MATEMÀTIQUES I
1r Batxillerat
Capítol 3: Successions

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

Resum

Què tenen en comú conceptes tan dispars com el nombre de conills engendrats per una parella de conills, l'estructura d'un floc de neu o l'interès que obtenim al dipositar una determinada quantitat de diners en una entitat financera?

Darrere d'aquests casos ens trobem amb el concepte de successió. Les successions numèriques tenen gran importància i utilitat en moltíssims aspectes de la vida real, algun dels quals anireu descobrint al llarg d'aquest capítol.

A més reflexionem sobre l'infinit, què s'entén per límit d'una successió? Ja els grecs es preguntaven si alguna cosa amb un nombre infinit de sumands podria donar lloc a un resultat finit, com en la cèlebre Paradoxa d'Aquil·les i la tortuga.

En el capítol de nombres reals hem mencionat el nombre e. Ara anem a definir-lo i analitzarem algunes de les seves aplicacions. L'utilitzarem per treballar amb els logaritmes i les seves propietats.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1. SUCCESSIONS DE NOMBRES REALES

1.1. Definicions

Una **successió** de nombres reals és una seqüència ordenada de nombres.

Exemple:

- Les següents seqüències són successions:

  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…

  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…

  c) $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\dots$

Definició:

Una successió de nombres reals és una aplicació entre els nombres naturals i els nombres reals:

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to a_n$$

Exemple:

- En l'exemple anterior, la successió 2, 4, 6, 8, 10, 12,… la podem veure com:

$$1 \to 2$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 6$$
$$4 \to 8$$
$$n \to 2n$$

encara que la notació que fem servir normalment per a dir que a n li correspon $2n$ és utilitzar el terme general d'una successió: $b_n = 2n$.

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to b_n = 2n$$

de la mateixa forma la successió $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\dots$ es pot escriure com:

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to c_n = 1/n$$

S'anomena **terme d'una successió** a cadascun dels elements que constitueixen la successió.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exemple:

- *En la successió a) tenim que: $a_5 = 5$, ja que és el terme de la successió que ocupa el cinquè lloc.*
- *En la successió b), el tercer terme es denota b_3 i correspon al 6*
- *En la successió c), per exemple $c_2 = \frac{1}{2}$*

El que realment és important a l'hora d'anomenar els termes d'una successió és el subíndex perquè denota el lloc que ocupen en la successió. Les lletres amb què es designa la successió són diferents per a successions diferents i solen ser lletres minúscules.

Encara que una successió és un funció, usualment no s'utilitza la notació de funció sinó que únicament s'escriu el seu terme general.

S'anomena **terme general d'una successió** al terme que ocupa el lloc n-è i s'escriu amb la lletra que denota la successió (per exemple *a*) amb subíndex n: (a_n)

Exemple:

- En els casos que estem considerant, els termes generals de les successions són:

$$a_n = n,\ b_n = 2n \text{ y } c_n = 1/n.$$

Activitats resoltes

- *En les successions anteriors, observem que:* $a_{105} = 105$, $b_{23} = 46$ *y* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Activitats proposades

1. Escriviu els deu primers termes de les següents successions:

a) 7, 10, 13, 16, …

b) 2, 5, 10, 17,…

c) 1, 3, 5, 7,…

d) 0, 3, 8, 15, 24…

2. Escriviu el terme que ocupa el lloc 100 de cadascuna de les successions anteriors.

3. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra te una velocitat que augmenta 9'8 m/s. Si en el primer segon la seva velocitat és de 10 m/s, escriviu en el vostre quadern la velocitat en els segons indicats a la taula. Observeu alguna regla que us permeti conèixer la velocitat al cap de 30 segons? Representeu gràficament aquesta successió.

Temps en segons	1	2	3	30	n
Velocitat en m/s	10				

1.2. Formes de definir una successió

Existeixen diverses formes de definir una successió:

1. **Donant una propietat que compleixen els termes de la successió**

Exemple:

- *Successió dels nombres parells:* 2, 4, 6, 8, 10,…
- *Successió dels nombres primers:* 2, 3, 5, 7, 11,..
- *Successió dels nombres naturals acabats en* 7: 7, 17, 27, 37, ...
- *Successió dels quadrats dels nombres naturals:* 1, 4, 9, 16,…
- *Successió dels cubs dels nombres naturals:* 1, 8, 27, 64,…

2. **Donant el seu terme general o terme n-èssim**:

És una expressió algebraica en funció de n.

Exemple:

- $a_n = n^2 + 5$

Sabent això, podem construir els termes de la successió tan sols substituint n pels nombres naturals. Així, tindríem:

$$a_1 = 1^2 + 5 = 6$$
$$a_2 = 2^2 + 5 = 9$$
$$a_3 = 3^2 + 5 = 14$$
$$a_4 = 4^2 + 5 = 21$$

…..

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$
$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. **Per una llei de recurrència**:

És una expressió que permet obtenir un terme a partir dels anteriors.

Exemple:

- *La successió:*

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

coneguda com a *Successió de Fibonacci* s'obté amb la següent llei de recurrència:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

És a dir, cada terme, llevat dels dos primers, s'obté com a suma dels dos anteriors.

4. **No sempre es pot definir la successió pels mètodes anteriors**

Exemple:

- *La successió formada per les xifres decimals de π:*

1, 4, 1, 5, 9, 2, …

Formen una successió però ignorem la propietat, la fórmula del terme general o la llei de recurrència que ens permeti, per exemple, conèixer la xifra que ocupa el lloc un trilió. Avui, amb l'ajuda d'ordinadors, ja sabeu que s'han aconseguit conèixer moltes de les xifres de π, en 2011 més de dos bilions.

Activitats resoltes

- *Sigui la successió de terme general:* $a_n = 2n + 4$.

Els seus primers cinc termes són: $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$, $a_5 = 14$.

- *Donada la successió en forma recurrent:* $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2$

Els seus primers quatre termes són:

$a_1 = 1$ (ja ve donat),

$a_2 = 1 + 2 = 3$,

$a_3 = 3 + 2 = 5$,

$a_4 = 5 + 2 = 7$…

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats proposades

4. Escriviu els quatre primers termes de les següents successions:

a) $a_n = 3n^2 + 3$

b) $b_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

c) $c_1 = 1,\ c_n = 2c_{n-1} + 4$

d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

5. Escriviu l'expressió del terme general de les següents successions:

a) {–2, 2, –2, 2, –2, 2, –2, 2,…}

b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

c) {2, 4, 6, 8, 10,…}

d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \ldots\right\}$

6. En una successió el primer terme és 5 i la resta s'obtenen sumant 3 al terme anterior. Trobeu els 10 primers termes de la successió.

