MATEMÁTICAS I
1º Bachillerato
Capítulo 3: Sucesiones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez

Revisor: Javier Rodrigo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

¿Qué tienen en común conceptos tan dispares como el número de conejos hijos engendrados por una pareja de conejos, la estructura de un copo de nieve o el interés que obtenemos al depositar determinada cantidad de dinero en una entidad financiera?

Detrás de estos casos nos encontramos con el concepto de sucesión. Las sucesiones numéricas tienen gran importancia y utilidad en muchísimos aspectos de la vida real, alguno de los cuales irás descubriendo a lo largo de este capítulo.

Además reflexionamos sobre el infinito, ¿qué se entiende por límite de una sucesión? Ya los griegos se preguntaban si algo con un número infinito de sumandos podía dar un resultado finito, como en la célebre Paradoja de Aquiles y la tortuga.

En el capítulo de números reales hemos mencionado al número e. Ahora lo vamos a definir y analizaremos algunas de sus aplicaciones. Lo utilizaremos para trabajar con los logaritmos y sus propiedades.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

Ejemplo:

- Las siguientes secuencias son sucesiones:
  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  c) $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots$

Definición:

Una sucesión de números reales es una aplicación entre los números naturales y los números reales:

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to a_n$$

Ejemplo:

- En el ejemplo anterior, la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12,… la podemos ver como:

$$1 \to 2$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 6$$
$$4 \to 8$$
$$n \to 2n$$

aunque la notación que usamos normalmente para decir que a n le corresponde $2n$ es utilizar el término general de una sucesión: $b_n = 2n$.

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to b_n = 2n$$

de la misma forma la sucesión $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\ldots$ se puede escribir como:

$$f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to c_n = 1/n$$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *En la sucesión a) tendríamos que: $a_5 = 5$, ya que es el término de la sucesión que ocupa el quinto lugar.*
- *En la sucesión b), el tercer término, se denotaría b_3 y correspondería al 6*
- *En la sucesión c), por ejemplo $c_2 = \frac{1}{2}$*

Lo realmente importante a la hora de nombrar los términos de una sucesión es el subíndice porque denota el lugar que ocupan en la sucesión. Las letras con las que se designa la sucesión son distintas para sucesiones distintas y suelen ser letras minúsculas.

Aunque una sucesión es una función, usualmente no se utiliza la notación de función sino que únicamente se escribe su término general.

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar n-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo *a*) con subíndice n: (a_n)

Ejemplo:

- En los casos que estamos considerando, los términos generales de las sucesiones son:

$$a_n = n,\ b_n = 2n \text{ y } c_n = 1/n.$$

Actividades resueltas

- *En las sucesiones anteriores, observamos que: $a_{105} = 105$, $b_{23} = 46$ y $c_{37} = \frac{1}{37}$*

Actividades propuestas

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 7, 10, 13, 16, …

b) 2, 5, 10, 17,…

c) 1, 3, 5, 7,…

d) 0, 3, 8, 15, 24…

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9’8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 10 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 30 segundos? Representa gráficamente esta sucesión.

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10				

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Formas de definir una sucesión

Existen varias formas de definir una sucesión:

1. **Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión**

Ejemplo:

- *Sucesión de los números pares:* 2, 4, 6, 8, 10,…
- *Sucesión de los números primos:* 2, 3, 5, 7, 11,..
- *Sucesión de los números naturales acabados en* 7: 7, 17, 27, 37, ...
- *Sucesión de los cuadrados de los números naturales:* 1, 4, 9, 16,…
- *Sucesión de los cubos de los números naturales:* 1, 8, 27, 64,…

2. **Dando su término general o término *n*-ésimo**:

Es una expresión algebraica en función de *n.*

Ejemplo:

- $a_n = n^2 + 5$

Sabiendo esto, podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir n por los números naturales. Así, tendríamos:

$$a_1 = 1^2 + 5 = 6$$

$$a_2 = 2^2 + 5 = 9$$

$$a_3 = 3^2 + 5 = 14$$

$$a_4 = 4^2 + 5 = 21$$

.....

- $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$

$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. **Por una ley de recurrencia**:

Es una expresión que permite obtener un término a partir de los anteriores.

Ejemplo:

- *La sucesión:*

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

conocida como *Sucesión de Fibonacci* se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

4. **No siempre se puede definir la sucesión por los métodos anteriores**

Ejemplo:

- *La sucesión formada por las cifras decimales de* π*:*

1, 4, 1, 5, 9, 2, …

Forman una sucesión pero ignoramos la propiedad, la fórmula del término general o la ley de recurrencia que nos permita, por ejemplo, conocer la cifra que ocupa el lugar un trillón. Hoy, con ayuda de los ordenadores, ya sabes que se han logrado conocer muchas de las cifras de π, en 2011 más de dos billones.

Actividades resueltas

- *Sea la sucesión de término general:* $a_n = 2n + 4$.

Sus cinco primeros términos son: $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$, $a_5 = 14$.

- *Dada la sucesión en forma recurrente:* $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2$

  Sus cuatro primeros términos son:

$a_1 = 1$ (ya viene dado),

$a_2 = 1 + 2 = 3$,

$a_3 = 3 + 2 = 5$,

$a_4 = 5 + 2 = 7$…

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n^2 + 3$ b) $b_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

c) $c_1 = 1$, $c_n = 2c_{n-1} + 4$ d) $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) {–2, 2, –2, 2, –2, 2, –2, 2,…}

b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

c) {2, 4, 6, 8, 10,…}

d) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{10}, \dfrac{7}{17}, \dfrac{9}{26}, \ldots\right\}$

6. En una sucesión el primer término es 5 y los demás se obtienen sumando 3 al término anterior. Hallar los 10 primeros términos de la sucesión.

7. Escribe el término general de las sucesiones:

a) 6, 18, 54, 162, …

b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, …

c) 7, 0’7, 0’07, 0,007, …

d) 2, 5, 8, 11, 15, …

8. Un satélite artificial se puso en órbita a las 10 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 90 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta *n*-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 30 días más tarde a las 9 horas?

