Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\begin{cases} \mathbf{-x+2y-5z=-3} \\ \mathbf{2x-3y+z=3} \\ \mathbf{-5x+2y-5z=-4} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2E1+E2 \\ -5E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ y-9z=-3 \\ -8y+20z=11 \end{cases} \rightarrow$

$(8E2+E3) \rightarrow \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ y-9z=-3 \\ -52z=-13 \end{cases}$; $z=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

$y-9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=-3$; $y=-3+\frac{9}{4}=-\frac{3}{4}$

$-x+2\left(-\frac{3}{4}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)=-3$; $-x-\frac{11}{4}=-3$; $x=\frac{1}{4}$

$\mathbf{x=\frac{1}{4}}$ $\quad$ $\mathbf{y=-\frac{3}{4}}$ $\quad$ $\mathbf{z=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x-2y+3z=-14} \\ \boldsymbol{-x+3y-z=10} \\ \boldsymbol{2x-y+6z=-22} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1+E2 \\ -2E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ y+2z=-4 \\ 3y \quad =6 \end{cases}$

$3y=6$; $\boldsymbol{y=\frac{6}{3}=2}$ $\quad$ $2+2z=-4$; $2z=-6$; $\boldsymbol{z=-\frac{6}{2}=-3}$

$x-2\cdot(2)+3\cdot(-3)=-14$; $x=\ -14+4+9$; $\boldsymbol{x=-1}$

$\mathbf{x=-1}$ $\quad$ $\mathbf{y=2}$ $\quad$ $\mathbf{z=-3}$

c) $\begin{cases} \mathbf{-x+3y-z=6} \\ \mathbf{3x-y+4z=7} \\ \mathbf{2x+6y-z=-9} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3E1+E2 \\ 2E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -x+3y-z=6 \\ 8y+z=25 \\ 12y-3z=9 \end{cases} \ 3E2+E3 \rightarrow \begin{cases} -x+3y-z=6 \\ 8y+z=25 \\ 36y \quad =84 \end{cases}$

$\mathbf{y}=\frac{84}{36}=\mathbf{\frac{7}{3}}$; $\quad 8\cdot\left(\frac{7}{3}\right)+z=25$; $\mathbf{z}=25-\frac{56}{3}=\mathbf{\frac{19}{3}}$

$-x+3\frac{7}{3}-\frac{19}{3}=6$; $-x=6-7+\frac{19}{3}$; $\mathbf{x=\ -\frac{16}{3}}$

$\mathbf{x=-\frac{16}{3}}$ $\quad$ $\mathbf{y=\frac{7}{3}}$ $\quad$ $\mathbf{z=\frac{19}{3}}$

d) $\begin{cases} \boldsymbol{x-9y+5z=33} \\ \boldsymbol{x+3y-z=-9} \\ \boldsymbol{x-y+z=5} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -E1+E2 \\ -E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ 12y-6z=-42 \\ 8y-4z=-28 \end{cases} \rightarrow$

$8E2-12E3 \ \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ 12y-6z=-42 \\ 0=0 \end{cases}$ $\quad$ *Sistema Compatible Indeterminado*

Simplificamos la segunda ecuación e igualamos z a t; z = t.

$\begin{cases} x-9y+5t=33 \\ 2y-t=-7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-9y=33-5t \\ 2y=-7+t \end{cases}$; $y=\frac{-7+t}{2}$ $\quad$ $x=33-5t+9\left(\frac{-7+t}{2}\right)=\frac{3-t}{2}$

$$\mathbf{x = \frac{3-t}{2}} \ ; \qquad \mathbf{y = \frac{-7+t}{2}} \ ; \qquad \mathbf{z = t}$$

2.-Dados los sistemas siguientes

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer
b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} \mathbf{-4x+3y=-5} \\ \mathbf{3x-4y=2} \end{cases}$; $\begin{pmatrix} -4 & 3 & \vdots & -5 \\ 3 & -4 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 16-9 = 7 \neq 0$

$$AdjA = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \to traspuesta \to \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7} \end{pmatrix} \to X = A^{-1}\cdot B \ \to \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = \mathbf{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{7}{7} = \mathbf{1}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{-2x-y=-4y} \\ \boldsymbol{5+2y=3x} \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -3x+2y=-5 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 0 \\ -3 & 2 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \quad \to |A| = 13$

Adj A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to traspuesta \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \ A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \quad X = A^{-1}\cdot B$

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{15}{13}} \\ \mathbf{\frac{-10}{13}} \end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{13} = \mathbf{\frac{15}{13}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{13} = \mathbf{\frac{-10}{13}}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{y+2z=-3} \\ \boldsymbol{2x+y=3} \\ \boldsymbol{x+3y-4z=3} \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \to \ |A| = 12-(2-8) = 18$

Adj A = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 5 \\ 10 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to (AdjA)^t \to \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 10 & -2\\ 8 & -2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B \rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Cramer: $X=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12+18-(6-12)}{18}=\frac{36}{18}=\mathbf{2}$ $\quad y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12-(6+24)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}}{18}=\frac{-18+3-(-3+6)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$$

3.- Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}-2x+y=-3\\ 6x-3y=9\end{cases}$ usamos el método de reducción: $3F_1=F_1'$

$\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 6x-3y=9\end{cases}$ sumamos las ecuaciones $\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 0=0\end{cases}$

hacemos $\mathbf{x=t}$, $\mathbf{y}=\frac{-9+6t}{3}=\mathbf{-3++2t}$

b) $\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -2x+3y=-3\end{cases}$ usamos el método de reducción: $-2F_2=F_2'$

$\begin{cases}-4x-6y=-6\\ 4x-6y=+6\end{cases}$ $\quad\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -12y=0\end{cases}$ $\quad\mathbf{y=0}$ $\quad -4x=-6;$ $\quad\mathbf{x}=\frac{6}{4}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

c) $\begin{cases}3x-2y=-2\\ 9x-6y=6\\ 6x+4y=3\end{cases}$ $\quad\begin{matrix}-3F_1+F_2=F_2'\\ -2F_1+F_3=F_3'\end{matrix}$ $\quad\begin{cases}3x-2y=-2\\ \mathbf{0=12}\\ 8y=7\end{cases}$

No es posible resolver este sistema ya que es incompatible

4.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible la regla de Cramer:

$\boldsymbol{a)}\begin{cases}\boldsymbol{-x-2y+3z=6}\\ \boldsymbol{3x-4y+2z=7}\\ \boldsymbol{4x+y-z=-1}\end{cases}$ $\quad\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & 3 & 6\\ 3 & -4 & 2 & 7\\ 4 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$ $\quad |A|=33$

$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2 & 3\\ 7 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 6 & 3\\ 3 & 7 & 2\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=-\frac{22}{33}=-\frac{2}{3};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -2 & 6\\ 3 & -4 & 7\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}}{33}=\frac{55}{22}=\frac{5}{2}$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3};y=-\frac{2}{3};z=\frac{5}{2}}$$

$$b)\begin{cases}2x-3y+z=-29\\ 3x+y-5z=21\\ -x+2y-4z=32\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & -29\\ 3 & 1 & -5 & 21\\ -1 & 2 & -4 & 32\end{array}\right)\qquad |B|=-32$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-29 & -3 & 1\\ 21 & 1 & -5\\ 32 & 2 & -4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{64}{-32}=-2;\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -29 & 1\\ 3 & 21 & -5\\ -1 & 32 & -4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{-224}{-32}=7;\ z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3 & -29\\ 3 & 1 & 21\\ -1 & 2 & 32\end{vmatrix}}{-32}=\frac{128}{-32}=-4$$

$$\boldsymbol{x=-2;\ y=7;\ z=-4}$$

$$c)\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y-4z=9\\ x-y+z=-1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 9\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)\qquad |C|=-12$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & 3 & -4\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 9 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 9\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{12}{-12}=-1$$

$$\boldsymbol{x=1;\ y=1;\ z=-1}$$

$$d)\begin{cases}3x+2y+z=1\\ 5x+3y+4z=2\\ x+y-z=1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\qquad |D|=-1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{4}{-1}=-4;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-6}{-1}=6;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\boldsymbol{x=-4;\ y=6;\ z=1}$$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

$$\text{a) }\begin{cases}2x+3y-4z=1\\ 4x+6y-az=2\\ x+y+az=10\end{cases}\qquad \text{b) }\begin{cases}5x+4y+2z=0\\ 2x+3y+z=0\\ 4x-y+m^2z=m-1\end{cases}$$

a) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 4 & 6 & -a\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=-a+8\ \rightarrow\ -a+8=0,\quad a=8$

1. *Para* $a\neq 8$ *es un SCD*

$$|A_x|=-2a+248\qquad |A_y|=19a-152\qquad |A_z|=0\qquad |A|=(-8+a)$$

$$\mathbf{x=\frac{248-a}{8-a}\ ,\ \ y=\frac{19a-152}{8-a}\ ,\ \ z=0}$$

2. *Para* $a=8$

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0\ ,\ \ R(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0\,, R(A^*) = 2;\; R(A) = R(A^*) < Nº\ de\ incognitas\ es\ un\ SCI$$

Suprimimos la 2ª ecuación que es doble de la primera y hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ x + y = 10 - 8\lambda \end{matrix} \quad E1 - 2E2 \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ y = -19 + 20\lambda \end{matrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando x obtenemos

$$\boldsymbol{x = 29 - 28\lambda\,, \qquad y = -19 + 20\lambda\ , \qquad z = \lambda}$$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - 1 \to m^2 - 1 = 0\,,\;\; m = \pm 1$

1. Para $\mathrm{m} \neq 1$ y $\mathrm{m} \neq -1$ $\mathrm{R(A) = 3}$ y por tanto es un $\mathbf{S.C.D.}$

$$|A_x| = -2(m-1) \quad |A_y| = (m-1) \quad |A_z| = 7(m-1) \quad |A| = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$\mathbf{x} = \frac{-2(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{m+1}}\ ;\ \mathbf{y} = \frac{(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m+1}}\ ;\ \mathbf{z} = \frac{7(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{m+1}}$$

2. para $\mathrm{m} = 1$

$\mathrm{R(A) = 2; R(A^*) = 2 \to\ R(A) = R(A^*) <}$ Nº de incognitas es un $\mathbf{S.C.I.}$

Cogemos dos ecuaciones $\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ hacemos $\mathbf{z = \lambda}$ $\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 2x + 3y = -\lambda \end{cases}$ -2F1+5F2

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 7y = -\lambda \end{cases} \;;\quad \mathbf{y = -\tfrac{1}{7}\lambda} \quad;\quad \mathbf{x = -\tfrac{2}{7}\lambda}$$

3. para $\mathrm{m} = -1$

$\to \mathrm{R(A) \neq R(A^*)}$ es un $\mathbf{S.I.}$

6. – Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x + (a-1)y - z = 3 \\ ax - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a = -1$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (a^2 + 2a + 1) - (-a^2 + a) = a(-a-1)$

$$a(-a-1) = 0; \quad a = 0; \quad a = -1$$

1. **Si** $\mathbf{a \neq 0}$ **y** $\mathbf{a \neq -1}$. El determinante será $\neq 0 \rightarrow \mathrm{r(A)} = 3$ **SCD**

2. **Si** $\mathbf{a = -1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \mathrm{R(A^*)} = 2 \quad \text{Como el } \mathrm{R(A)} = \mathrm{R(A)^*} < \text{Nº de incógnitas es un } \mathbf{SCI}$$

3. $\boldsymbol{Si\ a = 0}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\ ;\ \mathrm{R(A^*)} = 3\ ; \quad \text{Como el } \mathrm{R(A)} \neq \mathrm{R(A)^*} \text{es un } \mathbf{SI}$$

b) Nos quedamos con 2 ecuaciones $\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 1 - \lambda \end{cases} \quad E1 + E2 \quad \begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ -2y = 4 - 2\lambda \end{cases}; \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad x = -1$$

$$\boldsymbol{x = -1 \quad , \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad z = \lambda}$$

7. Dadas las ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{6x - 9y + 2z = 5} \\ \boldsymbol{2x - 3y + z = 4} \end{cases}$ **se pide:**

a) Añade una ecuación para que resulte un sistema incompatible.

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Rg(A) < 3 $\quad \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -3 Rg (A) = 2 $\quad \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$= 12 Rg(A*) =3

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

b) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \ \ Sistema\ compatible\ determinado$$

8. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-z=-2} \\ \mathbf{x+2y+2z=1} \end{cases}$ **se pide**

a) Discútelo y resuélvelo cuando sea posible

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$

Rg (A) = Rg (A*) = 2 < nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado ∞ soluciones

Z=λ $\begin{cases} 2x+3y-\lambda=-2 \\ x+2y+2\lambda=1 \end{cases} \to \begin{matrix} 2x+3y=-2+\lambda \\ x+2y=1-2\lambda \end{matrix}$

X=$\dfrac{\begin{vmatrix} -2+\lambda & 3 \\ 1-2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{1} = (-4+2\lambda)-(3-6\lambda) = -7+8\lambda$

y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -2+\lambda \\ 1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{1} = (2-4\lambda)-(-2+\lambda) = 4-5\lambda$

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución

$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ z=1 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$

Rg (A) = Rg (A*) = S.C.D

ii) Muchas soluciones

(Añadimos una ecuación que sea la combinación de las otras dos para no añadir información)

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+5y+z=-1 \end{matrix}$$

iii) no tenga solución

$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Rg(A) < 3 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 Rg (A) = 2 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$= 12 Rg(A*) =3

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

9. Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to 2F_1+F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to$

$-3F_1+F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to -F_2+F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow F_1+F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -F_2+F_3 \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow S.C.I.\ hacemos\ t=z \begin{cases} 2x-y=-3t \\ 2y=t \end{cases}$

$y=\frac{t}{2}$; $2x=y-3t=\frac{t}{2}-3t=-\frac{5t}{2}$; $x=-\frac{5t}{4}$ $\boldsymbol{x=-\frac{5t}{4}}$, $\boldsymbol{y=\frac{t}{2}}$, $\boldsymbol{z=t}$

c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-y+3z=0 \\ x-x-2y-2z=0 \\ x-2y-2z-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ -2y+z=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow -F_1+$

$F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

10. Sean las matrices:

$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}, E\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}}.$

a) Calcula cada uno de los tres productos $\boldsymbol{A\cdot B, E\cdot D, D\cdot E}$;

$A\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}$

$E\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} = (3x+16x) = (19x)$

$D\cdot E = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$

b) Si C-2AB=-D plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

$\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y-2-2(x-y)=-3x \\ m-2(x-my)=-4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-2-2x+2y+3y=0 \\ m-2x+2my+4x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+2my=-m \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2m & -m \end{array}\right) \rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2m \end{vmatrix} = 2\text{m}-6 \quad \rightarrow si\ 2m-6=0 \rightarrow m=\frac{6}{2}=3$

1. Para $m=3$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{array}\right)$ $-2F_1+F_2$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$ El sistema es Incompatible.

11. Sean las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\mathbf{0}&\boldsymbol{z}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{y}&\mathbf{0}\end{pmatrix};\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&-\boldsymbol{y}&-\boldsymbol{z}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix};\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix};\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{E}$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a

$$(AB-C)D=2E\rightarrow\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B};\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{C};\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{D};\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y+z\\x+y+z\end{pmatrix}$$

$$2\boldsymbol{E};2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2a\\2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\\\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\\\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\boldsymbol{a}\\\mathbf{2}\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\mathbf{0}\\\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\mathbf{2}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{a}\end{cases}$$

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

$$A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}\rightarrow0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+0=\mathbf{0}$$

$$A_a=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&2a\\1&1&2a\end{vmatrix}=0\rightarrow0\cdot\begin{vmatrix}1&2a\\1&2a\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&2a\\1&2a\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=0\rightarrow0-(-2a)+0=0$$

$$\rightarrow-(-2a)=0\ \rightarrow2a=0\rightarrow\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

- ***Si $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$***

$rg(A)=2$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 2 y distinto de cero

$rg(A_a)=3$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 3 y distinto de cero

$$Como\ rg(A)\neq rg(A_a), no\ tiene\ solución$$

- ***Si $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$***

$$rg(A)=no\ varia\ su\ valor$$

$rg(A_a)=$ no es posible encontrar un menor complementario de orden 3 distinto de cero

$$Como\ rg(A)=rg(A_a)<número\ de\ incógnitas\ tiene\ infinitas\ soluciones$$

El sistema no tiene una única solución, puesto que para ningún valor da un resultado compatible

c) Para $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ encuentra una solución del sistema con $\boldsymbol{z}\neq\mathbf{0}$

$$Si\ a = 0$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z \\ x + y = -z \end{cases} \rightarrow \{\boldsymbol{x = 0; y = -k; z = k}$$

12. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000€. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 101 es el doble que el número de billetes de 20 euros.

$$\begin{cases} x \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 50\ euros \\ y \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 20\ euros \\ z \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 10\ euros \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 700 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{cases} \quad ordenando\ las\ ecuaciones \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -F_1 + F_2 \\ -5F_1 + F_3 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \end{array}\right) reordenando \rightarrow \begin{cases} x + z + y = 225 \\ 4z\ + 3y = 425 \\ 3y = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z + y = 225 \\ 4z + 3y = 425 \\ \boldsymbol{y = 75} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z + 75 = 225 \\ 40z + 30 \cdot 75 = 425 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 150 \\ \boldsymbol{z = 50} \end{cases} \rightarrow x + 50 = 150 \rightarrow \boldsymbol{x = 100}$$

$$\begin{cases} 100 + 50 + 75 = 225 \\ 4 \cdot 50 + 3 \cdot 75 = 425 \\ 3 \cdot 75 = 225 \end{cases} = \begin{cases} 225 = 225 \\ 425 = 425 \\ 225 = 225 \end{cases} \qquad (x, y, z) = (100{,}75{,}50)$$

$$\boldsymbol{Se\ obtiene\ \rightarrow 100\ billetes\ de\ 50€;\ \ 75\ billetes\ de\ 20€;\ 50\ billetes\ de\ 10€}$$

13. Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en esta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en esta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

$x \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ A$

$y \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ B$

$z \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ C$

$$\begin{cases} x + 5 = y - 5 + z \\ z + 10 = x - 10 + y \\ 10x + 20y + 50z = 1550 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = \ -10 \\ -x - y + z = \ -20 \\ 10x + 20y + 50z = 1550 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 10 & 20 & 50 & 1550 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 1 & 2 & 5 & 155 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \\ 0 & 3 & 6 & 165 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y-z=-10 \\ \quad -2y \quad =-30 \\ \quad 3y+6z=165 \end{cases} \qquad y=15; \quad z=20; \quad x=25$$

SOLUCIÓN: Hay 25 billetes en la billetera A, 15 billetes en la billetera B y 20 billetes en la billetera C.

14. La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. Halla el número.

Datos: Número = xyz

*Escribimos el sistema:

- $x+y+z=18$
- $z=x+y$
- $100z+10y+x=100x+10y+z+594$ (zyx = xyz + 594)

*Lo simplificamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ -99x & 0 & 99z & 594 \end{array}\right) \to 99F_1+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & 99y & 198z & 2376 \end{array}\right) \to \frac{1}{99}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

$$\to F_1+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ 0 & 0 & 2z & 18 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

*Con F_2 podemos sacar el valor de z: $2z=18;\ z=9$

*Con F_3 sacamos el valor de y: $y+2z=24;\ y=24-18;\ y=6$

*Hallamos el valor de x: $x+y+z=18;\ x=18-9-6;\ x=3$

El número es 369

15- Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

nº aciertos: x; nº fallos: y; nº no respondidas: z.

Para aprobar se necesitan 150 puntos.

- $x+y+z=60$
- $y+5z=x$
- $5x-2y-z=150$

$$\begin{pmatrix} x & y & z & | \; 60 \\ -x & y & 5z & | \; 0 \\ 5x & -2y & -z & | \; 150 \end{pmatrix} \rightarrow -5F_1 + F_3 \begin{pmatrix} x & y & z & | \; 60 \\ -x & y & 5z & | \; 0 \\ 0 & -7y & -6z & | \; 150 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F_2 + F_1 \begin{pmatrix} 0 & 2y & 6z & | \; 60 \\ -x & y & 5z & | \; 0 \\ 0 & -7y & -6z & | \; -150 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 + F_3 \begin{pmatrix} 0 & 2y & 6z & | \; 60 \\ -x & y & 5z & | \; 0 \\ 0 & -5y & 0 & | \; -90 \end{pmatrix}$$

*Cogemos F_3 y sacamos el valor de y:

$$y = \frac{90}{5} = 18; \; y = 18$$

*Hallamos las demás incógnitas:

$$2 \cdot 18 + 6z = 60; \; z = \frac{60 - 36}{6} = 4; \; z = 4$$

$$x = 18 + 5 \cdot 4; \; x = 38$$

- Solución: 38 aciertos, 18 fallos y 4 preguntas sin contestar. En total son 230 puntos obtenidos.

16. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- **Alimento Migato:600g de carne, 300g de pescado y 100g de verdura**
- **Alimento Catomeal:300g de carne, 400g de pescado y 300g de verdura**
- **Alimento Comecat:200g de carne, 600g de pescado y 200g de verdura**

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470g de carne, 370g de pescado y 160g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución:

$x = \%$ comida Migato; $y = \%$ comida Catomeal; $z = \%$ comida Comecat

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 300x + 400y + 600z = 370 \\ 100x + 300y + 200z = 160 \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | \; 470 \\ 300 & 400 & 600 & | \; 370 \\ 100 & 300 & 200 & | \; 160 \end{pmatrix} \rightarrow -F_1 + 6F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | \; 470 \\ 300 & 400 & 600 & | \; 370 \\ 0 & 1500 & 1000 & | \; 490 \end{pmatrix} \rightarrow -F_1 + 2F_2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | \; 470 \\ 0 & 500 & 1000 & | \; 270 \\ 0 & 1500 & 1000 & | \; 490 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | \; 470 \\ 0 & 500 & 1000 & | \; 270 \\ 0 & 1000 & 0 & | \; 220 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 500y + 1000z = 270 \\ 1000y = 220 \end{cases}$$

Despejamos la y: $y = \frac{220}{1000} = 0{,}22 \rightarrow 0{,}22 \cdot \; 100 = 22\%$

Despejamos la z: $z = \frac{270-110}{1000} = 0{,}16 \rightarrow 0{,}16 \cdot\ 100 = 16\%$

Despejamos la x: $X = \frac{470-66-32}{1000} = 0{,}62 \rightarrow 0{,}62 \cdot 100 = 62\%$

Entonces, para realizar la mezcla, necesitamos un 62% de Migato, un 22% de Catomeal y un 16% de Comecat.

17. Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.
Solución:

$$\mathrm{x} = \text{Edad padre; } \mathrm{y} = \text{Edad madre; } \mathrm{z} = \text{Edad hija}$$

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema y se desarrolla:

$$\begin{cases} x+y+z=70 \\ (x-4)=7(z-4) \\ (z+15)=\frac{1}{4}\big((x+15)+(y+15)\big) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=70 \\ x-7z=-24 \\ -\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+z=-\frac{15}{2} \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 1 & 0 & -7 & | & -24 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & | & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \rightarrow F_1 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 1 & 8 & | & 94 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & | & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}F_1 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 1 & 8 & | & 94 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & | & 10 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y+z=70 \\ y+8z=94 \\ \frac{5}{4}z=10 \end{cases}$

Despejamos la z: $z = \frac{10\cdot 4}{5} = 8$
Despejamos la y: $y = 94 - 64 = 30$
Despejamos la x: $x = 70 - 30 - 8 = 32$
Por lo tanto, la edad del padre es 32 años, la de la madre es 30 años y la de la hija 8 años.

18. Una persona invirtió 72000€ repartidos en 3 empresas y obtuvo 5520€ de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10% en la empresa A, el 8% en la empresa B y el 5% en la empresa C.

1. Datos:
    a. € invertidos en la empresa A= x
    b. € invertidos en la empresa B= y
    c. € invertidos en la empresa C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

$$x+y+z=72000$$
$$y=3(x+z) \rightarrow \ -3x+y-3z=0$$
$$0{,}1x+0{,}08y+0{,}05z=5520$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}08 & 0{,}05 & 5520 \end{array}\right) \rightarrow C_2 \leftrightarrow C_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520 \end{array}\right) \rightarrow F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 3F_1+F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520 \\ 0 & 0 & 4 & 216000 \end{array}\right) \rightarrow -0{,}1F_1+F_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72000 \\ 0 & -0{,}05 & -0{,}02 & -1680 \\ 0 & 0 & 4 & 216000 \end{array}\right)$$

   a. Como: $r(A)=r(A^*)=nº\ incógnitas \rightarrow S.C.D$
   b. Obtenemos el sistema resultante:

$$x+y+z=72000$$
$$-0{,}02y-0{,}05z=-1680$$
$$4y=216000$$

   c. Resolvemos y obtenemos que: $x=6000; y=54000; z=12000$

Invierte 6000€ en la empresa A, 54000€ en la B y 12000€ en la C.

19. Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

1. Datos:
   a. Kg de café clase A= x
   b. Kg de café clase B= y
   c. Kg de café clase C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

$$x+y+z=80$$
$$6x+8y+10z=560$$
$$x-2y-1z=0$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 6 & 8 & 10 & 560 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -6F_1+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 2 & 4 & 80 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -F_1+F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 2 & 4 & 80 \\ 0 & -3 & -2 & -80 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow 3F_2+2F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 2 & 4 & 80 \\ 0 & 0 & 4 & 80 \end{array}\right)$$

   a. Como $r(A)=r(A^*)=nº\ incógnitas \rightarrow$ S.C.D
   b. Obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x+y+z&=80\\ 2y+4z&=80\\ 4z&=80\end{aligned}$$

c. Resolvemos y obtenemos que: x = 60; y = 0; z = 20

Debe poner 60 kg del tipo A, ninguno del tipo B y 20 kg del tipo C.

20. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

SOLUCIÓN:

En la siguiente tabla se introducen los datos del problema y sus relaciones:

Edades	Madre	Hijo 1	Hijo 2	Relación
Actual	x	y	z	
Hace 14 años	x-14	y-14	z-14	x-14=5(y-14 + z-14)
Dentro de 10 años	x+10	y+10	z+10	x+10= y+10+z+10
Dentro de (x-y) años		x	42	z+(x-y) =42

El sistema de ecuaciones que resulta es:

$$\begin{cases} x-14=5(y- \\ x+10=y+ \\ z+(x- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-14=5y-70+5z-70 \\ x-y-z=10+10-10 \\ z+x-y=42 \end{cases} \quad \begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases}$$

Escribimos la matriz C y la Ampliada y resolvemos por el método de Gauss, por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 4 & 6 & 168 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

La última fila de la matriz corresponde a la ecuación:

$2z = 32 \rightarrow \boldsymbol{z = 16}$

Con la segunda fila sacamos el valor de la y:

$4y + 4z = 136 \rightarrow 4y + 4\cdot 16 = 136 \rightarrow 4y+64 = 136 \rightarrow \boldsymbol{y = 18}$

Con la primera fila sacamos el valor de la x:

$$x - 5y - 5z = -126 \rightarrow x - 5\cdot 18 - 5\cdot 16 = -126 \rightarrow \boldsymbol{x = 44}$$

Edad de la madre 44 años, el hijo mayor 18 años y el menor 16

21. En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además,

el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros dos.

SOLUCIÓN:

a) Llamamos **m**= precio desconocido del champú anticaspa.

x= unidades vendidas el mes pasado del champú normal.

y= unidades vendidas el mes pasado del champú con vitaminas

z= unidades vendidas el mes pasado del champú anticaspa.

Siguiendo el enunciado del problema se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x + 56 = 3y + mz \\ 3y + mz = 28M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases}$$

b) Se pasa el sistema de ecuaciones a forma matricial y se estudia en función del parámetro m. Para ello se calcula el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = -6m + 6m - (-6m + 6m) = 0 \qquad \text{R(C)= 2 porque} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora analizamos el determinante de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 112 \\ 2 & -3 & -56 \\ 0 & 3 & 28m \end{vmatrix} = -168m + 672 - (-336 + 168m) = -336m + 1008$$

$$-336m + 1008 = 0 \rightarrow m = 3$$

- Si m=3, R(C)=2= R(A)=2 $< nº\ incógnitas. \rightarrow\ S.C.I.$
  Es decir, si el precio del champú anticaspa es 3 euros, habrá infinitas soluciones, es decir, habrá infinitos valores de unidades de champú de cada tipo que puedan venderse y obtener lo que aparece en el enunciado
- Si m$\neq 3, R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \rightarrow S.I.$
  Es decir, el precio del champú anticaspa no puede tener un precio diferente a 3 euros porque si no, el sistema de ecuaciones no tendría solución.

c) Z=20 y sabemos que m=3, el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 3 \cdot 20 = -56 \\ 3y + 3 \cdot 20 = 28 \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 60 = -56 \\ 3y + 60 = 84 \end{cases}$$

De la tercera ecuación despejamos y:

$3y\ =\ 84-60 \rightarrow y=\dfrac{24}{3} \rightarrow \boxed{y=8}$

De la segunda ecuación despejamos x:

$2x\ -\ 3\cdot 8-60\ =\ -56 \rightarrow x=\dfrac{28}{2} \rightarrow \boxed{x=14}$

14 unidades de champú normal, 8 unidades del de vitaminas y 20 unidades del anticaspa

22. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1.18 euros/litro, pero ha olvidado el precio de C. (Supongamos que es de *m* euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.80 € el gasto en C.

- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.

- el gasto de litros en A superó al de B en 12.60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

Litros en gasolinera A → x ; Litros en gasolinera B → y ; Litros en gasolinera C → z

$$\begin{cases} 1{,}20x+1{,}18y-mC=46{,}80 \\ 1{,}18y-mC=\ 0 \\ 1{,}20x-1{,}18y=12{,}60 \end{cases}$$

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de *m*. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 1{,}20 & -1{,}18 & 0 & 12{,}60 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 2{,}36 & m & -34{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m & -34{,}2 \end{array}\right)$$

$-m=0\ \rightarrow m=0$

Si m = 0 → Rg(A) ≠ Rg(A*) → Es un sistema incompatible.

Si m ≠ 0 → Rg(A) = Rg(A*) → Es un sistema compatible determinado.

Por lo tanto, es imposible vender la gasolina en la gasolinera C a 0€.

23. En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de la otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

x → precio del café y →precio de la tostada z → precio del refresco

$$\begin{cases} 2x+y+2z=4 \\ 4x+3y+3z=9 \\ 2x+3y=a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-6) \end{array}\right)$$

$a-6=0\ \rightarrow a=6$

Los clientes de la tercera mesa deben pagar 6€.

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como Rg(A) = Rg(A*) $<$ número de incógnitas → Es un sistema compatible indeterminado.

Lo que significa que con los datos que nos dan no podemos calcular el precio del café.

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{x+2z+2y=5} \\ \boldsymbol{2y-x+z=11} \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

1)Organizamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=5 \\ -x+2y+z=11 \end{cases}$

2)Cogemos los coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Opción d

2.- Su matriz ampliada es:

1)Añadimos a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución: Opción d

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_1+F_2}{\overset{-F_1+F_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

Solución: Opción d

4.- El sistema es:

1) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$, como no puede ser mayor, el $Rg(A^*)$ también es 3

2) Como sabemos que este sistema tiene 3 incógnitas; tenemos que:

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ incógnitas = 3$; luego es un S.C.D

Solución: Opción a

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{2x-y=-4y} \\ \boldsymbol{5+2y+z=3x} \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

1) Organizamos el sistema: $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -3x+2y+z=-5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$ **Solución:** Opción b

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado:

Solución: Opción b

$$b)\ x - y = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1)Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [0+0+3]-[0+(-2)+0] = 5 \neq 0; R(A) = 3$$

2)Rango de la matriz ampliada también 3: $Rg(A^*) = 3$.

$$Como\ Rg(A) = Rg(A^*) = 3 = nº\ de\ incógnitas; luego\ es\ un\ S.C.D$$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado:

Solución: Opción c

$$\mathrm{c)} - \mathrm{x} + 5\mathrm{y} + \mathrm{z} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = [4+0-3]-[0+10-9] = 0; Rg(A) = 2$$

2)Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Rg(A^*) = 2$$

$$Rg(A) = Rg(A^*) = 2 < nº\ de\ incógnitas\ = 3; luego\ es\ un\ S.C.I$$

8.-Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible:

Solución: Opción a)

$$a)3y + 2x = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0+0+6]-[0+6+0]=0; Rg(A)=2$$

2) Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; Rg(A^*)=3$$

$$Rg(A) \neq Rg(A^*); luego\ es\ un\ sistema\ incompatible.$$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

Solución: c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Esto es el teorema de Rouché-Frobenius.

$$Sistema\ compatible\ \leftrightarrow R(C)=R(A)$$