7. Escriviu el terme general de les successions:

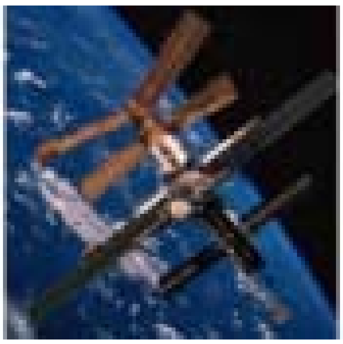
a) 6, 18, 54, 162, …

b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, …

c) 7, 0'7, 0'07, 0,007, …

d) 2, 5, 8, 11, 15, …

8. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 10 hores i 30 minuts. Triga 90 minuts a donar una volta completa a la seva òrbita. A) Completeu en el vostre quadern la taula adjunta. B) Escriviu una expressió general que us permeti conèixer l'hora en què ha completat la volta *n*-èssima. C) Busqueu una expressió que us permeti conèixer l'hora en què completa una òrbita en funció de l'hora en què completa l'òrbita anterior. D) Busqueu una expressió que us permeti conèixer l'hora en què completa una òrbita en funció de l'hora en què completa la primera òrbita. E) Quantes voltes completes haurà donat 30 dies més tard a les 9 hores?



Nombre d'òrbites	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en què l'ha completada						

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Progressions aritmètiques i geomètriques

Ja coneixeu de cursos anteriors dos tipus de successions, les progressions aritmètiques i les progressions geomètriques.

Recordeu que:

Una **progressió aritmètica** és una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena **diferència de la progressió** i se sol denotar amb la lletra d.

És a dir, cada terme s'obté sumant a l'anterior la diferència, d:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Exemple:

- *Si $a_1 = 2$ y $d = 3$ els cinc primers termes de la progressió aritmètica són*:

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$
$$a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

Una **progressió geomètrica** és una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. Aquesta constant es denomina **raó de la progressió** i se sol denotar amb la lletra r. És a dir, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ essent n un nombre natural i sempre que a_n sigui diferent de zero.

O, el que és el mateix, cada terme s'obté multiplicant l' anterior per la raó r:

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Exemple:

- *Un pare planeja posar en una guardiola € el dia que el seu fill faci un any i duplicar la quantitat en cada aniversari. Quant haurà de posar a la guardiola el dia que el fill faci 5 anys?*

La successió els termes de la qual són els diners que posa a la guardiola cada any és:

{1, 2, 4, 8, 16,…}.

Quan faci 5 anys haurà de posar a la guardiola 16 euros.

Observem que els termes de la successió van augmentant de forma que cada terme és l'anterior multiplicat per 2. Aquest tipus de successions s'anomenen progressions geomètriques.

Recordeu que:

El terme general d'una progressió aritmètica és:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

El terme general d'una progressió geomètrica és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

La **suma** dels n primers termes d'una **progressió aritmètica** ve donada per:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

El **producte** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donat per:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

La **suma** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donada per:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ sempre que } r \neq 1.$$

Activitats resoltes

- *El terme 5 de la progressió aritmètica amb* $a_1 = 7$ *i* $d = 3$ *és:*

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)\, d = 7 + 4 \cdot 3 = 7 + 12 = 19.$$

- *La suma dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(7+19)}{2} = 65.$$

- *El terme 5 de la progressió geomètrica* $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ *és:*

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 1 \cdot 2^4 = 16$$

- *El producte dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$P_5 = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(1 \cdot 16)^5} = 16^2\sqrt{16} = 16^2 \cdot 4 = 1024$$

- *La suma dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{2 \cdot 16 - 1}{2-1} = \frac{32-1}{1} = 31.$$

Activitats proposades

9. Escriviu els 4 primers termes de les successions següents i indiqueu si són progressions aritmètiques, progressions geomètriques o d'un altre tipus.

a) $a_n = 3 \cdot 3^n$

b) $a_n = 5n + 7$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{3n}$

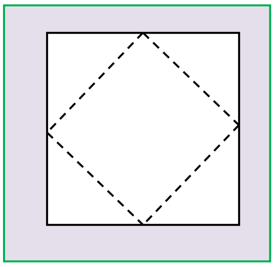
10. En les successions del problema anterior que siguin progressions aritmètiques, calculeu la suma dels 6 primers termes.

11. En les que siguin progressions geomètriques, calculeu el producte dels 6 primers termes i la suma dels 6 primers termes.

1.4. Tipus de successions: convergents, divergents i oscil·lants

Activitat resolta

- *Tenim a la mà un quadrat de paper d'àrea 1. Tallem les quatre cantonades pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem els retalls sobre la taula. Quina àrea de retalls hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà fem la mateixa operació de retallar les quatre cantonades i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I els retalls que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinites àrees de retalls així obtingudes.*



L'àrea del primer quadrat ens diuen que és 1 u^2.

Al tallar les quatre cantonades el nou quadrat té una àrea de 1/2 u^2. Deixem sobre la taula les quatre cantonades, pel que estem deixant sobre la taula una àrea de 1/2 u^2.

Tornem a tallar les quatre cantonades i així successivament.

A la mà tenim les següents àrees: 1, 1/2, 1/4, 1/8, … Tenim cada vegada menys paper a la mà.

En algun moment ens arribem a trobar sense paper a la mà? Si sempre tallem la meitat del que ens queda, mai arribem a tenir 0.

Sobre la taula anem deixant les següents àrees:

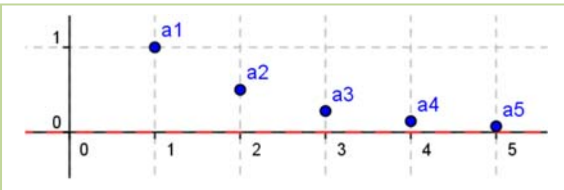
1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + …

I la quantitat de paper que tenim sobre la taula? Sumem i sumem trossos de paper, però mai en tindrem més de l'inicial, 1, i ni tan sols arribarem mai a tenir-ne 1.

Activitats resoltes

- Hi ha successions com la progressió geomètrica 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … de raó 1/2, amb terme general:

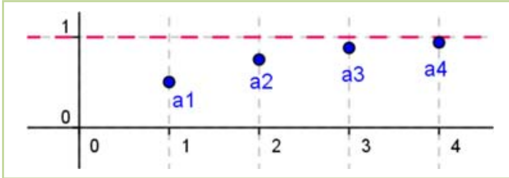
$$a_n = (1/2)^{n-1}$$

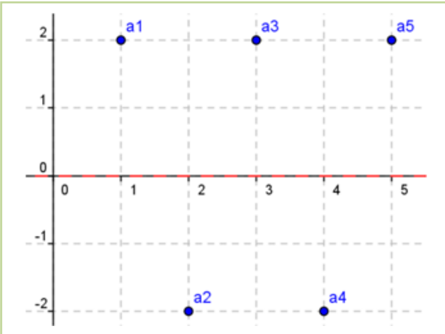


que s'apropen a un cert nombre real, encara que pot passar que mai hi arribin. Aquesta progressió tendeix a 0. Diem aleshores que és **convergent,** que convergeix a 0, o que el seu límit és 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

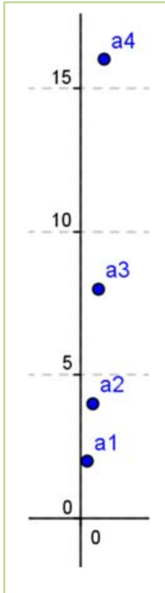
- La successió $a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ és convergent, té com a límit 1, o convergeix a 1.





$$\underset{n\to\infty}{lím}\ a_n = \underset{n\to\infty}{lím} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

- D'altres successions com la progressió geomètrica 2, –2, 2, –2, 2, –2, … de raó –1, amb terme general $a_n = 2\cdot(-1)^{n+1}$ no s'apropen a un únic valor, sinó que oscil·la entre 2 i –2. No té límit. Es diu que és una successió **oscil·lant**.



