
    a) Que temperatura haberá a 3 km de altura?
    b) A que altura haberá unha temperatura de –30º C?
    c) Escribe unha fórmula que permita calcular a temperatura T coñecendo a altura A. Confecciona unha táboa e debuxa a gráfica. Que tipo de función é?
    d) Se a temperatura na superficie é de 12º C, cal é entón a fórmula? Que tipo de función é?
11. Debuxa a gráfica da función parte enteira: $y = E(x)$.
12. Un rectángulo ten un perímetro de 100 cm. Chama x á lonxitude dun dos seus lados e escribe a fórmula que dá a área en función de x. Debuxa a súa gráfica. Que tipo de función é?
13. Unha caixa cadrada ten unha altura de 20 cm. Como depende o seu volume do lado da base? Debuxa a gráfica da función que resulta.

14. Cunha folla de papel de 32 cm de longo e 22 cm de ancho recórtase un cadrado de 2 cm de lado en cada unha das esquinas, dóbrase e constrúese unha caixa. Cal é o volume da caixa? E se se recortan cadrados de 3 cm? Cal é o volume se o lado do cadrado recortado é x? Escribe a fórmula e debuxa a gráfica.
15. Escribe a ecuación da recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada na orixe 6.
16. Sen representalos graficamente, di se están alineados os puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ e $C(13, 15)$.
17. Unha empresa da aluguer de vehículos ofrece dúas fórmulas diferentes. Fórmula 1: alúgao por 300 euros ao día con quilometraxe ilimitada. Fórmula 2: alúgao por 200 euros ao día e 7 euros o quilómetro. Queremos facer unha viaxe de 10 días e mil quilómetros, canto nos custará con cada unha das fórmulas? Como non sabemos a quilometraxe exacta que acabaremos facendo, interésanos facer un estudo para saber a fórmula máis beneficiosa. Escribe as fórmulas de ambas as situacións e debuxa as súas gráficas. Razoa, a partir destas gráficas, que fórmula é máis rendible segundo o número de quilómetros que vaiamos facer.
18. Constrúense boias unindo dous conos iguais pola base, sendo o diámetro da base de 90 cm. O volume da boia é función da altura "*a*" dos conos. Se queremos unha boia para sinalar a entrada de barcos a pedal bástanos cunha altura de 50 cm: que volume terá? Se é para barcos maiores precísase unha altura de 1.5 m: que volume terá? Escribe a expresión da función que calcula o volume en función da altura. Debuxa a súa gráfica.
19. Calcula o vértice, o eixe de simetría e os puntos de intersección cos eixes das seguintes parábolas. Debuxa as súas gráficas.

    a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$
20. Debuxa a gráfica de $y = 2x^2$. Fai un modelo. Determina o vértice das seguintes parábolas e utiliza o modelo para debuxar a súa gráfica:

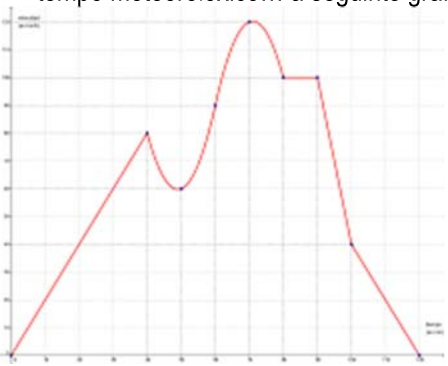
    a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

    Axuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$
21. O consumo de gasolina dun coche por cada 100 km vén representado mediante a gráfica.

    a) Cal é a variable dependente?
    b) E a independente?
    c) Cal é o consumo para unha velocidade de 60 km/h?
    d) A que velocidade o consumo é de 6 l/100 km?
    e) Utiliza a gráfica para explicar como varía o consumo de gasolina dependendo da velocidade do coche.