Nº de órbitas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en la que la ha completado						

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Progresiones aritméticas y geométricas

Ya conoces de cursos anteriores dos tipos de sucesiones, las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas.

Recuerda que:

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra d.

Es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, d:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$$

Ejemplo:

- *Si* $a_1 = 2$ *y* $d = 3$ *los cinco primeros términos de la progresión aritmética son*:

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$
$$a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra r. Es decir, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ siendo n un número natural y siempre que a_n sea distinto de cero.

O lo que es lo mismo, cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón r:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n \cdot r}$$

Ejemplo:

- *Un padre planea meter en una hucha* 1 € *el día que su hijo recién nacido cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de sus cumpleaños. ¿Cuánto debe meter en la hucha el día que su hijo cumple 5 años?*

La sucesión cuyos términos son el dinero que mete en la hucha cada año es:

{1, 2, 4, 8, 16,…}.

Cuando cumple 5 años debe meter en la hucha 16 euros.

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando de forma que cada término es el anterior multiplicado por 2. Este tipo de sucesiones se llaman progresiones geométricas.

Recuerda que:

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

El término general de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La **suma** de los n primeros términos de una **progresión aritmética** viene dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

El **producto** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dado por:

$$\boldsymbol{P_n} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

La **suma** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \text{ siempre que } r \neq 1.$$

Actividades resueltas

- *El término 5 de la progresión aritmética con $a_1 = 7$ y $d = 3$ es:*

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)\, d = 7 + 4 \cdot 3 = 7 + 12 = 19.$$

- *La suma de los 5 primeros términos de esa progresión es:*

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(7+19)}{2} = 65.$$

- *El término 5 de la progresión geométrica* $\{1, 2, 4, 8, 16,\ldots\}$ *es:*

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 1 \cdot 2^4 = 16$$

- *El producto de los 5 primeros términos de esa progresión es:*

$$\boldsymbol{P_5} = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(1 \cdot 16)^5} = 16^2\sqrt{16} = 16^2 \cdot 4 = 1024$$

- *La suma de los 5 primeros términos de esa progresión es:*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{2 \cdot 16 - 1}{2-1} = \frac{32-1}{1} = 31.$$

Actividades propuestas

9. Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones siguientes e indica si son progresiones aritméticas, progresiones geométricas o de otro tipo.

a) $a_n = 3 \cdot 3^n$

b) $a_n = 5n + 7$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{3n}$

10. En las sucesiones del problema anterior que sean progresiones aritméticas, calcula la suma de los 6 primeros términos.

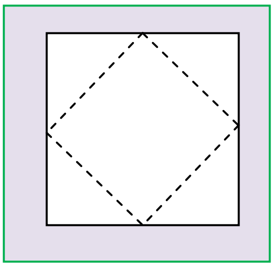
11. En las que sean progresiones geométricas, calcula el producto de los 6 primeros términos y la suma de los 6 primeros términos.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Tipos de sucesiones: convergentes, divergentes y oscilantes

Actividad resuelta

- *Tenemos en la mano un cuadrado de papel de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.*



El área del primer cuadrado nos dicen que mide 1 u^2.

Al cortar las cuatro esquinas el nuevo cuadrado tiene un área de 1/2 u^2. Dejamos sobre la mesa las cuatro esquinas, por lo que estamos dejando sobre la mesa un área 1/2 u^2.

Volvemos a cortar las cuatro esquinas, y así sucesivamente.

En la mano tenemos las siguientes áreas: 1, 1/2, 1/4, 1/8, … Tenemos cada vez menos papel en la mano.

¿Alguna vez nos quedaremos sin nada de papel en la mano? Si siempre cortamos la mitad de lo que nos queda, nunca llegamos a tener 0.

Encima de la mesa vamos dejando las siguientes áreas:

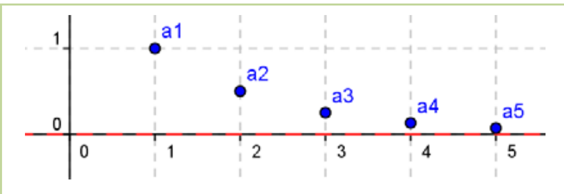
1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + …

¿Y la cantidad de papel que tenemos sobre la mesa? Sumamos y sumamos trocitos de papel, pero nunca tendremos más del inicial, 1, y ni siquiera llegaremos nunca a tener 1.

Actividades resueltas

- Hay sucesiones como la progresión geométrica 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … de razón 1/2, con término general:

$$a_n = (1/2)^{n-1}$$

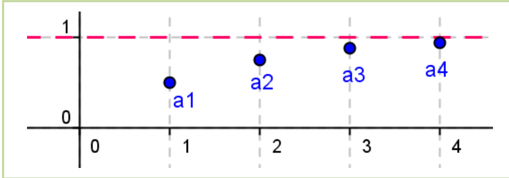


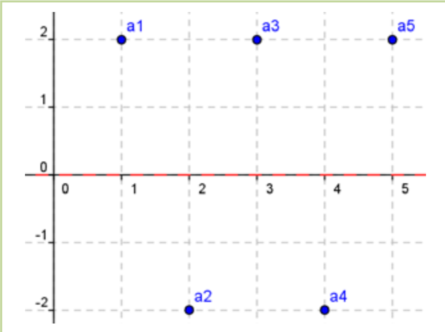
que se acercan a un cierto número real, aunque puede ocurrir que nunca lleguen a alcanzarlo. Esta progresión geométrica tiende a 0. Decimos entonces que es **convergente,** que converge a 0, o que su límite es 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

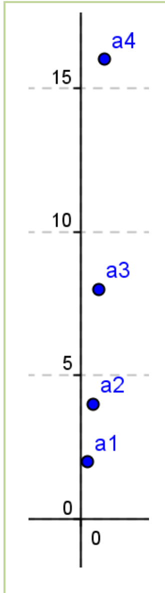
- La sucesión $a_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente, tiene como límite 1, o converge a 1.