- D'altres successions, com la progressió geomètrica 2, 4, 8, 16, 32… de raó 2, amb terme general $a_n = 2^n$ no s'apropen a un nombre real, sinó que creixen i creixen indefinidament. No tenen límit. No és convergent. A l'augmentar els valors de n els valors de la successió poden superar qualsevol nombre per gran que sigui. Es diu que el seu límit és infinit i que la successió és **divergent**.

$$\underset{n\to\infty}{lím}\ a_n = \underset{n\to\infty}{lím}\,(2)^n = \infty\,.$$

Recordeu que:

Les successions poden ser convergents, si tenen com a límit un nombre L, divergents, si tendeixen a infinit, i oscil·lants.

1.5. Monotonia i acotació

Activitats resoltes

- La successió 2, 4, 8, 16, 32,… és monòtona creixent però no està acotada.
- La successió 2, –2, 2, –2, 2, –2,… no és monòtona, però sí està acotada.
- La successió 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,… és monòtona decreixent i està acotada.
- La successió 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + … és monòtona creixent i està acotada.

A la vista d'aquests exemples anem a definir quan una successió és monòtona i quan està acotada.

Definició:

Una successió a_n està acotada si existeix $k \in \Re$ tal que $|\ a_n\ | < k$ per a tot n.

Definició:

Una successió a_n és monòtona creixent en sentit estricte si per a tot n es verifica que $a_n < a_{n+1}$.

Una successió a_n es monòtona decreixent en sentit estricte si per a tot n es verifica que $a_n > a_{n+1}$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica

Activitats resoltes

- A l'activitat resolta de l'apartat anterior vam veure que la quantitat de paper que deixàvem sobre la taula: $a_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n$, s'aproximava a 1 tant com volguéssim, però mai arribava a ser 1.

Aquesta és una idea difícil! Els grecs van trigar a comprendre-la. Pots llegir a l'apartat Revista la Paradoxa de Zenó Aquil·les i la tortuga. No comprenien com una suma infinita, és a dir, amb infinits sumands, podia donar un resultat finit, en el nostre cas 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=1.$$

Recordeu que:

Aquest resultat ja el coneixeu de 3r d'ESO. Anem a revisar el que ja coneixeu:

A) Suma d'0un nombre <u>il·limitat</u> de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Depenent del valor de r serà possible o no obtenir la suma d'un nombre il·limitat de termes:

a) <u>Si $r = 1$</u>, la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: $\{a_1, a_1, a_1, a_1\ldots\}$ i si a_1 és positiu la suma dels termes serà cada vegada més gran. Si a_1 fos negatiu seria la suma cada vegada més gran en valor absolut, però negativa. Per tant, si el nombre de termes és il·limitat, aquesta suma és infinita. És **divergent**.

b) <u>Si $|r| > 1$</u>,els termes creixen indefinidament i el valor de la suma per a un nombre il·limitat de termes també és infinit. És divergent..

c) <u>Si $|r| < 1$,</u> la suma dels seus termes s'aproxima, quan n és gran, a

$$S_n \approx \frac{a_1}{1-r}.$$

Observem que la suma no depèn del nombre de termes, ja que al fer-se cada vegada més petits, arriba un moment en què no es consideren. És **convergent**.

d) <u>Si $r = -1$</u>, els termes consecutius són oposats: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,\ldots\}$ i S_n és igual a zero si n és parell, i igual a a_1 si n és senar. La suma de la sèrie **oscil·la** entre aquests dos valors per a un nombre finit de termes. Per a un nombre il·limitat no sabem si aquest nombre és parell o senar, amb què la suma no es pot fer a no ser que sigui $a_1 = 0$, cas en què $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta de casos diem que la suma dels infinits termes no existeix ja que el seu valor és **oscil·lant**.

e) <u>Si $r < -1$</u>, els termes oscil·len entre valors positius i negatius, creixent en valor absolut. La suma dels seus infinits termes no existeix ja que el seu valor també és **oscil·lant**.

En resum,

La **suma** d'un nombre **il·limitat** de termes d'una **progressió geomètrica** de primer terme no nul només preen un valor finit si $|r| < 1$, i aleshores ve donada per:

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

En la resta de casos, o val infinit i és divergent, o no existeix ja que oscil·la.

Activitats resoltes

- *Calculeu la suma de tots els termes de la progressió geomètrica el primer terme de la qual és* 4 *i la raó* 1/2.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

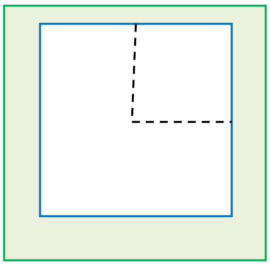
- *En una progressió geomètrica la raó és* 1/4 *i la suma de tots els seus termes és 8. Quant val el primer terme?*

Aïllem a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ i: $a_1 = S\,(1 - r) =$ 8 · (1 – 1/4) = 6

Activitats proposades

12. Calculeu la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, 3/2, 3/4,...

13. Tenim un quadrat d'àrea 1 a la mà i el tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros més gran el deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, que tornem a tallar de la mateixa manera. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creix o decreix? Escriu el terme general de la successió de les àrees que tenim a la mà. I els retalls que queden sobre la taula? Creix l'àrea sobre la taula o decreix? Anem sumant àrees, calculeu la suma d'aquestes àrees si haguéssim fet infinits retalls.



14. ***L'error d'Euler***: *Euler* fou un gran matemàtic, però es va trobar amb el següent problema. Potser siguis capaç d'ajudar-lo a resoldre'l. Va fer la següent suma, on r és un nombre positiu:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Primer va sumar la primera part, aplicant la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$$

I després la segona:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

Al sumar totes dues va obtenir: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$, que evidentment és incorrecte ja que la suma d'infinits nombres positius no pot ser 0. On és l'error?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Aplicacions de les progressions geomètriques

Fracció generatriu

El curs passat vas estudiar com passar d'un decimal periòdic pur o periòdic mixt a una fracció. Ara farem servir les progressions geomètriques per a que comprengueu millor el procés.

Exemple:

- Si tenim un **nombre decimal periòdic *pur***, *el podem escriure com*:

$$2,\widehat{37} = 2 + 0'37 + 0'0037 + 0'000037\ldots$$

O, el que és el mateix:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita de la qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- Si tenim un **nombre decimal periòdic mixt**, s'utilitza un procés similar:

$$1'32\widehat{8} = 1'32 + 0'008 + 0'0008 + \ldots$$

O, el que és el mateix:

$$1'32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

En aquest cas, els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{10} < 1$. Per tant:

$$1'32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0'32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Amb aquest procés estem il·lustrant el concepte de fracció generatriu com a aplicació de les progressions geomètriques, però a efectes pràctics és més còmode efectuar-lo segons el procés que ja coneixeu.

Capitalització composta

Ja coneixeu l'interès compost però anem a revisar-lo a la vista de les progressions geomètriques.

Si dipositem en una entitat financera una quantitat de diners C_0 durant un temps t i un rèdit r donat en tant per u, obtindrem un benefici $I = C_0 \cdot r \cdot t$ anomenat **interès.**

La principal característica de la capitalització composta és que els interessos que es generen en un any passen a formar part del capital inicial i produeixen interessos en els períodes següents

Aleshores:

- Al final del *primer any*, el capital serà el capital inicial C_0 juntament amb els interessos produïts durant aquell any. És a dir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del *segon any*, el capital que tindrem serà el capital que teníem al finalitzar el primer any més els interessos produïts aquell segon any. És a dir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observant els capitals obtinguts: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ concloem que es tracta d'una progressió geomètrica de raó $(1 + r)$. Por tant:

- L'*any n-èssim*, tindrem:

El capital final obtingut després de n anys donat un capital inicial C_0 i un rèdit r donat en tant per u, és:

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes

- *Vegem la fracció generatiu de $23,\widehat{45}$ com a aplicació de les progressions geomètriques.*

$$23,\widehat{45} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O, el que és el mateix:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100\cdot 100} + \frac{45}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita de la qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Dipositem en un banc 1500 € al 3’5 % de capitalització composta durant tres anys. Quants diners tindríem al finalitzar el tercer any?*

Utilitzem l’expressió: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ on C_0= 1500 €, r = 0,035 ja que és el tant per u i t = 3 anys. Per tant: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ = 1500(1 + 0’035)^3 = 1663’08 €.

Activitats proposades

15. Calculeu la fracció generatriu del nombre del número $4,5\widehat{61}$

16. Un empresari acudeix a una entitat financera per a informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha obtingut en un mes. Li plantegen dues opcions: mantenir aquest capital durant 5 anys al 3’5 % anual o rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3% els tres anys restants.

Quina opció li interessa més?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2. LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ

2.1. Reflexions sobre l'infinit

"Quan en l'ús dels principis de l'enteniment no ens limitem a aplicar la nostra raó a objectes de l'experiència, sinó que ens atrevim a estendre-la més enllà dels seus límits, s'originen demostracions que no esperen confirmació en l'experiència ni poden tenir refutació"

"L'infinit, com cap altre problema, sempre ha commogut profundament l'ànima dels éssers humans. L'infinit, com cap altra idea, ha tingut una influència estimulant i fèrtil en la ment. Però l'infinit necessita, més que cap altre concepte, aclarir-se"

David Hilbert

Anem a reflexionar una mica sobre l'infinit matemàtic.

Reflexió 1: Un joc

- *Dos amics una mica avorrits, en Daniel i en Jordi, decideixen jugar a un joc que consisteix que en Daniel escrigui nombres i en Jordi els esborri. El procediment proposat per en Daniel és:*
  - ✓ A les cinc menys un minut jo escric els nombres 1 i 2, i tu esborres l'1.
  - ✓ A las cinc menys mig minut jo escric 3 i 4, i tu esborres el 2.
  - ✓ A las cinc menys un terç de minut jo escric el 5 i el 6 i tu esborres el 3.
  - ✓ I així successivament. Naturalment juguen amb la imaginació.
  - ✓ En Daniel li pregunta a en Jordi: A les cinc menys una centèsima de minut, quants nombres et queden per esborrar?
  - ✓ I a les cinc menys una milionèsima de minut
  - ✓ En quin moment esborraràs el número 1000?
  - ✓ Hi ha algun nombre que no puguis esborrar abans de les cinc?

  Ajudeu en Jordi a respondre.

Reflexió 2: L'hotel infinit

- *Per a l'amo d'un hotel és un disgust haver de dir a un client que no li queden habitacions. Però, què passaria si l'hotel tingués infinites habitacions numerades 1, 2, 3, 4,…? Imagineu que l'hotel està complet i arriba un nou client, com l'allotjaríeu?*

Molt fàcil. L'amo passa el client de l'habitació 1 a la 2, el de la 2 a la 3, el de la 3 a la 4... i d'aquesta forma queda lliure l'habitació 1.

I si arriben 100 clients més? I si n'arriben 1000?

Molt fàcil, passa el client 1 a l'habitació 101... deixant lliures les 100 primeres habitacions. En el segon cas passa el client de l'habitació 1 a l'habitació 1001... deixant lliures les primeres 1000 habitacions.

I si arriben tants clients com habitacions hi ha?

En aquest cas ha de pensar una mica més. Ja ho te! Passa el client 1 a l'habitació 2, el 2 a l'habitació 2·2 = 4, el 3 a l'habitació 2·3 = 6, i així successivament. Li queden ocupades les habitacions parells i lliures totes les senars.

Reflexió 3: La taula de Caratheodory

- *Tenim la següent taula infinita:*

0	1/2	1/4	1/8	1/16	…
–1/2	0	1/2	1/4	1/8	…
–1/4	–1/2	0	1/2	1/4	…
–1/8	–1/4	–1/2	0	1/2	…
–1/16	–1/8	–1/4	–1/2	0	
…	….	…	…	…	…

Sabem que, si sumem primer totes les files i després per columnes, ens ha de donar el mateix que si sumem primer totes les columnes i després per files. Però aquesta taula és infinita. Mireu què surt!

- Al sumar per files, ja sabem que la primera fila suma 1. Aneu sumant les altres files i després els resultats de les sumes per files
- Ara comenceu a sumar per columnes. I després els resultats de les sumes per columnes.
- Finalment sumeu per diagonals. Us sorprèn el resultat?

Conjunts finits i conjunts infinits

Els conjunts finits tenen propietats que no tenen els conjunts infinits

Al reflexionar sobre les qüestions anteriors us haureu adonat que propietats molt evidents dels conjunts finits no les compleixen els conjunts infinits.

Un conjunt A és finit si no és possible establir una correspondència biunívoca entre A i una part d'A, diferent del propi A. Al nombre d'elements d'un conjunt finit l'anomenem el seu cardinal.

Però com hem vist en l'hotel amb infinites habitacions, en un conjunt infinit podem establir una correspondència biunívoca entre el conjunt dels nombres naturals, N, i el conjunt dels nombres parells, P, que és una part dels naturals i distinta de N.

Amb l'"*Hotel infinit*" hem vist que ∞ + 1 = ∞, ∞ + 100 = ∞, ∞ + 1000 = ∞ i fins i tot ∞ + ∞ = ∞.

El cardinal dels nombres naturals es denomina "*infinit numerable*" i és el mateix que el dels nombres enters, Z, i el dels nombres racionals, Q. Això no obstant, l'infinit dels nombres irracionals i el dels nombres reals és molt més gran, és la "*potència del continu.*" No és possible establir una correspondència biunívoca entre els nombres racionals i els nombres reals de l'interval (0, 1).

Amb la *Taula de Caratheodory* hem comprovat que hi ha d'altres propietats que no es verifiquen. No es verifica la propietat associativa, i a l'agrupar els nombres de maneres diferents s'obtenen resultats diferents

2.2. Càlcul d'alguns límits

No hi ha cap procediment general i infal·lible que permeti conèixer si una successió és convergent i calcular el seu límit. En el capítol dedicat al límit de funcions aprendreu amb major rigor el concepte de límit d'una funció (les successions són funcions) i nous procediments que podran servir-vos per a calcular el límit de les successions, però haureu d'anar amb compte amb les successions que **no són funcions contínues**. La representació gràfica d'una successió, al ser una aplicació dels nombres naturals als nombres reals, està formada per punts discrets.

Ja hem calculat alguns límits com:

- La successió 1/2, 1/4, 1/8, … , $1/2^n$, … té un nombre infinit de termes, però té límit, s'apropa a 0 tant com vulguem, i aquest límit és un nombre finit, 0.
- La successió 2, 4, 8, …, 2^n, … té un nombre infinit de termes, però no té límit, podem trobar termes de la successió tan grans com vulguem. És divergent. Tendeix a infinit.
- La suma 1/2 + 1/4 + 1/8 … + $1/2^n$ … és una suma d'infinits termes. Què vol dir sumar infinits termes? El que volem dir és que aquesta suma convergeix a 1 (en el cas de la quantitat de paper que teníem sobre la taula, això vol dir que podem tenir sobre la taula una quantitat de paper tan pròxima a 1 com vulguem).

Anem ara a calcular alguns límits senzills.

Activitats resoltes

- *La successió* $a_n = \dfrac{3+n}{2n-5}$ *té com a límit* $1/2$.

Per comprovar-ho donem a n valors molt grans i observem que podem apropar-nos a 1/2 tant com vulguem:

n	10^3	10^6	10^8
a_n	$\dfrac{3+10^3}{2\cdot 10^3-5} = 0'502767$	$\dfrac{3+10^6}{2\cdot 10^6-5} = 0'50000275$	$\dfrac{3+10^8}{2\cdot 10^8-5} = 0'5000000275$

És natural que per a valors molt grans de n el 3 del numerador i el 5 del denominador ja influeixin molt poc comparats amb n i amb $2n$. És per això que podem dir que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+n}{2n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Activitats proposades

17. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2}$

b) $a_n = \dfrac{2n+2}{3(n+1)}$

c) $a_n = \dfrac{7}{5^n}$

d) $a_n = 4 + \dfrac{n+2}{n-3}$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes

- *Comprovem, fent servir la calculadora i donant valors grans a n que:*

La successió $a_n = \frac{4}{n}$ té com a límit 0.

La successió $a_n = 3 - \frac{4}{n}$ té com a límit 3.

La successió $a_n = n + \frac{4}{n}$ no és convergent, tendeix a infinit.

La successió $a_n = \sqrt{n^2+1}$ no és convergent, és la successió: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$, … i tendeix a infinit.

Activitats proposades

18. Calculeu el límit de les successions següents, si és que en tenen:

a) $a_n = \frac{5n^3+2n}{n-6}$

b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$

d) $a_n = 6 + \frac{5n+2}{2n-3}$

19. Escriviu una successió el límit de la qual sigui 2, i una altra de límit 0.

20. Calculeu el límit de les successions següents, si en tenen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2-6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{1+2n+7n^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(6 - \frac{7}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{n-3} - 3\right)$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. El nombre e

Definirem el nombre e com el límit d'una successió, però abans analitzarem situacions que ja coneixes que ens ajudin a comprendre'l.

Situació 1: Creixement d'unes algues

- Els residus vegetals dels carrers i jardins de Madrid es porten a la planta de compostatge de Migas Calientes, on s'obté compost que, de nou, s'utilitza per abonar aquests jardins. A la planta s'investiga sobre la forma en què els microorganismes es reprodueixen i actuen més ràpidament transformant les restes de poda en compost. Imagineu que si sotmeten una quantitat C de microorganismes (bacteris i fongs) a un determinat procés durant un mes aquests s'han incrementat i s'obté una quantitat doble, $C + C = 2C$ de microorganismes. Acceleren el procés, afegint per exemple més oxigen, de forma que duri només mig mes, però se n'obté només la meitat, $C + C/2 = C(1 + 1/2)$ encara que llavors es realitzen dos cicles en un mes per la qual cosa al final del mes s'obté una quantitat de microorganismes de $C(1 + 1/2) + (1/2)(C(1 + 1/2)) = C(1 + 1/2)^2$ de microorganismes al final del mes. Y si realitzen cinc cicles al mes, obtenint en cada cicle la cinquena part?

Planta de compostaje de Migas Calientes, Madrid

Primer cicle: $C + C/5 = C(1 + 1/5)$

Segon cicle: $C(1 + 1/5) + (1/5)\, C(1 + 1/5) = C(1 + 1/5)^2$

Tercer cicle: $C(1 + 1/5)^2 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^2 = C(1 + 1/5)^3$

Quart cicle: $C(1 + 1/5)^3 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^3 = C(1 + 1/5)^4$

Cinquè cicle: $C(1 + 1/5)^4 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^4 = C(1 + 1/5)^5$

En general si es fan n cicles al mes obtenint en cada cicle $1/n$ de la quantitat tractada, al final del mes tenim una quantitat $C(1 + 1/n)^n$ de microorganismes.

Observeu que a l'augmentar el nombre de cicles, augmenta la quantitat de microorganismes, però hi ha un límit o creix fins a l'infinit?

Situació 2: Interès compost

- Ja hem estudiat l'interès compost. Si un capital C es posa a un interès del 5 % anual durant un any, al final de l'any s'obté $C + 0'05\cdot C = C(1 + 0'05)$. Si els interessos s'acumulen cada mig any al cap de l'any s'obté $C(1 + 0'05/2)^2$, i és cada quart d'any (cada trimestre) es té $C(1 + 0'05/4)^4$. En general si l'any es divideix en n intervals s'obtindrà:

$$C(1 + 0'05/n)^n$$

Es podria fer un milionari en un any invertint 200 euros en aquestes condicions?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Situació 3: L'espiral

- La figura del marge és una clova del *Nautilus*. Forma una espiral que s'anomena espiral equiangular, logarítmica, geomètrica… Dibuixeu-ne una tenint en compte que quan els seus angles centrals estan en progressió aritmètica, els seus radis estan en progressió geomètrica.

Marqueu un punt O. Preneu una unitat OA = 1. Marqueu els angles centrals de AOB = 40°; AOC = 80°, AOD = 120°…

Sobre la recta que conté O i B, marqueu B a una distància de 1'2. OB = 1'2·OA. Marqueu C (sobre OC) a una distància de OC = 1'2·OB = 1'44·OA…

Però si l'angle fos 40°/2, el radi hauria de multiplicar-lo per 1'2/2. D'aquesta forma obtindríem nous punts.

Estem veient que en diferents situacions apareixen successions semblants:

$$C(1 + 1/n)^n,\ C(1 + 0'05/n)^n.$$

Definició:

Es defineix el nombre e com $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

És el límit d'una successió!

Si donem a n valors (amb una calculadora o un ordinador) podem aproximar-lo: 2, 2'25, 2'37, 2'44, 2'5, 2'52… Per a n = 100 obtenim 2'7048… Per a n = 1000 obtenim 2'716... Per a n igual a un milió, 2'71828…

Utilitzem el desenvolupament d'un binomi de Newton.

Recordeu:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Com que $a = 1 \rightarrow a^n = 1$, i $b = 1/n$, tenim que:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots =$$

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Prenem límits

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Resulta que e també és la suma d'una sèrie. Ara el valor d'e l'obtenim d'una manera molt més ràpida. Ens basta la suma de 8 termes per obtenir cinc xifres decimals d'e, mentre que amb la successió els obteníem amb n igual a un milió.

$$e \approx 2'71828\ldots$$

e és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.

Ara ja sabem resoldre les situacions de partida: la quantitat de microorganismes de la planta de compostatge si s'augmenta el nombre de cicles en un mes, tendeix a $Ce \approx C\cdot 2'71828\ldots$ Mai arribaria a triplicar la quantitat C de microorganismes.

En la situació d'un interès compost, ens preguntàvem si un es podria fer milionari invertint 200 euros en aquelles condicions. Hem de calcular el límit:

$$\lim_{n\to\infty} 200\cdot\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200e^{0'05}$$

No ens farem milionaris. Però aprendrem a calcular aquests límits.

Límits tipus e

En general per calcular el límit: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n$

Anem completant la definició d'e, dividint primer per A. El denominador n/A tendeix a infinit, i el completem en l'exponent, multiplicant i dividint per n/A.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^{\frac{n}{A}}\right)^A = e^A$$

Aquesta tècnica la podem fer servir si tenim un límit amb un exponent que tendeixi a infinit la base del qual tendeixi a 1, el que anomenem una indeterminació de tipus 1^∞.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes

- *Calculeu el límit:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}$

Primer comprovem que és un límit tipus e, l'exponent $2n-1$ tendeix a infinit, i la base:

$$\frac{3n-3}{3n+1}\to\frac{3n}{3n}\to 1\text{, tendeix a 1.}$$

Volem completar el primer 1 de la definició d'e, per la qual cosa hem de dividir:

$$\frac{3n-3}{3n+1}=\frac{3n+1-3-1}{3n+1}=1+\frac{-4}{3n+1}$$

Per aconseguir el segon 1, dividim entre -4

$$1+\frac{-4}{3n+1}=1+\frac{1}{\dfrac{3n+1}{-4}}.$$

Fem que l'exponent coincideixi amb $\dfrac{3n+1}{-4}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}\cdot\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}$$

El límit de la base hem aconseguit que sigui e. El límit de l'exponent sabem calcular-lo:

$$\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)\to\frac{-8n}{3n}\to\frac{-8}{3}$$

Per tant:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=e^{\frac{-8}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{8}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^8}}.$$

Activitats proposades

21. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n=\left(\dfrac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n}$ b) $a_n=\left(\dfrac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2}$

c) $a_n=\left(1+\dfrac{7}{n+3}\right)^{n^2}$ d) $a_n=\left(\dfrac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

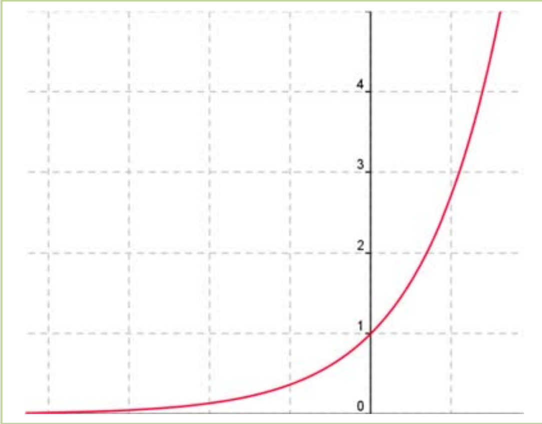
Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Funció exponencial i funció logaritme

Funció exponencial

A 4t d'ESO ja heu estudiat la funció exponencial i la funció logaritme, però ara que coneixeu millor el nombre e sembla interessant que analitzem alguna cosa sobre elles, i resolguem nous problemes.

La funció exponencial de base e es defineix com $y = e^x$. Ara ja sabeu bé què és el que significa. Algunes de les seves propietat són:



1. $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$
2. $e^0 = 1$, i $e^x > 0$ per a tot x.
3. És sempre estrictament creixent, la qual cosa permet resoldre equacions exponencials
4. Quan x tendeix + ∞, e^x tendeix a + ∞, però
5. Quan x tendeix a – ∞, e^x tendeix a 0.

Activitats resoltes

- Resoleu l'equació: $e^{x+1} = e^{2x-3}$.

Per resoldre equacions exponencials hem d'aconseguir que les bases siguin iguals i n'hi ha prou, aleshores, amb igualar els exponents:

$$e^{x+1} = e^{2x-3} \rightarrow x+1 = 2x-3 \rightarrow x = 4.$$

Activitats proposades

22. Calculeu $1/e$ amb tres xifres decimals exactes.

23. Calculeu $\sqrt{e}$ amb tres xifres decimals exactes.

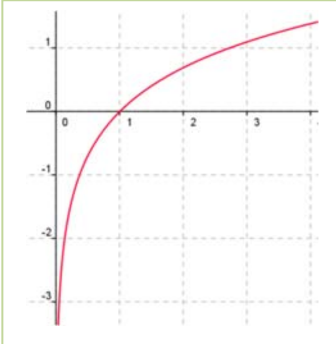
Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Funció logaritme

La **funció logaritme** en base e, és a dir, **logaritme neperià**, se defineix como:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

Aplicant aquesta definició es demostra que:



- ✓ El logaritme d'1 és cero (en qualsevol base).
- ✓ El logaritme de la base és 1.
- ✓ Només els nombres positius tenen logaritme, és adir, $\mathrm{Dom}(\ln) = \Re^+$.
- ✓ Quan x tendeix a + ∞, $\ln x$ tendeix a + ∞.
- ✓ Quan x tendeix a 0, $\ln x$ tendeix a $-\infty$.
- ✓ És sempre estrictament creixent, la qual cosa permet resoldre equacions logarítmiques.

Propietats dels logaritmes

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'un **producte** és igual a la suma dels logaritme dels seus factors.

$$\log (a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'un **quocient** és igual al logaritme del dividend menys el logaritme del divisor.

$$\log (a/b) = \log(a) - \log(b)$$

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'una **potència** (en qualsevol base) és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base de la potència.

$$\log (a^b) = b \cdot \log(a)$$

Activitats resoltes

- *Resoleu les equacions: a)* $e^{x+2} = e^4$. *b)* $\ln(2x-1) = \ln(3)$.

Per resoldre equacions logarítmiques aïllem el logaritme en ambdós membres, i després igualem.

a) $e^{x+2} = e^4 \rightarrow x + 2 = 4 \rightarrow x = 2$.

b) $\ln(2x-1) = \ln(3) \rightarrow 2x - 1 = 3 \rightarrow x = 4/2 = 2$.

Activitats proposades

24. Calculeu el logaritme neperià de $1/e$ i de $\sqrt{e}$.

25. Resoleu l'equació $\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1$

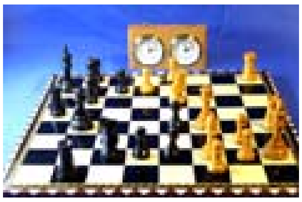
26. Resoleu l'equació: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSITATS. REVISTA

A) L'inventor dels escacs

Ja vam veure en el capítol sobre potències la llegenda sobre els escacs. Ara podeu fer servir els vostres coneixements sobre progressions per fer els càlculs:



Conta la llegenda com l'inventor dels escacs va presentar el seu invent a un príncep de l'Índia. El príncep va quedar tan impressionat que va voler premiar-lo generosament, per la qual cosa li va dir: "Demana'm el que vulguis, que et serà concedit".

L'inventor dels escacs va formular la seva petició de la manera següent:

"Vull que m'entreguis un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, quatre per la tercera, vuit per la quarta, setze per la cinquena, i així successivament fins a la casella 64".

La sorpresa fou quan el secretari del príncep va calcular la quantitat de blat que representava la petició de l'inventor, per què tota la Terra sembrada de blat era insuficient per obtenir el blat que demanava.

Quin tipus de progressió s'utilitza? Aritmètica o geomètrica? Quina n'és la raó? Quants trilions de grans de blat demanava aproximadament?

Podries trobar el total de grans de blat fent servir fórmules i la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potències de 2 al tennis

Les potències de 2 també apareixen als tornejos de tennis. En molts tornejos s'enfronten els jugadors de la següent forma: A la final juguen dos jugadors; a la semifinal n'hi ha quatre; a quarts de final n'hi ha vuit. Així, a cada ronda addicional la quantitat de jugadors es duplica, tal i com passava amb els grans de blat en el tauler d'escacs. Si el torneig tingués 25 rondes, t'imagines quants jugadors hi hauria? Doncs, podrien participar gairebé tots els habitants de l'Estat Espanyol! I amb 33 rondes, podrien participar-hi tots els habitants del planeta!

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

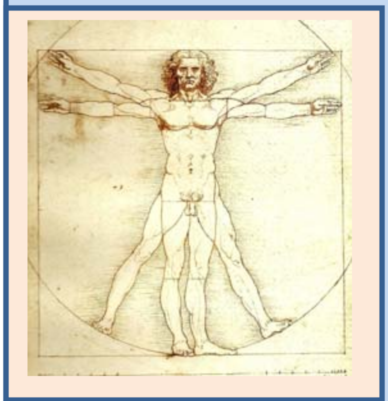
Successió de *Fibonacci*

Per als que penseu que és impossible veure Matemàtiques fora de l'aula i molt menys a la natura, us presentem un dels conceptes matemàtics més bells relacionats amb la natura i l'art.

Es tracta d'una successió molt simple, en què cada terme és la suma dels dos anteriors.

- La successió comença pel nombre 1,
- I segueix amb 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ja que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de les propietats més curioses és que el quocient de dos nombres consecutius de la successió s'aproxima a l'anomenada **"secció àuria" o "divina proporció"**, que ja coneixeu, el nombre d'or descobert pels renaixentistes, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1'61803…, que es denota amb la lletra grega ϕ (phi). La successió formada pels quocients de nombres consecutius de la successió de *Fibonacci* s'apropa ràpidament al nombre d'or. Els grecs i renaixentistes estaven fascinats amb aquest nombre i el consideraven l'ideal de la bellesa.



De fet, *Leonardo da Vinci* en la seva obre "L'home del *Vitrubi*" utilitza aquest nombre per aconseguir les perfectes proporcions de la seva obra.

Com pot ser que el quocient de dos nombres d'una seqüència inventada per l'home es relacioni amb la bellesa? Dons perquè la successió de *Fibonacci* està estretament relacionada amb la natura. Es creu que *Leonardo* va troba aquests nombres quan estudiava el creixement de les poblacions de conills. Suposem que una parella de conills triga un mes a arribar a l'edat fèrtil, i a partir d'aquell moment cada vegada engendra una altra parella de conills, que a la vegada engendraran cada mes una altra parella de conills.

Quants conills hi haurà al cap d'un determinat nombre de mesos?

Doncs sí, cada mes hi haurà un nombre de conills que coincideix amb cadascun dels termes de la successió de *Fibonacci*. Sembla màgia, oi?

De fet moltes plantes, com les pinyes o les margarides segueixen una disposició relacionada també amb la successió de *Fibonacci*, la qual cosa il·lustra la famosa frase de *Galileu* **"La natura està escrita en llenguatge matemàtic".**

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Els grecs i l'infinit

El concepte d'infinit ha costat temps i esforç a la humanitat entendre'l. Els grecs opinaven que el nombre de grans de sorra del món era infinit, fins que *Arquimedes* va escriure l'*Arenari,* tractat en què estimava aquest nombre, que en efecte és molt gran però no infinit.

Paradoxa d'Aquil·les i la tortuga

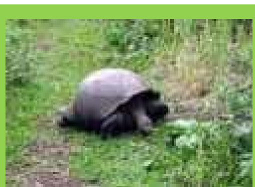
En aquest mateix sentit, els grecs no podien comprendre que si sumaven infinites quantitats els pogués donar una quantitat finita.

Així apareix la paradoxa de *Zenó* d'"Aquil·les i la tortuga". Aquil·les, el dels peus lleugers, fa una curs amb una tortuga. Dona a la tortuga un gran avantatge, posem de L estadis. En poc tems Aquil·les recorre els s L estadis, però a l'arribar-hi descobreix que la tortuga ha avançat un cert tros, suposem que $L/10$. Avança de nou fins on es trobava la tortuga, però a l'arribar-hi aquesta de nou ha avançat. D'aquesta forma Aquil·les mai guanyarà la cursa, ja que a l'arribar a la posició on es trobava la tortuga aquesta ja s'haurà mogut.

