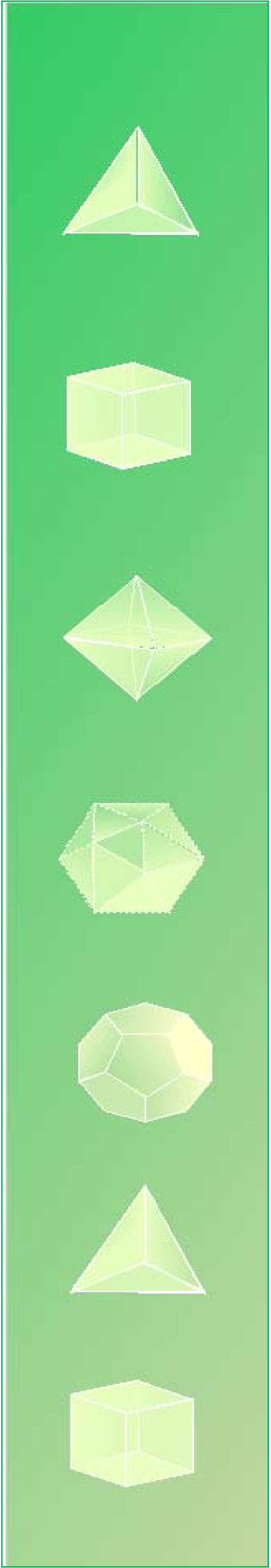


Matemáticas II. 2º Bachillerato. Capítulo 6: Geometría métrica en el espacio

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-063465

Fecha y hora de registro: 2015-03-11 13:00:34.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

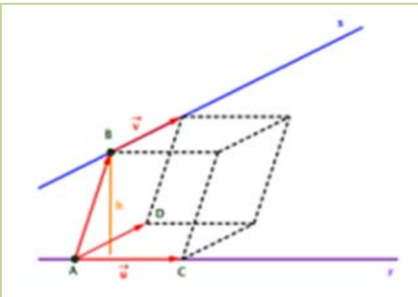
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas por los autores utilizando *software* libre (GeoGebra y GIMP)

Índice

Resumen

En este último capítulo de geometría en dimensión tres vamos a ser capaces de resolver problemas de cálculo de distancias, de ángulos, de proyecciones… utilizando todo lo aprendido en los anteriores capítulos de geometría.



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

1. ÁNGULOS EN EL ESPACIO

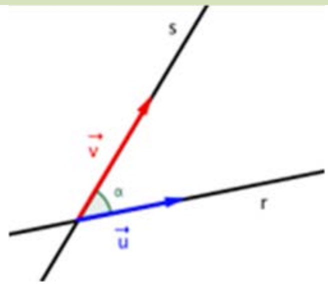
1.1. Ángulo entre dos rectas

Sabemos que la dirección de una recta viene dada por su vector director. Con ello, podemos deducir:

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo agudo determinado por los vectores directores de dichas rectas.

Sean las rectas *r* y *s*, con vectores directores respectivos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Rightarrow \alpha(r,s) = \text{arc cos}\,\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$



Actividad resuelta

- *Halla el ángulo determinado por las rectas*

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+3}{5} = y-1 = \frac{z+2}{-1}.$$

De las ecuaciones deducimos fácilmente que los vectores directores de *r* y *s* son, respectivamente:

$$\vec{u} = (-1,\,3,\,2) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (5,\,1,\,-1)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{v}| = \sqrt{5^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{27} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3,2)\cdot(5,1,-1) = -5+3-2 = -4 \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| = |-4| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{4}{\sqrt{378}}$$

De aquí:

$$\alpha(r,s) = \text{arc cos}\left(\frac{4}{\sqrt{378}}\right) = 78^\circ$$

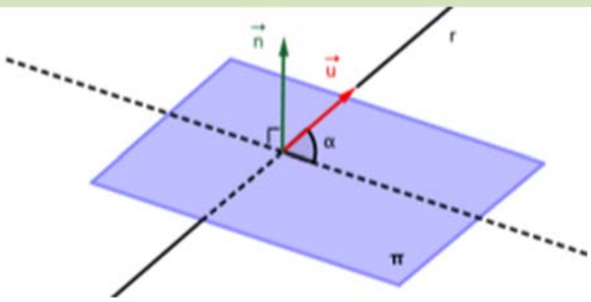
1.2. Ángulo entre una recta y un plano

Al contrario que en el apartado anterior, la dirección del vector asociado al plano (su vector normal) es perpendicular al propio plano. Por tanto, en este caso debemos razonar que:

El ángulo que forman una recta y un plano es **el complementario** del ángulo agudo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

Sea la recta *r*, con vector director $\vec{u}$ y el plano π, con vector normal $\vec{n}$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \Rightarrow \alpha(r,\pi) = 90^\circ - \text{arc cos}\,\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Halla el ángulo determinado por la recta* $r: \frac{x+3}{-2} = y-4 = \frac{z+1}{2}$ *y el plano* $\pi: 5x - y + 3z - 1 = 0$.

Sea $\vec{u} = (-2, 1, 2)$ un vector director de r y $\vec{n} = (5, -1, 3)$ un vector normal de π.

Tenemos:

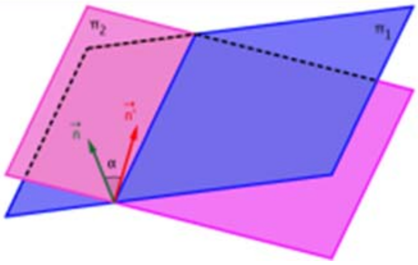
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \\ |\vec{n}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{35} \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = (-2,1,2)\cdot(5,-1,3) = -10 - 1 + 6 = -5 \Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{n}| = |-5| = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{3\cdot\sqrt{35}} = \frac{5}{3\sqrt{35}}$$

De aquí: $\alpha(r, \pi) = 90º - \text{arc}\cos\left(\frac{5}{3\sqrt{35}}\right) = 90º - 74º = 16º$

1.3. Ángulo entre dos planos

En este caso los dos vectores normales son perpendiculares a los respectivos planos, de modo que:

El ángulo formado por dos planos es el ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.



Sean los planos π y π', con vectores normales respectivos $\vec{n}$ y $\vec{n}'$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} \Rightarrow \alpha(\pi, \pi') = \text{arc}\cos\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}$$

Actividad resuelta

- *Halla el ángulo formado por los planos*

$$\pi: 2x - y + z - 4 = 0 \quad \text{y} \quad \pi': \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda - 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = -\lambda + 2\mu \end{array}\right\}.$$

Sea $\vec{n} = (2, -1, 1)$ un vector normal de π, y hallamos el vector normal de π' con el producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n}' = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 0\vec{j} - 5\vec{k}$$

Calculamos:

$$\left.\begin{array}{r} |\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{n}'| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + (-5)^2} = 5\cdot\sqrt{2} \\ \vec{n}\cdot\vec{n}' = (2,-1,1)\cdot(-5,0,-5) = -10 + 0 - 5 = -15 \Rightarrow |\vec{n}\cdot\vec{n}'| = |-15| = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto: $\alpha(\pi, \pi') = \text{arc}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30º$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

1.4. Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas

En el capítulo anterior analizamos las posiciones relativas de rectas, planos y entre rectas y planos a partir de sus ecuaciones, pero en cada apartado dimos su interpretación geométrica. Podemos realizar el mismo estudio a partir de sus vectores aprovechando lo aprendido hasta ahora y teniendo en cuenta la orientación relativa de los vectores directores y normales asociados a dichas rectas y planos.

Sean las rectas r y s, y consideremos los planos π y π'. Para definirlos precisamos de los siguientes vectores directores, normales y de posición:

	Recta r	Recta s	Plano π	Plano π'
Vector de posición	punto A	punto B	punto P	punto Q
Vector…	…director $\vec{u}$	…director $\vec{v}$	…normal $\vec{n}$	…normal $\vec{n}'$

Entonces, el estudio de las posiciones relativas entre ellos se reduce a los siguientes casos:

	Coincidentes	Paralelos/as	Secantes	Perpendiculares	Se cruzan
r y s	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\neq 0$
r y π	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$	———
π y π'	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'\neq\vec{0}$	$\vec{n}\cdot\vec{n}'=\vec{0}$	———

Actividad propuesta

1. Realiza en tu cuaderno los doce dibujos y comprueba las relaciones vectoriales descritas en la tabla anterior:

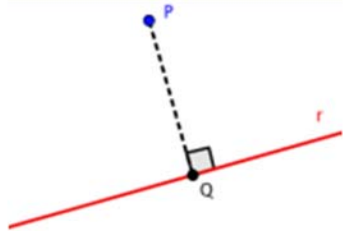
r y s coincidentes	***r y s paralelas***	***r y s secantes***	***r y s se cruzan***
r y π coincidentes	***r y π paralelos***	***r y π secantes***	***r y π perpendiculares***
π y π' coincidentes	***π y π' paralelos***	***π y π' secantes***	***π y π' perpendiculares***

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

2. PROYECCIONES ORTOGONALES

2.1. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r será otro punto Q perteneciente a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.



Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta dada por la ecuación:

$$r : \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

Método 1:

1. Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.
   Para ello, utilizamos el vector director de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto:
   $$v_1 \cdot (x-p_1) + v_2 \cdot (y-p_2) + v_3 \cdot (z-p_3) = 0$$
2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección de la recta con el plano.

   Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
   $$v_1 \cdot (a_1 + v_1 t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 t - p_3) = 0$$
   de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:
   $$t = \frac{v_1(p_1 - a_1) + v_2(p_2 - a_2) + v_3(p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Método 2:

1. Como Q pertenece a la recta, sus coordenadas deben verificar la ecuación de la recta:
   $$q_1 = a_1 + v_1 t \quad , \quad q_2 = a_2 + v_2 t \quad , \quad q_3 = a_3 + v_3 t$$
2. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta, por tanto, el producto escalar de dicho vector con el vector director de la recta es cero:
   $$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow v_1 \cdot (q_1 - p_1) + v_2 \cdot (q_2 - p_2) + v_3 \cdot (q_3 - p_3) = 0$$
3. Resolvemos la ecuación resultante:
   $$v_1 \cdot (a_1 + v_1 t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 t - p_3) = 0$$
   de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:
   $$t = \frac{v_1(p_1 - a_1) + v_2(p_2 - a_2) + v_3(p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal del punto* $P\,(1,2,-1)$ *sobre la recta* $r:\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z+1}{2}$.

En primer lugar, hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto *P*:

El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: $\vec{n}=(3,1,2)$, y la ecuación del plano es de la forma:

$$3x+y+2z+D=0$$

Como debe pasar por el punto $P\,(1,\,2,\,-1)$: $3\cdot 1+2+2\cdot(-1)+D=0\Rightarrow 3+2-2+D=0\Rightarrow D=-3$

Tenemos: $\pi: 3x+y+2z-3=0$

Resolvemos el sistema, pasando primero la ecuación de la recta a su forma paramétrica:

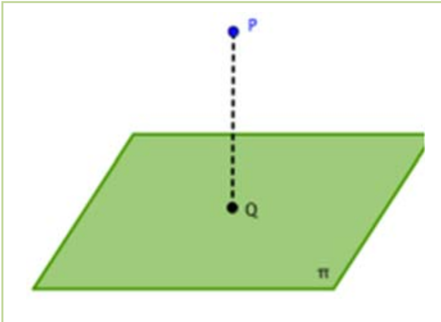
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z+1}{2}\\ 3x+y+2z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3(-2+3t)+(1+t)+2(-1+2t)-3=0\Rightarrow 14t-10=0\Rightarrow t=\frac{5}{7}$$

Sustituyendo el valor de *t*, obtenemos: $\left\{x=\frac{1}{7},y=\frac{12}{7},z=\frac{3}{7}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto *P* sobre la recta *r* será el punto $Q\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{12}{7},\dfrac{3}{7}\right)$.

2.2. Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección ortogonal de un punto *P* sobre un plano π es otro punto *Q* perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre un plano dado por la ecuación:

$$\pi: A\,x+B\,y+C\,z+D=0$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto *P*.
   Para ello, utilizamos el vector normal del plano como vector director de la recta:

$$r:\{\ x=p_1+At\,,\ y=p_2+Bt\,,\ z=p_3+Ct\ \}$$

2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección de la recta con el plano.

   Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$A\cdot(p_1+At)+B\cdot(p_2+Bt)+C\cdot(p_3+Ct)+D=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{D+A\,p_1+B\,p_2+C\,p_3}{A^2+B^2+C^2}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal del punto* $P\,(-1, 3, 2)$ *sobre el plano* $\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Buscamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que contiene al punto P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v} = (1, -2, 3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es:

$$r : \{\ x = -1 + t\ ,\ y = 3 - 2t\ ,\ z = 2 + 3t\ \}$$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0 \Rightarrow (-1 + t) - 2(3 - 2t) + 3(2 + 3t) - 1 = 0$$

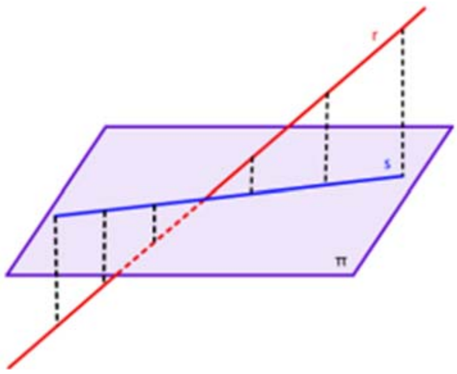
$$14t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} =$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\left\{x = -\frac{6}{7}, y = \frac{19}{7}, z = \frac{17}{7}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π es el punto $Q\ \left(-\frac{6}{7}, \frac{19}{7}, \frac{17}{7}\right)$

2.3. Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.



Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular al plano dado. La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los dos planos π y π'.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

Actividad resuelta

- *Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π, siendo:*

$$r: \left.\begin{aligned} x &= -2+3\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= -3-\lambda \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \pi : x+y-z+1=0$$

Método 1:

Obtenemos un vector director y un punto de la recta: $\vec{v} = (3, 1, -1)$ y $P(-2, 1, -3)$, y obtenemos un vector normal del plano: $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

A continuación, podemos determinar el plano π' que pasa por el punto P y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow y+z\ +2\ =0$$

Tenemos el plano $\pi': y+z+2=0$, que contiene a la recta *r* y es perpendicular a π.

La recta que estamos buscando (la proyección ortogonal) es, entonces:

$$\left.\begin{aligned} x+y-z+1=0 \\ y+z+2=0 \end{aligned}\right\}$$

Método 2:

Otra forma de calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, que puede resultar interesante dependiendo del problema al que nos enfrentemos, sería:

- Obtener la intersección de la recta *r* con el plano π, que es un punto que llamaremos P.
- Calculamos la proyección ortogonal de un punto cualquiera de *r* sobre el plano π, llamémoslo Q.
- Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos, P y Q.

Dicha recta será la proyección ortogonal buscada.

Actividad propuesta

2. Halla la proyección ortogonal del punto $P(0, 3, 1)$ sobre la recta $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{2}$.

3. Halla la proyección ortogonal del punto $P(4, 0, 3)$ sobre el plano $\pi : 3x-2y+z-2=0$.

4. Halla la proyección ortogonal de la recta *r* sobre el plano π, siendo:

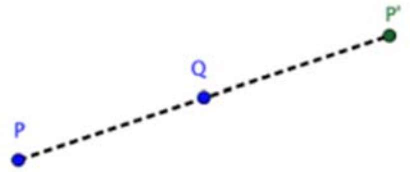
$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-11}{2} \quad \text{y} \quad \pi : 2x+3y-z+1=0$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

3. PUNTOS SIMÉTRICOS

3.1. Simétrico de un punto respecto de otro punto

El simétrico de un punto P respecto de otro punto Q es otro punto P' de manera que el punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Ya vimos en el capítulo 4 cómo determinar el punto medio del segmento definido por los puntos A y B:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Ahora se trata de ir "a la inversa", dados un extremo y el punto medio, obtener el otro extremo. Si los puntos tienen por coordenadas $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$, y representamos a P' por $P'(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'} \Rightarrow (q_1-p_1,p_2-q_2,p_3-q_3)=(x-q_1,y-q_2,z-q_3)$$

Igualando componentes:

$$\left.\begin{array}{l} q_1-p_1=x-q_1 \\ q_2-p_2=y-q_2 \\ q_3-p_3=z-q_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2q_1-p_1 \\ y=2q_2-p_2 \\ z=2q_3-p_3 \end{array}\right\} \Rightarrow P'\ (2q_1-p_1,2q_2-p_2,2q_3-p_3)$$

$$P'\ (2q_1-p_1,2q_2-p_2,2q_3-p_3)$$

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto* $P\ (2,-1,4)$ *respecto del punto* $Q\ (5,-1,8)$.

Sea $P'(p_1,p_2,p_3)$ dicho punto simétrico.

El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

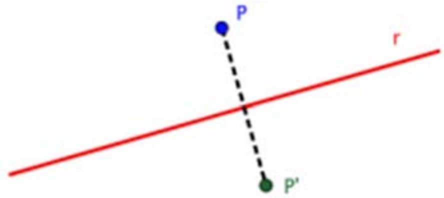
El punto medio de $\overline{PP'}$ es $\left(\frac{2+p_1}{2},\frac{-1+p_2}{2},\frac{4+p_3}{2}\right)$, luego igualando tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2+p_1}{2}=5 \\ \frac{-1+p_2}{2}=-1 \\ \frac{4+p_3}{2}=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+p_1=10 \\ -1+p_2=-2 \\ 4+p_3=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1=8 \\ p_2=-1 \\ p_3=12 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(8,-1,12)$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

3.2. Simétrico de un punto respecto de una recta

El simétrico de un punto P respecto de una recta r es otro punto P' de manera que la recta r pasa por el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular a la recta r.



Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta dada por la ecuación:

$$r: \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la proyección del punto sobre la recta r, para lo que procedemos como se indicó en el apartado 2.1. Llamaremos a ese punto Q.
2. Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado anterior.

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto* $P\,(3, 1, -2)$ *respecto de la recta* $r: \frac{x+2}{-1} = y-1 = \frac{z+1}{2}$.

En primer lugar, hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r; expresamos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r: \{\ x = -2 - t\ ,\ y = 1 + t\ ,\ z = -1 + 2t\ \}$$

Ahora buscamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: $\vec{n} = (-1,\ 1,\ 2)$ y la ecuación del plano es:

$$-(x-3) + (y-1) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow -x + y + 2z + 6 = 0$$

La proyección ortogonal es el punto de intersección de la recta con el plano:

$$-(-2-\text{t}) + (1+t) + 2(-1+2t) + 6 = 0 \Rightarrow 6t + 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{-7}{6}$$

Sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de r, obtenemos: $\left\{x = \frac{-5}{6}, y = \frac{-1}{6}, z = -\frac{10}{3}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r será el punto $Q\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{10}{3}\right)$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P\,(3, 1, -2)$ respecto de la proyección Q. Sea dicho punto $P'\,(p_1, p_2, p_3)$. Tenemos:

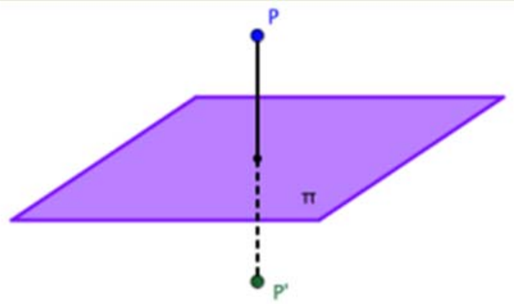
$$\left(\frac{3+p_1}{2}, \frac{1+p_2}{2}, \frac{-2+p_3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{3+p_1}{2} &= -\frac{5}{6} \\ \frac{1+p_2}{2} &= -\frac{1}{6} \\ \frac{-2+p_3}{2} &= -\frac{10}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 9+3p_1 &= -5 \\ 3+3p_2 &= -1 \\ -6+3p_3 &= -20 \end{aligned}\right\}$$

De aquí, el simétrico de P respecto de la recta r será: $P'\left(-\frac{14}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{14}{3}\right)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

3.3. Simétrico de un punto respecto de un plano

El simétrico de un punto P respecto de un plano π es otro punto P' de manera que el plano π pasa por el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ y el vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al plano π.



Para hallar el simétrico de un punto respecto de un plano dado por la ecuación:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la proyección del punto sobre el plano π, para lo que procedemos como se indicó en el apartado 2.2. Llamaremos a ese punto Q.
2. Determinamos el punto simétrico de P respecto de Q, como hicimos en el apartado 3.1.

Actividad resuelta

- *Calcula el simétrico del punto $P\,(2, 1, -1)$ respecto del plano $\pi: x + 3y - z = 0$.*

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π, para ello buscamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P. El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{n} = \vec{v} = (1, 3, -1)$, y la ecuación de la recta es:

$$r : \{\ x = 2 + t\ ,\ y = 1 + 3t\ ,\ z = -1 - t\ \}$$

Buscamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$(2+t) + 3(1+3t) - (-1-t) = 0 \Rightarrow 11t + 6 = 0 \Rightarrow t = -\tfrac{6}{11}$$

Sustituyendo el valor de t en las ecuaciones de r, obtenemos: $\left\{x = \tfrac{12}{11}, y = -\tfrac{19}{11}, z = -\tfrac{1}{11}\right\}$ y la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π será el punto $Q\left(\frac{12}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{1}{11}\right)$.

Ahora calculamos el punto simétrico de $P\,(2, 1, -1)$ respecto de la proyección Q. Sea dicho punto $P'\,(p_1, p_2, p_3)$. Tenemos:

$$\left(\frac{2+p_1}{2}, \frac{1+p_2}{2}, \frac{-1+p_3}{2}\right) = \left(\frac{12}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{1}{11}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{2+p_1}{2} = \dfrac{12}{11} \\ \dfrac{1+p_2}{2} = -\dfrac{19}{11} \\ \dfrac{-1+p_3}{2} = -\dfrac{1}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 22 + 11p_1 = 24 \\ 11 + 11p_2 = -38 \\ -11 + 11p_3 = -2 \end{array}\right\}$$

De aquí, el simétrico de P respecto de la recta r es: $P'\left(\frac{2}{11}, -\frac{49}{11}, \frac{9}{11}\right)$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

4. DISTANCIAS EN EL ESPACIO

4.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B en el espacio es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A\,(a_1, a_2, a_3) \\ B\,(b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $A\,(2, 1, -1)$ *al punto* $B\,(-1, -2, 2)$.

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo:

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2, -2-1, 2-(-1)) = (-3, -3, 3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

Por tanto:

$$d(A,B) = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

- *Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos* $A\,(2, 1, -1)$ *y* $B\,(-1, -2, 2)$.

Si los puntos son de la forma $P\,(x, y, z)$, nos dicen que:

$$d(P, A) = d(P, B) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}$$

Elevamos al cuadrado, operamos y simplificamos, con lo que obtenemos:

$$2x + 2y - 2z + 1 = 0$$

Que es la ecuación de un plano, que es el lugar geométrico pedido de los puntos que equidistan de dos puntos dados.

Actividad propuesta

5. Calcula la distancia del punto $A\,(0, 3, -4)$ al punto $B\,(-2, 0, 5)$.

6. Determina las coordenadas de los puntos que distan 4 del punto $C\,(2, -1, 1)$.

7. Determina las coordenadas de los puntos que distan R del punto $C\,(0, 0, 0)$.

8. Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos $A\,(0, 0, 0)$ y $B\,(0, 0, 2)$.

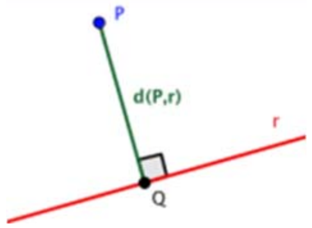
Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

4.2. Distancia de un punto a una recta

Definición:

La distancia de un punto P a una recta r se ***define*** como la menor de las distancias $d(P, Q)$ siendo Q un punto de la recta r.

La distancia de un punto P a una recta r es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicha recta.



Método 1:

La primera opción es aplicar directamente la definición:

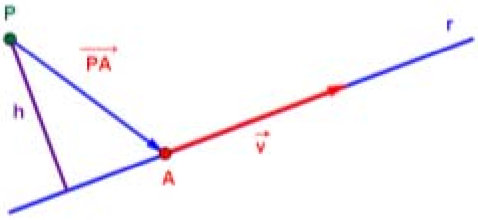
1. Hallamos la proyección del punto sobre la recta, el punto Q.
   a. Determinamos el plano π perpendicular a r que contiene a P.
   b. Obtenemos el punto Q, intersección de π y r.

   O bien,

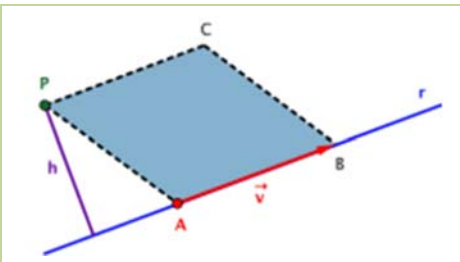
   a. Planteamos el punto $Q\ (x, y, z)$ que pertenece a r.
   b. Exigimos que el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - p_1, y - p_2, z - p_3)$ sea perpendicular al vector director de la recta, $\vec{v}$, es decir, su producto escalar debe ser nulo $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Calculamos la distancia de P a Q, el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Método 2:

La segunda opción es aprovechar lo que sabemos de vectores. De la ecuación de la recta podemos obtener un punto de la misma, A, y su vector director, $\vec{v}$:



De la figura, deducimos que la distancia d es la proyección del vector $\overrightarrow{PA}$ sobre el vector $\overrightarrow{PQ}$. **PERO** no conocemos el vector $\overrightarrow{PQ}$, así que no podemos utilizar el producto escalar, pero sí el vectorial de acuerdo a la siguiente figura:



Usando los puntos P y A y el vector $\vec{v}$ construimos el paralelogramo $PABC$, y la altura h de dicho paralelogramo es precisamente la distancia que estamos intentando determinar.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Usando la fórmula del área de un paralelogramo:

$$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = |\vec{v}| \cdot h$$

Sabemos que la interpretación geométrica del producto vectorial es, precisamente, el área:

$$\text{Área} = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|$$

Igualando ambas expresiones:

$$|\vec{v}| \cdot h = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow h = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Como la altura h coincide con la distancia del punto P a la recta r, tenemos:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Por tanto, el procedimiento a seguir es:

1. Determinamos un punto de la recta, A, y su vector director, $\vec{v}$.
2. Hallamos el vector $\overrightarrow{PA}$ (o $\overrightarrow{AP}$)
3. Calculamos la distancia con la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $P\,(2,-1,0)$ *a la recta* $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

A partir de la ecuación de la recta obtengamos un punto y un vector director. Es simple ver que son $A\,(1,-1,1)$ y $\vec{v} = (1,\ 2, 3)$. Entonces, el vector $\overrightarrow{AP}$ es $\overrightarrow{AP} = (1, 0, -1)$, y hallamos el producto vectorial:

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} = (-2, 4, -2)$$

Como:

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \begin{cases} \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| = |(-2,4,-2)| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} \\ |\vec{v}| = |(1,2,3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \end{cases}$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{24}{14}} = \sqrt{\frac{12}{7}}\ \text{u}$$

Actividad propuesta

9. Calcula la distancia del punto $P\,(0,-1,0)$ a la recta $r: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

4.3. Distancia de un punto a un plano

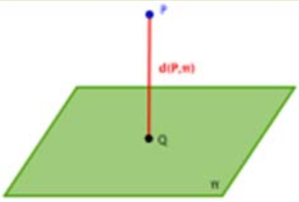
Definición:

La distancia de un punto P a un plano π se ***define*** como la menor de las distancias $d(P, Q)$ siendo Q un punto del plano π.

La distancia de un punto P a un plano π es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicho plano.

Sea el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia de P a π viene dada por la siguiente expresión:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



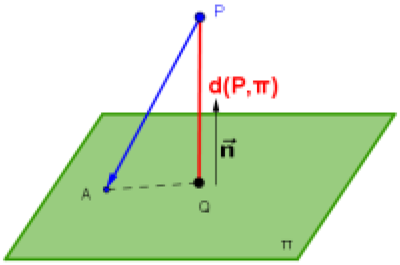
Demostración

Hallamos la proyección del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre el plano de ecuación:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

1. Determinamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P con el vector normal del plano:
$$r : \{\ x = x_0 + At\ ,\ y = y_0 + Bt\ ,\ z = z_0 + Ct\ \}$$
2. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
$$A\cdot(x_0 + At) + B\cdot(y_0 + Bt) + C\cdot(z_0 + Ct) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2}$$
3. La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:
$$\overrightarrow{PQ} = (x_0 - (x_0 + At), y_0 - (y_0 + Bt), z_0 - (z_0 + Ct)) = (-At, -Bt, -Ct) = -t(A, B, C)$$
entonces:
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = t\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
Y sustituyendo t por su valor:
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|-\frac{D + Ax_0 + By_0 + Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2}\right|\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \Rightarrow d(P,\pi) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Alternativamente, podemos hallar la distancia con la proyección del vector $\overrightarrow{PA}$ sobre el vector normal del plano, siendo A un punto cualquiera del plano π:



$$d(P,\pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - a_1) + B(y_0 - a_2) + C(z_0 - a_3)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia del punto* $P\,(2,-1,0)$ *al plano* $\pi: 2x+y-z+3=0$.

Aplicando la fórmula:

$$d(P,\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{2\cdot 2+1\cdot(-1)-0+3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ \text{u}$$

Ahora probemos con la proyección:

- Hallamos un punto del plano dando valores a dos de las variables:

$$\pi: 2x+y-z+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ 0+0-z+3=0 \Rightarrow z=3 \end{cases} \Rightarrow A\,(0,0,3)$$

- Obtenemos los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{PA}=(0-2,\cdots 0-(-1),3-0)=(-2,+1,+3) \quad \text{y} \quad \vec{n}=(2,1,-1)$$

- Finalmente:

$$d(P,\pi)=\left|\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{(-2)\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{-6}{\sqrt{6}}\right|=\sqrt{6}\ \text{u}$$

Actividad propuesta

10. Calcula la distancia del punto $P\,(0,-3,-2)$ al plano $\pi: 3x-2y-4z+1=0$.

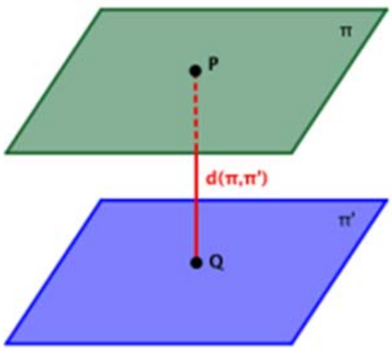
4.4. Distancia entre dos planos

Definición:

La distancia entre dos planos π y π' se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in \pi$ y $B \in \pi'$.

Dados dos planos π y π', se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si los planos son coincidentes o secantes:** la distancia es cero.
- **Si los planos son paralelos:** la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de uno de los planos al otro plano.



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

Actividades resueltas

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi': x + 2y - z + 1 = 0$

Analizamos los dos vectores normales:

$$\vec{n} = (2,1,-1) \quad \text{y} \quad \vec{n}' = (1,2,-1)$$

Es rápido ver que **NO** son paralelos:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-1}$$

por tanto, los planos tampoco son paralelos, son secantes y la distancia entre ellos es cero.

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi': 4x + 2y - 2z + 6 = 0$

En este caso vemos que las ecuaciones son proporcionales:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$$

por tanto, los planos son coincidentes y la distancia entre ellos es cero.

- *Calcula la distancia entre los planos* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y* $\pi': 4x + 2y - 2z + 5 = 0$

A diferencia del ejemplo anterior, los coeficientes A, B y C son proporcionales, pero no así los términos independientes D:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{5}$$

De modo que los planos son paralelos. Hallamos un punto de uno cualquiera de los planos:

$$\pi: 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ 0 + 0 - z + 3 = 0 \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow P\,(0,\,0,\,3)$$

y usamos la fórmula de la distancia del punto P al plano π'.

$$d(P,\pi') = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi') = \left|\frac{4\cdot 0+2\cdot 0-2\cdot 3+5}{\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{-1}{\sqrt{24}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{12}\text{ u.}$$

Actividad propuesta

11. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': -x + 2y - z = 1$.

12. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': x - y - 3z = 5$

13. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: x - y - 3z = 2$ y $\pi': 2x - 2y - 6z = 4$

14. Calcula la distancia entre los planos: $\pi: -2x + 4y - 2z = 7$ y $\pi': -x + 2y - z = 1$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

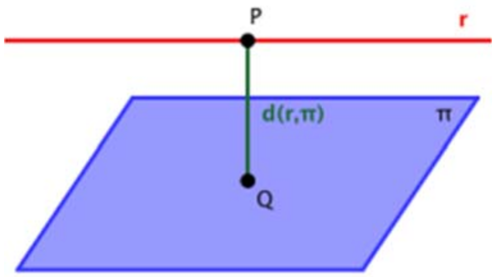
4.5. Distancia entre una recta y un plano

Definición:

La distancia entre una recta r y un plano π, se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo A un punto de r y $B\in \pi$.

Dada una recta r y un plano π, se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si la recta y el plano tienen algún punto en común:** la distancia es cero.
- **Si la recta y el plano son paralelos:** la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano.



Actividades resueltas

- *Calcula la distancia entre la recta y el plano* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y la recta* $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$.

La forma más rápida de analizar el paralelismo entre plano y recta es estudiar la posición relativa del vector normal del plano respecto al vector director de la recta:

Si r y π son paralelos, $\vec{n}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares

Entonces:

$\vec{n} = (2, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1, -1, 3)$, por tanto: $\vec{n}\cdot\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)\cdot(1,\ -1,\ 3) = 2-1-3 = -2 \neq 0$

El producto escalar **NO** es nulo, r y π **NO** son paralelos, la distancia entre ellos es nula.

- *Calcula la distancia entre la recta y el plano* $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ *y la recta* $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3}$.

Procedemos como en el ejemplo anterior:

$\vec{n} = (2, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1,\ 1, 3)$, por tanto: $\vec{n}\cdot\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)\cdot(1, 1,\ 3) = 2+1-3 = 0$

El producto escalar es nulo, r y π son paralelos o coincidentes. Utilizamos el punto P que podemos obtener de ecuación de la recta, $P\ (1,-2,0)$ para hallar la distancia:

$$d(P,\pi) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \Rightarrow d(P,\pi) = \left|\frac{2\cdot 1 + (-2) - 0 + 3}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{6}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ u}$$

Si el valor de la distancia hubiera salido cero, diríamos que la recta y el plano son coincidentes.

Actividad propuesta

15. Calcula la distancia entre la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi: 2x + y + 5 = 0$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

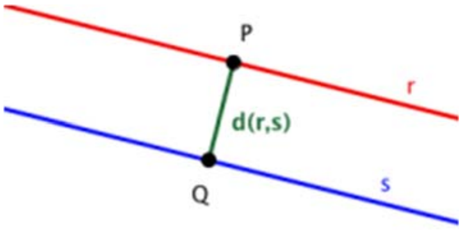
4.6. Distancia entre dos rectas

Definición:

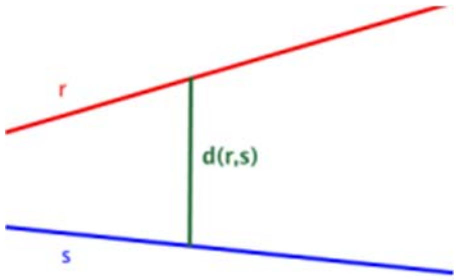
La distancia entre dos rectas r y s se define como la menor de las distancias $d(A, B)$, siendo $A \in r$, $B \in s$.

Dadas dos rectas r y s, se pueden presentar los siguientes casos:

- **Si las rectas son coincidentes o secantes:** la distancia es cero.
- **Si las rectas son paralelas:** la distancia entre ellas será la distancia de un punto de cualquiera de las rectas a la otra recta.



- **Si las rectas se cruzan:** la distancia entre ellas será la distancia de una de ellas al plano paralelo a ella que contiene a la otra recta.



En principio, deberíamos hacer un análisis de las posiciones relativas de las rectas antes de calcular la distancia entre ellas. Sin embargo, existe un razonamiento más simple que puede realizarse analizando los vectores directores y los vectores de posición de ambas rectas.

Dadas dos rectas r y s, sean los puntos $A \in r$ y $B \in s$, y sean, además, $\vec{u}$ un vector director de r y $\vec{v}$ un vector director de s. Entonces, hallando el vector $\overrightarrow{AB}$:

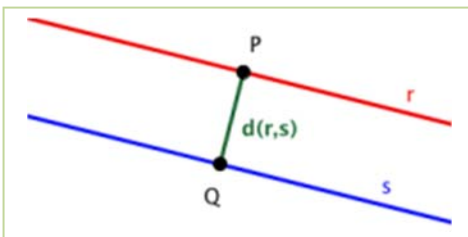
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ las rectas r y s son coincidentes
- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ y $\vec{u} \times \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ las rectas r y s son paralelas
- Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0 \Rightarrow$ las rectas r y s se cortan
- Si $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] \neq 0 \Rightarrow$ las rectas r y s se cruzan

Entonces, una vez que hemos comprobado las posiciones relativas de las rectas, procedemos según lo explicado:

- **Si las rectas son paralelas:**

  Como ya hemos obtenido los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$, hallamos la distancia con la fórmula:

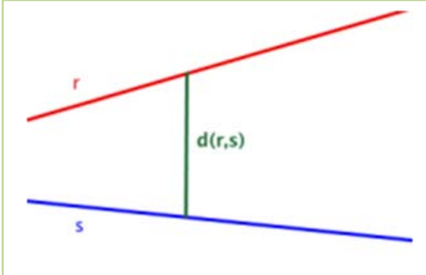
$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{v}|} \quad \text{o} \quad d(P,r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}|}$$



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

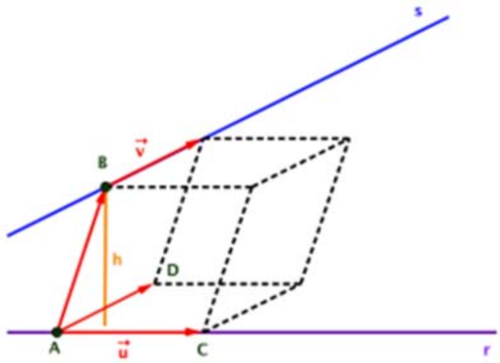
- **Si las rectas se cruzan:**
En este caso podemos calcular la distancia entre ellas mediante la expresión:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$$



Demostración

Consideramos el paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



Aplicando la fórmula del volumen de un paralelepípedo:

$$\text{Volumen}=\text{Área de la base}\cdot\text{Altura}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\cdot h$$

Con la interpretación geométrica del producto mixto tenemos:

$$\text{Volumen }=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

Igualando ambas expresiones:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\cdot h=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|\Rightarrow h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$$

La altura del paralelepípedo coincide con la distancia entre las rectas *r* y *s*, luego tenemos:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$$

Actividades resueltas

- *Halla la distancia entre las rectas* $r:\left.\begin{matrix}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{matrix}\right\}$ *y* $s: x+2=-2y=z-1$.

Necesitamos un punto y un vector director de cada una de las rectas. Como *r* viene dada como intersección de dos planos, obtenemos los vectores normales de ambos planos: $\vec{n}=(1,\,2,\,0)$ y $\vec{n}'=(0,\,1,\,1)$, para obtener el vector director de *r* como:

$$\vec{u}=\vec{n}\times\vec{n}'=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(2,-1,1)$$

Obtengamos un punto de *r*, para lo que damos un valor a una variable:

$$r:\left.\begin{matrix}x+2y-3=0\\ y+z+4=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x+0-3=0\Rightarrow x=3 & \Rightarrow A\,(3,\,0,\,-4)\\ 0+z+4=0\Rightarrow z=-4\end{cases}$$

Por otro lado, tenemos la recta

$$s: x+2=-2y=z-1\Rightarrow s:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1/2}=\frac{z-1}{1}$$

de la que obtenemos el punto $B\,(-2,\,0,\,1)$ y el vector director $\vec{v}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$, o mejor consideramos

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

el vector $\vec{v}' = (2,\ -1,\ 2)$ para simplificar los cálculos.

Empezamos hallando el producto vectorial para ver si son paralelas o no:

$$\vec{u}\times\vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 0\vec{k} = (-1,\ -2,\ 0)$$

No obtenemos el vector nulo, así que r y s se cortan o se cruzan.

Sea el vector $\overrightarrow{AB} = (-5, 0,\ 5)$, hallamos su producto mixto con $\vec{u}$ y $\vec{v}'$:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}'\right] = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 10 + 0 - (-10 - 5 + 0) = -20 + 15 = -5$$

El resultado es distinto de cero, así que r y s se cruzan. Utilizamos la expresión para la distancia:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}'\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}'|}$$

Hallamos el módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}'$:

$$|\vec{u}\times\vec{v}'| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

y sustituimos:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}'\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}'|} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\text{ u.}$$

Actividad propuesta

16. Halla la distancia entre las rectas $r: \left.\begin{matrix} x+2y-3z=1 \\ 2x-y+z+4=0 \end{matrix}\right\}$ y $s: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases}$.

17. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases}$.

18. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = -3-t \end{cases}$.

19. Halla la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ y $s: \begin{cases} x = 1-4t \\ y = -3-2t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

Geometría y arquitectura

En los libros de Secundaria que acostumbras a usar siempre aparecen edificios clásicos de la antigua Grecia, Roma y otras culturas antiguas.

Hoy en día estamos rodeados de edificios con líneas muy diferentes y sorprendentes, algunas de las cuales exploran aspectos de la geometría que hasta hace poco no se conocían. Esto no quiere decir que sólo hablemos de los edificios modernos. Los mocárabes de la *Alhambra*, en Granada, son un claro ejemplo de cómo jugar con las tres dimensiones y la repetición de motivos.

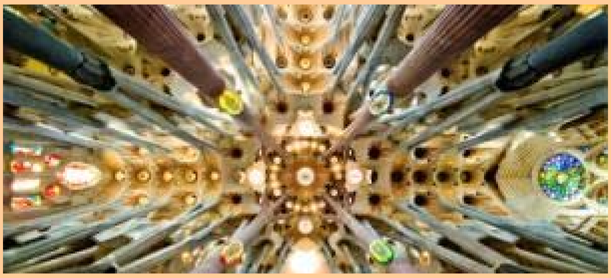
Mocárabes en la *Alhambra* – Granada

El Centro *Niemeyer* de Avilés

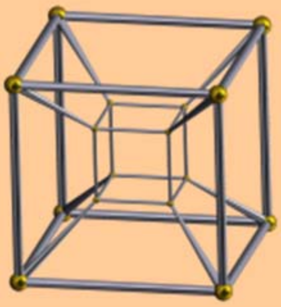
En otros casos se utilizan volúmenes de revolución, y se consiguen formas suaves de aspecto natural.

Aunque si se trata de imitar a la naturaleza, nada mejor que ver cómo *Gaudí* imitó la forma de los troncos y las ramas en las columnas de la Sagrada Familia.

***Sagrada Familia* de Barcelona**



Monumento a la *Constitución* – Madrid



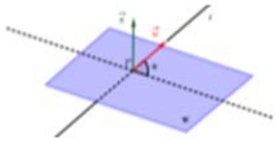
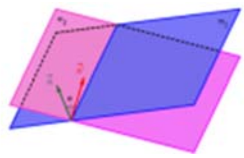
Se exploran, incluso, dimensiones superiores a tres. El Monumento a la Constitución de Madrid es el modelo tridimensional de lo que se denomina hipercubo, una figura de cuatro dimensiones, y recibe el nombre de ***Tesseract***.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

RESUMEN

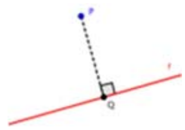
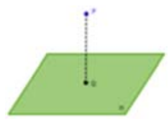
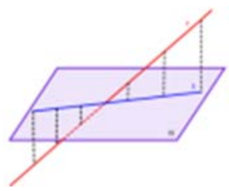
Dadas las rectas r y s, y los planos π y π' definidos por los siguientes vectores directores, normales y de posición:

	Recta r	Recta s	Plano π	Plano π'
Vector de posición	punto A	punto B	punto P	punto Q
Vector…	…director $\vec{u}$	…director $\vec{v}$	…normal $\vec{n}$	…normal $\vec{n}'$

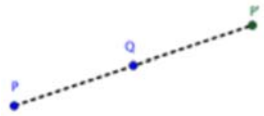
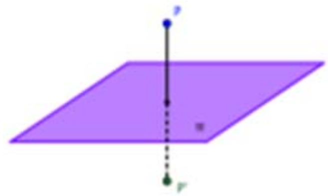
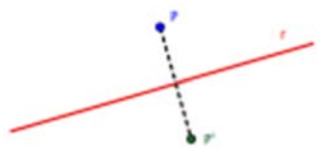
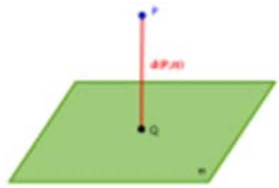
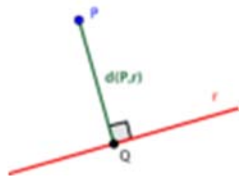
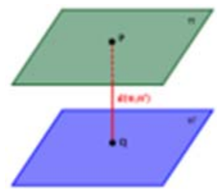
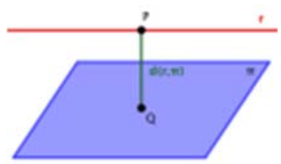
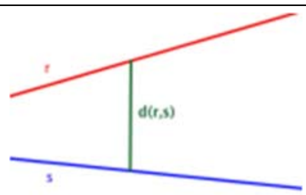
Ángulos en el espacio		
Ángulo entre dos rectas	$\alpha(r,s) = \text{arc cos}\dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$	
Ángulo entre recta y plano	$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen}\dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$	
Ángulo entre dos planos	$\alpha(\pi,\pi') = \text{arc cos}\dfrac{\lvert \vec{n}\cdot\vec{n}'\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{n}'\rvert}$	

Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas

	Coincidentes	Paralelos/as	Secantes	Perpendiculares	Se cruzan
r y s	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{u}\times\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$ y $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\neq 0$
r y π	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq\vec{0}$	$\vec{u}\times\vec{n}=\vec{0}$	———
π y π'	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'=\vec{0}$ y $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$	$\vec{n}\times\vec{n}'\neq\vec{0}$	$\vec{n}\cdot\vec{n}'=\vec{0}$	———

Proyecciones ortogonales		
De un punto sobre una recta	$\text{Proy}(P,r)=Q\ ,\ \overrightarrow{PQ}\perp r$	
De un punto sobre un plano	$\text{Proy}(P,\pi)=Q\ ,\ \overrightarrow{PQ}\perp \pi$	
De una recta sobre un plano	$\text{Proy}(r,\pi)=s\ ,\ \begin{cases} s\subset\pi \\ \pi_{rs}\perp\pi \end{cases}$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

Puntos simétricos		
De un punto respecto de otro punto	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$	
De un punto respecto de un plano	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}\,,\ Q = \mathrm{Proy}(P, \pi)$	
De un punto respecto de una recta	$P' \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ}\,,\ Q = \mathrm{Proy}(P, r)$	
Distancias		
Entre dos puntos	$d(A,B) = \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$	
De un punto a un plano	$d(P,\pi) = \dfrac{\lvert A x_0 + B y_0 + C z_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
De un punto a una recta	$d(P,r) = \dfrac{\left\lvert \vec{v} \times \overrightarrow{AP} \right\rvert}{\lvert \vec{v} \rvert}$	
Entre dos planos	$d(\pi, \pi') = d(P, \pi')\ \mathrm{si} \begin{cases} \pi \parallel \pi' \\ P \in \pi \end{cases}$	
De una recta a un plano	$d(r, \pi) = d(P, \pi)\ \mathrm{si} \begin{cases} r \parallel \pi \\ P \in r \end{cases}$	
Entre dos rectas	$d(r,s) = \dfrac{\left\lvert \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] \right\rvert}{\lvert \vec{u} \times \vec{v} \rvert}$	

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Estudia la posición relativa de las rectas $r: \frac{x}{2} = y + 2 = \frac{z+2}{1}$ y $s: x = -y + 1 = -2z$ y calcula:

   a) El punto de intersección.

   b) La ecuación del plano que las contiene.

   c) El ángulo que forman las rectas.

2. - Dados los planos $\pi_1: 3x + 2y - z = 6$ y $\pi_2: -2x + y + 3z - 6 = 0$, se pide:

   a) Estudiar su posición relativa.

   b) Hallar el ángulo que forman esos dos planos.

   c) Hallar la ecuación de una recta s que pasando por el punto $N(-2, 1, 3)$ es perpendicular a π_2.

3. - Halla la proyección vertical del punto $A\ (5, -2, -3)$sobre el plano $\pi: 2x + y - 2z + 4 = 0$.

4. - Halla la proyección de la recta $r \equiv -x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1$ sobre el plano $\pi: x + y + 2z - 2 = 0$, así como el ángulo que forman la recta y el plano.

5. - Obtener las coordenadas del punto simétrico de $A\ (0, -2, 2)$ respecto de la recta $r: 1 - x = y + 1 = z$

6. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A\ (3, 1, 2)$ respecto del plano $\pi: x + y - z + 4 = 0$.

7. - Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A\ (0, 2, -1)$ respecto de:

   a) La recta $r: 1 + x = y + 2 = 1 - z$

   b) El plano $\pi: x - y + z + 1 = 0$

8. - a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A\ (1, -3, 3)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $B\ (3, 0, -1)$ y $C\ (1, -1, 0)$.

   b) Obtén las coordenadas del punto simétrico de C respecto del plano.

9. - Dado el punto $A\ (-1, 2, 0)$ y la recta $r: x + 1 = -\frac{y}{2} = 2 - z$, se pide hallar:

   a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto A y corta perpendicularmente a la recta r.

   b) El punto de intersección de ambas rectas r y s.

   c) Las coordenadas del punto simétrico de A respecto de la recta r.

10. - Calcula la distancia del punto $M\ (-1, 1, 3)$:

    a) Al punto $N\ (1, -1, 2)$

    b) Al plano $\pi: 2x - y - z - 3 = 0$

    c) A la recta $r: x - 1 = 2y + 1 = 2 - z$

11. - Dados los planos $\pi_1: 3x - 2y + z = 4$ y $\pi_2: \{x = 2 - \lambda + 3\mu, y = -\lambda + 4\mu, z = -1 + \lambda - \mu\}$, estudia su posición relativa y calcular la distancia entre ellos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

12. - Hallar la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: -2x = y-3 = 2z+2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ y calcular la distancia entre ellas.

13. - Dadas los pares de rectas,

a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ s: \dfrac{x}{3} = y+1 = \dfrac{-z+1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z+1 \\ s: \dfrac{x-3}{2} = y+1 = \dfrac{z}{2} \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa.

b) Calcula la distancia entre ellas.

14.- Halla la proyección de la recta $r \equiv -x+2 = \dfrac{y-3}{2} = 3z+1$ sobre el plano $\pi: -x+3y+3z-3=0$, así como la distancia que hay entre la recta y el plano.

15. - Dada la recta $r: \begin{cases} y = x+2 \\ z = 1-3x \end{cases}$, se pide:

a) Halla la ecuación de la recta *s* que pasando por el punto $A\ (-1, 0, 1)$ es paralela a la recta *r*.
b) Calcula la distancia que hay entre ellas.
c) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M\ (-2, 0, 1)$ y contiene a la recta *r*.

16. - Halla la ecuación de un plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x - 4y + z + 3 = 0 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$ y dista 2 unidades del origen de coordenadas.

17. - Dados el plano y la recta:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad r: \left.\begin{matrix} x - y + 2 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix}\right\}$$

a) El punto de intersección de la recta *r* con el plano π.
b) El ángulo que forman la recta *r* y el plano π.
c) La ecuación de un plano π' perpendicular al plano π y que contenga a la recta *r*.

18. - Dados los planos $\pi_1 : x - y = 2$ y $\pi_2 : x + y - 2z - 4 = 0$, se pide:

a) Ecuación de una recta que pase por el punto $A(0, 1, 1)$ y sea paralela a los planos π_1 y π_2.
b) Valor de *m* y *n* sabiendo que el punto $C\,(m, 0, n) \in \pi_2$ y dista $\sqrt{2}$ unidades del plano π_1.

19. - Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $A\ (-1, 0, 1)$, $B\ (0, 1, 1)$ y el tercer vértice es el punto de corte del plano OYZ con la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y-2 = \dfrac{z+2}{-1}$.

20. - Halla la proyección de la recta $r: \dfrac{x+2}{2} = y-2 = \dfrac{z+2}{-1}$ sobre el plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos $A\ (-1, 0, 1)$ y $B\ (0, 1, 1)$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

AUTOEVALUACIÓN

1) El ángulo formado por las rectas $r: \left.\begin{array}{l} x=4-t \\ y=-3+t \\ z=2 \end{array}\right\}$ y $s: \frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+3}{-1}$ es:

a) $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{50}}$; b) $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$; c) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{28}}$; d) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}$

2) El ángulo formado por los planos $\pi: 3x-y+2z-1=0$ y $\pi': x+2y-z-5=0$ es:

a) $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}$; b) $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}}$; c) $\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$; d) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{11}}$

3) La proyección ortogonal del punto $P\,(0,0,-1)$ sobre la recta $r: \frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ es:

a) $(\frac{1}{7},\frac{12}{7},\frac{3}{7})$; b) $(\frac{-2}{7},\frac{10}{7},\frac{1}{7})$; c) $(\frac{11}{14},\frac{9}{14},\frac{13}{14})$; d) Ninguno de los anteriores

4) La proyección ortogonal del punto $P\,(0,0,-1)$ sobre el plano $\pi: x-2y+3z-1=0$ es:

a) $(\frac{2}{7},\frac{-4}{7},\frac{-4}{7})$; b) $(\frac{2}{7},\frac{-4}{7},\frac{-1}{7})$; c) $(\frac{4}{14},\frac{-8}{14},\frac{20}{14})$; d) Ninguno de los anteriores

5) El simétrico del punto $P\,(1,-1,1)$ respecto del punto $Q\,(0,-1,2)$ es:

a) $(1,-3,5)$; b) $(-1,-1,3)$; c) $(-3,-3,4)$; d) Ninguno de los anteriores

6) El simétrico del punto $P\,(1,-1,1)$ respecto de la recta $r: \frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ es:

a) $(\frac{29}{7},\frac{19}{7},\frac{17}{7})$; b) $(\frac{15}{7},\frac{-5}{7},\frac{10}{7})$; c) $(\frac{1}{7},\frac{9}{7},\frac{3}{7})$; d) Ninguno de los anteriores

7) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ al punto $B\,(-1,0,2)$ es:

a) 6; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{2}$; d) Ninguno de los anteriores

8) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ es:

a) $\frac{\sqrt{98}}{14}$; b) $\frac{\sqrt{89}}{14}$; c) $\sqrt{\frac{2}{11}}$; d) Ninguno de los anteriores

9) La distancia del punto $A\,(0,1,0)$ al plano $\pi: x-2y+3z-1=0$ es:

a) $\frac{1}{14}$; b) $\frac{2}{\sqrt{14}}$; c) $\frac{3}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

10) La distancia entre los planos $\pi: x-2y+3z-1=0$ y $\pi': 5x-y+2z-3=0$ es:

a) 0; b) $\frac{2}{\sqrt{30}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{14}}$; d) Ninguno de los anteriores

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

Apéndice: Problemas de geometría métrica en las P.A.A.U.

(1) Considera las rectas $r_1 : \left.\begin{matrix} x - z = 2 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}\right\}$ y $r_2 : \left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ 2y - z = -1 \end{matrix}\right\}$

a) Estudia la posición relativa de r_1 y r_2.

b) Encuentra, si es posible, un plano paralelo a r_1 que contenga a r_2.

c) Encuentra la distancia entre r_1 y r_2.

(2) Considera el punto $P\,(-1,0,1)$ y el plano $\pi : x - y + z + 2 = 0$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia *d* del punto P al plano π.

(3) Considera los puntos $A\,(1,2,-3)$ y $O\,(0,0,0)$.

a) Da la ecuación de un plano π_1 que pase por A y O, y sea perpendicular a $\pi_2 : 3x - 5y + 2z = 11$.

b) Encuentra la distancia del punto medio de A y O a π_2.

(4) Considere el plano $\pi : x - y + z = -1$ y el punto $P\,(1,0,1)$.

a) Obtén el punto P' simétrico de P respecto de π.

b) Halla el punto de corte del plano π con la recta que pasa por P y P'.

(5) Sea *s* la recta que pasa por los puntos $A\,(1,1,0)$ y $B\,(0,1,0)$. Considera la recta $r : \left.\begin{matrix} y = 0 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$.

a) Escribe unas ecuaciones cartesianas de la recta *s*.

b) Da la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

c) Obtén la distancia entre *r* y *s*.

(6) Considera un movimiento en el espacio tal que a cada punto de coordenadas (a, b, c) lo mueve al punto de coordenadas $(a + b, a + b + c, a + b)$.

a) Busca el conjunto de puntos que se mueven al origen de coordenadas.

b) Da una ecuación del plano π que determinan los puntos del apartado (a) y el punto $(1,1,1)$.

c) Busca la distancia del origen de coordenadas al plano π.

(7) Sean el punto $P\,(-1,2,0)$ y el plano $\pi : 2x - 3y + z = 8$. Calcula:

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π.

b) La distancia d del punto P al plano π.

c) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d.

(8) Se consideran los puntos en el espacio $A\,(1,-1,1)$ y $B\,(2,2,2)$.

a) Halla el punto medio de A y B.

b) Da la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

(9) Considere el plano $\pi : x + y - z = 0$ y la recta $r : \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\}$.

a) Halla la posición relativa de la recta y el plano.

b) Encuentra una recta perpendicular a ambos.

c) Busca la mínima distancia entre la recta y el plano dados.

(10) a) Determina el valor de k para que los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,-2,0)$, $C(2,0,3)$ y $D(1,1,k)$ se encuentren en el mismo plano.

b) Halla la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por los puntos A, B y C.

(11) Dado el punto $O(0,0,0)$, busca un punto O' del espacio tal que la recta que pasa por O y O' sea perpendicular al plano π de ecuación $x + y + z = 3$ y las distancias de O a π y de O' a π coincidan.

(12) Se consideran la recta y plano siguientes:

$$r : \left.\begin{matrix} x = 1 + 2t \\ y = -5 - 5t \\ z = -3 + 2t \end{matrix}\right\} \qquad \pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + 2y + 4z - 2 = 0$$

a) Determina la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.

b) Determina la posición relativa de los dos planos.

c) Calcula la distancia de r al plano π_2.

(13) a) Obtén la posición relativa de los planos π_1, que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,-1)$, y π_2, que pasa por $A'(3,0,0)$, $B'(0,6,0)$ y $C'(0,0,-3)$.

b) Busca la mínima distancia entre los planos anteriores.

(14) Sean el punto $P(-1,2,0)$ y el plano $\pi : x + y - z + 2 = 0$. Calcula:

a) La ecuación de una recta que pase por el punto P y corte al plano π.

b) La distancia del punto P al plano π.

(15) Se consideran el plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,-1)$, y el plano π_2 que pasa por los puntos $P(3,0,0)$, $Q(0,6,0)$ y $R(0,0,-3)$. Calcula:

a) Las ecuaciones generales o implícitas de π_1 y π_2.

b) La posición relativa de π_1 y π_2.

c) La distancia entre π_1 y π_2.

(16) Considere los puntos $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ y $C(0,0,-1)$.

a) Da las ecuaciones de la recta r que pasa por B y C.

b) Calcula el plano π que pasa por A y es perpendicular a r.

c) Halla el punto de corte entre r y π.

c) Obtén el punto simétrico de A respecto de r.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

(17) Sean el punto $P\ (-1,2,0)$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$. Calcula:

a) La ecuación del plano π perpendicular a *r* pasando por P.

b) El punto de intersección entre *r* y π.

c) La distancia del punto P a la recta *r*.

(18) Dado el punto $A\ (0,1,2)$ y el plano $\pi : x - y + z - 4 = 0$.

a) Calcule la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto A.

b) Halle el punto de intersección entre *r* y π.

c) Halle el punto simétrico de A respecto de π.

(19) Se consideran los puntos $A\ (2,-1,1)$ y $B\ (-2,3,1)$.

a) Halla los puntos C y D que dividen al segmento $\overline{AB}$ en tres partes de igual longitud.

b) Halla el plano respecto al cual los puntos A y B son simétricos.

(20) Se denota por *r* la recta $x - 6 = y - 7 = \frac{z-4}{-2}$ y por P el punto de coordenadas $(1,0,1)$.

a) Halle la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a *r*.

b) Halle el punto de *r* más próximo a P y halla la distancia de P a *r*.

(21) Se denota por *rs* la recta $x - 1 = 1 - y = z - \frac{1}{2}$ y sea *s* la recta que pasa por $A\ (1,0,1)$ y $B\ (1,2,0)$.

a) Estudia si las rectas *r* y *s* se cortan y, si se cortan, halle el punto de intersección.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

c) Halla el punto de *r r* que equidista de A y B.

(22) Sean las rectas

$$r: \left.\begin{matrix} 3x + y = 1 \\ x - kz = 2 \end{matrix}\right\} \qquad \text{y} \qquad s: \left.\begin{matrix} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{matrix}\right\}.$$

a) Estudia si para algún valor de k las rectas son paralelas.

b) Estudia si para algún valor de k las rectas son perpendiculares.

c) Halla la distancia del punto $A\ (1,1,1)$ a la recta *s*.

(23) Dados los puntos $A\ (2,2,0)$, $B\ (0,0,2)$ y $C\ (0,1,2)$.

a) Halla el plano π que contiene a los tres puntos.

b) Calcula un punto P que esté a distancia de $2\sqrt{2}$ unidades del plano π y del punto medio del segmento $\overline{AB}$.

c) Considerando $D\ (2,1,1)$ calcula el volumen del tetraedro limitado por los puntos A, B, C y D.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

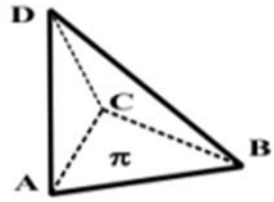
(24) Sea el tetraedro de la figura formado por $A\,(3,0,0)$, $B\,(0,2,0)$, $C\,(0,0,6)$ y $D\,(\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C.

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π.

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π.



(25) Sea el punto $A\,(1,0,0)$ y el plano $\pi : 2x + y - z = 1$. Halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

b) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta a π.

c) La distancia entre los dos planos.

(26) Sean los puntos $A\,(-1,1,0)$ y $B\,(0,1,1)$. Determina:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que une los puntos.

b) La ecuación del plano π que pasa por A y es perpendicular a la recta *r*.

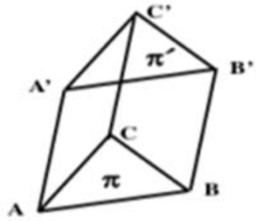
c) La distancia del punto B al plano π.

(27) Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A\,(1,-1,0)$, $B\,(1,0,-1)$, $C\,(0,1,-1)$ y $A'\,(1,-1,\alpha)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.

b) El valor de α para que el plano π', que contiene los puntos A', B' y C', diste una unidad del plano π.

c) Para $\alpha=1$, el plano π'y el volumen del prisma.



(28) Los puntos $A\,(1,1,0)$, $B\,(1,1,1)$, $C\,(2,3,0)$ y D forman un paralelogramo. Calcule:

a) Las coordenadas del vértice D opuesto a B.

b) El área del paralelogramo.

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(29) Se considera el paralelepípedo cuyos vértices de la cara inferior son los puntos $A\,(-1,1,0)$, $B\,(0,1,1)$, $C\,(3,0,0)$ y $D\,(2,0,-1)$ con A y C vértices opuestos. Sea $A'\,(-3,1,0)$ el vértice adyacente a A en la cara superior. Calcula:

a) Las ecuaciones de los planos que contienen a las caras inferior y superior.

b) Los vértices de la cara superior.

c) El volumen del paralelepípedo.

(30) Dada la recta *r* de ecuación $x + 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{4}$ y el punto $P\,(1,2,1)$. Calcula:

a) La ecuación de la recta que pasa por P, es perpendicular a *r* y se apoya en *r*.

b) Las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto a *r*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde

(31) Sea el punto $A(1,2,0)$ perteneciente a un plano π. Calcula:

a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0,0,-2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A.

b) La ecuación de un plano cuya distancia a π sea de 3 unidades.

c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A.

(32) Sea la recta $r: \left.\begin{array}{r} x - y + z = -1 \\ 6x - 3y + 10z = 6 \end{array}\right\}$.

a) Calcula las coordenadas de los puntos P y Q que pertenecen a la recta y distan 5 unidades del origen de coordenadas.

b) Sea M el punto medio del segmento de extremos P y Q. Calcula sus coordenadas.

c) Justifica por qué de todos los puntos de la recta r, M es el más próximo al origen de coordenadas.

(33) Los puntos $P(1,1,0)$ y $Q(0,2,1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r: \{y = 0, z = 1\}$.

a) Determina los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene al segmento $\overline{PQ}$ para que la solución fuese única? Razona la respuesta.

(34) Dado el tetraedro con un vértice O sobre el origen de coordenadas y los otros tres A, B y C sobre los semiejes positivos OX, OY y OZ respectivamente, se pide hallar:

a) Las coordenadas de A, B y C sabiendo que el volumen del tetraedro es $\frac{8}{3}$ u^3, que las aristas OA y OB tienen igual longitud y que la arista OC tiene doble longitud que OA.

b) La ecuación de la altura del tetraedro correspondiente a la cara ABC.

c) La distancia entre las rectas AC y OB.

d) El ángulo que forman las aristas AC y AB.

(35) Dados los puntos $A(-3,1,2)$, $B(1,-1,0)$ y $C(-1,0,0)$, se pide:

a) Comprobar si están alineados, y, en caso contrario, calcular el perímetro y el área del triángulo.

b) Hallar el valor de la altura correspondiente al vértice A.

c) Calcular el valor del ángulo correspondiente al vértice B.

d) Hallar la ecuación de una de las tres medianas.

(36) Dado un triángulo de vértices $A(2,1,1)$, $B(0,5,3)$ y $C(4,3,1)$, halla:

a) El perímetro.

b) El área.

c) El valor de la altura correspondiente al vértice A.

d) La ecuación de una mediana.

e) La ecuación de una mediatriz.

f) La ecuación de una altura.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores

(37) Sabiendo que la ecuación de un plano es $\pi : x + 2y - 2z + 4 = 0$:

a) Halla la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que diste una unidad del punto $Q(1,0,-1)$.

b) Halla la distancia entre ambos planos π y π'.

c) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde el plano π corta a los ejes de coordenadas.

(38) Dado el plano $\pi : x + y + z = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1,0,0) + \lambda \cdot (0,1,1)$, y el punto $P(1,1,0)$:

a) Halla la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.

b) Halla el punto P', simétrico de P respecto de r.

c) Halla el punto P'', simétrico de P respecto de π.

(39) Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ y $D(0,1,3)$.

a) Halla el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.

b) Calcula la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.

c) Halla la distancia entre las rectas AC y BD.

(40) Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

a) Halla las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

b) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determina la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

c) Determina la posición relativa del plano π y la recta $r : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$

(41) Halla los puntos de la recta:

$$r : \begin{cases} 2x \quad + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$ u.

(42) Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$Q(0; 1; 0), se pide:

a) Halla todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describe dicho conjunto de puntos.

b) Halla todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican:

$$\text{dist}(P, S) = 2 \cdot \text{dist}(Q, S)$$

donde "dist" significa distancia.

(43) Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Hallar el punto Q intersección de π con r.

c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

d) Hallar el área del triángulo PQR.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Milagros Latasa Asso y Luis Carlos Vidal Del Campo
Imágenes creadas por los autores
Textos Marea Verde