$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

- Otras sucesiones como la progresión geométrica 2, –2, 2, –2, 2, –2, … de razón –1, con término general a_n = 2·(–1)$^{n+1}$ no se acercan a un único valor, sino que oscila entre 2 y –2. No tiene límite. Se dice que es una sucesión **oscilante**.



- Otras sucesiones, como la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32… de razón 2, con término general a_n = 2^n no se acercan a un número real, sino que crecen y crecen indefinidamente. No tienen límite. No es convergente. Al aumentar n los valores de la sucesión pueden superar a cualquier número por grande que éste sea. Se dice que su límite es infinito y que la sucesión es **divergente**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2)^n = \infty .$$

Recuerda que:

Las sucesiones pueden ser convergentes, si tienen como límite un número L, divergentes, si tienden a infinito, y oscilantes.

1.5. Monotonía y acotación

Actividades resueltas

- La sucesión 2, 4, 8, 16, 32… es monótona creciente pero no está acotada.
- La sucesión 2, –2, 2, –2, 2, –2, … no es monótona, pero si está acotada.
- La sucesión 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, …es monótona decreciente y está acotada.
- La sucesión 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + … es monótona creciente y está acotada.

A la vista de estos ejemplos vamos a definir cuándo una sucesión es monótona y cuándo está acotada.

Definición:

Una sucesión a_n está acotada si existe $k \in \Re$ tal que $|a_n| < k$ para todo n.

Definición:

Una sucesión a_n es monótona creciente en sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n < a_{n+1}$.

Una sucesión a_n es monótona decreciente en sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n > a_{n+1}$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica

Actividades resueltas

- En la actividad resuelta del apartado anterior vimos que la cantidad de papel que dejábamos sobre la mesa: $a_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n$, se aproximaba a 1 tanto como quisiéramos, pero nunca iba a ser 1.

¡Esto es una idea difícil! Los griegos tardaron en comprenderla. Puedes leer sobre ello en la revista la Paradoja de Zenon de Aquiles y la tortuga. No comprendían cómo una suma infinita, es decir, con infinitos sumandos, podía dar un resultado finito, en nuestro caso, 1.

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=1.$$

Recuerda que:

Este resultado ya lo conoces de 3º de ESO. Vamos a revisar lo que ya conoces:

A) Suma de un número ilimitado de términos consecutivos de una progresión geométrica

Dependiendo del valor de r será posible o no obtener la suma de un número ilimitado de términos:

a) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1\ldots\}$ y si a_1 es positivo la suma de los términos será cada vez mayor. Si fuera a_1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa. Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma es infinita. Es **divergente**.

b) Si $|r| > 1$, los términos crecen indefinidamente y el valor de la suma para un número ilimitado de términos, también es infinito. Es **divergente**.

c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos se aproxima, cuando n es grande, a

$$S_n \approx \frac{a_1}{1-r}.$$

Observamos que la suma no depende del número de términos, ya que al hacerse cada vez más pequeños, llega un momento en que no se consideran. Es **convergente**.

d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,\ldots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie **oscila** entre esos dos valores para un número finito de términos. Para un número de términos ilimitado no sabemos si es par o impar, con lo que la suma no se puede realizar a no ser que $a_1 = 0$, caso en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En el resto de los casos decimos que la suma de infinitos términos no existe pues su valor es **oscilante**.

e) Si $r < -1$, los términos oscilan entre valores positivos y negativos, creciendo en valor absoluto. La suma de sus infinitos términos no existe pues su valor también es **oscilante**.

En resumen,

La **suma** de un número **ilimitado** de términos de una **progresión geométrica** de primer término no nulo sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

En el resto de los casos, o vale infinito y es divergente, o no existe pues oscila.

Actividades resueltas

- *Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es* 4 *y la razón* 1/2.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

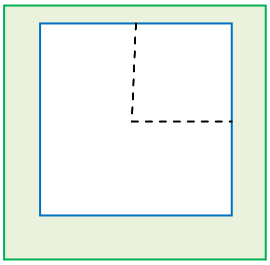
- *En una progresión geométrica la razón es* 1/4 *y la suma de todos sus términos es* 8. *¿Cuánto vale el primer término?*

Despejamos a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ y: $a_1 = S\,(1 - r) = 8 \cdot (1 - 1/4) = 6$

Actividades propuestas

12. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…

13. Tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crece o disminuye? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área sobre la mesa o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



14. ***El error de Euler***: *Euler* fue un gran matemático, pero se encontró con el siguiente problema. Quizás tú seas capaz de ayudarle a resolverlo. Hizo la siguiente suma, donde r es un número positivo:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Primero sumó la primera parte, aplicando la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$$

Luego la segunda:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

Y al sumar ambas obtuvo: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$, que evidentemente está mal pues la suma de infinitos números positivos no puede ser 0. ¿Dónde está el error?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.7. Aplicaciones de las progresiones geométricas

Fracción generatriz

El curso pasado estudiaste cómo pasar de un decimal periódico puro o periódico mixto a una fracción. Ahora vamos a utilizar las progresiones geométricas para que comprendas mejor el proceso.

Ejemplo:

- Si tenemos un **número decimal periódico puro**, lo podemos escribir como:

$$2'\widehat{37} = 2 + 0'37 + 0'0037 + 0'000037\ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Por tanto:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- Si tenemos un **número decimal periódico mixto**, se utiliza un proceso similar:

$$1'32\widehat{8} = 1'32 + 0'008 + 0'0008 + \ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$1'32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

En este caso, los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{10} < 1$.

Por tanto:

$$1'32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0'32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Con este proceso estamos ilustrando el concepto de fracción generatriz como aplicación de las progresiones geométricas, pero a efectos prácticos, es más cómodo efectuarlo según el proceso que ya conoces.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Capitalización compuesta

Ya conoces el interés compuesto pero vamos a revisarlo a la vista de las progresiones geométricas.

