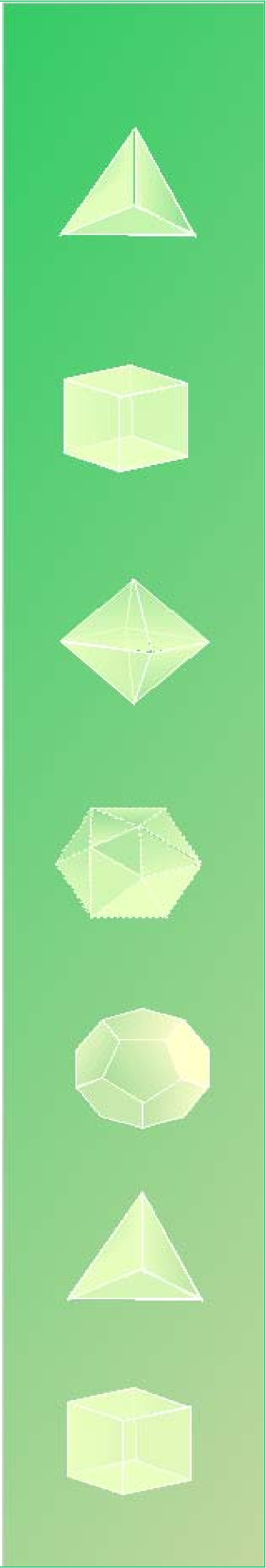


MATEMÀTIQUES I
1r Batxillerat
Capítol 1: Nombres reals i complexos

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya

Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)

Revisora: Rosa María Herrera

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

Resum

La variable complexa permet resoldre problemes molt diferents dins d'àrees tan diverses com poden ser la hidràulica, l'aerodinàmica, l'electricitat, l'electromagnetisme, entre d'altres. Alguns d'ells només requereixen el coneixement dels nombres complexos, com passa en el càlcul dels valors propis associats a sistemes d'equacions diferencials lineals. D'altres, en canvi, requereixen la utilització de la teoria de les funcions analítiques complexes, com els problemes de contorn que apareixen, per exemple, en l'estudi dels fluxos de fluids, la conducció de la calor, l'elasticitat o el potencial electroestàtic. Sabies que la forma de l'ala dels avions es dissenya mitjanjant operacions amb nombres complexos? Es pot dir que l'ésser humà és capaç de volar gràcies a ells.

Molts problemes geomètrics poden resoldre's utilitzant les transformacions complexes. Per a resoldre molts d'aquests problemes n'hi ha prou amb conèixer el que estudiaràs en aquest capítol, però per alguns altres (transformacions, funcions analítiques) caldrà esperar a saber-ne més.

Si ens quedem només dins de les Matemàtiques, és interessant estudiar la variable complexa per estar estretament relacionada amb diferents àrees, de manera que el seu estudi pugui fer accessible part de l'àlgebra, de la trigonometria o proporcioni eines per al càlcul intregral.

Els antics algebristes van operar amb expressions on apareixia $\sqrt{-1}$. Leibniz, al segle XVII, encara deia que $\sqrt{-1}$ era *"una espècie d'amfibi entre l'ésser i el no-res"*. El 1777 Euler va anomenar i (per *imaginari*) el *"monstre"* $\sqrt{-1}$. Però atenció, que no us faci equivocar el nom, imaginari no vol dir il·lusori, inexistent o alguna cosa així. El l'actualitat aquesta notació es fa servir de manera gairebé universal, excepte en enginyeria elèctrica, on es fa servir *j* en lloc de i, ja que la lletra i es fa servir per indicar la intensitat del corrent.

Quan es va desenvolupar la teoria dels nombres complexos, l'electricitat era una matèria d'interès només de laboratori. Però abans del final del segle XIX els descobriments sobre electricitat i electromagnetisme van transformar el món, i en aquest procés els nombres complexos van ser una eina que va simplificar el càlcul amb corrents alterns. Això demostra que coneixements que són matemàtica pura per a una generació es converteixen en aplicats per a la següent.

1. NOMBRES REALS

1.1. Nombres racionals i irracionals

Recorda que:

Ja coneixes els diferents tipus de conjunts numèrics:

Naturals ➔ N = {0, 1, 2, 3, …}

Enters ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Racionals ➔ $\mathrm{Q} = \left\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

Els nombres racionals també contenen els nombres que tenen expressió decimal exacta (0’12345) i els que tenen expressió decimal periòdica (7’01252525...) Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 l’expressió decimal és exacta. Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no sigui ni 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica; i tota expressió decimal exacta o periòdica es pot escriure en forma de fracció.

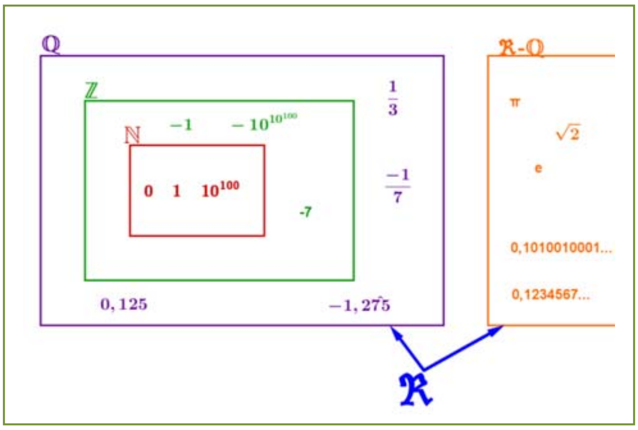
Però ja saps que existeixen nombres que no són racionals. Per exemple $\sqrt{2}$ **no** pot posar-se com a fracció. Tots aquest nombres, per exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π … juntament amb els nombres racionals formen el conjunt dels **nombres reals**. Als nombres reals que no són nombres racionals se’ls anomena **nombres irracionals**.

L’expressió decimal dels **nombres** irracionals és d’infinites xifres no periòdiques.

Per tant

Irracionals ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$.

El conjunt dels **nombres** reals està format per la unió dels nombres racionals i dels nombres irracionals.



Reals ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

Tenim per tant que: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re$.

$\mathrm{I} \subset \Re$

Activitats proposades

1. Decidiu mentalment quines de les següents fraccions tenen una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica:

a) 1/9 b) 7/5 c) 9/50 d) 2/25 e) 1/8 f) 3/22

2. Trobeu l’expressió decimal de les fraccions de l’exercici 1 i comproveu si la vostra deducció era correcta.

3. Calculeu l'expressió decimal de les següents fraccions:

a) 1/5 b) 1/3 c) 5/9 d) 2/25 e) 11/400 1/11

4. Escriviu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueixles. Després comproveu-ho amb la calculadora:

a) 8'35; b) 791'297835; c) 0'47

5. Escriviu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, reduïu-les i comproveu-ho:

a) 9'464646….. b) 91'02545454…. c) 0'9999….. d) 3'267123123123…..

6. Podeu demostrar que 4,99999… és igual a 5? Calculeu quant val 2,5999…? *Ajuda*: Escriviu-los en forma de fracció i simplifiqueu.

7. Demostreu que $\sqrt[3]{7}$ és irracional.

8. Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de $\frac{1}{47}$?

9. Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? Podeu dir per què?

10. Feu la divisió 999999:7 i després fes 1:7, és casualitat?

11. Ara dividiu 999 entre 37 i després 1:37, és casualitat?

1.2. La recta real

Densitat dels nombres reals

Els nombres reals són densos, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres.

Aquest fet és fàcil de deduir: si a, b són dos nombres amb $a < b$ sabem que $a < \frac{a+b}{2} < b$, és a dir, la mitjana és entre els dos nombres. Com que podem fer això tantes vegades com vulguem, d'aquí el resultat.

Curiosament els racionals també són densos, així com els irracionals.

Activitats proposades

12. Escriviu 3 nombres reals que estiguin entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i 1.

13. Escriviu 5 nombres racionals que estiguin entre $\sqrt{2}$ y 1'5.

14. Escriviu 5 nombres irracionals que estiguin entre 3'14 y π.

Representació a la recta real dels nombres reals

Un cop escollit l'origen de coordenades i la mida de la unitat (o, el que és el mateix, si col·loquem el 0 i l'1) tot nombre real ocupa una posició a la recta numèrica i a l'inrevés, tot punt de la recta es pot fer correspondre a un nombre real.

El curs passat vàreu estudiar com representar a la recta real fraccions i arrels.

Activitats proposades

15. Representeu a la recta numèrica els següents nombres:

a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1'342, d) –2'555555….

16. Representeu a la recta numèrica:

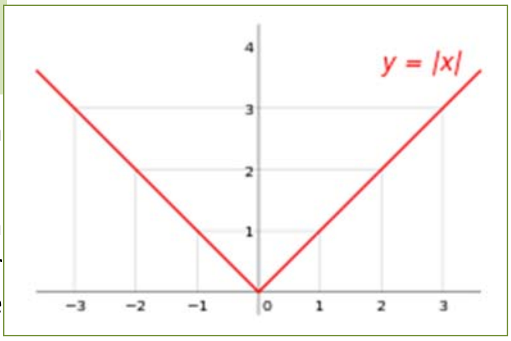
a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.3. Valor absolut

El valor absolut o mòdul d'un nombre equival al valor del nombre ignorant el signe. Per exemple, el valor absolut de –1 és 1, i el valor absolut de +1, també és 1.

En llenguatge formal, el valor absolut es defineix de la següent forma:

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representem aquesta funció en uns eixos coordenats, resulta una gràfica com la del costat.