L'experiència els deia que Aquil·les sí que atrapava la tortuga, però no aconseguien comprendre-ho. Vosaltres ja els podríeu ajudar, ja que ja sabeu sumar sèries infinites en progressió geomètrica de raó menor que 1:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = L + L/10 + L/10^2 + \ldots = \frac{L}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10L}{9}$$



Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

RESUM

Successió	Funció entre els nombres naturals, $\mathbb{N}$, i els reals, $\Re$.	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2….
Progressió aritmètica	Successió de nombres reals en què la diferència d entre dos termes consecutius de la successió és constant.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
	Terme general: $a_n = a_k + (n-k)\,d$ **Suma dels *n* primers termes:** $S_n = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ S_8 = (8/2)·(2 + (2 + 3·8)) = 112
Progressió geomètrica	És una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
	Terme general: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ **Suma:** $S_n = \frac{r\cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, per a $r \neq 1$ **Suma infinita**: $S = \frac{a_1}{1-r}$, per a $0 < \lvert r \rvert < 1$. **Producte:** $P_n = \pm\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$a_n = 3\cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8-1)}{2-1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3\cdot 3\cdot 2^8)^9} = (3\cdot 2^4)^9$ $a_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
El nombre e	$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques: $e \approx 2'71828…$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES

Successions

1. Calculeu el terme que ocupa el lloc 1000 d'una progressió aritmètica el primer terme de la qual és igual a 2 i la diferència és 3.

2. El vuitè terme d'una progressió aritmètica és 5 i la diferència ½. Trobeu el primer terme i el terme 100.

3. Calculeu els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves longituds, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 2.

4. Calculeu la suma dels múltiples de 42 compresos entre 1000 i 2000.

5. La suma de 16 nombres en progressió aritmètica és 548 i el terme 16 és 60'5. Trobeu el primer terme.

6. El producte de 4 termes en una progressió aritmètica és 5184 i el primer terme és 3. Escriviu la resta de termes.

7. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 700 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 30 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 10 anys?

8. El cinquè terme d'una progressió geomètrica és 48 i el primer és 3. Trobeu els cinc primers termes de la progressió.

9. Trobeu x per tal que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estiguin en progressió geomètrica.

10. A una corda de 350 m de longitud se li fan dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 50 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determineu la longitud de cada tros.

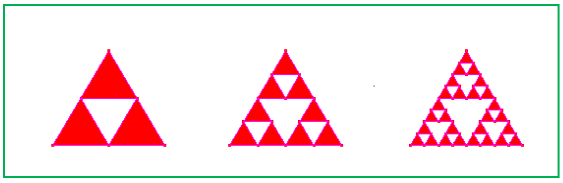
11. Trobeu la fracció generatriu del nombre decimal 0'12121212..., com a suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.

12. Es té una bota de vi que conté 512 litres. L'1 de desembre se'n va buidar la meitat del contingut; l'endemà se'n va tornar a buidar la meitat del que quedava i així successivament cada dia. Quina quantitat de vi es va treure el dia 15 de desembre?

13. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim els punts mitjans dels seus costats; obtenim així un nou quadrat, en què tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. trobeu la suma de les infinites àrees així obtingudes.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

14. *Triangle de Sierpinski:* Anem a construir un fractal. Es parteix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cadascun dels altres tres triangles es repeteix el procés. A la figura formada per iteració infinita se la denomina *Triangle de Sierpinski*, i és un fractal. A) Imagineu que el primer triangle té una àrea A. Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és (3/4)A. I a la segona? Escriviu la successió de les àrees. És creixent o decreixent? B) Imagineu ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L. Escriviu la successió de la longitud del perímetre de cada figura. És creixent o decreixent?



Límits de successions

15. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^2-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n-3}{n+7}$

16. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{-3}{n+7}$

17. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^5+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n+7}$

18. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

19. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(1+\dfrac{3}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(1-\dfrac{4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

20. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(\dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(\dfrac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

21. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2-6}\right)^{2n-3}$ b) $a_n = \left(\dfrac{n^2-4}{n^2-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exponencial i logarítmica

22. La població de peixos d'una piscifactoria segueix un model de creixement exponencial i ha passat de 100 exemplars a 1500 en 60 dies. Quina població tindrà en 100 dies?

23. Ingressem en un banc 20.000 euros al 3% d'interès compost anual. En quant de temps haurem duplicat els nostres diners?

24. La Vanessa ha comprat un cotxe per 17.000 euros. S'estima que el preu es devalua un 10% cada any. A quant el podrà vendre al cap de 5 anys? Si té un accident en què el cotxe queda destrossat quan té 7 anys, quant li pagarà la companyia d'assegurances?

25. L'escala de Richter relaciona la intensitat d'un terratrèmol, x, amb la seva energia y (en ergs): $\log y = 11'4 + 1'5\,x$. Calculeu l'energia d'un terratrèmol: a) d'una intensitat 5 en l'escala de Richter, i b) d'una intensitat 7.

26. En Joan ha vist escarabats a casa. Mira de quin tipus és i descobreix que es tripliquen cada mes, seguint un model exponencial. Estima que en aquest moment en podria tenir 20. Si no fes res, quants escarabats tindria al cap de 5 mesos?

27. A la fórmula del terme n–èssim d'una progressió geomètrica, aïlla n, aplicant logaritmes.

28. La Neus té un gran pot de perfum molt concentrat d'un litre. N'extreu amb la pipeta 10 cm^3 que substitueix per aigua. Torna a treure de la mescla amb una pipeta 10 cm^3 que torna a substituir per aigua. Així fins aconseguir una mescla del 75% de la inicial. Quantes operacions ha hagut de fer?

29. Resoleu, prenent logaritmes l'equació exponencial: $(0'99)^n = 0'75$.

30. Utilitzeu la calculadora per a estimar el valor de 2^{63}. Estimeu també $2^{64} - 1$.

31. Resoleu les equacions:

a) $3^{2x-4} = 81$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$

c) $\sqrt[x-1]{8} = 2$

d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOAVALUACIÓ

1. Quina és la raó de la següent progressió aritmètica: $a_n = 7\cdot 4^{n-1}$?

a) 7 b) 4 c) –1 d) No és una progressió aritmètica

2. A la successió de múltiples d'11, el 121 ocupa el lloc:

a) 1 b) 2 c) 11 d) 121

3. La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 5, 10, 15, 20,… és:

a) 220 b) 275 c) 55 d) 250

4. La successió 1, 1/5, 1/25, 1/125,...:

a) És una progressió geomètrica de raó 5 b) És una progressió aritmètica de diferència 5

c) És una progressió geomètrica de raó 1/5 d) És una progressió aritmètica de diferència 1/5.

5. La solució de l'equació $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ és:

a) 40 b) 8 c) 10 d) 20

6. La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 3 i la seva diferència 5, té com a terme general:

a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$

7. La Pepa està preparant l'examen de selectivitat. Per a no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar dues pàgines, quantes n'haurà estudiat al cap de 5 dies?

a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128

8. A en Lluís li han tocat 6000 € en la loteria i decideix dipositar-los al banc a un tipus d'interès compost del 4%. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

9. La successió $a_n = \dfrac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ té per límit:

a) 0 b) ∞ c) –3/2 d) 7

10. La successió $a_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ té per límit:

a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF