Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 2: Determinantes

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 6 - (-1) = 7$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

2 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot (0) + 1 \cdot 2 \cdot 3) - \big(0 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot (-2)\big) = (-6 + 6) - (4 - 12) = -(-8) = 8$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 4) - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2) \cdot (-1)) = 8 - 10 = -2$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -24 - (4 - 8) = -20$

3 Comprueba que ocurre en un determinante de orden dos cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$$

Al ser solo 2 filas solo hay 1 posibilidad de permutación y al hacerlo dos veces vuelve a su forma original.

4 Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = |A|$$

El resultado sería el mismo ya que da igual hacer $a \cdot d - b \cdot c$ que $d \cdot a - c \cdot b$ debido a que en ambos casos se va a restar el mismo número menos el mismo número.

5 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

6 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

Porque la propiedad 5 dice: “Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 8 \quad \to \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

Sea A la matriz inicial y B la matriz obtenida permutando dos filas, entonces $|A| = -|B|$ Ahora permutamos dos columnas de la matriz B obteniendo la matriz D, entonces: $|B| = -|D|$ Por tanto $|A| = -|B| = -(-|D|) = |D|$.

8. Comprueba que en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = [(1\cdot5\cdot8) + (4\cdot8\cdot2) + (2\cdot5\cdot7)] - [(7\cdot5\cdot2) - (8\cdot5\cdot1) - (2\cdot4\cdot8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = [(1\cdot5\cdot8) + (4\cdot8\cdot2) + (2\cdot5\cdot7)] - [(7\cdot5\cdot2) - (8\cdot5\cdot1) - (2\cdot4\cdot8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

9. Demuestra estas propiedades para determinantes de orden tres.

Propiedad 7, si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & 20 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [(1\cdot2\cdot8) + (2\cdot6\cdot2) + (4\cdot4\cdot3)] - [(3\cdot8\cdot2) - (6\cdot4\cdot1) - (2\cdot4\cdot3)] = 5\cdot0 = 0$$

Propiedad 8, si lo elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \to & 2+3=5 \\ \to & 5+1=6 \\ \to & 1+4=5 \end{matrix}$$

$$|A| = [(2\cdot1\cdot5) + (5\cdot4\cdot5) + (3\cdot6\cdot1)] - [(1\cdot1\cdot5) - (2\cdot6\cdot4) - (5\cdot3\cdot5)] = 128 - 128 = 0$$

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el determinante de partida.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [(6\cdot(-2)\cdot0) + (7\cdot(-3)\cdot5) + (1\cdot1\cdot(-4))] - [(5\cdot(-2)\cdot(-4)) - (1\cdot(-3)\cdot6) - (7\cdot1\cdot0)] = -131$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= [(6\cdot(-2)\cdot(-10) + (7\cdot(-3)\cdot 13) + (1\cdot 4\cdot(-4))] - [(13\cdot(-2)\cdot(-4)) - (4\cdot(-3)\cdot 6) - (7\cdot 1\cdot(-10)] = -131$$

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres:

PROPIEDAD: *El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:* $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

a) A=$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} 6\cdot 2+1\cdot 1+5\cdot 2 & 0+0+5\cdot(-2) & 6\cdot 2+1\cdot(-1)+0 \\ 7\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot 2 & 0+0+1\cdot(-2) & 7\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+0 \\ (-4)\cdot 2-3\cdot 1+0 & 0+0+0 & (-4)\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 23 & -10 & 11 \\ 14 & -2 & 16 \\ -11 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -11\cdot\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 23 & -10 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= -11(-160-(11\cdot(-2)) - 5(23\cdot(-2)-(14\cdot(-10))$ =-11(-160+22)-5(-46+140)=

1518-470=1048

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-21-8)-(-18+4) = -131$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

$$|A|\cdot|B| = -131\cdot(-8) = 1048$$

b) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2)-(3+1) = -5$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A| \cdot |B| = 1 \cdot (-5) = -5$$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0+0+2\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0 \\ 0+0-2\cdot 2 & 0+0+(-2)\cdot(-2) & 0+0+0 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 0 & 0+0+0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ =Fila2= Fila 2 + Fila 1= $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4(25-9) = 64$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

$|A| \cdot |B|$= (-8)·(-8)=64

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos A·B y B·A, pero no se verifique que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

Para que existan los productos A·B y B·A es necesario que las matrices A y B sean:

a) Cuadradas y del mismo orden: A_{nxn} y B_{nxn}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A y se cumple que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

b) O que sean A_{mxn} y B_{nxm}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A, pero no son iguales porque A·B es de orden m y B·A es de orden n, y por tanto no se cumple que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

13. Dadas las matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no.

$\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ $\longrightarrow$ Falso, porque: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + 2\boldsymbol{AB}$ $\longrightarrow$ Falso, porque: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ $\longrightarrow$ Falso, porque: $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

$\boldsymbol{d})$ $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 - 2\boldsymbol{AB}$ $\longrightarrow$ Falso, porque: $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

$\boldsymbol{e})\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$\boldsymbol{f})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)^2| = |(A+B)(A+B)| = |A+B||A+B|$

$\boldsymbol{g})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 + 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso porque: $|(A+B)^2| = |(A+B)(A+B)| = |A+B||A+B|$

$\boldsymbol{h})\ |(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2| = |(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

$\boldsymbol{i})\ |(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2| = |(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

$\boldsymbol{j})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})| = |\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right) = 1 \cdot (-1 \cdot 2 \cdot (-2)) = 4$$

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot a \quad ; \quad 1 \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot a = 24 \quad ; \quad 8a = 24 \to a = 3$$

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina :

A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) $|\boldsymbol{A}|\ \ \boldsymbol{y}\ \ |\boldsymbol{B}|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (8-5) = 3$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = ((-10) - 18 + 6) - (45 + 6 + 4) = -77$$

b) $[\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})]^t\ \ \boldsymbol{y}\ \ [\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B})]^t$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -21 \\ 22 & -11 & 0 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} -16 & 22 & -13 \\ 1 & -11 & -4 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

c) $\mathbf{A \cdot [Adj(A)]^t}$ ***y*** $\mathbf{B \cdot [Adj(B)]^t}$

$$A \cdot [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 & -10+10 \\ 4-4 & -5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 22 & -13 \\ 1 & -11 & -4 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16+2-63 & 22-22 & -13-8+21 \\ 16+5-21 & -22-55 & 13-20+7 \\ -48+6+42 & 66-66 & -39-24-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -77 & 0 & 0 \\ 0 & -77 & 0 \\ 0 & 0 & -77 \end{pmatrix}$$

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1º. Ahora mostraremos algunos ejemplos del menor complementario (en los que tenemos que realizar en todos los elementos de la matriz), y ya realizaremos la primera parte del ejercicio.

$$\alpha_{11} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & 0 & 2 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha_{12} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ -1 & \cancel{0} & 2 \\ 1 & \cancel{1} & 1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha_{13} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ -1 & 0 & \cancel{2} \\ 1 & 1 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1\cdot 0 - 2\cdot 1) & (-1\cdot 1 - 2\cdot 1) & (-1\cdot 1 - 0\cdot 1) \\ (1\cdot 1 - 0\cdot 1) & (2\cdot 1 - 1\cdot 0) & (2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) \\ (1\cdot 2 - 0\cdot 0) & (2\cdot 2 - 0\cdot 1) & (2\cdot 0 - (-1\cdot -1)) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2º. Ahora tendremos que asignar los signos. Lo que indica el + es que no varía su signo y el –, lo contrario, que sí se tiene que cambiar en la matriz adjunta.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Halla $|C|$, $[Adj(C)]^t$ y efectúa el producto $C \cdot [Adj(C)]^t$

1º. Primero realizaremos el determinante de la matriz con la **Regla de Sarrus**.

- 1º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \rightarrow$ ((2·0·1) + (-1·1·0) + (1·-1·2)) = -2
- 2º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \rightarrow$ $((\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}\cdot\mathbf{1})$ + (-1·-1·1) + (2·2·1)) = 5
- 3º (-2) – (5)= -7

2º. Para hallar la traspuesta de la matriz adjunta solo debemos de colocar las filas donde las columnas y las columnas donde las filas.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}\cdot[\mathrm{Adj(C)}]^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((-2\cdot 2)+(-1\cdot 3)+(0\cdot -1)) & ((2\cdot 1)+(-1\cdot 2)+(0\cdot -3)) & ((2\cdot -2)+(-1\cdot -4)+(0\cdot -1)) \\ ((-1\cdot -2)+(0\cdot 3)+(2\cdot -1)) & ((-1\cdot 1)+(0\cdot 2)+(3\cdot 2)) & ((-1\cdot -2)+(0\cdot -4)+(-1\cdot 2)) \\ ((1\cdot -2)+(3\cdot 1)+(-1\cdot 1)) & ((1\cdot 1)+(2\cdot 1)+(1\cdot -3)) & ((1\cdot -2)+(-4\cdot 1)+(1\cdot -1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

c) ¿Qué observas?

-Lo primero que podemos apreciar es una matriz escalar.

Podemos apreciar que -7 es el valor del determinante de la matriz, esto quiere indicar que el producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta nos da el valor del determinante por la matriz identidad.

$$\mathbf{C}\cdot[\mathbf{Adj(C)}]^{\mathbf{t}} = |\mathbf{C}|\cdot\mathbf{I}$$

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1}=I$ y $B\cdot B^{-1}=I$.

a) $A\cdot A^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1\cdot -1)+(1\cdot 2) & (1\cdot 1)+(-1\cdot 1) \\ (2\cdot -1)+(1\cdot 2) & (1\cdot 2)+(1\cdot -1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot B^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 16/77 & -22/77 & 13/77 \\ -1/77 & 11/77 & 4/77 \\ 21/77 & 0 & -7/77 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 16/77+2\cdot -1/77+3\cdot 21/77 & -1\cdot 16/77+5\cdot -1/77+1\cdot 21/77 & 3\cdot 16/77+6\cdot -1/77\pm 2\cdot 21/77 \\ 1\cdot -22/77+2\cdot 11/77+3\cdot 4/77 & -1\cdot -22/77+5\cdot 11/77+1\cdot 4/77 & 3\cdot -22/77+6\cdot 11/77\pm 2\cdot 4/77 \\ 1\cdot 13/77+2\cdot 0+3\cdot -7/77 & -1\cdot 13/77+5\cdot 0+1\cdot -7/77 & 3\cdot 13/77+6\cdot 0\pm 2\cdot -7/77 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$\boldsymbol{a})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \to |A| = (1\cdot 4) - (2\cdot 3) = 4 - 6 = -2$

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |B| = (2\cdot 5) - \big(4\cdot(-3)\big) = 10 + 12 = 22$

$\boldsymbol{c})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \to |C| = (a\cdot b) - \big(5\cdot(-5)\big) = ab + 25$

$\boldsymbol{d})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |D| = (a\cdot a) - (b\cdot b) = a^2 - b^2$

$\boldsymbol{e})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m^2} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to |E| = (m^2\cdot 1) - (m\cdot m) = m^2 - m^2 = 0$

$\boldsymbol{f})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to |F| = [(1\cdot 0\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot 0) + (1\cdot 1\cdot 0)] - [(0\cdot 0\cdot 0) + (1\cdot 1\cdot 1) +$
$(1\cdot 1\cdot 1)] = 0 - 2 = -2$

$\boldsymbol{g})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |G| = [(1\cdot 1\cdot 5) + (0\cdot 4\cdot 1) + (0\cdot 0\cdot 3)] - [(3\cdot 1\cdot 1) + (0\cdot 0\cdot 5) +$
$(0\cdot 4\cdot 1)] = 5 - 3 = 2$

$\boldsymbol{h})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |H| = \big[(1\cdot 3\cdot 5) + (0\cdot 1\cdot 3) + \big((-2)\cdot 4(-4)\big)\big] - \big[\big(3\cdot 3(-4)\big) +$
$\big((-2)\cdot 0\cdot 5\big) + (4\cdot 1\cdot 1)\big] = (15 + 32) - (-36 + 4) = 47 - (-32) = 47 + 32 = 79$

$\boldsymbol{i})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |I| = [(a\cdot a\cdot a) + (1\cdot 1\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot 1)] - [(1\cdot a\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot a) +$
$(1\cdot 1\cdot a)] = (a^3 + 1 + 1) - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$

$\boldsymbol{j})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix} \to |J| = [(m\cdot(-1)\cdot m) + (1(-3)\cdot 3) + (1(-1)\cdot 5)] - [(3(-1)\cdot 5) +$
$(1\cdot 1\cdot m) + ((-1)(-3)m)] = [(-m^2) + (-9) + (-5)] - [(-15) + (m) + (3m)] =$
$(-m^2 - 14) - (4m - 15) = -m^2 - 4m + 1$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{b+c} \\ \mathbf{1} & \mathbf{b} & \mathbf{c+a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{c} & \mathbf{a+b} \end{pmatrix} \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 \to \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{b} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{c} & \mathrm{a+b+c} \end{vmatrix} = 0$ Porque C_1 y C_3 son proporcionales

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c+d} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+d} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d & b \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b+c & d \end{vmatrix} C_2 + C_3 \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d+b & b \\ 1 & b+d+c & c \\ 1 & b+c+d & d \end{vmatrix} = a\cdot 0 = 0$

Porque C_2 y C_1 son proporcionales

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

son múltiplos de 15.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 5 como factor común $\rightarrow 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$ Restamos la columna 2 a la columna 3 $\rightarrow$ $-C_2 + C_3 \rightarrow 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 3 factor común $\rightarrow 3 \cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 5 y el 3 factor común $\rightarrow 3 \cdot 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow$ Como 121; 198 y 506 son divisibles entre 11 $\rightarrow 100C_1 + 10C_2 + C_3 \rightarrow$
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 11 factor común $\rightarrow 11\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ -F_1 + F_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = C_1 \leftrightarrow C_2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 2 \\ 0 & -1 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-F_2 + F_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -F_3 + F_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -4 \cdot 11$$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -40 & 25 & 40 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$

Como hay dos columnas iguales se anula el determinante por lo que $\rightarrow\ A_1 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow F_2 + F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos 5 factor común $\rightarrow 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. Sabiendo que: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$**=3 calcula, sin desarrollar, el valor de:** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{-i} & \boldsymbol{-g} & \boldsymbol{-h} \\ \boldsymbol{f+c} & \boldsymbol{d+a} & \boldsymbol{e+b} \\ \boldsymbol{3c} & \boldsymbol{3a} & \boldsymbol{3b} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ c & a & b \end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + |0|\right) = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = F3 \leftrightarrow F1 \rightarrow$$

$$-\begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} = C1 \leftrightarrow C3 \rightarrow -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = C1 \leftrightarrow C2 \rightarrow -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = -2$***, calcula sin desarrollar:***

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2z} & \boldsymbol{2y} \\ \boldsymbol{-3p} & \boldsymbol{-3r} & \boldsymbol{-3q} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -p & -r & -q \end{vmatrix} = F2 \leftrightarrow F3 \rightarrow -\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & q & r \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$=C3 \leftrightarrow C2 \rightarrow -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{a-3p} & \mathbf{-2a} \\ \mathbf{y} & \mathbf{b-3q} & \mathbf{-2b} \\ \mathbf{z} & \mathbf{c-3r} & \mathbf{-2c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x & a-3p & -a \\ y & b-3q & -b \\ z & c-3r & -c \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}\right) =$$

$$-3\left(|0|-3\begin{vmatrix} x & p & a\\ y & q & b\\ z & r & c\end{vmatrix}\right)\rightarrow cambiamos\ fila\ por\ columna \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z\\ p & q & r\\ a & b & c\end{vmatrix}\rightarrow F1\leftrightarrow F3=-\begin{vmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}=-2$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-2p+3a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-3p}\\ \boldsymbol{z-2r+3c} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{-3r}\\ \boldsymbol{y-2q+3b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-3q}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p\\ z-2r+3c & c & -3r\\ y-2q+3b & b & -3q\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} x-2p & a & -3p\\ z-2r & c & -3r\\ y-2q & b & -3q\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & a & -3p\\ 3c & c & -3r\\ 3b & b & -3q\end{vmatrix}\right)=$$ 2º determ. Columna 1 y 2 proporcionales

$$=\begin{vmatrix} x-2p & a & -3p\\ z-2r & c & -3r\\ y-2q & b & -3q\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} x & -a & -3p\\ z & -c & -3r\\ y & -b & -3q\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2p & a & -3p\\ -2r & c & -3r\\ -2q & b & -3q\end{vmatrix}\right)=$$ 2º determ. Columna 1 y 3 proporcionales

$$3\begin{vmatrix} x & -a & -p\\ z & -c & -r\\ y & -b & -q\end{vmatrix}\rightarrow cambiamos\ filas\ por\ columnas \rightarrow (-3)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & z & y\\ a & c & b\\ p & r & q\end{vmatrix}=$$

$$C2\leftrightarrow C3=(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z\\ a & b & c\\ p & q & r\end{vmatrix}F1\leftrightarrow F2=3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ x & y & z\\ p & q & r\end{vmatrix}F2\leftrightarrow F3=3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}=3\cdot(-2)=-6$$

8. ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale –5 y que el determinante de la matriz 3·A^t vale –1215?

$|A|=-5 \qquad |3\cdot A^T|=-1215 \qquad |3\cdot A^T|=3^n\cdot|A^t|=3^n\cdot(-5)=-1215$

$2^n=\frac{-1215}{-5}=243 \qquad 3^n=3^5 \qquad n=5$

9. justifica sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2}\\ \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{y^3} & \boldsymbol{z^3}\end{vmatrix}=\boldsymbol{x\cdot y\cdot z}\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2}\end{vmatrix}$.

Sacamos ***x*** de la primera columna, ***y*** de la segunda y ***z*** de la tercera.

10. Dadas las matrices A y B de orden 4x4 con $|A|=3$ y $|B|=2$ y calcula $|A^{-1}|$, $|B^tA|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

$$\boldsymbol{A\cdot A^{-1}}=I\rightarrow|A\cdot A^{-1}|=|I|\rightarrow|A|\cdot|A^{-1}|=1\rightarrow|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{3}$$

$$|\boldsymbol{B^tA}|=|B^t|\cdot|A|=|B|\cdot|A|=2\cdot3=6$$

$$|(\boldsymbol{AB^{-1}})^{\boldsymbol{t}}|=|AB^{-1}|=|A|\cdot\frac{1}{|B|}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

11. Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{a}\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{a} & \mathrm{a}\\ \mathrm{a+b} & \mathrm{a} & \mathrm{a}\\ \mathrm{a} & \mathrm{a+c} & \mathrm{a}\end{vmatrix}\rightarrow\begin{matrix}-C_3+C_1\\ -C_3+C_2\end{matrix}\rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathrm{a}\\ \mathrm{b} & 0 & \mathrm{a}\\ 0 & \mathrm{c} & \mathrm{a}\end{vmatrix}=\mathrm{a}\begin{vmatrix} \mathrm{b} & 0\\ 0 & \mathrm{c}\end{vmatrix}=\mathrm{abc}$$

12.- Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

a) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$ calculamos : $-C_4+C_3;\ \ -C_4+C_2;\ \ -C_4+C_1;$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ b & b & b & (1-b) \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ b & b & b \end{vmatrix} \rightarrow \quad (a \cdot b) \begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$(a \cdot b) \begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} = (ab \cdot b) \cdot ab \quad ; \quad b \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = (-ab) \cdot -b$$

$$= ab(ab-b) - b(-ab) = (ab)^2 - (ab)^2 + (ab)^2 = (ab)^2$$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \rightarrow$ Calculamos : $-F_1+F_2;\ -F_1+F_3;\ -F_1+F_4$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ -a+1 & a-1 & 0 & 0 \\ -a+1 & 0 & a-1 & 0 \\ -a+1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix};$$ Calculamos: $C_1+C_2+C_3+C_4$

$$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) \cdot (a-1)(a-1)(a-1) = (a+3) \cdot (a-1)^3$$

13.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 28; \qquad |A| = 28$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9; \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

b) $|A| \cdot X + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot X \rightarrow$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$|A| = 28; \qquad A_{23} = 5; \qquad \alpha_{11} = 8; \qquad a_{13} = -8$$

$\rightarrow 28x + 5 + 24 = -2 - 8x; \quad 28x + 8x = -2 + 3 - 24 \quad 36x = -31 \quad x = -\frac{31}{36}$

14. Sea la matriz simétrica A ∈ $\mathbf{M_{3x3}}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$.

Comprueba si es verdadero o falso y si son falsas, indica la respuesta correcta.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- $|-3A| = 9\,; -3A = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3b & -3d & -3e \\ -3c & -3e & -3f \end{pmatrix}; |-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3b & -3d & -3e \\ -3c & -3e & -3f \end{vmatrix} = -3 \cdot$ $\begin{vmatrix} a & -3b & -3c \\ b & -3d & -3e \\ c & -3e & -3f \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & -3c \\ b & d & -3e \\ c & e & -3f \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = (-3)^3 \cdot$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-27}{-3} = 9;\ Verdadero$
- $\frac{|A \cdot A^t|}{3} = 3^{-3}\,;\ |A| = |A^t|\,;\ \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} = \frac{\frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}\,; Verdadero$
- $A^3 \notin M_{3x3}\,;\ \mathrm{A_{3x3}}\,;\ \mathrm{A}^2 = \mathrm{A_{3x3}} \cdot \mathrm{A_{3x3}} = \mathrm{A'_{3x3}}\,; \mathrm{A}^3 = \mathrm{A'_{3x3}} \cdot \mathrm{A_{3x3}} = \mathrm{A''_{3x3}}\,;$

  Falso (ya que al multiplicar una matriz cuadrada por sí misma, la dimensión de esta no varía)
- $4|A| - 7|A^t| = 1\,;\ |A| = |A^t|\,;\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1\,;$

  Verdadero
- $2A \in M_{6x6};\ 2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix} \neq M_{6x6}\,;\ Falso$
- $|4A - A^t| = -3^2\,; A = A^t\,; 4A - A^t = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3b & 3d & 3e \\ 3c & 3e & 3f \end{pmatrix} =$ $3A\,; |3A| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3b & 3d & 3e \\ 3c & 3e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & 3b & 3c \\ b & 3d & 3e \\ c & 3e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 3c \\ b & d & 3e \\ c & e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 3^3 \cdot$ $\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3^3}{3} = -3^2 = -9\,;\ Verdadero$
- $|A^{-1}| = -3^{-1}\,;\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{1} = -3\,;$ Falso

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

- $\left|\frac{3A-A^t}{3A+A^t}\right| = (-2)^{-3}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $\frac{3A-A^t}{3A+A^t} = \frac{2A}{4A}$; $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix}$ $y\ 4A =$ $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{pmatrix}$; $\left|\frac{2A}{4A}\right| = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ b & 2d & 2e \\ c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{4\begin{vmatrix} a & 4b & 4c \\ b & 4d & 4e \\ c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ b & d & 2e \\ c & e & 2f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ b & d & 4e \\ c & e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}} = \frac{2^3\left(-\frac{1}{3}\right)}{4^3\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2^3}{4^3} =$ $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$; $Falso$
- $\frac{1}{9}|A^{-1}| - 6|A^t|^2 = 1$; $|A| = |A^t|$; $|A^{-1}| = -3$ (apartado anterior) ; $\frac{1}{9}\cdot(-3) - 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{3}{9} -$ $6\cdot\frac{1}{9} = -\frac{3}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{9}{9} = -1$; $Falso$

- $|3^{-2}\cdot A^t| = -\frac{1}{3^7}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-2}\cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{pmatrix}$; $|3^{-2}\cdot A^t| =$ $\begin{vmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & \frac{1}{3^2}c \\ b & d & \frac{1}{3^2}e \\ c & e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} =$ $\frac{1}{3^6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3^7}$; $Verdadero$

15. Sean las matrices A y B $\in M_{3x3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$.

Con estos datos calcula de forma razonada:

$|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A|\cdot|B|^{-1}$; $|3B^{-1}\cdot A^t|$; $|3A\cdot B^t|$; $|(B^{-1}\cdot A^{-1})^t|$

- $|A^{-1}| = (-3^{-2})^{-1} = \frac{1}{-3^{-2}} = \frac{1}{-\frac{1}{3^2}} = -\frac{3^2}{1} = -9$
- $|B^{-1}| = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $|A|\cdot|B|^{-1} = -3^{-2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$
- $|3B^{-1}\cdot A^t| = |3B^{-1}|\cdot|A^t| = 3^3\cdot|B^{-1}|\cdot|A^t| = 3^3\cdot 3^{-1}(-3^{-2}) = -1$
- $|3A\cdot B^t| = 3^3\cdot|A|\cdot\ |B| = 3^3\cdot(-3^{-2})\ \cdot 3 = -3^2 = -9$
- $|(B^{-1}\cdot A^{-1})^t|$; $|A| = |A^t|$; $|B| = |B^t|$; $|(B^{-1}\cdot A^{-1})^t| = 3^{-1}\cdot(-9) =$

  $= 3^{-1}\cdot(-3)^2 = -3^1 = -3$

16. Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide

calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz - $\frac{3A}{2}$.

$\left|-\frac{3A}{2}\right| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot |A| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot (-2) = -\frac{81}{8}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

$|A^{-1}| = |A|^{-1} = = (-2)^{-1}$ = - $\frac{1}{2}$.

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

$\left|\frac{A^2}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}A \cdot A\right| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot |A| \cdot |A| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 (-2) \cdot (-2) = \frac{1}{324}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2$, -$3F_1$ + $4F_3$, -F_4, $2F_3$.

det($2F_2$, -$3F_1$ + $4F_3$, -F_4, $2F_3$) =

= det($2F_2$, -$3F_1$, -F_4, $2F_3$) + det($2F_2$, $4F_3$, -F_4, $2F_3$) =

(El determinante segundo es 0 porque $4F_3$ y $2F_3$ son proporcionales)

= 2 · (-3) · (-1) · 2 · det(F_2, F_1, F_4, F_3) + 0 = $\rightarrow$ ($F_1 \leftrightarrow F_2$, $F_3 \leftrightarrow F_4$)

= (-) · (-) · 12 · det(F_1, F_2, F_3, F_4) = 12· $|A|$= 12 · (-2) = -24.

17. Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) **Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12} cuando existan.**

A_1: $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$

$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$ $\qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = ab - b^2$

A_2: $\alpha_{11} = b$ $\quad \alpha_{23}$= *no existe* $\quad \alpha_{32}$= *no existe* $\quad \alpha_{12}$ =*a*

A_3:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = ab-abd$$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = 2a^2cd$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = -ad-a^2c - a$$

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

Primero vamos a hallar los de A_1:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\quad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$ $\quad$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = -ab + b^2$

Ahora los de A_2:

$A_{11} = +|b| = b$ $\quad$ $A_{23} =$ no existe $\quad$ $A_{32} =$ no existe $\quad$ $A_{12} = -|a| = -a$

Y finalmente los de A_3:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = -ab+abd$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = -2a^2cd$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = ad+a^2c + a$$

18. a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

Para que $A^2 = A$, la matriz A debe ser cuadrada y $|A^2| = |A|$, es decir, $|A|^2 = |A|$ por lo que:

$|A^2| = |A|$ $\quad$ $|A \cdot A| = |A|$ $\quad$ $|A||A| = |A|$ $\quad$ $|A|^2 - |A| = 0$ $\quad$ $|A|(|A| - |I|) = 0$

Las dos posibles soluciones son:

$|A| = 0$ $\quad |A| = 1$

b) La matriz A verifica que $A{\cdot}A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

$|A| = |A^t|$

$A \cdot A^t = I \qquad |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A||A| = |A|^2 = |I| = 1$, por tanto, $\quad |A| = 1 \quad o \quad |A| = -1$

19. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(-3)(2)(1) + (2)(-3)(-2) + (1)(1)(1)] - [(1)(2)(-2) + (1)(2)(1) + (-3)(1)(-3)] = [-6 + 12 + 1] - [-4 + 2 + 9] = 7 - 7 = 0$$

b) Desarrollando por los elementos de la 3 fila y de la 2 columna.

3 fila; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-8) - 1(8) + 1(-8) = 0$

2 columna; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(-5) + 2(-1) - 1(8) = 0$

20. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & -19 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [(2)(1)(3) + (-3)(-1)(0) + (-2)(2)(1) -] - [(0)(1)(1) + (-2)(-3)(3) + (2)(-1)(2)] = 2 - 14 = -12$$

$$|A^t \cdot B^t| = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = [(-3)(-2)(6) + (8)(1)(-6) + (-1)(-5)(3)] - [(-6)(-2)(3) + (-1)(8)(6) + (-5)(1)(-3)] = 0$$

$$|C \cdot B \cdot A| = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -16 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot (A) = \begin{vmatrix} -6 & 16 & 6 \\ -4 & -36 & 4 \\ -20 & -5 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 16 & 6 \\ 4 & -36 & 4 \\ 20 & -5 & 20 \end{vmatrix} = la\ primera\ y\ tercera\ columna\ son\ iguales\ por\ tanto = 0$$

$|C|^2$ = (-12)·(-12) = 144

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$**= 2-3x;**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [(1\cdot 3\cdot 3) + (-1\cdot 0\cdot x) + (2\cdot 2\cdot 2)] - [(x\cdot 3\cdot 2) + (-1\cdot 2\cdot 3) + (2\cdot 0\cdot 1)] = 2 - 3x;$$

$[9 + 8 + 0] - [6x - 6 + 0] = 2 - 3x;\ \ 17 - 6x - 6 = 2 - 3x;\ \ -6x + 11 = 2 - 3x;$ -3x=-9; x=-3

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \mathbf{5} = \mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3};$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & \mathrm{x} & -3 \\ \mathrm{x} & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = [(2)(\mathrm{x})(4) + (-1)(1)(2) + (-1)(-3)(\mathrm{x})] - [(2)(\mathrm{x})(\mathrm{x}) + (-1)(-1)(4) + (-3)(1)(2)] + 5$$

$$[(8x) + (-2) + (3x)] - [(2x^2) + (4) + (-6)] + 5 = 5x - 3 \quad 6x + 8 - 2x^2 = 0 \quad x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0\ ;$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = [(3)(2)(x) + (x)(3)(2) + (x)(3)(2)] - [(2)(2)(2) + (x)(x)(x) + (3)(3)(3)] = 0$$

$$18x - 35 - x^3 = 0; x = \begin{cases} -5 \\ \dfrac{5 + \sqrt{3}i}{2} \\ \dfrac{5 + \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11;\ x^2 + 4x - 11 - 2x^2 - 3 = 11;\ -x^2 + 4x - 14 = 11;$

$$-x^2 + 4x - 25 = 0; x = \begin{cases} 2 + \sqrt{21}i \\ 2 - \sqrt{21}i \end{cases}$$

23. Resuelve la siguiente ecuación $|\mathbf{A} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{I}| = \mathbf{0}$, siendo A =$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow x\cdot I=x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}-\mathrm{x}\cdot\mathrm{I}|=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathrm{x}&0&0\\0&\mathrm{x}&0\\0&0&\mathrm{x}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\mathrm{x}&0&0\\3&2-\mathrm{x}&1\\-2&1&2-\mathrm{x}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot\begin{vmatrix}2-x&1\\1&2-x\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-2&2-x\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}3&2-x\\-2&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)+0+0=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)=$$

$$=-3+4x-x^2-3x+4x^2-x^3=\boldsymbol{-3+x+3x^2-x^3}$$

$$\boldsymbol{-3+x+3x^2-x^3=0}\ \rightarrow \boldsymbol{x=1};\quad \boldsymbol{x=-1};\quad \boldsymbol{x=3}$$

24. Halla los determinantes de las siguientes matrices

$A;\ \begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-2\cdot4]=3-8=\ \boldsymbol{-5}$

$B;\ \begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-0\cdot1]=\boldsymbol{3}$

$D;\ \begin{vmatrix}1&1&2\\3&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=[1\cdot0\cdot0+3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1]-[2\cdot0\cdot2+1\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot0]=8-1=\boldsymbol{7}$

$E;\ \begin{vmatrix}-1&3&-2\\0&-1&2\\1&4&2\end{vmatrix}=[(-1)\cdot(-1)\cdot2+0\cdot4\cdot(-2)+1\cdot2\cdot3]-[(-2)\cdot(-1)\cdot1+2\cdot4\cdot(-1)+3\cdot 0\cdot2]=8-(-6)=\boldsymbol{14}$

$F;\ \begin{vmatrix}2&1&-1\\3&-2&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}=[2\cdot(-2)\cdot0+3\cdot2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)\cdot1]-[(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot 2+1\cdot3\cdot0=(-4)-(-10)]=\boldsymbol{6}$

$G;\ \begin{vmatrix}2&1&3\\0&-1&-5\\0&0&2\end{vmatrix}=[2\cdot(-1)\cdot2+0\cdot0\cdot3+0\cdot(-5)\cdot1]-[3\cdot(-1)\cdot0+(-5)\cdot0\cdot2+1\cdot0\cdot2]= (-4)-0=\boldsymbol{-4}$

$$H;\ \begin{vmatrix}1&2&1&2\\3&0&0&1\\0&2&1&0\\-1&2&3&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}-3\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2\\2\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&2&1&0\\0&4&4&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_3\\2\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&0&-5\\0&0&6&-1\end{vmatrix}=$$

$$\mathrm{F}_3\leftrightarrow\mathrm{F}_4\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&6&-1\\0&0&0&-5\end{vmatrix}=1\cdot(-6)\cdot6\cdot(-5)=180$$

$$J;\ \begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\2&1&-4&2\\-1&5&-2&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}2\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_3\\-\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\0&7&-4&6\\0&2&-2&1\end{vmatrix}=\mathrm{C}_4\leftrightarrow\mathrm{C}_2=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&6&-4&7\\0&1&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{matrix}-6F_2+F_3\\-F_2+F_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\0 & 1 & 3 & -2\\0 & 0 & -22 & 19\\0 & 0 & -5 & 4\end{vmatrix}=-5F_3+22F_4=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\0 & 1 & 3 & -2\\0 & 0 & -22 & 19\\0 & 0 & 0 & -11\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 1\cdot(-22)\cdot(-11)=-242$$

25. Aplicando propiedades, calcula el valor del determinante:

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0 & 2\\-3 & 1 & 2 & 1\\0 & -2 & -1 & 3\\-1 & 4 & 2 & 0\end{vmatrix}\to\begin{matrix}2F_3+F_2\\2F_3+F_4\end{matrix}\to\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0 & 2\\-3 & -3 & 0 & 7\\0 & -2 & -1 & 3\\-1 & 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & 2\\-3 & -3 & 7\\-1 & 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$-F_1+F_2\to(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & 2\\-1 & 0 & 5\\-1 & 0 & 6\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\-1 & 6\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-6+5)=3$$

b) Desarrollando por los elementos de una línea

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0 & 2\\-3 & 1 & 2 & 1\\0 & -2 & -1 & 3\\-1 & 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=\text{desarrollando por la tercera fila}=$$

$$=0\cdot\begin{vmatrix}-3 & 0 & 2\\1 & 2 & 1\\4 & 2 & 0\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\-3 & 2 & 1\\-1 & 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & 2\\-3 & 1 & 1\\-1 & 4 & 0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\-3 & 1 & 2\\-1 & 4 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=0+2\cdot(-4)+(-1)\cdot(-11)-3\cdot 0=-8+11-0=-8+11=\mathbf{3}\quad;\quad |\boldsymbol{A}|=\mathbf{3}$$

26. Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\-2 & 0 & 3 & 1\\4 & 1 & -2 & 3\\2 & 3 & 0 & 4\end{vmatrix}=137;\qquad\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\1 & -2 & 1 & 2\\-3 & 2 & -2 & 1\\-1 & 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=27$$

a) $$\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\-2 & 0 & 3 & 1\\4 & 1 & -2 & 3\\2 & 3 & 0 & 4\end{vmatrix}\to F_2+F_4\to\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\-2 & 0 & 3 & 1\\4 & 1 & -2 & 3\\0 & 3 & 3 & 5\end{vmatrix}\to 2F_2+F_3\to\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\-2 & 0 & 3 & 1\\0 & 1 & 4 & 5\\0 & 3 & 3 & 5\end{vmatrix}\to$$

$$\tfrac{2}{3}F_1+F_2\to\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\0 & -4/3 & 13/3 & -1\\0 & 1 & 4 & 5\\0 & 3 & 3 & 5\end{vmatrix}\qquad |A|=3\begin{vmatrix}-4/3 & 13/3 & -1\\1 & 4 & 5\\3 & 3 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\left[\left(-{}^{4}\!/_{3}\cdot 4\cdot 5\right)+\left(1\cdot 3\cdot(-1)\right)+\left(\frac{13}{3}\cdot 5\cdot 3\right)\right]-$$

$$-\left[\left(3\cdot 4\cdot(-1)\right)+\left(5\cdot 3\cdot\left(-{}^{4}\!/_{3}\right)\right)+\left(1\cdot 13/3\cdot 5\right)\right]=3\cdot\left[\frac{106}{3}-\left(-\frac{31}{3}\right)\right]=137$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \to F_2 + F_4 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{-1}{2}F_1 + F_2$

$$\to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5/2 & -{}^1/_2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{3}{2}F_1 + F_3 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -{}^5/_2 & -{}^1/_2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 5/2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2\begin{vmatrix} -5/2 & -{}^1/_2 & 1 \\ 7/2 & 5/2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-{}^5/_2 \cdot {}^5/_2\,(-1)\right) + \left({}^7/_2 \cdot 1 \cdot 1\right) + \left(4 \cdot \left(-{}^1/_2\right) \cdot 1\right)\right] -$$

$$-\left[(1 \cdot 5/2 \cdot 1) + \left({}^7/_2 \cdot \left(-{}^1/_2\right) \cdot (-1)\right) + \left(-{}^5/_2 \cdot 4 \cdot 1\right)\right] = 2\left({}^{27}/_2\right) = 27$$

27. Calcula el determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to -3F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to 2F_1 + F_2$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \frac{3}{5}F_2 + F_4 \to 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^6/_5 \end{vmatrix} \to \frac{18}{5}F_2 + F_3$$

$$\to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -{}^{131}/_5 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} \to \frac{-5}{13}F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & -20/13 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -{}^{131}/_5 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 13\begin{vmatrix} 0 & -20/13 & 3 \\ 7 & 1 & -{}^{131}/_5 \\ 0 & 0 & -{}^6/_5 \end{vmatrix} = 13 \cdot \left[0 - \left(0 + 7 \cdot \left(-{}^{20}/_{13}\right) \cdot -{}^6/_5 + 0\right)\right] = -168$$

28. Calcula los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to -2F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to$

$-5F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -15 & 13 & -24 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -15 & 13 & -24 \\ -1 & 10 & -7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$

$= [(-15 \cdot 10 \cdot 7) + (-24 \cdot 1 \cdot (-1)) + (-7 \cdot 13 \cdot 5)] - [(-24 \cdot 10 \cdot 5) + (-1 \cdot 13 \cdot 7) + (-15 \cdot (-7) \cdot 1)] =$

$= (-1050 + 24 - 455) - (-1200 + 105 - 91) = -295$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_3 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_5 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$ $|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \to |A| = (x+1)^4$

29.Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = [(3 \cdot 2x \cdot x) + (-1 \cdot (-1) \cdot 7) + (5 \cdot 3 \cdot x)] - [(-1 \cdot 2x \cdot x) + (5 \cdot (-1) \cdot$ $x) + (3 \cdot 7 \cdot 3)] = [(6x^2 + 7 + 15x) - (-2x^2 + (5x) + 63)] = 8x^2 + 20x - 56$

$8x^2-20x-56=5x+6 \rightarrow 8x^2+15x-62=0; x_1=2; x_2\approx -3{,}875$

b) $|A|=\begin{vmatrix}1&0&4\\0&x&4\\-1&3&x\end{vmatrix} \rightarrow F_1+F_3 \rightarrow \begin{vmatrix}1&0&4\\0&x&4\\0&3&4+x\end{vmatrix} \rightarrow |A|=1\cdot\begin{vmatrix}x&4\\3&4+x\end{vmatrix}=\left(x(4+x)\right)-12$

$\left(x(4+x)\right)-12=0 \rightarrow 4x+x^2-12=0;\ x_1=\ 2\,; x_2=\ -6$

30.Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix}x&1&2x\\8&x-1&5\\-2&1&0\end{vmatrix}=67$ b) $\begin{vmatrix}1&-1&2\\x-1&0&x+3\\1&x-2&4\end{vmatrix}=1-7x$

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix}x&1&2x\\8&x-1&5\\-2&1&0\end{vmatrix} \rightarrow 2C_2+C_1 \rightarrow \begin{vmatrix}x+2&1&2x\\2x+6&x-1&5\\0&1&0\end{vmatrix} \rightarrow |A|=1\cdot\begin{vmatrix}x+2&2x\\2x+6&5\end{vmatrix}=$

$(x+2)5-(2x+6)2x=5x+10-(4x^2+12x)$

$5x+10-(4x^2+12x)=67 \rightarrow -4x^2+7x-57=0;\ x_1=3; x_2=-4{,}75$

b) $|A|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\x-1&0&x+3\\1&x-2&4\end{vmatrix} \rightarrow C_1+C_2 \rightarrow \begin{vmatrix}1&0&2\\x-1&x-1&x+3\\1&x-1&4\end{vmatrix} \rightarrow -2C_1+C_2 \rightarrow$

$\begin{vmatrix}1&0&0\\x-1&x-1&-x+5\\1&x-1&2\end{vmatrix} \rightarrow |A|=1\cdot\begin{vmatrix}x-1&-x+5\\x-1&2\end{vmatrix}=2(x-1)-[(x-1)(-x+5)]=$

$$=(2x-2)-(-x^2+5x+x-5)\ =x^2-4x+3$$

$x^2-4x+3=1-7x \rightarrow x^2+3x+2=0;\quad x_1=-1;\quad x_2=-2$

31-Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix}2&4\\1&5\end{pmatrix} \rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t\,;\qquad |A|=6$

$Adj(A)=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&2\end{pmatrix} \rightarrow \textit{traspuesta} \begin{pmatrix}5&-4\\-1&2\end{pmatrix}\ A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}5&-4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-5&1\\5&0&4\end{pmatrix} \rightarrow$|A|=(-20+10+0)-(-75+24+0)= 41

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}-5 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & 0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20 & -7 & -25\\ -8 & -11 & 10\\ 17 & 8 & -11\end{pmatrix}$$

$$\to traspuesta\begin{pmatrix}-20 & -8 & 17\\ -7 & -11 & 8\\ -25 & 10 & -11\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix}-20 & -8 & 17\\ -7 & -11 & 8\\ -25 & 10 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{20}{41} & -\frac{8}{41} & \frac{17}{41}\\ -\frac{7}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{8}{41}\\ -\frac{25}{41} & \frac{10}{41} & -\frac{11}{41}\end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix}1 & c & b\\ 1 & a & c\\ 1 & b & c\end{pmatrix}\to |A|=(ac+c^2+b^2)-(ab+cb+c^2)=\ (c-b)(a-b)$

Adjunta de A:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}a & c\\ b & c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & c\\ 1 & c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}c & b\\ b & c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & b\\ 1 & c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & c\\ 1 & b\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}c & b\\ a & c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & b\\ 1 & c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & c\\ 1 & a\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bc & 0 & b-a\\ -c^2+b^2 & c-b & -b+c\\ c^2-ab & -cc+b & a-c\end{pmatrix}$$ Simplificamos y

$$\to traspuesta\begin{pmatrix}c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab\\ 0 & c-b & -c+b\\ b-a & -b+c & a-c\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(c-b)(a-b)}\cdot\begin{pmatrix}c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab\\ 0 & c-b & -c+b\\ b-a & -b+c & a-c\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{c\cancel{(a-b)}}{(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{(b+c)\cancel{(b-c)}}{\cancel{(c-b)}-(a-b)} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)}\\ 0 & \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{\cancel{-c+b}}{\cancel{(c-b)}-(a-b)}\\ \frac{\cancel{b-a}}{-(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{\cancel{-b+c}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)}\end{pmatrix}$$

- Solución = $\begin{pmatrix}\frac{c}{c-b} & \frac{b+c}{-a+b} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)}\\ 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{1}{-a+b}\\ \frac{1}{-c+b} & \frac{1}{a-b} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)}\end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

32- Siendo las matrices. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **¿Es cierto que det(A·B)= det(B·A)?**

$AB=\begin{pmatrix} 1+6+0+2 & 0-3+0-2 \\ 2+4+0+4 & 0-2+3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 & 0+0 & -2+0 \\ 2-2 & 6-2 & 0-1 & -4+4 \\ 0+6 & 0+6 & 0+3 & 2-4 \\ -1+2 & -3+2 & 0+1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- Solución: No es cierto, ya que:

  $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) **Calcula, si es posible, la inversa de A·B.**

$|A|$ = -27-(-50)= 23 ; $Adj(A)=\begin{pmatrix} -3 & -(10) \\ -(-5) & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{10}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix}$

33- Halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ =(0+2+t^2)-(0+2 $-3t) = t^2+3t$; $t(t+3)=0$; $t=0$; $t=-3$

- Solución:

  Cuando t$\neq$ 0 y $t \neq -3,$ $existe$ A^{-1}.

34. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **averigua para que valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para λ=-3.**

a)

$|A| = (1\cdot(-\lambda)\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 1 + \lambda\cdot(-2)\cdot 0) - (1\cdot(-\lambda)\cdot\lambda + 0\cdot 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)\cdot 1)=$

$=(-\lambda-2)-(-\lambda^2+4)=\lambda^2-\lambda-6$ $\lambda^2-\lambda-6=0$

$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$ $\lambda = \frac{1+5}{2} = 3$ $\lambda = \frac{1-5}{2} = -2$ Si λ vale 3 o -2 no existe A^{-1}

b) $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&3&0\\-3&1&1\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=(-3)^2-(-3)-6=6$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\-2&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to Adj(A^t)=\begin{pmatrix}3&3&-3\\2&4&-2\\7&5&-1\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3&3&-3\\2&4&-2\\7&5&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{7}{6}&\frac{5}{6}&\frac{-1}{6}\end{pmatrix}$$

35. Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&0&1\end{vmatrix}=(1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot2)-(1\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot2+0\cdot1\cdot1)=3$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix};\quad Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix};A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

36. ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\boldsymbol{a}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ **tiene inversa? Halla la inversa para a=2**

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&0\\0&1&1\\1&a&0\end{vmatrix}=(a\cdot1\cdot0+0\cdot a\cdot0+1\cdot1\cdot1)-(0\cdot1\cdot1+1\cdot a\cdot a+0\cdot1\cdot0)=1-a^2$$

$1-a^2=0\to a^2=1\to\ a=1\ y\ a=-1$, Existe la matriz inversa cuando $a\neq1\ y\ a\neq-1$

Inversa para a=2

$(A)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$ $\quad |A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&2&0\end{vmatrix}=1-2^2=-3$

$$(A^t)=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\0&1&0\end{pmatrix};\ Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&-2\\1&3&2\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&0&-2\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{-3}&0&\frac{2}{3}\\\frac{1}{-3}&-1&\frac{2}{-3}\end{pmatrix}$$

37. Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3\cdot(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 0+2\cdot 2\cdot 3)-(0\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 1\cdot 3+(-2)\cdot 2\cdot 1) = 18-5 = 13 \quad |M| \neq 0\,, \quad \textit{tiene inversa}$

$$M^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}; Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-6}{13} \\ \frac{-4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

b) Descompón la matriz $|M|$ en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica

Matriz simétrica: $A = A^t$ Matriz antisimétrica: $B = -B^t$

Fórmulas: $A = \frac{M+M^t}{2}$ $B = \frac{M-M^t}{2}$

$$M + M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \textit{Matriz simétrica}$$

$$M - M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{Matriz antisimétrica}$$

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \to |M| = \begin{vmatrix} 2+1 & 3-1 & -3+3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4+(-3)+18)-(6+6-6)+0 = 13-0 = 13$$

d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P|\cdot|Q|$

$13 = 13 + 0 \to 13 = 13 \to |M| = |P| + |Q|$

$13 = 13 \cdot 0 \ \rightarrow 13 \neq 0 \rightarrow |M| \neq |P| \cdot |Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} x^2 - 13x + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ ; \ 3x^2 - 13x + 4 \cdot (-9) = 2 \quad ; \ 3x^2 - 13x - 38 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-38)}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm 25}{6} \qquad x = \frac{13+25}{6} = \frac{19}{3} \quad ; \quad x = \frac{13-25}{6} = -2$

38.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A?

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

$$|A| = 60 - 2a - 14 - (21a - 16 + 5) = 57 - 19a$$

$57 - 19a = 0 \quad ; \ -19a = -57 \quad ; \quad a = \frac{-57}{-19} = 3$

$a = 3$ Para que A no sea invertible.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si $a = 3 \qquad |A| = 0 \qquad |A^t| = 0 \qquad |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = 0$

Si $a \neq 3 \quad |A| = 57 - 19a \qquad |A^t| = |A| = 57 - 19a$

$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = (57 - 19a)^2$

39.- Sea C la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

a) $|C| = -2 + m - (-2 - 1) = -2 + m + 3 = m + 1$

$m + 1 = 0 \quad ; \ m = -1$

$m = -1$ Es el valor para el que C no tiene inversa.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = 3$

$$AdjC = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

40.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

donde x es un número real, halla:

a) **Los valores de x para los que la matriz A posea inversa**
b) **La inversa de A para x=2**
c) **Con x=5, el valor de $b \in R$ para que la matriz b·A tenga determinante 1.**

a) $|A| = -x^2 + 4x - 3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = 3 \quad , x = 1$$

Los valores de x tienen que ser distintos de 1 y 3, para que A posea inversa.

b) $x = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $b \cdot A = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow |b \cdot A| = \left| b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \right| = b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

$$|A| = -25 - (-20 + 3) = -8$$

$$b^3 \cdot (-8) = 1 \quad ; \quad b^3 = \frac{1}{-8} \quad ; \quad b = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = \frac{1}{-2}$$

41. Dadas las matrices A, B y C ∈ M_{3x3}, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $\boldsymbol{X \cdot A = B} \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X = B \cdot A^{-1}$

b) $\boldsymbol{B \cdot X - 2B = 3X} \longrightarrow B \cdot X - 3X = 2B \longrightarrow (B - 3I) \cdot X = 2B \longrightarrow$

$(B-3I)^{-1}(B-3I) \cdot X = (B-3I)^{-1} \cdot 2B$; $\qquad X = (B-3I)^{-1} \cdot 2B$

c) $\boldsymbol{A \cdot X \cdot C = 2B^t + A} \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1}(2B^t + A) \cdot C^{-1}$; $\qquad X = A^{-1}(2B^t + A) \cdot C^{-1}$

42. Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ La fórmula para calcular la matriz inversa es: $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(adj(A))^t}$

- Calculamos el **valor del determinante** A.

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = (ab) - (0 \cdot 0) = ab \longrightarrow |A| = ab$$

- Hallamos el **adjunto** del determinante con la fórmula: $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}}$, siendo "i" las filas y "j" las columnas

$a_{1,1} = (-1)^2(b) = b$

$a_{1,2} = (-1)^3(0) = 0 \qquad \longrightarrow \quad Adj(A) = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \longrightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$

$a_{2,1} = (-1)^3(0) = 0$

$a_{2,2} = (-1)^4(a) = a$

Por lo que $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{\frac{1}{|ab|}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{a}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{1}{b}} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \qquad A = A^{-1} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{a} \longrightarrow a^2 = 1;\ \boldsymbol{a = 1, -1} \\ b = \frac{1}{b} \longrightarrow b^2 = 1;\ \boldsymbol{b = 1, -1} \end{cases}$$

Por lo tanto, existen cuatro matrices diagonales que coinciden con su inversa:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

43. a) Halla, si existe, la matriz inversa de M.

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$ $\quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a)

$|M| = [(0 \cdot 1(-2)) + (1(-2) \cdot 1) + ((-1) \cdot 2 \cdot 1)] - [(1 \cdot 1(-1)) + (1(-2) \cdot 0) + ((-2) \cdot 2 \cdot 1)] =$

$= -4 - (-5) \Rightarrow |\boldsymbol{M}| = \boldsymbol{1}$

$\boldsymbol{M^{-1}} = \frac{1}{|M|} \cdot (\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{M}))^t$

Hallamos el adjunto de la matriz:

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) = -4$ $\quad a_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$ $\quad a_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$ $\quad a_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (2) = -2$

$a_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$ $\quad a_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow (Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\quad \mathrm{X} \cdot \mathrm{M} + \mathrm{M} = 2M^2 \qquad \mathrm{X} \cdot \mathrm{M} = 2M^2 - \mathrm{M} \qquad \mathrm{X} = (2M^2 - \mathrm{M}) \cdot M^{-1} \qquad \mathrm{X} = 2M^2 \cdot M^{-1} - M \cdot M^{-1}$

$$\mathrm{X} = 2\mathrm{M} - \mathrm{I} \longrightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

44. Dadas las matrices:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) ¿Qué valores de *a* hacen singular la matriz?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz *B* para que la ecuación $A\cdot B\cdot C = D$ tenga sentido?

c) Calcula *B* para el valor *a = 1*?

a)

$$|C| = (0+4a+2)-(2a^2+0+2)$$
$$4a+2-2a^2-2=0$$
$$4a-2a^2=0 \to a(4-2a)=0 \to \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=2 \end{cases}$$

b) $\mathrm{A\cdot B\cdot C = D}$

$$(2\cdot 2)\cdot(?\cdot ?)\cdot(3\cdot 3)=(2\cdot 3)$$

Para poder multiplicar la **matriz B** por la matriz A y por la matriz C, sus dimensiones tendrán que ser **2x3**

c)

$$A\cdot B\cdot C = D$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot B\cdot C\cdot C^{-1} = A^{-1}\cdot D\cdot C^{-1} \implies \boldsymbol{B = A^{-1}\cdot D\cdot C^{-1}}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\cdot(\mathrm{Adj\ (A)})^t \qquad |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{11} = (-1)^2\cdot(1)=1 \qquad a_{12} = (-1)^3\cdot(-2)=2$$
$$a_{21} = (-1)^3\cdot(0)=0 \qquad a_{22} = (-1)^4\cdot(1)=1$$

$$\mathrm{Adj\ (A)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj(A)})^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{C}|}\cdot(\mathrm{Adj\ (C)})^t$$

$$|\mathrm{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 2 & \mathrm{a} & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0+4\mathrm{a}+2)-(2\mathrm{a}^2+0+2) \to (4\mathrm{a}+2)-(2\mathrm{a}^2+2)$$
$$\to (4\cdot 1+2)-(2\cdot 1^2+2) \to |\mathrm{C}| = 2$$

$$\mathrm{Adj(C)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj(C)})^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \mathrm{C}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \mathrm{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1}} \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

45. Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

$((5 \cdot 3 \cdot 7) + (4 \cdot 0 \cdot (-2) \cdot (9 \cdot x \cdot 1))—2 \cdot 3 \cdot 1 + (9 \cdot 0 \cdot 5) \cdot (7 \cdot x \cdot 4) = 0$

$105 + 9x + 6 - 28x = 0 \qquad 105 + 6 = 28x - 9x \qquad 111 = 19x \qquad x = \frac{111}{19}$

b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x-2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$; F1+F2 $\to \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

(-1)·C3+C2 $\to \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 3-x & x-2 \end{vmatrix}$; F2+F3 $\to \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x+4 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \cdot (x^2 - 5x - 6)$

$(x-3) = 0 \ \to x = 3$

$(x^2 - 5x - 6) = 0 \ \to x = -1\, ; x = 6$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \boldsymbol{x+3} \end{vmatrix}$**=0**

$C3 \cdot (-1) + C1 \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$; $C2 \cdot (-1) + C1 \ \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot ((x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot ((x-2) \cdot (-3x+3))$

$(3-x) = 0 \ \to x = 3 \qquad (x-2) = 0 \ \to x = 2 \qquad (-3x+3) = 0 \ \to x = 1$

46. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \to 0+4\ ;\ \ 4 \neq 0\ \ rg(a)=2$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to\ |1| = 1\ \neq 0\ \to rg\ (b) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\ \ rg(A) = 2$; No puede tener rango mayor que 2 pues solo hay 2 filas.

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |2| = 2\ \neq 0\ \to rg(c) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3\ \neq 0\ \ \to rg(c) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (10-6) = 4\ \neq 0\ \to\ \ rg\ (c) =\ 3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |3| = 3\ \neq 0\ \to rg(d) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \to 9-4\ \neq 0\ rg(d) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \to (18+4+16)-(24+6+8) = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \to (18-16)-(-6+8) = 0\ \ rg(d) = 2$

47. Halla el rango de las siguientes matrices :

a) A=$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |3| \neq 0\ \ \ \ rg \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \to 6-6 = 0$ $\quad\quad$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \to 12-12 = 0$ $\quad\quad$ Rg(A)=1

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to\ |1| \neq 0$ $\quad$ rg ≥ 1

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \to (-1)-(4) = -5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \to (-2+12+24)-(-9+8+8) = 27\ \neq 0\ \ \ rg = 3$

$$c)\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \to |1| \neq 0 \qquad rg(c) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \to 3 + 2 = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

la fila 4 es igual a la suma de la 1 y la 2; la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por 3.

Por tanto $\mathrm{rg}(\mathrm{C}) = 2$

48. Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to (a \cdot 1) - (1 \cdot 1) = 0\,;\ \ a = 1$

$1. Si\ a = 1\ rg = 1 \qquad 2. Si\ a\ \neq 1\ rg = 2$

b) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (\ a \cdot 0) - (3 \cdot 0) = 0$

$\begin{vmatrix} a & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (a \cdot 6) - (4 \cdot 3) = 0\,; a = 2$

$Si\ a = 2\ \ rg = 1\ \ \ ;\ \ Si\ a \neq 2\ \ rg = 2$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (1 \cdot a) - (3 \cdot 1) = 0\,; a = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(1 \cdot (-1)\big) - (1 \cdot 0) = 0\ \ Si\ \ a = 3\ \to\ rg =\ 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = (1 \cdot a \cdot a + 0 + 0) - (0 - 2 + 3a)$

$a^2 - 3a + 2 = 0\ \ a = 2\,; a = 1$

$Si\ a = 2\ o\ a = 1 \to\ \ rg =\ 2$

$Si\ a \neq 1\,, a \neq 2, a \neq 3\ \ entonces\ rg = 3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (1 \cdot a) = 0\ \ a = 1\,; Si\ a = 1\ \ rg = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} =\ (1 + 1 + a^3) - (a + a + a) \qquad 2 + a^3 - 3a = 0 \qquad a = -2\,; \quad a = 1$

Si a = -2 entonces rg = 2

Si a ≠ -2 o a ≠ 1 entonces rg = 3

49.Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&3&0\\0&1&-x\\1&1&1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&0&0&-1\\1&x&x&1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&3&2\\1&1&a\end{pmatrix}$$

a) $A=\begin{pmatrix}x&3&0\\0&1&-x\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow|A|=0\cdot\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}x&0\\1&1\end{vmatrix}-(-x)\cdot\begin{vmatrix}x&3\\1&1\end{vmatrix}=$

$=0+x+x\cdot(x-3)=x+x^2-3x=-2x+x^2$

$-2x+x^2=0\rightarrow -x\cdot(2-x)=0\rightarrow x=0;\ 2-x=0\ \rightarrow\quad \boldsymbol{x=0};\quad \boldsymbol{x=2}$

$$\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

1. Para x = 0 o x = 2 rg(A) = 2
2. Para x ≠ 0 y x ≠ 2 rg(A) = 3

b) $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&0&0&-1\\1&x&x&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\3&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&0&0&-1\\1&x&x&1\end{pmatrix}\rightarrow C_4\leftrightarrow C_1\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&3\\1&x&x&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}F_1+F_2\\-F_1+F_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&4\\0&x-1&x-1&0\end{pmatrix}$

$(-x+1)F_2+F_3\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&4\\0&0&0&-4x+4\end{pmatrix}\rightarrow -4x+4=0\ ;\ \ x=1$

1. $Para\ x=1\ rg(B)=2$
2. Para $x\neq 1\ rg(B)=3$

c) $C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&3&2\\1&1&a\end{pmatrix}\rightarrow|C|=0\cdot\begin{vmatrix}3&2\\1&a\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3&2\\1&a\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}=$

$=0-(3a-2)+(-1)\cdot 0=-3a+2+(-1)\cdot 0=-3a+2+0=-3a+2$

$$-3a+2=0\rightarrow -3a=-2\rightarrow \boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

1. Para $a=\frac{2}{3}$, $rg(C)=2$
2. Para $a\neq\frac{2}{3}$ $rg(C)=3$

50. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-x&1&1\\1&-x&1\\1&1&-x\end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación det (A)=0

$|A|=\left|\begin{matrix}-x&1&1\\1&-x&1\\1&1&-x\end{matrix}\right|\begin{matrix}-x&1\\1&-x\\1&1\end{matrix}\rightarrow$

$|A|=\ -x^3+1+1-(-x-x-x)=-x^3+2-(-3x)\rightarrow A=-x^3+2+3x$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$|A| = -x^3 + 2 + 3x = 0$; $\mathbf{x = 2}$; $\mathbf{x = -1}$ **doble**

b) **Calcula el rango de la matriz A según los valores de x**

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Para } x = -1, \quad rg(A) = 2$
2. $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Para } x = 2, \quad rg(A) = 2$
3. $\text{Para } x \neq -1 \quad y \quad x \neq 2 \ \ rg(A) = 3$

51. Dada las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$

a) Discute el rango de A según los valores de m

$$A = \begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} m & 2 \\ 2 & m \\ 2 & m \end{matrix} = 6m^2 + 16 + 12m - (12m + 4m^2 + 24) =$$

$= 6m^2 + 16 - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8$ = 2(m-2) (m+2) ; 2(m-2) (m+2)= 0 ; $\mathbf{m = 2}$; $\mathbf{m = -2}$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

1. Para m = 2 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad rg(A) = 2$
2. Para m = -2 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ \ rg(A) = 2$
3. $\text{Para } m \neq 2 \text{ y } m \neq -2 \quad rg(A) = 3$

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación A·X = B?

Las dimensión que debe tener es de 3x2 (3x3)·(3x2) = (3x2)

c) **Calcula X para m=0**

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \ X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{5}{2}} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

52. Resuelve las ecuaciones:

a) $\boldsymbol{A \cdot X = B \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X \cdot I = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$|A| = 1\cdot 5 - (2\cdot 2) = 1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\qquad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\qquad A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}}$$

b) $\boldsymbol{B\cdot X = C \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$$B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot C \to I\cdot X = B^{-1}\cdot C \to X = B^{-1}\cdot C$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_2 - 2\cdot F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_3 - F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1}\cdot C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) $\boldsymbol{A\cdot X = B + 2C \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix};\; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(B + 2\cdot C) \to X = A^{-1}\cdot(B + 2\cdot C)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \frac{1}{2}\cdot F_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_3 - F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\frac{1}{3}\cdot F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix};\qquad B + 2\cdot C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

d) $\boldsymbol{A\cdot X + B = 2C \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\; C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2C - B)$; $X = A^{-1} \cdot (2C - B)$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to F_1 \frac{1}{2} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to F_2 + F_3$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$2C - B \to 2 \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (2 \cdot C - B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{5}{2}} & \boldsymbol{-\frac{3}{2}} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{\frac{1}{2}} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. El valor del determinante de la matriz A es: a) 4 b) 0 c) − 4 d) 8

$|A| = (2^3 + 1^3 + 1^3) - (1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2) = (8 + 1 + 1) - (2 + 2 + 2) = 10 - 6 = 4$; **a) 4**

2. El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es

a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) − 4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ **a) 0**

3. El valor del determinante de la matriz B es:

a) 4 b) 0 c) 8 d) − 8

Como tiene una columna de ceros el determinante vale 0. **b) 0**

4. El rango de B es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

(Buscamos el determinante no nulo de mayor dimensión dentro del determinante)

$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2)] - [(-2) \cdot 7] = -4 + 14 = 10$

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 0] - [4 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 7 \cdot 3] = (-12 - 16) — 12 - 42 = -28 + 12 + 42 = -28 + 54 = 26$

Como el determinante tiene una columna de ceros no hay más determinantes distintos de cero

$rg(B) = 3$; **c) 3**

5. La matriz inversa de A es:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A^t)] ; \quad |A| = 4 ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A^t)] \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (2^2-1^2) & -(2\cdot 1-1^2) & (1^2-1\cdot 2) \\ -(1\cdot 2-1^2) & (2^2-1^2) & -(2\cdot 1-1^2) \\ (1^2-1\cdot 2) & -(2\cdot 1-1^2) & (2^2-1^2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (4-1) & -(2-1) & (1-2) \\ -(2-1) & (4-1) & -(2-1) \\ (1-2) & -(2-1) & (4-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

6. La matriz inversa de A es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot \boldsymbol{Adj}; (\boldsymbol{A^t}) \qquad |A| = 4, en\ el\ ejercicio\ 1.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t); \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$ opción b)

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. La matriz inversa de la matriz F es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad F^{-1} = \frac{1}{|F|}\cdot Adj(F^t) \qquad |F| = -1$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to Adj; (F^t) = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{-1} = opción\ a)$