Com que el valor absolut és una funció molt important en matemàtiques, té el seu propi símbol. Per a escriure el valor absolut d'un nombre x, n'hi ha prou amb posar el nombre entre dues barres: $|x|$.

El valor absolut d'un nombre x s'obté suprimint el signe, i s'anota amb el símbol $|\boldsymbol{x}|$.

Exemple:

- El valor absolut de –32 és 32, igual que el valor absolut de +32. Escrit en llenguatge seria:

|–32| = 32 = |+32|.

Activitats proposades

17. Trobeu el valor absolut dels següents nombres: a) 5 b) –5 c) –π

Per a què serveix?

El valor absolut es fa servir principalment per a definir quantitats i distàncies en el món real. Els nombres negatius són una construcció matemàtica que s'utilitza en el càlcul, però a la realitat no hi ha quantitats negatives. No podem viatjar una distància de –100 quilòmetres, o menjar–3 caramels. Això és degut a que el temps només transcorre en una direcció (positiva per convenció), però això no entra en l'àmbit de les matemàtiques sinó en el de la física.

El valor absolut es fa servir per a expressar quantitats o longituds vàlides en el món real, com la distància.

Exemple:

- Faig un viatge d'anada i tornada fins una ciutat que es troba a 40 km de casa meva. Després de fer el viatge, sóc al mateix punt, així que la meva posició no haurà canviat, això és

Posició = 40 km – 40 km = 0

Això no vol dir que no hagi recorregut una distància. Hi ha dues quantitats a tenir en compte, una distància d'anada i una altra de tornada, en total serà:

L = |40| km + |–40| km = 80 km

Les propietats del valor absolut són:

- No negativitat: $|a| \geq 0$.
- Simetria: $|a| = |-a|$
- Definició positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absolut i producte: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualtat triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Activitats resoltes

- *Demostra que el valor absolut no pot ser mai negatiu.*

1 – No negativitat

Por definició, la funció valor absolut només canvia el signe quan l'operand és negatiu, així que no pot existir un valor absolut negatiu.

Demostra que el valor absolut d'un nombre i el seu oposat coincideixen.

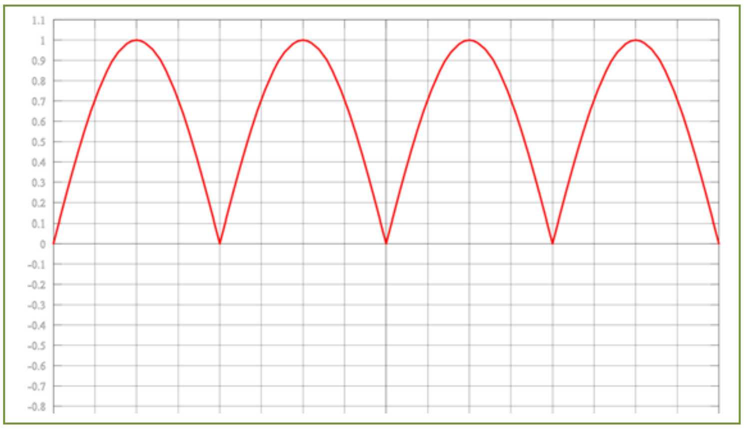
2 - Simetria.

Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

Si $a < 0 \Rightarrow |-a| = -a$

En qualsevol cas $|a| = |-a|$

- *Representa la funció* $f(x) = |sin(x)|$



Activitats proposades

18. Representa les següents funcions:

a) $f(x) = |x^2|$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c) $f(x) = |cos\ x|$

d) $f(x) = |\sqrt{x}|$

1.4. Desigualtats

Ja sabeu que:

Una desigualtat és una expressió numèrica o algebraica unida per un dels quatre símbols de desigualtat: $<, >, \leq, \geq$.

Per exemple:

- $-4 < 2$, $7 \geq x + 1$, $x^2 - 14 \geq x$, $2x + 3y \geq 7$.

Una **inequació** és una desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites.

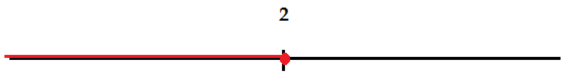
El **grau** d'una inequació és el més gran dels graus a què estan elevades les seves incògnites.

Per exemple:

- $7 \geq x + 1$ és una inequació de primer grau, mentre que $x^2 - 14 \geq x$ és de segon grau.

Resoldre una inequació consisteix a trobar els valors que la verifiquen. Aquests s'anomenen **solucions** de la inequació.

Per exemple:

- $7 \geq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$ 

Inequacions equivalents:

Dues inequacions són equivalents si tenen la mateixa solució.

A vegades, per resoldre una inequació, resulta convenient trobar-ne una altra d'equivalent més senzilla. A tal efecte, es poden realitzar les següents transformacions:

1. Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la inequació.
2. Multiplicar o dividir els dos membre per un nombre **positiu**.
3. Multiplicar o dividir els dos membres per un nombre **negatiu** i canviar el signe de la desigualtat.

Recordeu que:

1. Per a tot c, si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. Si $c > 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
3. Si $c < 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Exemples

- $3x + 6 < 12 \Leftrightarrow 3x + 6 - 6 < 12 - 6 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x : 3 < 6 : 3 \Leftrightarrow x < 2$.
- $7 \geq x + 1 \Leftrightarrow 7 - 1 \geq x + 1 - 1 \Leftrightarrow 6 \geq x$.
- $-x < 5 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -5$

Activitats proposades

19. Donada la següent inequació $3 + 2x < 5x^2 + 1$, determineu quins dels següents valors en són solució:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

20. Escriviu una desigualtat que sigui certa per a $x = 5$ i falsa per a $x = 5'5$.

1.5. Distància a la recta real

Una **distància** és una mesura que té unes determinades propietats:

1) No negativitat.

2) Simetria.

3) Propietat triangular.

La distància entre dos nombres reals x i y es defineix com:

$$\textbf{Dist}(x, y) = |x - y|$$

Verifica les propietats indicades abans ja que:

1) A l'estar definida amb el valor absolut sempre és un nombre no negatiu. La distància entre dos punts te valor zero només si els dos punts són coincidents:

$$0 = \text{Dist}(x, y) = |x - y| \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

2) Simetria: $\text{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \text{Dist}(y, x)$.
3) Propietat triangular: $\text{Dist}(x, y) \leq \text{Dist}(x, z) + \text{Dist}(z, y)$.

Exemple:

- $\text{Dist}(3, 8) = |8 - 3| = 5$
- $\text{Dist}(-2, -9) = |-9 - (-2)| = |-9 + 2)| = |-7| = 7$
- $\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6$
- $\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14$

Exemple:

- *Si som al soterrani 9è y pugem al pis* 5è, *quants pisos hem pujat?*

Com hem vist a l'exemple anterior, hem pujat en total 14 pisos.

$$\text{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.$$

- *Si el termòmetre marca* –1 ºC *i després marca* ºC, quants graus ha pujat la temperatura*?*

Com hem vist en l'exemple anterior, la temperatura ha pujat 6 ºC. Fixeu-vos que l'escala termomètrica que hem fet servir és la Celsius. N'hi ha d'altres, que ja estudiareu a física.

$$\text{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.$$

Activitats proposades

21. Representeu a la recta real i calculeu la distància entre els nombres següents:

a) Dist(5, 9) b) Dist(–2'3, –4'5)

c) Dist(–1/5, 9/5) d) Dist(–3'272727…. , 6'27272727….).

1.6. Intervals i entorns

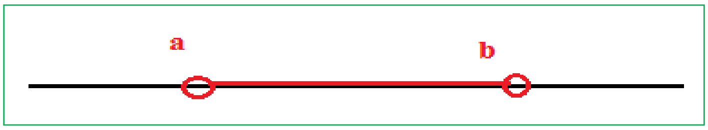
Recordeu que:

Un interval de nombres reals és un conjunt de nombres corresponents a una part de la recta numèrica i, en conseqüència, un interval és un subconjunt del conjunt dels nombres reals.

Tipus d'intervals

Interval obert: és l'interval en què els extrems no en formen part, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems formen part de l'interval, excepte els propis extrems.

En altres paraules $\mathrm{I} = (a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x < b\}$, observeu que es tracta de desigualtats estridctes.

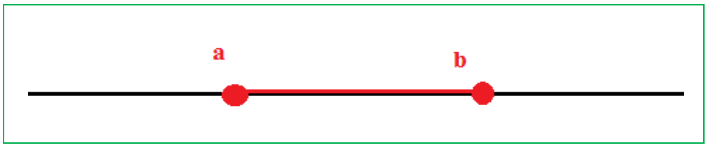


Gràficament ho representem a la recta real de la següent forma:

Interval tancat: és l'interval en què els extrems sí en formen part, és adir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, incloent-los, formen part de l'interval.

En altres paraules $\mathrm{I} = [a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \le x \le b\}$, observeu que ara no es tracta de desigualtats estrictes.

Gràficament:



Interval semiobert: és l'interval en què només un dels extrems en forma part, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, incloent-hi un d'ells, formen part de l'interval.

Interval semiobert per l'esquerra, l'entrem inferior no forma part de l'interval peró sí el superior, en altres paraules,

$$\mathrm{I} = (a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x \le b\},$$

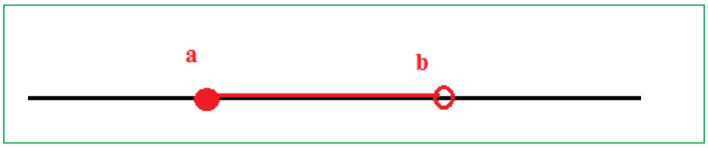
observeu que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Interval semiobert per la dreta, l'extrem superior no forma part de l'interval però l'inferior sí, en altres paraules

$\mathrm{I} = [a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \le x < b\}$

observeu que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Gràficament:



Semirectes reals

Semirecta dels nombres positius $S^+ = (0, \infty)$, és a dir, de zero a infinit.

Semirecta dels nombres negatius $S^- = (-\infty, 0)$, és a dir, de menys infinit, l'infinit negatiu, fins a zero.

Amb la qual cosa tota la recta dels nombres reals és $\Re = (-\infty, \infty) = (S+) \cup (S-) \cup \{0\}$.

A una semirecta se la pot considerar com un interval infinit.

Entorns

És una forma especial d'expressar els intervals oberts.

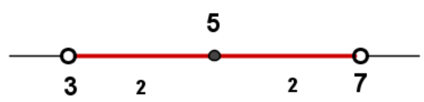
Es defineix l'entorn de centre a i radi r i es nota $\boldsymbol{E(a, r)}$ (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que són a una **distància d'*a* menor que *r*.**

S'entén millor amb un exemple:

Exemple:

- L'entorn de centre 5 i radi 2 són els nombres que són a una distància de 5 menor que. Si ho pensem una mica, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l'interval (3,7). És com agafar el compàs i amb centre 5 marcar amb obertura 2.

$$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$$



Fixeu-vos que el 5 és al centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

$$\boldsymbol{E(a, r) = (a - r, a + r)}$$

Exemple:

- $E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$

És molt fàcil passar d'un entorn a un interval. Fem-ho a l'inrevés.

Exemple:

- *Si tinc l'interval obert* (3, 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6'5 que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10 – 3) : 2 = 3'5 és el radi (la meitat de l'amplada). Per tant (3, 10) = E(6'5, 3'5)

En general:

L'interval $(b,\ c)$ és l'entorn $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemple:

- *L'interval* (–8, 1) = $E\left(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3'5,\ 4'5)$

També existeixen els entorns tancats però són d'ús menys freqüent.

Activitats proposades

22. Escriviu els següents intervals mitjançant conjunts i representeu-los a la recta real:

a) [1, 7)   b) (–3, 5)   c) (2, 8]   d) (–∞, 6)

23. Representeu a la recta real i escriviu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \le x < 6$ d) $x \le 7$

24. Expresseu com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representeu gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 %.
b) Edat inferior o igual a 18 anys.
c) Nombres el cub dels quals sigui superior a 8.
d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres.
e) Temperatura inferior a 25 ºC.
f) Nombres per als quals existeix l'arrel quadrada (és un nombre real).
g) Nombres que siguin a una distància de 5 inferior a 4.

25. Expresseu en forma d'interval els següents entorns:

a) E(1, 5)

b) $E(-2, \frac{8}{3})$

c) E(–10, 0'001)

26. Expresseu en forma d'entorn els següents intervals:

a) (4, 7)

b) (–7, –4)

c) (–3, 2)

27. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com un interval de nombres reals? **Pista*: 600,222333€ pot ser un sou?

1.7. Aproximacions i errors

Recordeu que:

Sovint cal fer aproximacions per motius pràctics o treballar amb nombres aproximats ja que per exemple no es coneixen els valors exactes. Així, per exemple, si ens pesem en una bàscula i marca 54’4 Kg, quant pesem exactament? No es pot saber, el màxim que podem dir és que el nostre pes és entre 54’3 i 54’5 si l’error màxim és de 100 g.

Error Absolut

Es defineix Error Absolut (EA) com $EA = |valor\ real - valor\ aproximat|$.

Exemple:

Si aproximem $\pi \approx$ 3’1416 tindrem que EA = $|\pi$ – 3’1416$|$ $\approx$ $|$–00000073$|$ $\approx$ 0’0000073 unes 7 milionèssimes. Observeu que si no es coneix el valor real no podem calcular exactament el valor absolut, però sí aproximar-lo calculant una cota de l’error.

Cota de l’Error Absolut:

Podem conèixer una cota de l’error absolut tenint en compte l’ordre d’aproximació. Així, si hem arrodonit a les deumil·lèssimes (com en l’exemple) sempre podem afirmar que EA $\le$ 0’00005, és a dir, menor o igual que la meitat del valor de la xifra d’arrodoniment o 5 unitats de la següent (5 centmil·lèssimes), que és el mateix.

Activitats resoltes

- *Calcula la cota de l’error absolut de N* $\approx$ 3’7 $\to$ $EA \le$ 0’05. I la cota de l’error de $N \approx$ 300 és $EA \le$ 50 si suposem que hemos arrodonit a les centenes.

Error Relatiu

Per comparar errors de diferents magnituds o nombres es defineix l’Error Relatiu(ER) com:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per parlar del % d’error relatiu.

Si no es coneix el valor real se substitueix pel valor aproximat (la diferència és normalment petita).

Activitats resoltes

- Si aproximem l’arrel de 3 per 1’73, l’error relatiu comès és:

$$\sqrt{3} \approx 1'73 \to EA \approx 0'0021 \to ER = \frac{0'0021}{\sqrt{3}} \approx \frac{0'0021}{1'73} = 0'00121387 \to 0'12\ \%$$

- En les aproximacions A = 7’4 amb $EA \le$ 0’05 i B = 970 amb $EA \le$ 5, en quina estem cometent proporcionalment menys error?

Calculem els error relatius:

$$\text{A} \to ER \le \frac{0'05}{7'4} \approx 0'00675 \to ER \le 0'68\ \%$$

$$\text{B} \to ER \le \frac{5}{970} \approx 0'00515 \to ER \le 0'52\ \%$$

És millor aproximació la de B.

Control de l'error comès

Recordeu que:

En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts. Per tant pot augmentar perillosament si fem diverses sumes i restes.

Els errors relatius se sumen al multiplicar dos nombres.

Activitats resoltes

- Mesurem el radi d'una circumferència amb un regle mil·limetrat i marca 7'0 *cm*. Volem calcular l'àrea del cercle. L'error màxim en el radi és de 0'05 cm i per tant pot estar entre 6'95 i 7'05. Si apliquem la fórmula πr^2 per a aquests valors obtenim 151'7 y 156'1, que són els valors mínim i màxim. La diferència és 4'4 i la seva meitat 2'2 que és la cota de l'error absolut. Diem que A = 153'9 $\pm$ 2'2 cm^2.

$$\text{A} \to ER \le \frac{2'2}{153'9} \approx 0'0143 \to ER \le 1'43\ \%$$

$$r \to ER \le \frac{0'05}{7} \approx 0'00714 \to ER \le 0'71\ \%$$

El radi tenia una cota de 0'71 %, per tant hem perdut precisió.

Si operem amb nombres aproximats, i pitjor encara, si ho fem en repetides ocasions, els errors es van acumulant fins al punt de poder fer-se intolerables.

Activitats proposades

28. Arrodoneix $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a fins les dècimes i troba els errors absolut i relatiu comesos.

29. Troba una fita de l'error absolut en les següents aproximacions:

a) 5'8 b) 417 c) 417'00

30. Una balança té un error en les seves mesures inferior a 40g. Fem servir aquesta balança per elaborar un lot de 5 paquets de cafè de mig quilogram cadascun. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quina és la cota de l'error absolut per al lot?

1.8. Notació científica

Recordeu que:

La notació científica es fa servir per escriure nombre molt grans o molt petits.

Un nombre posat en notació científica ***N* = *a’bcd*...·10*ⁿ*** consta de:

- ✓ Una part entera formada per una sola xifra que no és zero (***a***).
- ✓ La resta de xifres significatives posades com a part decimal (*b c d*...).
- ✓ Una potència de base 10 que dona l’ordre de magnitud del nombre (10^n).

Si *n* es positiu, el nombre *N* és “gran”

Si *n* es negatiu, aleshores *N* és “petit”

Exemples:

- $3'45 \cdot 10^{14}$ (= 345000000000000): Nombre gran.
- $6'789 \cdot 10^{-18}$ (= 0’000000000000000006789): Nombre petit.

Operacions amb notació científica

Recordeu que:

Per operar amb nombres donats en notació científica es procedeix de forma natural, tenint en compte que cada nombre està format per dos factors: l’expressió decimal i la potència de base 10.

- ✓ Per **multiplicar** nombres en notació científica, es multipliquen les parts decimals i se sumen els exponents de la potència de base 10.
- ✓ Per **dividir** nombres en notació científica, es divideixen les parts decimals i es resten els exponents de la potència de base 10.
- ✓ Si cal es multiplica o divideix el nombre resultats per una potència de 10 per deixar amb una sola xifra la part entera.

Exemples:

a) $(3'7 \cdot 10^6) \cdot (4'2 \cdot 10^8) = (3'7 \cdot 4'2) \cdot 10^{6+8} = 15'54 \cdot 10^{14} = 1'554 \cdot 10^{15}$

b) $\dfrac{3'7 \cdot 10^6}{4'2 \cdot 10^{-8}} = \dfrac{3'7}{4'2} \cdot 10^{6-(-8)} = 0'8809 \cdot 10^{14} = 8'809 \cdot 10^{13}$

- ✓ Per **sumar o restar** nombres en notació científica, s’han de posar el nombres amb la mateixa potència de base 10, multiplicant o dividint per potències de base 10.
- ✓ Es treu factor comú la potència de base 10 i després se sumen o resten els nombres decimals quedant un nombre decimal multiplicat per la potència de 10.
- ✓ Finalment si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per deixar a la part entera una sola xifra..

Exemples:

c) $3'7 \cdot 10^9 + 4'2 \cdot 10^{12} = 3'7 \cdot 10^9 + 4200 \cdot 10^9 = (4203'7) \cdot 10^9 = 4'2037 \cdot 10^{12}$

Activitats proposades

31. Calcula i expressa el resultat en notació científica:

a) $(8'91 \cdot 10^{-3}) \cdot (3'67 \cdot 10^{11})$

b) $(4'8 \cdot 10^{-5}) : (6'9 \cdot 10^{-8})$

32. Calcula i expressa el resultat en notació científica:

a) $(5'81 \cdot 10^{-12}) \cdot (4'79 \cdot 10^{9}) + 7'23 \cdot 10^{-4}$

b) $(5'44 \cdot 10^{-7}) : (2'5 \cdot 10^{7}) + 3'1 \cdot 10^{-10}$

MATERIALS PER A L'AULA A INTEF (Banc d'Imatges i Sons)

- ✓ Anàlisi geomètric de la **divisió àuria**. Donat un segment *a* es construeix amb regle i compàs el segment *b* tal que *a/b* estan en proporció àuria.

  183241_am_1.swf

  183241_aa_1.fla

- ✓ Construcció, amb escaire i compàs, d'un **rectangle auri**. Donat un segment *a* es construeix un rectangle auri amb un dels seus costats igual a *a*.

  183279_am_1.swf

  183279_aa_1.fla

- ✓ Construcció, amb escaire i compàs, d'una **espiral àuria**. Donat un rectangle auri es construeixen altres rectangles auris i l'espiral.

  183245_am_1.swf

  183245_aa_1.fla

- ✓ Estudi **auri de la Gioconda** de Leonardo Da Vinci, amb autor José Ángel López Mateos. Sobre el rostre del quadre de la Gioconda es construeixen rectangles auris.

  195440_am_1.swf

  195440_aa_1.fla

2. NOMBRES COMPLEXOS

2.1. Necessitat dels nombres complexos. El nombre i

En el camp real l'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solució. El quadrat d'un nombre real és sempre positiu i al sumar-li 1 és impossible que ens doni 0.

Però si es denomina **i** l'arrel quadrada de –1, aleshores

$\mathbf{i}^2 = -1$, per la qual cosa és una solució de l'esmentada equació.

$$\mathbf{i}^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

Però no només això. Resulta que introduint únicament aquest nou element, es pot demostrar el que es denomina el *Teorema Fonamental de l'Àlgebra*, que va ser demostrat per Gauss (1799), i ensenya que tota equació polinòmica de grau n té exactament n arrels (en el camp complex). Anem doncs a estudiar aquests nombres complexos.

Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855)

2.2. Nombres complexos en forma binòmica. Operacions

Un ***nombre complex*** es defineix com una expressió de la forma:

$$z = x + \mathrm{i}y$$

on x i y són nombres reals.

Aquest tipus d'expressió, $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, s'anomena ***forma binòmica***.

S'anomena ***part real*** de $z = x + \mathrm{i}y$ el nombre real x, que es denota $\mathbf{Re(z)}$, i ***part imaginària*** de $z = x + \mathrm{i}y$, el nombre real y, que es denota $\mathbf{Im(z)}$, per la qual cosa es té que: $z = Re(z) + \mathrm{i}Im(z)$.

El ***conjunt dels nombres complexos*** és, per tant,

$$\mathbf{C} = \{z = x + \mathrm{i}\cdot y;\ x, y \in \Re\};\ \mathrm{Re}(z) = x;\ \mathrm{Im}(z) = y.$$

Aquesta construcció permet considerar els nombres reals com un subconjunt dels nombres complexos, essent ***real*** aquell nombre complex de part imaginària nul·la. Així, els nombres complexos de la forma $z = x + \mathrm{i}\cdot 0$ són nombres reals i es denominen nombre ***imaginaris*** els de la froma $0 + \mathrm{i}\cdot y$, és a dir, amb la part real nul·la.

Dos nombres complexos $z_1 = x + \mathrm{i}y$ i $z_2 = u + \mathrm{i}v$ són ***iguals*** si, i només si, tenen iguals les seves parts reals i les seves parts imaginàries: $x = u$, $y = v$.

Operacions en forma binòmica

Les operacions de suma i producte definides en els nombres reals es poden estendre als nombres complexos. Per a la suma i el producte de dos nombres complexos escrits en forma binòmica: $x + \mathrm{i}y$, $u + \mathrm{i}v$ es tenen en compte les propietats usuals de l'Àlgebra, amb la qual cosa es defineixen:

Suma: $(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) = (x + u) + \mathrm{i}\,(y + v)$

Producte: $(x + \mathrm{i}y)\,(u + \mathrm{i}v) = (x\,u - y\,v) + \mathrm{i}\,(x\cdot v + y\cdot u)$

Es comprova, de nou, que el quadrat del nombre complex i és un nombre real negatiu, –1, ja que:

$$(0 + \mathrm{i}) \cdot (0 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}\cdot(0) = -1.$$

Si els nombres complexos són nombres reals, és adir, nombres complexos amb la seva part imaginària nul·la, aquestes operacions es redueixen a les usuals entre nombre reals ja que:

$$(x + \mathrm{i}0) + (u + \mathrm{i}0) = (x + u) + \mathrm{i}\,(0) \qquad (x + \mathrm{i}\cdot 0)\,(u + \mathrm{i}0) = (x \,\square\, u) + \mathrm{i}\,(0)$$

Això permet considerar el cos de nombres reals $\Re$ como un subconjunt dels nombres complexos, $\boldsymbol{C}$. El conjunt dels nombres complexos també té estructura algebraica de cos.

El ***conjugat*** del nombre complex $z = x + y\mathrm{i}$ es defineix com: $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$.

Activitats resoltes

- *Calcula* $(2 - \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$

Per calcular $(2 - \mathrm{i}) \cdot (1 + 2\mathrm{i})$ es procedeix amb les regles usuals de l'Àlgebra tenint en compte que $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(2 - \mathrm{i})\cdot(1 + 2\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} + 2 = 4 + 3\mathrm{i}.$$

- *El conjugat del nombre complex $z = 3 + 5i$, és* $\bar{z} = 3 - 5\mathrm{i}$.

- *Per dividir nombres complexos es multiplica numerador i denominador pel conjugat del denominador, de manera que s'aconsegueix que el denominador sigui un nombre real:*

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1(1-i)}{1^2-(i)^2} = \frac{2(1-i)}{1-(-1)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i\,.$$

- *Per elevar a potències la unitat imaginària es té en compte que $i^2 = -1$, i per tant:*

$$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4 = 1: \qquad \mathrm{i}^6 = -1, \qquad \mathrm{i}^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{(-i)(i)} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i.$$

- *Calculeu* $(1 + \mathrm{i})^4$.

Utilitzant el binomi de Newton s'obté:

$$(1 + \mathrm{i})^4 = \binom{4}{0} 1^4 + \binom{4}{1}\mathrm{i} + \binom{4}{2}\mathrm{i}^2 + \binom{4}{3}\mathrm{i}^3 + \binom{4}{4}\mathrm{i}^4 = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 1 = -4.$$

Activitats proposades

33. Comproveu que:

a) $(1-\mathrm{i})^4 = -4$

b) $\frac{5+10\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -2$

c) $(1+\mathrm{i})^5 = -4-4\mathrm{i}$

34. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\frac{68}{(1-\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})\cdot(3-\mathrm{i})}$

b) $(2+\mathrm{i}) - \mathrm{i}\,(1-2\mathrm{i})$

c) $\frac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} + \frac{3+\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$

d) $(3-2\mathrm{i})\,(3+2\mathrm{i})$

35. Calculeu: (*Ajuda*: substituïu z per $x + \mathrm{i}y$)

a) $Im\ \frac{\bar{z}}{z}$

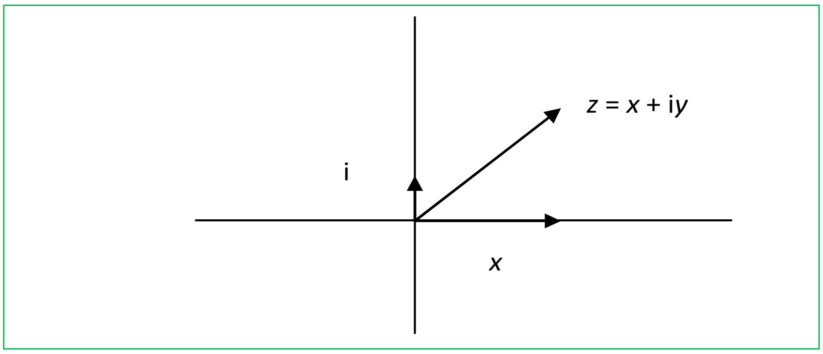
b) $Re(z^4)$

c) $(Re(z))^4$

Representació dels nombres complexos al pla

El desenvolupament modern dels nombres complexos començà amb el descobriment de la seva interpretació geomètrica, que fou exposada indistintament per *John Wallis* (1685) i ja de forma completament satisfactòria per *Caspar Wessel* (1799). El treball de *Wessel* no va rebre cap atenció, i la interpretació geomètrica dels nombres complexos fou redescoberta per *Jean Robert Argand* (1806) i de nou per *Carl Friedrich Gauss* (1831).

El conjunt dels nombres complexos amb les operacions de suma i producte per un nombre real té estructura d'espai vectorial de dimensió dos i és, per tant, isomorf a $\mathfrak{R}^2$. Una base d'aquest espai està formada pel conjunt $\{1, \mathrm{i}\}$.



Igual que els nombres reals representen els punts d'una recta, els nombres complexos poden ser posats en correspondència biunívoca amb els punts d'un pla. Els nombres reals es representen el l'eix d'abscisses o eix real, i els múltiples de $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ se'ls representa com a punts de l'eix imaginari, perpendicular a l'eix real a l'origen. A aquesta representació geomètrica se la coneix com el ***Diagrama d'Argand***. L'eix $y = 0$ es denomina **eix real** i l'$x = 0$,**eix imaginari**.

Com que la condició necessària i suficient per tal que $x + \mathrm{i}y$ coincideixi amb $u + \mathrm{i}v$ és que $x = u$, $y = v$, el conjunt dels nombres complexos s'identifica amb $\mathfrak{R}^2$, i els nombres complexos es poden representar com a punts del "pla complex". El nombre complex $z = x + \mathrm{i}y$ es correspon amb l'abscissa i l'ordenada del punt del pla associat al parell (x , y). A vegades es fa referència al nombre complex z com el punt z i en altres ocasions com el vector z.

La suma de nombres complexos es correspon gràficament amb la suma de vectors. No obstant això, el producte de nombres complexos no és ni el producte escalar de vectors ni el producte vectorial.

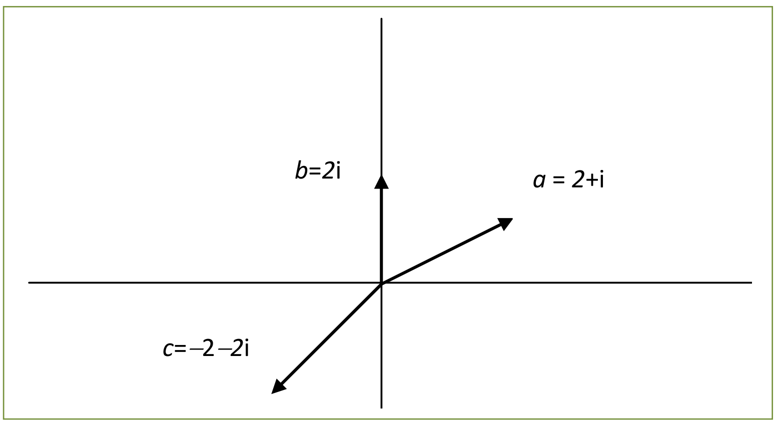
El conjugat de z, $\bar{z}$, és simètric a z respecte l'eix d'abscisses.

Activitats resoltes

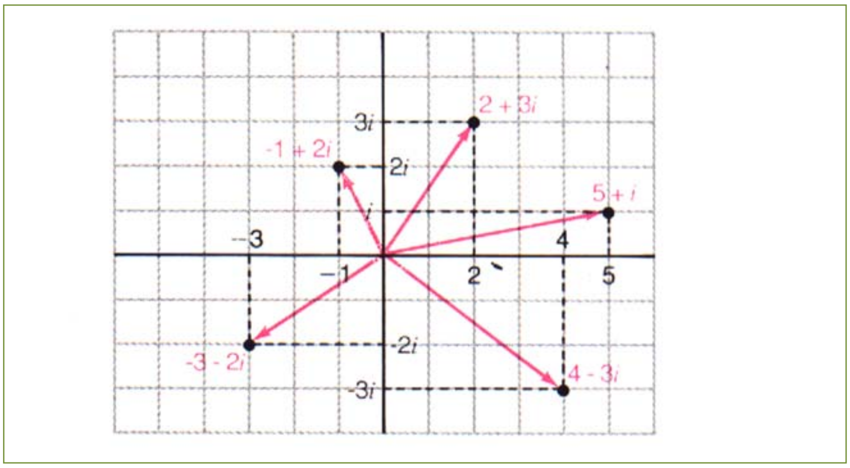
- *Representeu en el pla els nombres complexos:*

  $a = 2 + \mathrm{i}$, $b = 2\mathrm{i}$ i $c = -2 - 2\mathrm{i}$.

Els nombres complexos $a = 2 + \mathrm{i}$, $b = 2\mathrm{i}$ *i* $c = -2 - 2\mathrm{i}$ es representen:



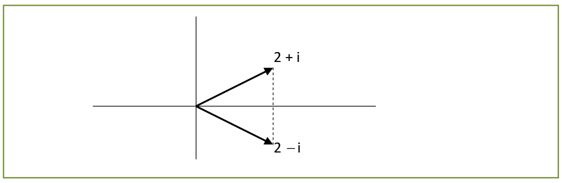
- *Representeu al pla els nombres complexos:* 2 + 3i, –1 + 2i, –3 –2i, 5 + i i 4 – 3i.



- *Representeu el nombre complex conjugat de a = 2 + i.*

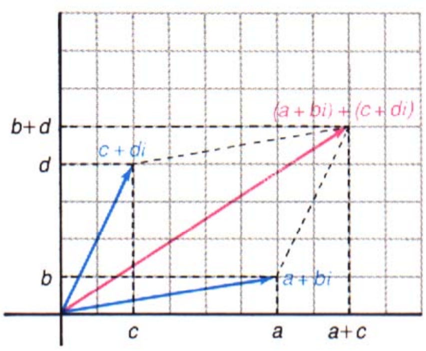
El conjugat de a = 2 + i, 2 – i, es representa:

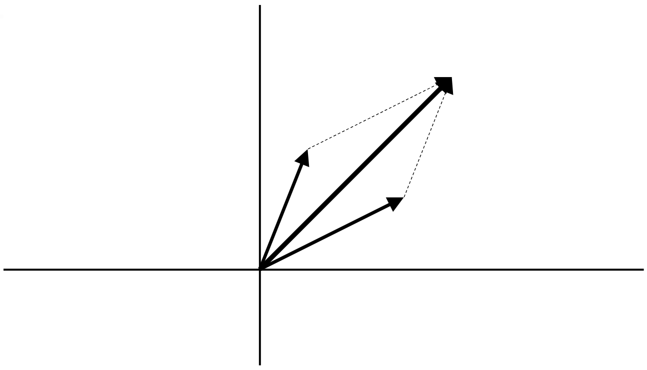
S'observa que és el simètric d'a respecte l'eix d'abscisses.



- *Representeu la suma de dos nombres complexos.*

La suma es representa igual que la suma vectorial. Observeu els dos gràfics inferiors, en la quadrícula la suma de nombres complexos i al costat una suma vectorial.

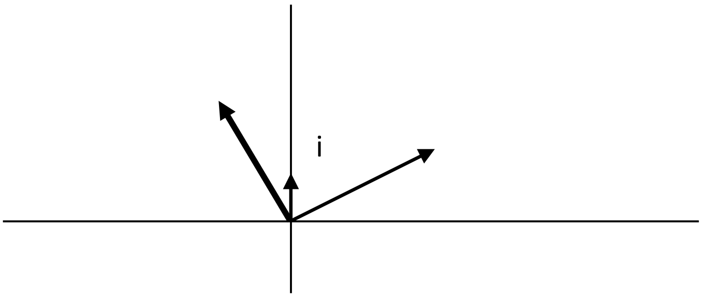




Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Representeu el producte del nombre complex $2 + \mathrm{i}$ *per la unitat imaginària:* i.

El producte de $2 + \mathrm{i}$ per i és igual a $-1 + 2\mathrm{i}$, i al representar-lo s'observa que multiplicar per la unitat imaginària és girar 90º.



Activitats proposades

Per als següents nombres complexos:

$$a = 3\mathrm{i};\ b = -2\mathrm{i};\ c = 5;\ d = 1 + \mathrm{i};\ e = -1 - \mathrm{i}$$

36. Representeu-los gràficament.

37. Representeu gràficament el conjugat de cadascun d'ells.

38. Representeu gràficament les sumes:

$a + b$ $\quad$ $a + c$ $\quad$ $b + d$ $\quad$ $d + e$

39. Representeu gràficament els productes:

$a \cdot \mathrm{i}$ $\quad$ $b \cdot \mathrm{i}$ $\quad$ $c \cdot \mathrm{i}$ $\quad$ $\mathrm{d} \cdot \mathrm{i}$ $\quad$ $e \cdot \mathrm{i}$

Analitzeu el resultat. Comproveu que multiplicar per i suposa girar 90º el nombre complex.

2.3. Forma trigonomètrica dels nombres complexos. Operacions

Mòdul

El ***mòdul*** d'un nombre complex es defineix com $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, i representa la distància de z a l'origen, és a dir, la longitud del vector lliure (x, y) de $\Re^2$.

Per tant, el mòdul no pot ser mai un nombre real negatiu. El mòdul d'un nombre real coincideix amb el seu valor absolut.

Recordeu, l'arrel quadrada (sense signes davant) és sempre positiva.

Encara que no tingui sentit dir si $z_1 < z_2$, llevat que siguin nombres reals, sí té sentit la desigualtat $|z_1| < |z_2|$ i significa que z_1 és més pròxim a l'origen que z_2.

Una altra forma d'expressar el mòdul d'un nombre complex és mitjançant l'expressió $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ on $\bar{z}$ és el conjugat de z, essent el producte d'un nombre pel seu conjugat igual a:

$$(x + \mathrm{i}\cdot y)\cdot(x - \mathrm{i}\cdot y) = x^2 + y^2$$

un nombre real i positiu.

Argument

L'***argument*** d'un nombre complex z, si $z \neq 0$, representa l'angle, en radiants, que forma el vector de posició amb el semieix de les abscisses positives.

És per tant qualsevol nombre real θ tal que *cos* $\theta = \frac{x}{|z|}$, *sin* $\theta = \frac{y}{|z|}$. Es té aleshores que cada nombre complex no nul té una infinitat d'arguments, positius i negatius, que es diferencien entre sí per múltiples enters de 2π.

Si z és igual a zero, el seu mòdul és zero però el seu argument no està definit.

Si es vol evitar la multiplicitat dels arguments es pot seleccionar per a θ un interval semiobert de longitud 2π, la qual cosa s'anomena escollir una branca de l'argument; per exemple, si s'exigeix que $\theta \in (-\pi, \pi]$, (o per a altres autors $[0, 2\pi)$), s'obté l'***argument principal*** de z, que es denota $Arg(z)$. Si z és un nombre real negatiu el seu argument principal val π. A vegades és preferible utilitzar arguments multiavaluats:

$$\boldsymbol{arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}}$$

on $\mathbf{Z}$ representa el conjunt dels nombres enters.

Si es defineix $Arg(z)$ com $arctg(y/x)$ es té una nova ambigüitat, ja que existeixen dos angles en cada interval de longitud 2π dels quals només un és vàlid. Por tot això, les afirmacions amb arguments s'han de fer amb una certa precaució, ja que per exemple l'expressió:

$$arg(z\cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

és certa només si s'interpreten els arguments com a multiavaluats.

Si z és diferent de zero, $\bar{z}$ verifica que $|\bar{z}| = |z|$ i que $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

Propietats del mòdul, del conjugat i de l'argument d'un nombre complex

Algunes propietats del conjugat i del mòdul d'un nombre complex són:

1. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.

2. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.

3. $z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

4. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

6. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

7. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

8. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

S'observa que les desigualtats 7 i 8 són sempre entre nombre reals, no entre complexos, per la qual cosa sí té sentit escriure una desigualtat.

La segona part de la propietat 8 es coneix amb el nom de desigualtat triangular.

Les propietats del mòdul demostren que és una distància a l'espai vectorial $\boldsymbol{C}$.

Forma polar i forma trigonomètrica

Si ρ és igual al mòdul del nombre complex no nul z i θ és un argument de z, aleshores (ρ, θ) són les ***coordenades polars*** del punt z. El nombre complex z en forma polar s'escriu: ρ_θ.

La *conversió* de coordenades polars en cartesianes i viceversa es fa mitjançant les expressions:

$x = \rho \cdot cos\ \theta$, $y = \rho \cdot sen\ \theta$, per la qual cosa $z = x + \mathrm{i}y = \rho \cdot (cos\ \theta + \mathrm{i} \cdot sen\ \theta)$.

Aquesta darrera expressió és vàlida fins i tot si $z = 0$, ja que aleshores $\rho = 0$, i per tant es verifica per a tot θ.

Activitats resoltes

- *Calculeu el mòdul dels següents nombres complexos: –2 + 3i y 4 + i.*

Al calcular $\left|-2+3\mathrm{i}\right| = \sqrt{13}$ y $\left|4+i\right| = \sqrt{17}$ se sap que el primer dista menys de l'origen que el segon.

- *Calculeu l'argument dels següents nombres complexos: 5i, –7i, 3 y –3.*

L'argument principal de 5i és igual a $\frac{\pi}{2}$, el de –7i és $\frac{3\pi}{2}$, el de 3 val 0 y el –3 és π.

- *Escriviu en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument* $\frac{\pi}{3}$.

El nombre complex de mòdul 2 i argument principal $\frac{\pi}{3}$ és $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, ja que:

$$x = 2cos\frac{\pi}{3} = 1 \text{ e } y = 2sen\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

- *Calculeu el mòdul i l'argument de:* –1 – i.

El nombre complex –1 – i té mòdul $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Un dels seus arguments és $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, i el seu argument principal és $\frac{-3\pi}{4}$, per tant

$$arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi.$$

- *Comproveu si es verifica que $Arg(z\cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$.*

Es verifica que $arg(z\cdot w) = arg(z) + arg(w)$ considerant aquests arguments com a conjunts, i en general no es verifica que $Arg(z\cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$, ja que per exemple:

$$Arg((-\mathrm{i})^2) = Arg(-1) = \pi, \text{ mentre que } Arg(-\mathrm{i}) + Arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Activitats proposades

40. Calculeu el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3} - i$ b) –2 – 2i

c) $1 - \sqrt{3}i$ d) –4i

41. Expresseu en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) –i c) 4 + 4i d) –4

2.4. Fórmula de *Moivre*

En aplicar la fórmula obtinguda d'una potència al nombre complex de mòdul u s'obté que:

$(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)$, sigui quin sigui el nombre enter n.

Aquesta expressió, que permet conèixer $\sin(nx)$ o $\cos(nx)$ en funció de $\cos x$ i $\sin x$ desenvolupant la potència mitjançant el binomi de Newton i separant parts reals i imaginàries, es coneix com a *fórmula de Moivre*.

Operacions entre nombres complexos en forma trigonomètrica

Per a ***multiplicar*** nombres complexos expressats en forma trigonomètrica n'hi ha prou amb multiplicar els seus mòduls i sumar els seus arguments:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r\cdot s)_{\alpha+\beta}.$$

La relació entre nombres complexos i transformacions geomètriques, on multiplicar per i correspon a girar 90º, i multiplicar per $a + bi$ és girar l'argument de tal nombre i aplicar una homotècia de raó el seu mòdul, és molt útil en la Mecànica i en altres parts de la Física.

Per ***dividir*** nombres complexos, n'hi ha prou amb dividir els seus mòduls i restar els seus arguments:

$$r_\alpha : s_\beta = (r/s)_{\alpha-\beta}.$$

L'***invers*** d'un nombre complex diferent de zero té, com a mòdul, l'invers del mòdul, i com a argument, l'oposat de l'argument.

Per a elevar un nombre complex a una ***potència***, s'eleva el mòdul a la potència, i es multiplica l'argument per l'exponent:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{\alpha\cdot n}.$$

Per a calcular l'***arrel n-èssima*** d'un nombre complex, $w = \sqrt[n]{z}$, es té en compte que el mòdul r ha de ser igual a $r = \sqrt[n]{\rho}$, però al tenir un nombre complex molts arguments, ara l'argument no és únic, sinó que es tenen *n* arguments diferents, i iguals a $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, on *k* pren els valors des de 0 fins a $n - 1$ abans que els valors comencin a repetir-se.

Per tant, la funció arrel *n*-èssima és una funció multivalorada, amb *n* valors que es poden representar gràficament en els vèrtexs d'un *n*-àgon regular de centre l'origen i radi el mòdul $r = \sqrt[n]{\rho}$, ja que totes les arrels estan situades en la circumferència de radi $r = \sqrt[n]{\rho}$ uniformement espaiades cada $\frac{2\pi}{n}$ radiants.

Com a exemple demostrarem la fórmula del producte de nombres complexos.

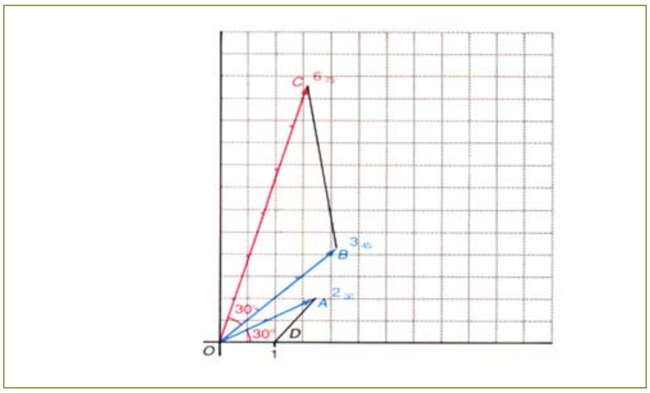
Demostració:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)\cdot r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$$

$$= (\rho\cdot r)\cdot[\cos\theta\cdot\cos\alpha - \sin\theta\cdot\sin\alpha] + i\cdot[\cos\theta\cdot\sin\alpha + \sin\theta\cdot\cos\alpha] = (\rho\cdot r)\cdot(\cos(\theta+\alpha) + i\cdot\sin(\theta+\alpha)).$$

Activitats resoltes

- *Representeu gràficament el producte dels nombres complexos* 2(cos(π/6) + isin(π/6)) i de 3(cos(π/4) + i sin(π/4)).



- *Calculeu:* $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$

Per dividir $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ es poden escriure els nombres complexos en forma polar i dividir els mòduls i restar els arguments. El mòdul de –2 és 2 i el seu argument és π. El mòdul de $1+\sqrt{3}i$ és 2 i el seu argument és π/3. Per tant el mòdul del quocient és 1 i el seu argument és π – π/3 =2π/3. El nombre complex de mòdul 1 i argument 2π/3 escrit en forma binòmica és:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dir que el seu mòdul és 1 és dir que és sobre la circumferència de centre l'origen i radi 1.

- *Calculeu:* $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$

Per a calcular una potència, en general és molt més senzill fer servir la forma polar enlloc d'aplicar la fórmula del binomi de Newton. per exemple, si es vol calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$, és molt més pràctic calcular el mòdul i l'argument de $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$ que ja sabem de l'activitat anterior que és: 1 i 2π/3, per la qual cosa elevem 1 a la potència 60 i obtenim 1, i multipliquem 2π/3 per 60 i obtenim 40π. Escrivim en forma binòmica el nombre complex de mòdul 1 i un argument que és múltiple de 2π, pel que la solució és 1.

- *Calculeu l'arrel cúbica de* –1.

Per a calcular una arrel n-èssima s'ha de recordar que es tenen *n* arrels diferents:

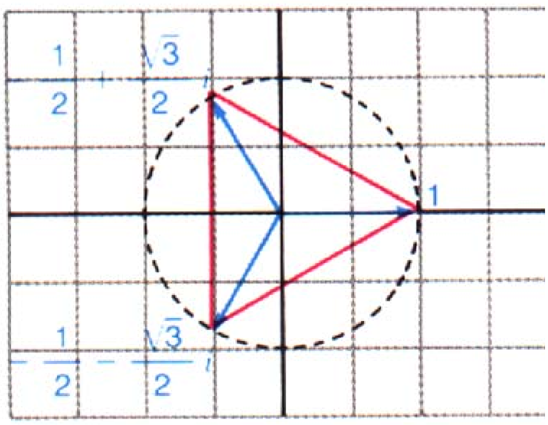
$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_\pi} = \begin{cases} 1_{\pi/3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}} = 1_\pi = -1 \\ 1_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\pi}{3}} = 1_{5\pi/3} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

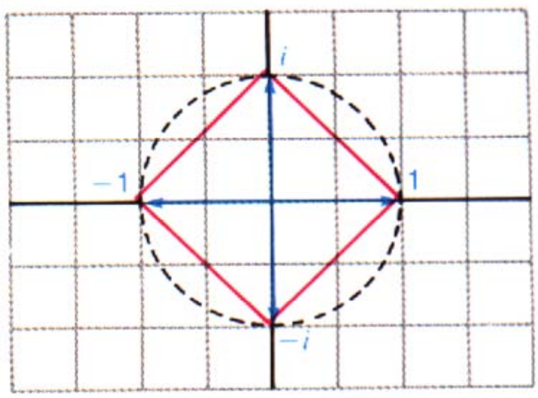
- *Resoleu* $z^3 = -1$.

Això permet resoldre equacions. Així, les solucions de l'equació cúbica $z^3 = -1$ són tres:

l'arrel real –1, i les arrels complexes conjugades: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- *Representeu gràficament les arrels cúbiques i quartes de la unitat.*





Activitats proposades

42. Comproveu els resultats següents:

a) $(1 + \mathrm{i})^{16} = 2^8 = 256$.

$$b)\ \sqrt[3]{27i} = \begin{Bmatrix} 3_{\pi/6} \\ 3_{5\pi/6} \\ 3_{9\pi/6} \end{Bmatrix}$$

43. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma exponencial:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{30}$

44. Resoleu les següents equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

45. Calculeu les arrels *n*-èssimes de la unitat, per a $n = 2$, 3 y 4. Representeu-les gràficament i comproveu que són sobre la circumferència de radi 1, i en els vèrtexs d'un polígon regular.

MATERIALS PER A L'AULA A INTEF (Banc d'imatges i sons)

- ✓ Interpretació geomètrica de la **suma** de nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representen gràficament els nombres complexos 6 + 2i i –1 + 4i, se sumen gràficament i es comprova que les coordenades del nombre complex suma són la suma de les coordenades. 183287_am_1.swf 183287_aa_1.fla
- ✓ Interpretació geomètrica de la **diferència** de nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representen gràficament els nombres complexos 6 + 2i i 1 + 4i, s'obté gràficament l'oposat del segon i se suma amb el primer. Es comprova que les coordenades del nombre complex diferència són la diferència de les coordenades.
183240_am_1.swf 183240_aa_1.fla
- ✓ Interpretació geomètrica dels nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representa gràficament el nombre complex 4 + 3i i s'obté el seu mòdul i el seu **argument.**
183264_am_1.swf 183264_aa_1.fla
- ✓ **Producte d'un nombre complex per la unitat imaginària i**, d'autor José Ángel López Mateos. Es multiplica el nombre complex 4 + 2i per i de forma gràfica i es comprova que suposa girar el nombre complex 90º.
185441_am_1.swf 185441_aa_1.fla
- ✓ Producte de diversos nombres complexos per la unitat imaginària i, d'autor José Ángel López Mateos. Es multipliquen els nombres complexos s 6 + 3i, 3 + 3i i 3 + 6i que formen un triangle, per i de forma gràfica i es comprova que suposa girar aquests nombres complexos 90º.
185437_am_1.swf 185437_aa_1.fla

CURIOSITATS. REVISTA

Nombres complexos

Gauss

Nombres imaginaris

Un miracle de les Matemàtiques

Stiillwell

Nombres impossibles

Una espècie d'amfibi entre l'ésser i el no-res

Monstre

Euler

Resoldre l'equació $x^2 + 1 = 0$ és impossible

Totes les equacions polinòmiques de grau *n* tenen exactament *n* arrels en el camp complex.

Teorema Fonamental de l'Àlgebra

Un acudit

- Em diuen que el número de telèfon no existeix, que és imaginari.

- Intenta girar 90º el telèfon.

L'has entès? Els acudits no s'expliquen, però com que és un acudit matemàtic…

Pensa en un nombre imaginari, per exemple, –2i. Si el gires 90º es converteix en 2, i ja és real.

La resolució de la paradoxa de $\sqrt{-1}$ *fou molt poderosa, inesperada i bella per la qual cosa únicament la paraula "miracle" sembla adequada per descriure-la.*

Stillwel

Utilitat

Els nombres complexos i la variable complexa s'utilitza per estudiar electricitat, magnetisme i en la teoria del potencial, entre molts d'altres camps

Una fórmula meravellosa

En l'Exposició Universal de París de 1937, la mateixa per a la qual Picasso pintà el guernica, a l'entrada del pavelló de Matemàtiques hi havia un enorme cartell que deia:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una igualtat que relaciona nombres com el 0 i l'1, amb nombres irracionals com e i π, i amb el nombre complex i.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Vols saber d'on surt?

Euler expressà, mitjançant la fórmula que porta el seu nom, que:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}.$$

Ja coneixes que un nombre complex de mòdul *m* i argument α s'escriu de forma trigonomètrica com: $m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, i per tant utilitzant la fórmula d' *Euler* s'obté la seva **expressió exponencial**:

$$m(\cos\alpha + i\sin\alpha) = me^{i\alpha}.$$

El nombre -1 té mòdul 1 i argumento π, i per tant la seva expressió exponencial és:

$$-1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una mica d'història dels nombres complexos

El desenvolupament de les Matemàtiques està íntimament relacionat amb la història del nombre. Com que el producte d'un nombre real per si mateix és sempre positiu és clar que es necessita ampliar el camp numèric per donar solució a determinades equacions.

Els nombres complexos es comencen a utilitzar per obtenir solucions d'equacions algebraiques i culminen, en aquest sentit, quan es demostra el teorema fonamental de l'Àlgebra.

Usualment es diu que els nombres complexos neixen de la necessitat de resoldre l'equació quadràtica $x^2 + 1 = 0$, amb la dificultat que no té sentit geomètric que un quadrat tingui àrea negativa. No obstant això, no és del tot cert.

Moltes equacions quadràtiques, com cercles o paràboles, estan ja implícites en la geometria dels **grecs** i aleshores es va analitzar si tenia o no solució real, per exemple, la intersecció d'una recta amb aquestes figures.

Els **babilonis**, cap a l'any 2000 abans de Crist, coneixien el mètode per resoldre equacions quadràtiques, i *Heró d'Alexandria* (100 a. C.) va utilitzar $\sqrt{-63}$, encara que algebraicament, sense preguntar-se pel seu significat, ja que en aquells temps no s'especulava sobre la natura de les arrels imaginàries.

No obstant això quan el 1545 *Girolamo Cardano* va escriure:

$$40 = (5 + \sqrt{-15})\cdot(5 - \sqrt{-15})$$

aquests nombres van ser considerats sense sentit i se'ls va aplicar el qualificatiu de *"imaginaris"*.

Fins i tot quan apareixen les equacions quadràtiques, amb *Diofant* o els àrabs, no hi ha raó per admetre que no tinguin solució.

Es necessiten quan *Del Ferro, Tartaglia* i *Cardano* intenten resoldre l'equació cúbica $x^3 = p \cdot x + q$ en la fórmula de la qual apareixen nombres complexos (quan $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) i no obstant això té sempre una solució real.

Bombelli el 1572 va treballar formalment amb l'àlgebra dels nombres complexos i implícitament va introduir les funcions complexes, encara que malgrat això els nombres complexos encara van ser considerats com a impossibles.

Al final del sigle XVIII ja es tenia una gran mestria en la manipulació dels nombres complexos i això no obstant no es tenia la noció d'un nombre complex com un parell de nombres reals format per la seva part real i la seva part imaginària.

C. Wessel, el 1799, associà tot nombre complex amb un vector del pla amb origen en *O*, i reinterpretà amb aquests vectors les operacions elementals dels nombres complexos. *R. Argand* el 1806 interpretà geomètricament els nombres complexos. El nombre i, per exemple, el va representar com una rotació d'angle recte al voltant de l'origen. A partir d'aquesta interpretació van començar a usar-se sense dificultats aquests nombres.

RESUM

Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i dels nombres irracionals	5, –4, 2/3, 7'5, π, e, Φ...
Densitat dels Nombres Reals	El conjunt dels nombres reals és dens, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres.	Entre 0 i 1 calculat el punt mitjà obtenim infinits punts: 0, 0'5, 0'25, 0'125, 0'0625,..., 1
Valor absolut	$\|x\| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	|–32| = 32 = |+32|
Distància a la recta real	Dist(*x*, *y*) = |*x* – y|	Dist(3, 8) = |8 – 3| = 5. Dist(–2, –9) = |–9 – (–2)| = |–9 + 2)| = |–7| = 7
Intervals	Obert : $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ Tancat: $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$ Semiobert (esquerra): $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\}$ Semiobert (dreta): $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Entorns	És una forma particular d'expressar els intervals oberts. Es defineix com el conjunt de nombres que són a un distància de *a* menor que *r*: E(*a* , *r*)	*E*(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)
El nombre i	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
Forma binòmica	$z = x + i \cdot y$	
Suma de complexos	$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i \cdot (y + v)$	(2 + 3 i) + (4 + 5i) = 6 + 8i
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (u + iv) = (x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u)$	$(2 - i)\cdot(1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
División de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel conjugat del denominador. Així s'aconsegueix que el denominador sigui un nombre real.	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma trigonomètrica	$z = r\,(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$	$z = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$
Producte de complexos	Es multipliquen els seus mòduls i se sumen els seus arguments	$z\cdot z = 4\cdot(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$
Divisió de complexos	Es divideixen els seus mòduls i es resten els seus arguments	$z/z = 1\cdot(\cos 0 + i\cdot\sin 0) = 1$
Fórmula de Moivre	$(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Nombres reals

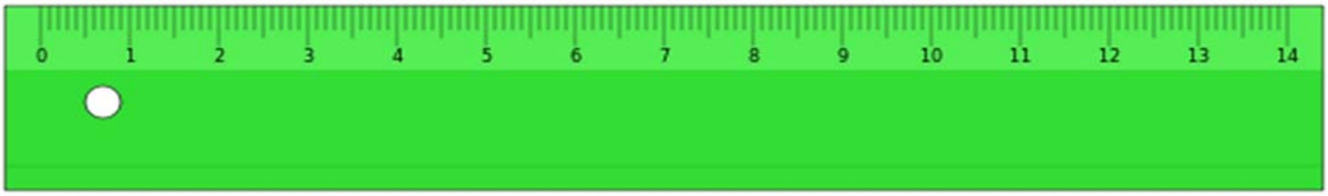
1. Calculeu els valors exactes de $a + b$, $c - a$ i $a \cdot c$ per als nombres: (pista: racionalitzar)

$a = 2'7$ $\quad$ $b = 3'292929...$ $\quad$ $c = 0'01030303...$

2. Esbrineu quin d'aquests nombres és irracional:

a) 3’1416 $\quad$ b) $\sqrt{4}$ $\quad$ c) π

3. Podem trobar nombres irracionals en les marques d'una regla graduada? Hi ha algun punt de la regla (encara que no tingui marca) que es correspongui amb un nombre irracional? Justifiqueu la vostra resposta.



4. Classifiqueu els següents nombres en ordre de major a menor i després representeu-los a la recta:

a) 7 $\quad$ b) 25/4 $\quad$ c) $\sqrt{45}$ $\quad$ d) $2\cdot\pi$

5. Escriviu una successió infinita de nombres reals dins de l'interval (−1, 1).

6. Calculeu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|-5|$ $\quad$ b) $|4 - 4|$ $\quad$ c) $|3\cdot2+9|$ $\quad$ d) $\sqrt{7}$ $\quad$ e) $\sqrt{7^2}$

7. Calculeu x en les següents equacions: (*pista*: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ $\quad$ b) $|x - 4| = 0$ $\quad$ c) $|3x + 9| = 21$

8. Dibuixeu les següents funcions en un gràfic:

a) $f(x) = |x| - 5$ $\quad$ b) $f(x) = |x - 4|$ $\quad$ c) $f(x) = |3x + 9|$

9. Trieu un dia i calculeu la distància que heu recorregut en total, i compareu-la amb la distància entre els punts inicial (al principi del dia) i final (en acabar el dia).

10. Un artesà fabrica dos productes. El primer (a) li costa 2 hores i 3 euros en material, i el segon (b) li costa 6 hores i 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de treball, i els ven per (a) 30 i (b) 90 euros, esbrineu quin és més rendible per al seu negoci.

11. Entre Kroflite i Beeline hi ha altres cinc ciutats. Les set es troben al llarg d'una carretera recta, separades unes d'altres per una distància entera de quilòmetres. Les ciutats es troben espaiades de tal manera que si un coneix la distància que una persona ha recorregut entre dues d'elles, pot identificar-les sens dubte. Quin és la distància mínima entre Kroflite i Beeline perquè això sigui possible?

12. Representeu a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ $\quad$ b) $|x| \le 1$ $\quad$ c) $|x| > 1$ $\quad$ d) $|x| \ge 1$

13. Trobeu dos nombres que distin 6 unitats de 3, i uns altres dos que distin 3,5 unitats de −2, calculeu després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

14. Escriviu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

15. Escriviu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x - 8| \leq 3$.

16. Determineu els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $-A$ en els casos següents:

a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$

b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

Nombres complexos

17. Comproveu si: a) $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$. b) $|\cos\alpha + i sen\,\alpha| = |e^{i\theta}| = 1$.

18. Calculeu: a) $(2 + i)^5$ b) $\frac{13}{|2-3i|}$ c) $\frac{(3 + 2i)^2}{(2 + 3i)^3}$ d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$ e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$ g) $(\sqrt{3} + i)^{?9}$.

19. Demostreu que z és real si i només si $z = \bar{z}$.

20. Verifiqueu que l'invers de z , z^{-1}, és igual a = $\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ $\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calculeu l'invers de $2 + 3i$.

21. Calculeu el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3 + 3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3 - 3i$.

22. Expresseu en forma polar i trigonomètrica els següents nombres complexos:

a) $5i$

b) $-7i$

c) $5 - 5i$

d) $\sqrt{3} + i$.

23. Expresseu en forma binòmica els següents nombres complexos en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\pi/3$

b) De mòdul 3 i argument $-\pi/4$

c) De mòdul 1 i argument $\pi/2$

d) De mòdul 5 i argument $2\pi/3$

24. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma trigonomètrica:

a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$

b) $(4 - 4i)^{-11}$

c) $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{12}}{(-2 - 2i)^8}$.

25. Utilitzeu la fórmula de Moivre per expressar en funció de sin α i *cos* α:

a) *cos* 2α

b) *sin* 2α

c) *cos* 3α

d) *sin* 3 α.

26. Calculeu l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\frac{-3}{\sqrt{3}+i}$

b) $\frac{-i}{1-i}$

c) $(1 - i\sqrt{3})^7$.

27. Calculeu, representeu en el pla complex i escriviu en forma binòmica:

a) $\sqrt{-3i}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[4]{-81}$.

28. Resoleu les equacions:

a) $x^3 = -27$.

b) $x^4 = -81$.

c) $x^5 - 32 = 0$.

d) $x^3 - 8 = 0$.

29. Calculeu tots els valors de z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$.

b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

30. Calculeu les arrels cinquenes de la unitat i representeu-les en el pla. Calculeu també les arrels cinquenes de –1, representeu-les també. Generalitzeu aquest resultat.

31. Calculeu les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitzeu-les per factoritzar $z^4 + 9$ en dos polinomis quadràtics amb coeficients reals.

32. Resoleu l'equació: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

33. Calculeu *a* per tal que el nombre complex $\frac{a+i}{3-i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyaleu quin dels següents nombres és irracional:

a) 6’3333333….. b) 7/3 c) i d) 5’98234234234….

2. La solució de l'equació $|3x + 9| = 21$ és:

a) $x = 10, x = -4$ b) $x = 10$ c) $x = -10, x = 4$ d) $x = -4$

3. Determineu el conjunt A – B si A = [–11, 9]; B = (–1, 6):

a) $[-11, -1) \cup [6, 9]$ b) $[-11, -1) \cup (6, 9]$ c) $[-11, -1] \cup (6, 9]$ d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$

4. Calculeu $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

a) –46 + 9i b) 62 + 63i c) –46 + 63i d) 62 + 9i

5. Resoleu l'equació $x^4 = 1$.

a) $x = 1$ b) $x = 1, x = -1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1, x = \pm i$

6. Expresseu en forma binòmica el següent nombre complex de mòdul 2 i argument π/3

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}\,i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2\, i$

7. Calculeu $(1 + i)^6$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ b) –8 c) 1 – i d) –8i

8. Expresseu en forma trigonomètrica el següent nombre complex 5i:

a) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ b) $(5, \pi/2)$ c) $5(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$ d) $5(\sin(90º)+i\cos(90º))$

9. Calculeu el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex –3 + 3i:

a) 18, 135º b) $3\sqrt{2}$, 3π/4 c) $3\sqrt{2}$, 7π/4 d) 3, 5π/4

10. Calculeu: $x = \sqrt{-1}$

a) $x = i$ b) $x = -i$ c) $x = i, x = -i$ d) No té solució