Características das funcións

22. Xaquín chegou a un acordo co seu pai para recibir a súa paga. Cobrará 20 euros ao mes o primeiro ano e 5 euros máis por cada ano que pase. Canto lle corresponderá dentro de 7 anos? Fai unha táboa de valores e representa a súa gráfica. É continua? Indica os puntos de descontinuidade e o seu tipo. Busca unha fórmula que permita calcular a paga cando teñan pasado *n* anos.
23. Durante unha viaxe, a velocidade do coche varía dependendo do tipo de estrada, das condicións nas que se encontra, do tempo meteorolóxico… a seguinte gráfica reflicte a velocidade dun vehículo en cada instante do traxecto que seguiu.



    a) É funcional a relación de dependencia entre o tempo e a velocidade?
    b) Cal é a variable independente? E a dependente?
    c) A que velocidade ía cando levaba unha hora de viaxe? En que momentos ía a unha velocidade de 40 km/h?
    d) Indica os intervalos nos que a velocidade aumentou e diminuíu. Foi constante nalgún momento? Cando? Durante canto tempo?
    e) Cal foi a velocidade máxima acadada ao longo de toda a viaxe? En que momento se acadou? E durante a primeira hora da mesma?
    f) Cal foi a velocidade mínima acadada ao longo de toda a viaxe? Cando se acadou? E entre a primeira media hora e a hora e media?
24. Ao entrar no aparcamento dun centro comercial encontramos un letreiro cos prezos que nos indican que 1 hora ou fracción custa 1.20 € e as dúas primeiras horas son gratis para os clientes con tarxeta de compra do centro. Fai unha táboa que relacione o tempo co importe pagado durante unha xornada completa (12 horas) nos casos dun cliente con tarxeta o sen ela. Traza a gráfica e contesta ás preguntas:
    a) Que valores toma a variable dependente? E a independente?
    b) Podes unir os puntos da gráfica? Como se debe facer?
    c) Existen puntos de descontinuidade? Se a resposta é afirmativa, sinálaos e explica o seu significado.

25. Ao estudar o crecemento dunha planta observamos que durante os primeiros 30 días faino moi a présa, nos 15 días seguintes o crecemento é máis lento e despois mantense coa mesma altura. Realiza un bocexo da gráfica que relaciona o tempo coa altura acadada pola planta.

Se temos máis información podemos mellorar o bocexo. Por exemplo, fai a táboa e a gráfica no caso de que o crecemento da planta se axuste ás seguintes fórmulas (o tempo exprésase en días e a altura en centímetros):

a) Durante os primeiros 30 días: altura = 4 x tempo
b) Nos 15 días seguintes: altura = 90 + tempo
c) A partir do día 45: altura = 135.

26. Unha viaxe realizada por un tren, nun certo intervalo da mesma, vén dada da seguinte forma:

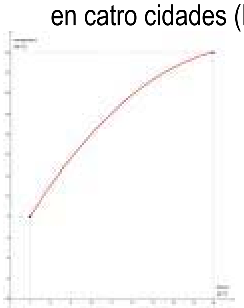
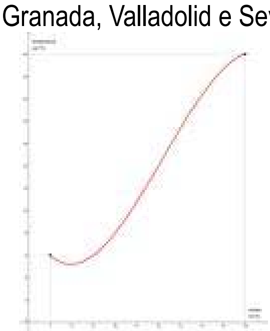
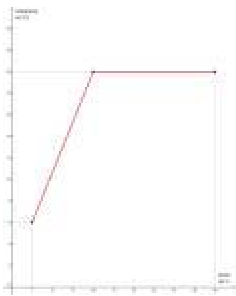
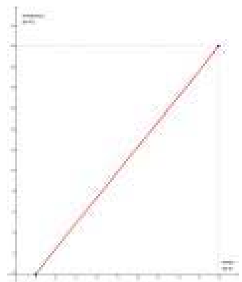
-Durante as dúas primeiras horas, a distancia "*d*" (en quilómetros) ao punto de partida é $2{\cdot}t + 1$, onde "*t*" é o tempo (en horas) de duración do traxecto.
-Entre a 2ª e 3ª hora, esta distancia vén dada por $-t + 7$.
-Entre a 3ª e 4ª hora, ambas as dúas inclusive, $d = 4$.
-Desde a 4ª e ata a 6ª (inclusive), a distancia axústase a $3{\cdot}t - 8$.

a) Realiza unha táboa e unha gráfica que recolla esta viaxe da forma máis precisa posible (para iso debes calcular, como mínimo, os valores da variable tempo nos instantes 0, 2, 3, 4 e 6).
b) Explica se a relación anteriormente explicada entre a distancia percorrida e o tempo tardado en percorrela é funcional.
c) A relación anterior, presenta algunha descontinuidade?
d) En que momento a distancia ao punto de partida é de 7 km?
e) Que indican os puntos de corte da gráfica cos eixes?
f) Determina os intervalos onde a función é crecente, decrecente e constante.
g) Encontra os puntos onde a función acada os seus máximos e mínimos relativos e absolutos. Interpreta o significado que poidan ter.

27. Representa graficamente as seguintes funcións, estudando nela todas as características que se traballaron no tema: monotonía, extremos, simetría e periodicidade.

a) Valor absoluto dun número: $f(x) = |x|$.
b) Oposto e inverso dun número: $f(x) = \frac{-1}{x}$.
c) *Mantisa* (a cada número faille corresponder a diferenza entre este número e a súa parte enteira): $M(x) = x - E(x)$.

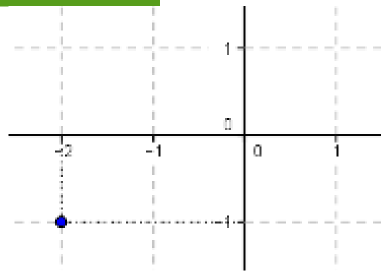
28. As gráficas seguintes amosan a evolución, un día calquera, da temperatura acadada entre as 7 da mañá e as 4 da tarde en catro cidades (Madrid, Granada, Valladolid e Sevilla):

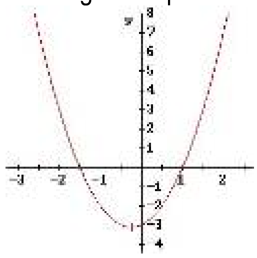
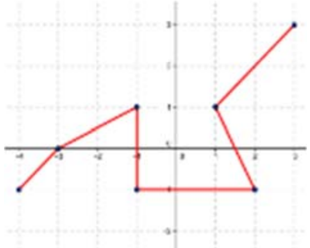
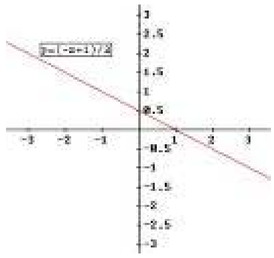
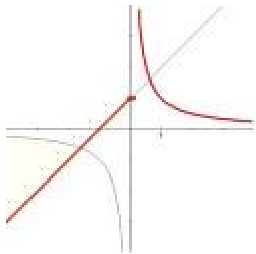
a) Estuda a monotonía de todas as gráficas.
b) Nalgunha cidade a temperatura se mantivo constante durante todo o intervalo? E en parte del?
c) Que cidade cres que presenta un cambio de temperatura máis suave ao longo de toda a mañá?
d) Tendo en conta que en Madrid o incremento da temperatura foi sempre lineal, en Granada a temperatura mínima se acada despois das 7 h e en Valladolid a partir do medio día a temperatura baixou, indica que gráfica corresponde a cada unha das cidades e explica cales foron as temperaturas máximas e mínimas en cada unha delas.

AUTOAVALIACIÓN

1. As coordenadas do punto sinalado son:
   a) (–1, 2)
   b) (–2, –1)
   c) (1, 2)
   d) (1, –2)



2. A única gráfica que non corresponde a unha función é:

a)  b)  c)  d) 

3. A única táboa que non pode ser dunha relación funcional é:

a)

x	y
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	y
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

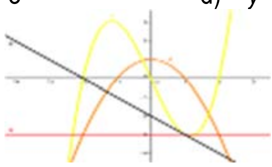
c)

x	y
–3	9
–1	1
0	0
2	4

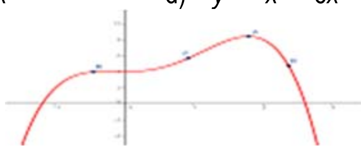
d)

x	y
0	2
1	3
4	6
0	3

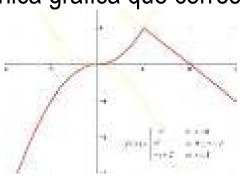
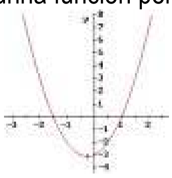
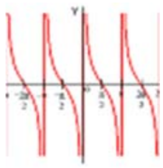
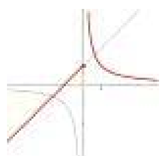
4. A única función afín que, ademais, é lineal é:
   a) $y = –4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x + 3$ d) $y = –x – 1$
5. A única gráfica dunha función afín non constante é:
   a) b) c) d)



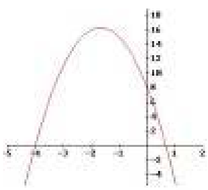
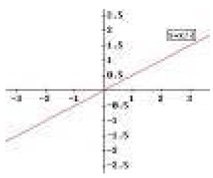
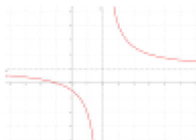
6. A única función cuadrática é:
   a) $y = –2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^3 – 1$
7. A función cuadrática que ten o seu vértice no punto (3, 4) é:
   a) $y = –2x^2$ b) $y = 3x^2 – x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^2 + 6x – 5$
8. O máximo absoluto da función acádase no punto:
   a) b) c) d)



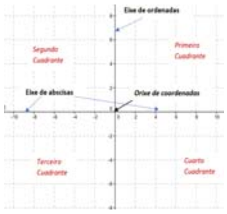
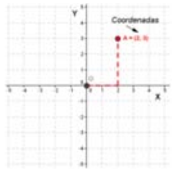
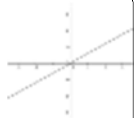
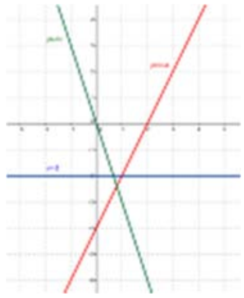
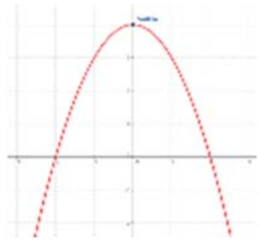
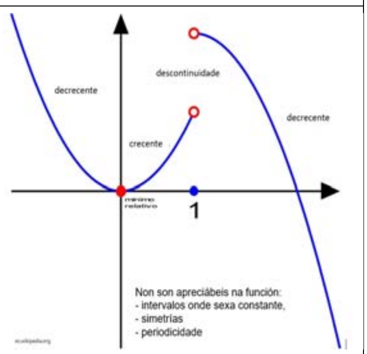
9. A única gráfica que corresponde a unha función periódica é:

a)  b)  c)  d) 

10. A única gráfica que corresponde a unha función que é sempre crecente ata $x = –2$ é:

a)  b)  c)  d) 

RESUMO

Eixes cartesianos e coordenadas dun punto no plano		
Función	Unha **función** é unha relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha (**variable independente**) lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra (**variable dependente**).	$y = f(x) = 0.59 \cdot x$ $f(2) = 0.59 \cdot 2 = 1.18$ $f(5) = 0.59 \cdot 5 = 2.95$
Gráfica dunha función	A **gráfica dunha función** é a representación no plano cartesiano de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función: $\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0.59x$ *Gráfica:* 
Función afín, función lineal e función constante	Unha **función afín** é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao menor ou igual a un: $y = f(x) = mx + n$. A representación gráfica é unha recta. "*m* "recibe o nombre de **pendente** e "*n*" **ordenada na orixe.** Unha **función lineal** ou **de proporcionalidade directa** é unha función afín con ordenada na orixe nula: $y = mx$ (pasa pola orixe). Unha **función constante** é unha función afín con pendente nula: $y = n$ (sempre toma o mesmo valor e a súa gráfica é unha recta horizontal).	
Función cuadrática	Unha función cuadrática é aquela función na que a relación entre as dúas variables vén dada por un polinomio de grao dous: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. A gráfica deste tipo de funcións chámase parábola. O punto máis significativo da parábola é o **vértice** e calcúlase dándolle á variable independente o valor $x = -b/2a$ Se o coeficiente líder é positivo, o vértice é un mínimo e, se é negativo, un máximo.	
Continuidade Monotonía Extremos Simetría Periodicidade	Unha función pode ser continua nun intervalo se a súa gráfica non sofre "rupturas" (chamadas **descontinuidades**), **crecente** (**decrecente**) se o seu valor aumenta (diminúe) cando o fai a variable independente, **constante** cando sempre toma o mesmo valor, **par** se a imaxe da variable independente coincide coa do seu oposto, **impar** cando o valor da función para o oposto da variable independente tamén é o oposto e **periódica** se as imaxes dos valores obtidos ao sumar unha cantidade fixa (**período**) á variable independente coinciden.	

CAPÍTULO 11: ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. A TOMA DE DATOS

1. Queremos facer un estudo da cantidade de moedas que levan no peto os estudantes da túa clase. Pero para non preguntar a todos elixe 10 compañeiros ao chou e anota no teu caderno cantas moedas leva cada un.

a) Cal é a poboación obxecto do estudo?

b) Cal é a mostra elixida?

c) Especifica 5 individuos que pertenzan á poboación e non á mostra.

2. Clasifica en variables cualitativas e cuantitativas as que aparecen no primeiro exemplo desta sección. Para as cuantitativas indica se son continuas ou discretas.

2. REPRESENTACIÓN DA INFORMACIÓN

3. Reúne a 10 amigos. Reconta cantas moedas de cada valor (1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, …) tedes entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado o número de moedas de cada clase que hai. Hai algún outro diagrama que che permita ver que tipos de moedas son máis abundantes na mostra que tomaches?

4. Na clase de Educación Física o profesor mediu o tempo que tarda cada alumno en percorrer 100 metros. Os resultados están nesta táboa:

14.92	13.01	12.22	16.72	12.06	10.11	10.58	18.58	20.07	13.15	20.10	12.43	17.51	11.59	11.79
16.94	16.45	10.94	16.56	14.87	17.59	13.74	19.71	18.63	19.87	11.12	12.09	14.20	18.30	17.64

Agrupa estes resultados por clases comezando en 10 segundos e facendo intervalos de lonxitude 1 segundo. Realiza unha táboa de frecuencias e representa adecuadamente estes datos.

3. INTRODUCIÓN AO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

5. Para cada un dos exemplos 1 ao 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que non sexan sucesos individuais.

6. Nunha bolsa temos 10 bólas vermellas numeradas do 1 ao 10. Fanse os dous experimentos seguintes:

EXPERIMENTO A: Sácase unha bóla da bolsa e mírase a súa cor.

EXPERIMENTO B: Sácase unha bóla da bolsa e mírase o seu número.

Cal destes experimentos non é un experimento aleatorio? Por que?

Para o experimento que si é un experimento aleatorio indica o seu espazo dunha mostra.

7. Unha baralla francesa ten 52 cartas, distribuídas en 13 cartas de picas, 13 de corazóns, 13 de trevos e 13 de diamantes. As picas e os trevos son cartas negras mentres que os corazóns e os diamantes son cartas vermellas. Mestúrase a baralla, córtase e faise o seguinte experimento: coller as dúas cartas que quedaron arriba do todo e observar de que cor son. Describe o espazo dunha mostra.

9. Nalgúns lugares de España séguese xogando á chuca. A chuca é un óso de cordeiro que non é regular. Pode caer en catro posicións distintas. Podemos pensar nela como se fose un dado "raro". Considera o experimento "lanzar a chuca ao aire e ver o que marca a súa cara superior". Aproxima a probabilidade de cada un dos casos deste experimento aleatorio.

10. A túa calculadora probablemente terá unha función que serve para xerar números aleatorios. Normalmente dá un número comprendido entre 0 e 1. Realiza o experimento "xera un número aleatorio e anota o seu segundo decimal". Fai 40 repeticións deste experimento. Debuxa un histograma de frecuencias.

11. A probabilidade non é un concepto intuitivo. Para iso imos facer unha proba. Consideraremos o experimento aleatorio *lanzar unha moeda*. Copia a táboa no teu caderno.

- Escribe na 1ª fila desta táboa o que ti cres que sairía ao repetir o experimento 30 veces. Pénsao e enche a táboa. Como ti queiras (invéntao, pero "con sentido").
- Na 2ª fila da táboa escribe o resultado real de 30 lanzamentos da moeda.

Que observas en ambos os casos? Algunha pauta? Presta atención a estas cuestións para cada unha das filas da táboa.

Hai máis ou menos 15 caras e 15 cruces?

Aparecen grupos seguidos de caras ou de cruces?

Cal é o maior número de caras que saíron seguidas? E o de cruces?

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Estatística

1. Recolléronse os datos sobre o número de fillos que teñen 20 matrimonios. Como é a variable utilizada? Escribe unha táboa de frecuencias dos datos recollidos e representa os datos nun diagrama de sectores:

   3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.
2. Cos datos do problema anterior calcula a media, a mediana, a moda e os cuartís.
3. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza, a desviación típica e o intervalo intercuartílico.
4. Representa eses datos nun diagrama de caixas.
5. A seguinte táboa expresa as estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talle	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

   a) Representa os datos nun histograma.
   b) Calcula a media e a desviación típica.
   c) Determina o intervalo onde se encontra a mediana.
6. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de televisores que hai no seu fogar e os resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de fogares	2	27	15	4	2	1

   Que tipo de variables é? Representa os datos na representación que che pareza máis adecuada.
   Calcula a media e a desviación típica.

7. Cos datos do problema anterior calcula a mediana e o intervalo intercuartílico.
8. Nun centro escolar recolleuse información sobre o número de ordenadores nas casas de 100 familias e obtivéronse os seguintes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

   Representa os datos nun diagrama de barras e calcula a media, a mediana e a moda.
9. Cos datos do problema anterior calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica. Fai un diagrama de caixas.
10. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de persoas:	13	18	7	5	7

   Representa os datos nun diagrama de sectores e calcula a media, a mediana e a moda.
11. Pregúntase a un grupo de persoas polo número de veces que visitaron o dentista no último ano. As respostas obtidas recóllense na seguinte táboa:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de persoas:	13	18	7	5	7

   Calcula o rango, a desviación media, a varianza e a desviación típica.
12. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por grupo parlamentario (DM: demócrata–cristiáns; S: socialistas; L: liberais; V: verdes; C: conservadores; I: esquerda unitaria; LD: liberdade e democracia; NI: non inscritos; Outros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Outros	Total
Escanos	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

   Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa?

13. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse os seguintes escanos por algún dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Polonia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Outros	Total
Escanos	96	54	74	73	51	73	21	21		751

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Determina o número de escanos dos outros países membros da Unión Europea.

14. Nas eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Que representación dos datos che parece máis adecuada? Podes calcular a media ou o rango? Que tipo de variables é a da táboa? Ordena os países de maior a menor porcentaxe de votantes nas eleccións de 2014.

15. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Representa nun polígono de frecuencias as porcentaxes de participación do total dos Estados membro.

16. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Separa os Estados membro en dous grupos, os que tiveron unha porcentaxe superior á porcentaxe media e os que a tiveron menor en 2004. Fai o mesmo para 2014. Son os mesmos? Analiza o resultado.

17. Cos datos do problema anterior sobre as eleccións de 2004, 2009 e 2014 ao Parlamento Europeo obtivéronse as seguintes porcentaxes de votos por algúns dos Estados membro:

Estado	Alemaña	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélxica	% total
2004	43	45.14	42.76	71.72	38.52	38.6	63.22	90.81	45.47
2009	43.27	44.87	40.63	65.05	34.7	36.77	52.61	90.39	43
2014	47.6	45.9	43.5	60	36	34.5	58.2	90	43.09

Calcula a porcentaxe de participación media para Alemaña nesas tres convocatorias e a desviación típica. O mesmo para España, para Bélxica e para Portugal.

18. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en branco
35 379 097	15 920 815	19 458 282	290 189	357 339

Representa nun diagrama de sectores estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes: o censo é o 100 %. Determina as outras porcentaxes. Consideras que gañou a abstención?

19. Nas eleccións de 2014 ao Parlamento Europeo os resultados de España foron:

PP	PSOE	Esquerda plural	Podemos	UPyD	Outros	Total de votantes
4 074 363	8 001 754	1 562 567	1 245 948	1 015 994		15 920 815

Determina o número de votos dos outros partidos. Representa nun diagrama de barras estes datos. Fai unha táboa de porcentaxes para cada partido. Tes que distribuír 54 escanos, como os distribuirías por partidos?

Probabilidade

20. Considérase o experimento aleatorio de tirar un dado dúas veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar algún 1.
b) A suma dos díxitos é 8.
c) Non sacar ningún 2.
d) Sacar algún 1 ou ben non sacar ningún 2.

21. Considérase o experimento aleatorio de sacar dúas cartas da baralla española. Calcula a probabilidade de:

a) Sacar algún rei.
b) Obter polo menos un basto.
c) Non obter ningún basto.
d) Non obter o rei de bastos.
e) Sacar algunha figura: sota, cabalo, rei ou as.
f) Non sacar ningunha figura.

22. Considérase o experimento aleatorio de tirar unha moeda tres veces. Calcula as probabilidades seguintes:

a) Sacar cara na primeira tirada.
b) Sacar cara na segunda tirada.
c) Sacar cara na terceira tirada.
d) Sacar algunha cara.
e) Non sacar ningunha cara.
f) Sacar tres caras.

23. Cunha baralla española faise o experimento de sacar tres cartas, con reemprazo, cal é a probabilidade de sacar tres reis? E se o experimento se fai sen reemprazo, cal é agora a probabilidade de ter 3 reis?

24. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas con reemprazo. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.
b) Haxa polo menos unha negra.
c) Ningunha sexa negra.

25. Nunha urna hai 6 bólas brancas e 14 bólas negras. Sácanse dúas bólas sen reemprazo. Determina a probabilidade de que:

a) As dúas sexan negras.
b) Haxa polo menos unha negra.
c) Ningunha sexa negra.
d) Compara os resultados cos da actividade anterior.

26. Ao lanzar catro moedas ao aire,

a) Cal é a probabilidade de que as catro sexan caras?
b) Cal é a probabilidade de obter ao sumo tres caras?
c) Cal é a probabilidade de ter exactamente 3 caras?

27. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0,7 e o segundo de 0,5. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore as distintas posibilidades: a) Que probabilidade hai de que un dos tiradores dea no prato? b) Calcula a probabilidade de que ningún acerte. c) Calcula a probabilidade de que os dous acerten.
28. Lánzase unha moeda ata que apareza cara dúas veces seguidas. a) Calcula a probabilidade de que a experiencia termine no segundo lanzamento. b) Calcula a probabilidade de que termine no terceiro lanzamento.
29. No lanzamento de naves espaciais instaláronse tres dispositivos de seguridade A, B e C. Se falla A ponse automaticamente en marcha o dispositivo B e, se falla este, ponse en marcha C. Sábese que a probabilidade de que falle A é 0.1, a probabilidade de que B funcione é 0.98 e a probabilidade de que falle C é 0.05. Calcula a probabilidade de que todo funcione ben.
30. Faise un estudo sobre os incendios forestais dunha zona e compróbase que o 40 % son intencionados, o 50 % débense a neglixencias e o 10 % a causas naturais. Producíronse tres incendios, a) cal é a probabilidade de que polo menos un fose intencionado? b) Probabilidade de que os tres incendios se deban a causas naturais. c) Probabilidade de que ningún incendio sexa por neglixencias.
31. Lánzase dúas veces un dado equilibrado con seis caras. Calcular a probabilidade de que a suma dos valores que aparecen na cara superior sexa múltiplo de tres.
32. Sábese que se eliminaron varias cartas dunha baralla española que ten corenta. A probabilidade de extraer un as entre as que quedan é 0.12, a probabilidade de que saia unha copa é 0.08 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é 0.84.

    Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?
33. Unha persoa despistada ten oito calcetíns negros, seis azuis e catro vermellos, todos eles soltos. Un día con moita présa, elixe dous calcetíns ao azar. Calcular a probabilidade de:
    a) que os calcetíns sexan negros.
    b) que os dous calcetíns sexan da mesma cor.
    c) que polo menos un deles sexa vermello.
    d) que un sexa negro e o outro non.
34. Tres persoas viaxan nun coche. Se se supón que a probabilidade de nacer en calquera día do ano é a mesma e sabemos que ningún naceu nun ano bisesto,
    a) calcular a probabilidade de que soamente unha delas celebre o seu aniversario ese día.
    b) calcular a probabilidade de que polo menos dúas cumpran anos ese día.

AUTOAVALIACIÓN

d) 1. Faise un estudo sobre a cor que prefiren os habitantes dun país para un coche. A variable utilizada é:

e) a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

f) 2. Nun histograma de frecuencias relativas a área de cada rectángulo é:

g) a) proporcional á área b) igual á frecuencia absoluta
h) c) proporcional á frecuencia relativa d) proporcional á frecuencia acumulada

i) 3. Ana obtivo en Matemáticas as seguintes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 e 7. A súa nota media é de:

j) a) 7.6 b) 8.2 c) 8 d) 9

k) 4. Nas notas anteriores de Ana a mediana é:

l) a) 9 b) 8 c) 7.5 d) 8.5

m) 5. Nas notas anteriores de Ana a moda é:

n) a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 e 10

o) 6. O espazo dunha mostra de sucesos elementais equiprobables do experimento “tirar dúas moedas e contar o número de caras” é:

p) a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

q) 7. Tiramos dous dados e contamos os puntos das caras superiores. A probabilidade de que a suma sexa 7 é:

r) a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

s) 8. Ao sacar unha carta dunha baralla española (de 40 cartas), a probabilidade de que sexa un ouro ou ben un rei é:

t) a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

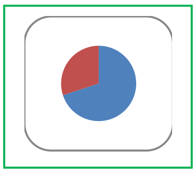
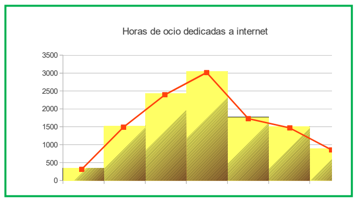
u) 9. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas, 2 negras e 1 bóla branca. Sácanse 2 bólas. A probabilidade de que as dúas sexan vermellas é:

v) a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

w) 10. Tiramos tres moedas ao aire. A probabilidade de que as tres ao caer sexan caras é:

x) a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

RESUMO

Poboación	Colectivo sobre o que se fai o estudo	Estudantes de todo Madrid
Mostra	Subconxunto da poboación que permite obter características da poboación completa.	Alumnos de 3º de ESO seleccionados
Individuo	Cada un dos elementos da poboación ou mostra	Xoán Pérez
Variables estatística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pé que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estatísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$	Cos datos: 8, 2, 5, 10 e 10 *Media* = 35/5 = 7
Moda	É o valor máis frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deixa por debaixo a metade	4 < 6 < 8 < 10 = 10. *My* = 8.
Rango ou percorrido	É a diferenza entre o dato maior e o dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	É a media das distancias dos datos á media dos datos dos que dispoñamos.	$(\lvert 8-7\rvert+\lvert 2-7\rvert+\lvert 5-7\rvert+\lvert 10-7\rvert+\lvert 10-7\rvert)/5$ =(1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	É a media dos cadrados das distancias dos datos á media: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9.4
Desviación típica	É a raíz cadrada da varianza = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	σ = $\sqrt{47/5}$= 3.06
Probabilidade	Valor entre 0 e 1 que nos dá unha medida do factible que sexa que se verifique un determinado suceso.	P(3) = 1/6 ao tirar un dado
Espazo dunha mostra	O conxunto de todos os casos posibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra	Sacar par: {2, 4, 6}
Lei de Laplace.	$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables ao suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	*P*(par) = 3/6 = 1/2.