Si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_0 durante un tiempo t y un rédito r dado en tanto por uno, obtendremos un beneficio $I = C_0 \cdot r \cdot t$ llamado **interés.**

La principal característica de la capitalización compuesta es que los intereses que se generan en un año, pasan a formar parte del capital inicial y producen intereses en los periodos siguientes.

Entonces:

- Al final del *primer año*, el capital será el capital inicial C_0 junto con los intereses producidos durante ese año. Es decir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del *segundo año*, el capital que tendremos será el capital que teníamos al finalizar el primer año más los intereses producidos ese segundo año. Es decir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \,.\, (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observando los capitales obtenidos: C_1, C_2, …, C_n concluimos que se trata de una progresión geométrica de razón (1 + r). Por tanto:

- El *año n-ésimo*, tendremos:

El capital final obtenido después de n años dado un capital inicial C_0 y un rédito r dado en tanto por uno, es:

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \,.\, (1 + r)^n}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Veamos la fracción generatriz de 23,$\overline{4}\overline{5}$ como aplicación de las progresiones geométricas.*

$$23,\overline{4}\overline{5} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O lo que es lo mismo:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100\cdot 100} + \frac{45}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Por tanto:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositamos en un banco 1500 € al 3'5 % de capitalización compuesta durante tres años. ¿Cuánto dinero tendríamos al finalizar el tercer año?*

  Utilizamos la expresión: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ donde C_0= 1500 €, r = 0,035 pues es el tanto por uno y t = 3 años. Por tanto: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ = 1500(1 + 0'035)^3 = 1663'08 €.

Actividades propuestas

15. Calcula la fracción generatriz del número 4'5$\widehat{6}\widehat{1}$.

16. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3'5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes.

¿Qué opción le interesa más?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

2.1. Reflexiones sobre el infinito

"Cuando en el uso de los principios del entendimiento no nos limitamos a aplicar nuestra razón a objetos de la experiencia, sino que nos atrevemos a extenderla más allá de los límites de ésta, se originan demostraciones que no esperan confirmación en la experiencia ni pueden tener refutación"

"El infinito, como ningún otro problema, siempre ha conmovido profundamente el alma de los seres humanos. El infinito como ninguna otra idea, ha tenido una influencia estimulante y fértil en la mente. Pero el infinito necesita, más que ningún otro concepto, clarificarse"

David Hilbert

Vamos a reflexionar un poco sobre el infinito matemático.

Reflexión 1: Un juego

- *Dos amigos un poco aburridos, Daniel y Jorge, deciden jugar a un juego que consiste en que Daniel escriba números y Jorge los borre. El procedimiento propuesto por Daniel es:*
  - ✓ A las cinco menos un minuto yo escribo los números 1 y 2, y tú borras el 1.
  - ✓ A las cinco menos medio minuto yo escribo 3 y 4, y tú borras el 2.
  - ✓ A las cinco menos un tercio de minuto yo escribo 5 y 6 y tú borras el 3.
  - ✓ Y así sucesivamente. Naturalmente juegan con la imaginación.
  - ✓ Daniel pregunta a Jorge: A las cinco menos una centésima de minuto, ¿cuántos números te quedarán por borrar?
  - ✓ ¿Y a las cinco menos una millonésima de minuto?
  - ✓ ¿En qué momento borrarás el número 1000?
  - ✓ ¿Hay algún número que no puedas borrar antes de las cinco?

  Ayuda a Jorge a responder.

Reflexión 2: El hotel infinito

- *Para el dueño de un hotel es un disgusto tener que decir a un cliente que no le quedan habitaciones. Pero, ¿qué ocurriría si el hotel tuviera infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4,…? Imagina que el hotel está completo y llega un nuevo cliente, ¿cómo lo alojarías?*

Muy fácil. El dueño pasa al cliente de la habitación 1 a la 2, al de la 2 a la 3, al de la 3 a la 4… y de este modo le queda libre la habitación 1.

¿Y si llegaran 100 clientes más? ¿Y si mil?

Muy fácil, Pasa al cliente 1 a la habitación 101… dejando libres las 100 primeras habitaciones. En el segundo pasa al cliente de la habitación 1 a la habitación 1001… dejando libres las 1000 primeras habitaciones.

¿Y si llegaran tantos clientes como hay?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En el último caso tiene que pensar un poco más. ¡Ya está! Pasa al cliente 1 a la habitación 2, al 2 a la habitación 2·2 = 4, al 3 a la habitación 2·3 = 6, y así sucesivamente. Le quedan ocupadas las habitaciones pares y libres todas las impares.

Reflexión 3: La tabla de Caratheodory

- *Tenemos la siguiente tabla infinita:*

0	1/2	1/4	1/8	1/16	…
–1/2	0	1/2	1/4	1/8	…
–1/4	–1/2	0	1/2	1/4	…
–1/8	–1/4	–1/2	0	1/2	…
–1/16	–1/8	–1/4	–1/2	0	
…	….	…	…	…	…

Sabemos que en una tabla, si sumamos primero todas las filas y luego por columnas, nos debe dar lo mismo que si primero sumamos todas las columnas y luego las filas. Pero esta tabla es infinita. ¡Mira lo que sale!

- Al sumar por filas, ya sabemos que la primera fila suma 1. Ve sumando las otras filas y luego los resultados de las sumas por filas.
- Ahora empieza a sumar por columnas. Y luego los resultados de las sumas por columnas.
- Por último suma por diagonales. ¿Te sorprende el resultado?

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Los conjuntos finitos tienen propiedades que no tienen los conjuntos infinitos.

Al reflexionar sobre las cuestiones anteriores te habrás dado cuenta que propiedades muy evidentes de los conjuntos finitos, no las cumplen los conjuntos infinitos.

Un conjunto A es finito si no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre A y una parte de A, distinta del propio A. Al número de elementos de un conjunto finito lo llamamos su cardinal.

Pero como hemos visto en el hotel con infinitas habitaciones, en un conjunto infinito podemos establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales, N, y el conjunto de los números pares, P, que es una parte de los naturales y distinta de N.

Con el "*Hotel infinito*" hemos visto que $\infty + 1 = \infty$, $\infty + 100 = \infty$, $\infty + 1000 = \infty$ e incluso $\infty + \infty = \infty$.

El cardinal de los números naturales se denomina "*infinito numerable*" y es el mismo que el de los números enteros, Z, y el de los números racionales, Q. Sin embargo el infinito de los números irracionales y el de los números reales es mucho mayor, es la "*potencia del continuo.*" No es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los números racionales y los números reales del intervalo (0, 1).

Con la *Tabla de Caratheodory* hemos comprobado que hay otras propiedades que no se verifican. No se verifica la propiedad asociativa, y al agruparlos de distintas formas se obtienen resultados diferentes.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Cálculo de algunos límites

No hay un procedimiento general e infalible que permita conocer si una sucesión es convergente y calcular su límite. En el capítulo dedicado a límite de funciones aprenderás con mayor rigor el concepto de límite de una función (las sucesiones son funciones) y nuevos procedimientos que podrán servirte para calcular el límite de las sucesiones, pero tendrás que tener cuidado con que las sucesiones **no son funciones continuas**. La representación gráfica de una sucesión, al ser una aplicación de los números naturales en los números reales, está formada por puntos sueltos.

Ya hemos calculado algunos límites como:

- La sucesión 1/2, 1/4, 1/8, … , $1/2^n$, … tiene un número infinito de términos, pero tiene límite, se acerca a 0 tanto como queramos, y ese límite es un número finito, 0.
- La sucesión 2, 4, 8, …, 2^n, … tiene un número infinito de términos, pero no tiene límite, podemos encontrar términos de la sucesión tan grandes como queramos. Es divergente. Tiende a infinito.
- La suma 1/2 + 1/4 + 1/8 … + $1/2^n$ … es una suma de infinitos términos. ¿Qué quiere decir sumar infinitos términos? Lo que queremos decir con ello es que esa suma converge a 1 (en el caso de la cantidad de papel que teníamos sobre la mesa, esto quiere decir que podemos tener sobre la mesa una cantidad de papel tan próxima a 1 como queramos).

Vamos ahora a calcular algunos límites sencillos.

Actividades resueltas

- *La sucesión* $a_n = \dfrac{3+n}{2n-5}$ *tiene como límite* $1/2$.

Para comprobarlo le damos a n valores muy grandes y observamos que podemos acercarnos a 1/2 tanto como queramos:

n	10^3	10^6	10^8
a_n	$\dfrac{3+10^3}{2\cdot 10^3-5}=0'502767$	$\dfrac{3+10^6}{2\cdot 10^6-5}=0'50000275$	$\dfrac{3+10^8}{2\cdot 10^8-5}=0'5000000275$

Es natural que para valores muy grandes de n el 3 del numerador y el 5 del denominador ya influyan muy poco comparados con n y con $2n$. Por ello podemos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3+n}{2n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Actividades propuestas

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2}$ b) $a_n = \dfrac{2n+2}{3(n+1)}$

c) $a_n = \dfrac{7}{5^n}$ d) $a_n = 4 + \dfrac{n+2}{n-3}$.

Actividades resueltas

- *Comprobamos, utilizando la calculadora y dando valores grandes a n que:*

La sucesión $a_n = \frac{4}{n}$ tiene como límite 0.

La sucesión $a_n = 3 - \frac{4}{n}$ tiene como límite 3.

La sucesión $a_n = n + \frac{4}{n}$ no es convergente, tiende a infinito.

La sucesión $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ no es convergente, es la sucesión: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$, … y tiende a infinito.

Actividades propuestas

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $a_n = \frac{5n^3 + 2n}{n - 6}$

b) $a_n = \frac{1 - 2n}{1 + 2n}$

c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$

d) $a_n = 6 + \frac{5n + 2}{2n - 3}$

19. Escribe una sucesión cuyo límite sea 2, y otra de límite 0.

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^2 - 6}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{1 - 2n}{1 + 2n + 7n^3}$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(6 - \frac{7}{n} \right)$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n + 2}{n - 3} - 3 \right)$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. El número e

Vamos a definir el número e como el límite de una sucesión, pero antes vamos a analizar situaciones que ya conoces que nos ayuden a comprenderlo.

Situación 1: Crecimiento de unas algas

- Los residuos vegetales de las calles y jardines de Madrid se llevan a la planta de compostaje de Migas Calientes, donde se obtiene compost que, de nuevo, se utiliza para abonar estos jardines. Allí se investiga sobre la forma en que los microorganismos se reproducen y actúan con más rapidez transformando los restos de poda en compost. Imagina que si someten una cantidad C de microorganismos (bacterias y hongos) a un determinado proceso durante un mes estos se han incrementado y se obtiene una cantidad doble, $C + C = 2C$ de microorganismos. Aceleran el proceso, añadiendo por ejemplo más oxígeno, de forma que dure sólo medio mes, pero se obtiene sólo la mitad, $C + C/2 = C(1 + 1/2)$ aunque entonces se realizan dos ciclos en un mes por lo que al final del mes se obtiene una cantidad de microorganismos de $C(1 + 1/2) + (1/2)(C(1 + 1/2)) = C(1 + 1/2)^2$ de microorganismos al final del mes. ¿Y si realizan cinco ciclos al mes, obteniendo en cada ciclo la quinta parte?

Planta de compostaje de Migas Calientes, Madrid

Primer ciclo: $C + C/5 = C(1 + 1/5)$

Segundo ciclo: $C(1 + 1/5) + (1/5)\, C(1 + 1/5) = C(1 + 1/5)^2$

Tercer ciclo: $C(1 + 1/5)^2 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^2 = C(1 + 1/5)^3$

Cuarto ciclo: $C(1 + 1/5)^3 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^3 = C(1 + 1/5)^4$

Quinto ciclo: $C(1 + 1/5)^4 + (1/5)\, C(1 + 1/5)^4 = C(1 + 1/5)^5$

En general si se hacen n ciclos al mes obteniendo en cada ciclo $1/n$ de la cantidad tratada, al final del mes tenemos una cantidad $C(1 + 1/n)^n$ de microorganismos.

Observa que al aumentar el número de ciclos, aumenta la cantidad de microorganismos, pero ¿hay un límite o crece hasta el infinito?

Situación 2: Interés compuesto

- Ya hemos estudiado el interés compuesto. Si un capital C se pone a un interés del 5 % anual durante un año, al final del año se obtiene $C + 0'05 \cdot C = C(1 + 0'05)$. Si los intereses se acumulan cada medio año al cabo del año se obtiene $C(1 + 0'05/2)^2$, y si es cada cuarto de año (cada trimestre) se tiene $C(1 + 0'05/4)^4$. En general si el año se divide en n intervalos se obtendría:

$$C(1 + 0'05/n)^n$$

¿Podría uno hacerse millonario en un año invirtiendo 200 euros en esas condiciones?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Situación 3: La espiral

- La figura del margen es la concha del *Nautilus*. Forma una espiral que se llama espiral equiangular, logarítmica, geométrica… Dibuja una teniendo en cuenta que cuando sus ángulos centrales están en progresión aritmética, sus radios están en progresión geométrica.

Marca un punto O. Toma una unidad OA = 1. Marca los ángulos centrales de AOB = 40º; AOC = 80º, AOD = 120º…

Sobre la recta que contiene a O y a B, marca B a una distancia de 1'2. OB = 1'2·OA. Marca C (sobre OC) a una distancia de OC = 1'2·OB = 1'44·OA…

Pero si el ángulo fuera 40º/2, el radio habría que multiplicarlo por 1'2/2. De esta forma obtendríamos nuevos puntos.

Estamos viendo que en distintas situaciones aparecen sucesiones parecidas:

$$C(1 + 1/n)^n,\ C(1 + 0'05/n)^n.$$

Definición:

Se define el número e como $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

¡Es el límite de una sucesión!

Si damos a n valores (con una calculadora o un ordenador) podemos aproximarlo: 2, 2'25, 2'37, 2'44, 2'5, 2'52… Para n = 100 obtenemos 2'7048…. Para n = 1000 obtenemos 2'716. Para n igual a un millón, 2'71828…

Utilizamos el desarrollo de un binomio por Newton.

Recuerda:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Como $a = 1 \to a^n = 1$, y $b = 1/n$, tenemos que:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Tomamos límites

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Resulta que e también es la suma de una serie. Ahora el valor de e lo obtenemos de una forma mucho más rápida. Nos basta la suma de 8 términos para obtener cinco cifras decimales de e, mientras que con la sucesión los obteníamos con n igual a un millón.

$$e \approx 2'71828\ldots$$

e es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Ahora ya sabemos resolver las situaciones de partida: la cantidad de microorganismos de la planta de compostaje si se aumenta el número de ciclos en un mes, tiende a $Ce \approx C\cdot 2'71828\ldots$. Nunca llegaría a triplicar la cantidad C de microorganismos.

En la situación de interés compuesto, nos preguntábamos si podría uno hacerse millonario en un año invirtiendo 200 euros en esas condiciones. Tenemos que calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} 200\cdot\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200e^{0'05}$$

No nos hacemos millonarios. Pero vamos a aprender a calcular estos límites.

Límites tipo *e*

En general para calcular el límite: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n$

Vamos completando la definición de e, dividiendo primero por A. El denominador n/A tiende a infinito, y lo completamos en el exponente, multiplicando y dividiendo por n/A.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^{\frac{n}{A}}\right)^A = e^A$$

Esta técnica podemos usarla si tenemos un límite con un exponente que tienda a infinito y cuya base tienda a 1, lo que llamamos una indeterminación tipo 1^∞.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula el límite:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}$

Primero comprobamos que es un límite tipo e, el exponente $2n-1$ tiende a infinito, y la base:

$$\frac{3n-3}{3n+1}\to\frac{3n}{3n}\to 1, \text{ tiende a 1.}$$

Queremos completar el primer 1 de la definición de e, para lo que tenemos que dividir:

$$\frac{3n-3}{3n+1}=\frac{3n+1-3-1}{3n+1}=1+\frac{-4}{3n+1}$$

Para conseguir el segundo 1, dividimos por – 4

$$1+\frac{-4}{3n+1}=1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}.$$

Hacemos que el exponente coincida con $\frac{3n+1}{-4}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}\cdot\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}$$

El límite de la base hemos conseguido que sea e. El límite del exponente sabemos calcularlo:

$$\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)\to\frac{-8n}{3n}\to\frac{-8}{3}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=e^{\frac{-8}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{8}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^8}}.$$

Actividades propuestas

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n=\left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n}$

b) $a_n=\left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2}$

c) $a_n=\left(1+\frac{7}{n+3}\right)^{n^2}$

d) $a_n=\left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

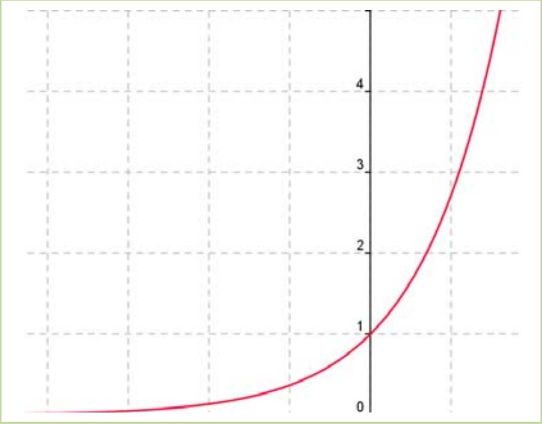
Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Función exponencial y función logaritmo

Función exponencial

En 4º de ESO (4ºB) ya has estudiado la función exponencial y la función logaritmo, pero ahora que conoces mejor el número e parece interesante que analicemos algo sobre ellas, y resolvamos nuevos problemas.

La función exponencial de base e se define como $y = e^x$. Ahora ya sabes bien qué es lo que significa. Algunas de sus propiedades son:



1. $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$
2. $e^0 = 1$, y $e^x > 0$ para todo x.
3. Es siempre estrictamente creciente, lo que permite resolver ecuaciones exponenciales.
4. Cuando x tiende a $+\infty$, e^x tiende a $+\infty$, pero
5. Cuando x tiende a $-\infty$, e^x tiende a 0.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación: $e^{x+1} = e^{2x-3}$.

Para resolver ecuaciones exponenciales debemos conseguir que las bases sean iguales y basta, entonces, con igualar los exponentes:

$$e^{x+1} = e^{2x-3} \to x+1 = 2x-3 \to x = 4.$$

Actividades propuestas

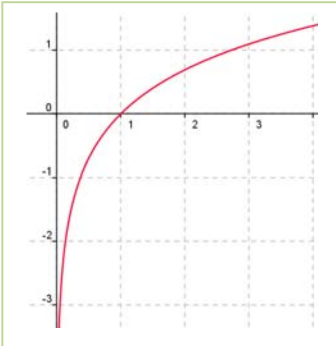
22. Calcula $1/e$ con tres cifras decimales exactas.

23. Calcula $\sqrt{e}$ con tres cifras decimales exactas.

Función logaritmo

La **función logaritmo** en base e, es decir, **logaritmo neperiano**, se define como:

$$ln\ x = y \Leftrightarrow x = e^y$$



Aplicando esa definición se demuestra que:

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base).
- ✓ El logaritmo de la base es 1.
- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, es decir, $\text{Dom}(ln) = \Re^+$.
- ✓ Cuando x tiende a $+\infty$, $ln\ x$ tiende a $+\infty$.
- ✓ Cuando x tiende a 0, $ln\ x$ tiende a $-\infty$.
- ✓ Es siempre estrictamente creciente, lo que permite resolver ecuaciones logarítmicas.

Propiedades de los logaritmos

- ✓ El logaritmo de un **producto** (en cualquier base) es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

- ✓ El logaritmo de un **cociente** (en cualquier base) es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

- ✓ El logaritmo de una **potencia** (en cualquier base) es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Actividades resueltas

- *Resuelve las ecuaciones: a)* $e^{x+2} = e^4$. *b)* $ln(2x-1) = ln(3)$.

Para resolver ecuaciones logarítmicas despejamos el logaritmo en ambos miembros, y luego, igualamos.

a) $e^{x+2} = e^4 \rightarrow x + 2 = 4 \rightarrow x = 2$.

b) $ln(2x-1) = ln(3) \rightarrow 2x - 1 = 3 \rightarrow x = 4/2 = 2$.

Actividades propuestas

24. Calcula el logaritmo neperiano de $1/e$ y de $\sqrt{e}$.

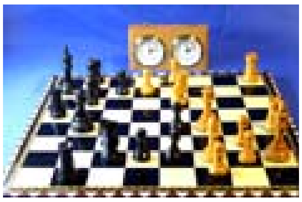
25. Resuelve la ecuación $ln(x + 2) + ln(3x) = 1$

26. Resuelve la ecuación: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

A) El inventor del ajedrez



Ya vimos en el capítulo sobre potencias la leyenda sobre el ajedrez. Ahora puedes utilizar tus conocimientos sobre progresiones para hacer los cálculos:

Cuenta la leyenda cómo el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle generosamente, para lo cual le dijo: "Pídeme lo que quieras, que te lo daré".

El inventor del ajedrez formuló su petición del modo siguiente:

"Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64".

La sorpresa fue cuando el secretario del príncipe calculó la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor, porque toda la Tierra sembrada de trigo era insuficiente para obtener el trigo que pedía.

¿Qué tipo de progresión se utiliza? ¿Aritmética o geométrica? ¿Cuál es la razón?

¿Cuántos trillones de granos de trigo pedía aproximadamente?

¿Podrías hallar el total de granos de trigo utilizando fórmulas y usando la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potencias de 2 en el tenis

Las potencias de 2 también aparecen en los torneos de tenis. En muchos torneos se enfrentan los jugadores de la siguiente forma: En la final juegan dos jugadores; en la semifinal hay cuatro; en los cuartos de final hay ocho jugadores. Así, en cada ronda adicional la cantidad de jugadores se duplica, tal como ocurría con los granos de trigo en el tablero de ajedrez. Si el torneo tuviera 25 rondas, ¿te imaginas cuántos habría? Pues, ¡¡podrían participar casi todos los habitantes de España!! y con 33 rondas, ¡¡ podrían participar todos los habitantes del planeta!!

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

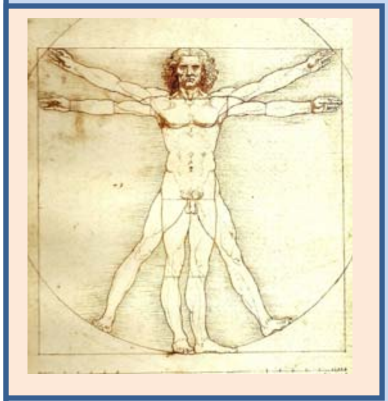
Sucesión de *Fibonacci*

Para los que pensáis que es imposible ver Matemáticas fuera del aula y mucho menos en la naturaleza, os presentamos uno de los más bellos conceptos matemáticos estrechamente relacionado con la naturaleza y el arte.

Se trata de una sucesión muy simple, en la que cada término es la suma de los dos anteriores.

- La sucesión comienza por el número 1,
- Y sigue con 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ya que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de las propiedades más curiosas, es que el cociente de dos números consecutivos de la sucesión se aproxima a la llamada **“sección áurea” o “divina proporción”**, que ya conoces, el número de oro descubierto por los renacentistas, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1’61803…, que se nombra con la letra griega ϕ. La sucesión formada por los cocientes de números consecutivos de la sucesión de *Fibonacci* se acerca rápidamente hacia el número de oro. Los griegos y renacentistas estaban fascinados con este número y lo consideraban el ideal de la belleza.



De hecho, *Leonardo da Vinci* en su obra “*El hombre de Vitrubio*” utiliza este número para conseguir las perfectas proporciones de su obra.

¿Cómo puede ser que el cociente de dos números de una secuencia inventada por el hombre se relacione con la belleza? Pues porque la sucesión de *Fibonacci* está estrechamente relacionada con la naturaleza. Se cree que *Leonardo* encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos. Supongamos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez engendrarán cada mes una pareja de conejos.

¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?

Pues sí, cada mes habrá un número de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de *Fibonacci*. Parece magia, ¿verdad?

Pues muchas plantas, como las piñas o las margaritas siguen una disposición relacionada también con la sucesión de *Fibonacci*, lo que ilustra la famosa frase de *Galileo*

“La naturaleza está escrita en lenguaje matemático”.

Los griegos y el infinito

El concepto de infinito ha costado tiempo y esfuerzo a la humanidad entenderlo. Los griegos opinaban que el número de granos de arena del mundo era infinito, hasta que *Arquímedes* escribió *el Arenario*, tratado en el que estimaba ese número, que en efecto es muy grande, pero no infinito.

Paradoja de Aquiles y la tortuga

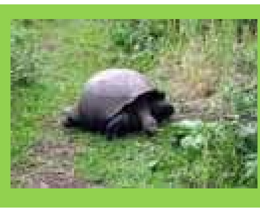
En ese mismo sentido, los griegos no podrían comprender que si sumaban infinitas cantidades les pudiera dar una cantidad finita.

Así aparece la paradoja de *Zenón* de "Aquiles y la tortuga". Aquiles, el de los pies ligeros, echa una carrera con una tortuga. Da a la tortuga una gran ventaja, pongamos L estadios. En poco tiempo Aquiles recorre los L estadios, pero al llegar allí descubre que la tortuga ha avanzado un cierto trecho, supongamos que $L/10$. Avanza de nuevo hasta donde se encontraba la tortuga, pero al llegar, ésta de nuevo ha avanzado. De este modo Aquiles nunca ganará la carrera, pues al llegar a la posición donde se encontraba la tortuga, ésta ya se ha movido.

La experiencia les decía que Aquiles sí alcanzaba a la tortuga, pero no lograban comprenderlo. Tú ya les podrías ayudar pues ya sabes sumar series infinitas en progresión geométrica de razón menor que 1:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = L + L/10 + L/10^2 + \ldots = \frac{L}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10L}{9}$$



Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Sucesión	Función entre los números naturales, $\mathbb{N}$, y los reales, $\Re$.	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2….
Progresión aritmética	Sucesión de números reales en la que la diferencia d entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
	Término general: $a_n = a_k + (n - k)\, d$ **Suma de los *n* primeros términos:** $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ $S_8 = (8/2)\cdot(2 + (2 + 3\cdot 8)) = 112$
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
	Término general: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ **Suma:** $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, para $r \neq 1$ **Suma infinita**: $S = \frac{a_1}{1-r}$, para $0 < \vert r \vert < 1$. **Producto:** $P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2-1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$ $a_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
El número e	$e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas: $e \approx 2'71828...$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sucesiones

1. Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.

2. El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia 1/2. Halla el primer término y el término 100.

3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.

4. Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1000 y 2000.

5. La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60'5. Halla el primer término.

6. El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5184 y el primer término es 3. Escribe el resto de términos.

7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?

8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

9. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

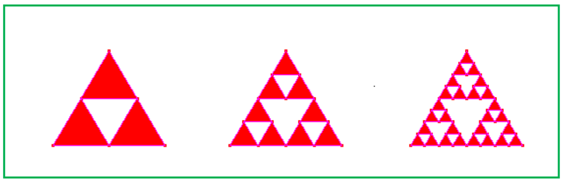
11. Halla la fracción generatriz del número decimal 0'12121212..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

12. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?

13. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

14. *Triángulo de Sierpinski:* Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina *Triángulo de Sierpinski*, y es un fractal. A) Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es (3/4)A. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? B) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



Límite de sucesiones

15. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^2-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n-3}{n+7}$

16. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{-3}{n+7}$

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{2n^5+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n+7}$

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

19. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(1+\dfrac{3}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(1-\dfrac{4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(\dfrac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2-6}\right)^{2n-3}$ b) $a_n = \left(\dfrac{n^2-4}{n^2-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Exponencial y logarítmica

22. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?

23. Ingresamos en un banco 20.000 euros al 3 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?

24. Vanesa ha comprado un coche por 17.000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10 % cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?

25. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto, x, con su energía y (en ergios): $\log y = 11'4 + 1'5\,x$. Calcula la energía de un terremoto: a) de una intensidad 5 en dicha escala, y b) de una intensidad 7.

26. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de que tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?

27. En la fórmula del término n–ésimo de una progresión geométrica, despeja n, aplicando logaritmos.

28. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta 10 cm^3 que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta 10 cm^3 que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?

29. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial: $(0'99)^n = 0'75$.

30. Utiliza la calculadora para estimar el valor de 2^{63}. Estima también $2^{64} - 1$.

31. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{2x-4} = 81$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$

c) $\sqrt[x-1]{8} = 2$

d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 7\cdot 4^{n-1}$?

a) 7 b) 4 c) –1 d) No es una progresión geométrica

2. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar:

a) 1 b) 2 c) 11 d) 121

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20,... es:

a) 220 b) 275 c) 55 d) 250

4. La sucesión 1, 1/5, 1/25, 1/125,...:

a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5

c) Es una progresión geométrica de razón 1/5 d) Es una progresión aritmética de diferencia 1/5.

5. La solución de la ecuación $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ es:

a) 40 b) 8 c) 10 d) 20

6. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general:

a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$

7. Pepa está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?

a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128

8. A Luis le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

9. La sucesión $a_n = \dfrac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ tiene como límite:

a) 0 b) ∞ c) –3/2 d) 7

10. La sucesión $a_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ tiene como límite:

a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF