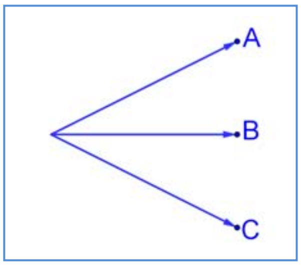
CAPÍTULO 13: COMBINATORIA

1. PERMUTACIONES

1.1. Diagramas en árbol

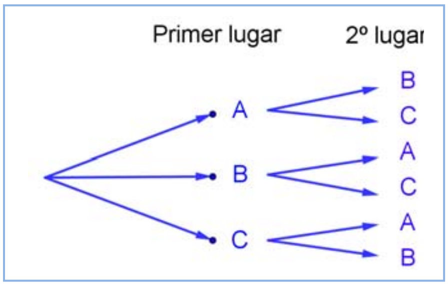
Actividades resueltas



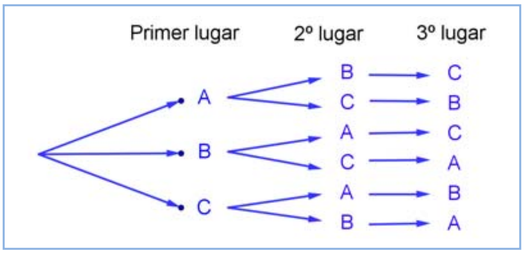
- En una fiesta se cuenta con 3 grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?

Una técnica que puede ayudar mucho es confeccionar un **diagrama en árbol**. Llamamos a los grupos A, B y C. En primer lugar podrá actuar bien A, bien B o bien C.

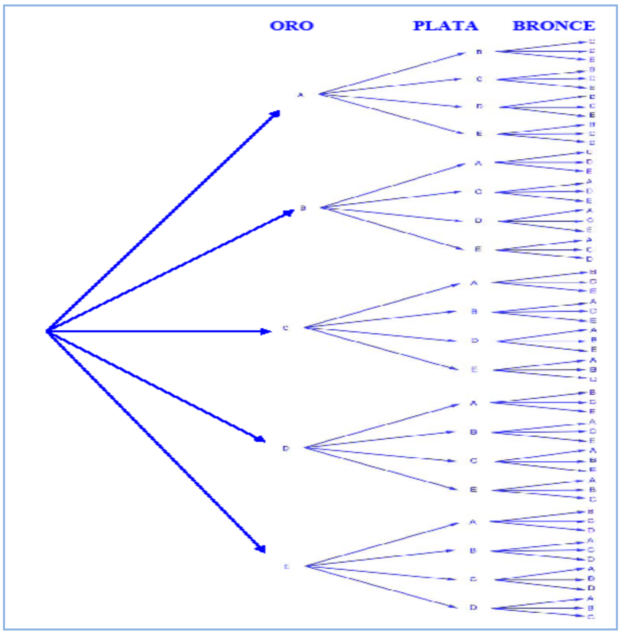
Una vez que el grupo A actúa en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Lo mismo si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y lo mismo con C.



Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y así en las otras posibilidades. Sólo queda una única posibilidad en todos los casos.



Confeccionar el diagrama en árbol, incluso comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Vemos que hay 3 · 2 · 1 = 6 formas de organizar el orden de actuación de los grupos.



- En una carrera compiten 5 corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce, ¿de cuántas formas distintas pueden repartirse?

Hacemos el diagrama en árbol. El oro lo pueden ganar los 5 corredores que vamos a llamar A, B, C, D y E. Hacemos las 5 flechas del diagrama. Si el oro lo hubiese ganado el corredor A, para la plata sólo la podrían ganar los otros 4 corredores, B, C, D y E. Si el oro lo hubiera ganado B también habría 4 posibilidades para la medalla de plata: A, C, D y E. Y así con el resto. Suponemos que la medalla de oro la ha ganado A y la de plata B, entonces la medalla de cobre la pueden ganar C, D o E.

Por tanto hay 5 · 4 · 3 = 60 formas distintas de repartir las 3 medallas entre los 5 jugadores.

Actividades propuestas

1. Haz diagramas en árbol y calcula:
   a) Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C.
   b) Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.
2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema
3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? *Sugerencia*: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna ¿En cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

1.2. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

El número de **permutaciones** son todas las posibles formas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplo:

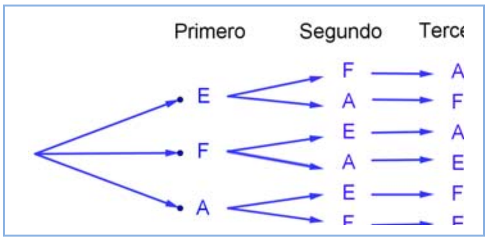
- Son permutaciones las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.
- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA.
- Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.
La actividad resuelta de los 3 grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados.



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.
Pueden quedar de 3 · 2 · 1 = 6 formas distintas.
En general para calcular las permutaciones de n elementos se multiplica n por $n-1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

A este número se le llama factorial de n, y se indica $n!$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Son n situaciones con n, $n-1$, $n-2$, … , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Ejemplos:

- Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.
- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son $P_5 = 5! = 120$.
- España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas

Actividades propuestas

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?
5. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.
6. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?
7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?
8. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?
9. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿ De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Actividades resueltas

- Cálculo de $\frac{6!}{3!}$. Es $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
- Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes: a) 10·9·8; b) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)$

  a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$ b) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propuestas

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.
11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.
12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.
13. Expresa utilizando factoriales: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)$.
14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.
15. Nueve amigos van el bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

2. VARIACIONES

2.1. Variaciones con repetición

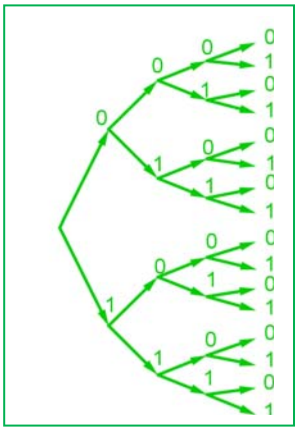
Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de futbol señalando con un 1 si pesamos que gana el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y X si hay empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora si puedes **repetir** los símbolos 1, 2 y X, y una quiniela es distinta de otra si cambia tanto el **orden** como los **elementos**.

Se llaman variaciones con repetición de m elementos (los 3 símbolos) tomados de n en n (los 14 partidos) y se designa $VR_{m,n}$. En el caso de las quinielas son $VR_{3,14}$.

Actividades resueltas

- Con dos símbolos, 0 y 1, ¿cuántas tiras de 4 símbolos se pueden escribir?



Son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4. Hacemos el diagrama de árbol. Observamos que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar.

Por tanto $VR_{2,4} = 2·2·2·2 = 2^4 = 16$ tiras distintas.

En general, $VR_{m,n} = m^n$.

Actividades resueltas

- El número de quinielas distintas son $VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$. La probabilidad de que te toque una quiniela en una jugada es por tanto de 1/4782969.

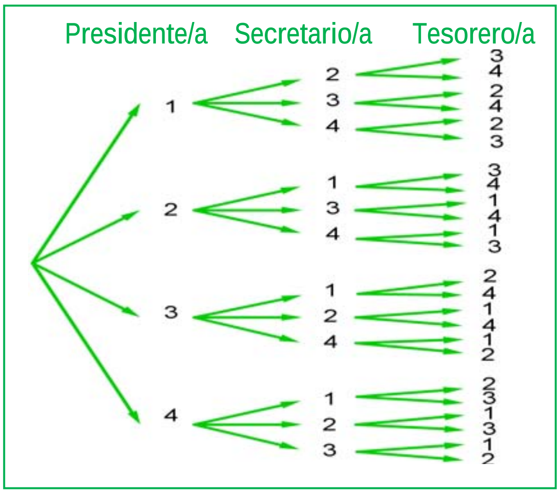
Actividades propuestas

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?
17. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?
18. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?
19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.
20. Expresa con una fórmula:
    a) Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.
    b) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.
    c) Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.
21. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?
22. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

2.2. Variaciones sin repetición

Ejemplo

- Una asociación de vecinos van a tener elecciones a la junta directiva. Ésta consta de 3 cargos, presidente/a, secretario/a, y tesorero/a. a) Sólo hay 4 candidatos. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Antes de que empiece la votación se presentan 2 candidatos más, ¿cuántas juntas podrán formarse ahora?



Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos del 1 al 4 a los candidatos. A presidente/a pueden optar los 4 candidatos, pero si el candidato 1 ya ha sido elegido, no puede ser presidente/a y además secretario/a, por lo que entonces en ese caso, sólo saldrán del árbol las ramas a 2, 3 y 4. Si hubiese sido elegido 1 de presidente/a y 2 de secretario/a entonces para elegir al tesorero/a únicamente hay dos opciones, 3 o 4.

La junta puede estar formada de 4 · 3 · 2 = 24 maneras.

Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de 6 · 5 · 4 = 120 maneras.

Son variaciones sin repetición. En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, influye el **orden** y los **elementos** que aparecen. En las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de *m* elementos tomados de *n* en *n* se designan $V_{m,n}$ son los grupos de *n* elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien en el **orden** en que aparecen. Toman el valor de *n* factores decrecientes de uno en uno:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ (} n \text{ factores)}$$

Observaciones

1) *m* debe ser siempre mayor o igual que *n*.
2) Las variaciones de *m* elementos tomados de *m* en *m* son las permutaciones de *m* elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor:

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$ b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a 4 – 3 + 1; en b) 4 = 6 – 3 + 1; en c) 5 = 10 – 6 + 1 y en d) 6 = 9 – 4 + 1.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

- Vamos a escribir ahora la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$ b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales debemos dividir por *m* – *n*.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Actividades propuestas

23. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?
24. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?
25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

26. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?
27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.
28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$. Para que tenga sentido se asigna a 0! el valor de 1.

$$0! = 1.$$

3. COMBINACIONES

3.1. Combinaciones

Ejemplo:

- En una librería tienen los 6 libros más leídos este verano. Quieren hacer paquetes de 3 libros. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?

Ahora cada paquete se diferenciará de otro sólo en los elementos (los libros), no en el orden.

Se llaman **combinaciones** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designan $C_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar de modo que dos grupos se diferencien entre sí en los **elementos** que lo forman (no en el orden).

Llamamos a los libros A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A				Paquetes sin A pero con B			Paquetes sin A ni B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hemos formado primero todos los paquetes que tienen al libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no tienen al libro A pero si tienen a B. Luego los que no tienen ni a A ni a B pero si a C. Y por último el paquete DEF que no tiene a los libros A, B ni C. Hay en total 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para resolver nuestro problema vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos. Si fuera importante tanto el orden como los elementos sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Pero entonces al paquete ABC lo estaríamos contando muchas veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Y lo mismo con el resto.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Cada paquete lo estaríamos contando P_3 = 3! = 6 veces de más. Por tanto basta con dividir las variaciones entre las permutaciones: $C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20$. En general:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Actividades resueltas

- Un test consta de 10 preguntas y se deben responder a 6 para aprobar. ¿De cuántas formas puedes elegir esas 6 preguntas?

No influye el orden, tampoco pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta), sólo influye las preguntas (los elementos) luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevar 3 de vacaciones, ¿cuántas posibilidades distintas hay de elegir los tres libros?

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3}$ = 10 formas.

- Tienes 7 monedas de euro que colocas en fila. Si 3 muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3}$ = 35. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4}$ = 35.

Actividades propuestas

29. Tenemos 5 bombones (iguales) y hay 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?
30. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede organizar el regalo?
31. En el juego del póker se dan 5 cartas a cada jugador de las 52 que tiene la baraja, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden recibir?

3.2. Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por eso a su expresión se la designa como número combinatorio.

El número combinatorio *m* sobre *n* se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- Calcula $\binom{7}{0}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{0}$, $\binom{4}{0}$. Habrás comprobado que: $\binom{7}{0}$ = 1, $\binom{5}{0}$ = 1, $\binom{9}{0}$ = 1 y $\binom{4}{0}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!}$ = 1. Recuerda que 0! = 1.
- Calcula $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$. Habrás comprobado que: $\binom{7}{7}$ = 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 y $\binom{4}{4}$ = 1. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!}$ = 1. Recuerda que 0! = 1.
- Calcula $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$. Habrás comprobado que: $\binom{7}{1}$ = 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 y $\binom{4}{1}$ = 4. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1}$ = *m*? En efecto: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m$.
- Calcula $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ e indica cuáles son iguales. Habrás comprobado que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Pero antes lo comprobaremos con un problema. Luis y Miriam se han casado y les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$. Pero Miriam quiere que en la estantería esté, si o si, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$. Sin embargo a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$. Uno de los dos se saldrá con la suya. Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.¿Te atreves a demostrarlo?

$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$ reducimos a común denominador

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n))!\cdot(n-1)!}$ Recuerda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n))!\cdot n!}$ Ponemos el denominador común y sumamos los numeradores

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ De nuevo usamos que $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}$.

Triángulo de Pascal o Triángulo de Tartaglia

Un matemático italiano del siglo XVI, llamado Tartaglia pues era tartamudo, se le ocurrió disponer a los números combinatorios así:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \quad \ldots \end{array}$$

O bien calculando sus valores correspondientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \quad \ldots \end{array}$$

A ambos triángulos se les llama **triángulo de Pascal** o triángulo de **Tartaglia**.

Utilizando las propiedades que ya conoces de los números combinatorios ya sabemos que como:

$\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empieza y termina con 1.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ sabemos que el Triángulo de Tartaglia es simétrico.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$ podemos obtener las siguientes filas sumando términos de la anterior: Así para formar la 2ª fila ponemos los 1 del principio y del final, y sumamos: 1 + 1 = 2. Para formar la 3ª, observa que 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, y ponemos los unos del principio y del final. La 4ª fila: 1 + 3 = 4; 3 + 3 = 6; 3 + 1 = 4, y los unos.

Actividades propuestas

32. Añade al triángulo de Tartaglia del margen 3 filas más.

33. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de la fila *m* da siempre 2^m.

34. Sin calcularlo, mirando al triángulo, ¿cuánto vale $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$; $C_{5,5}$.

1 1	2 = 2
1 2 1	4 = 2
1 3 3 1	8 = 2

Caminatas al azar

Los números combinatorios sirven como modelo para resolver situaciones muy diversas.

Actividades resueltas

- Si tenemos un dispositivo como el del margen, que se llama aparato de Galton, e introducimos muchas bolas por el agujero superior, por ejemplo 1024, ¿cómo crees que se distribuirán a su llegada? ¿De forma uniforme? ¿Habrá lugares a los que llegarán más bolas? Observa que para llegar a la fila de más a la izquierda sólo hay un camino posible (igual que para ir al de más a la derecha). Para llegar a la fila 2 hueco 2 hay 2 caminos. Comprueba que para llegar a la fila *m* hueco *n* hay $\binom{m}{n}$ caminos.

Si nuestro aparato de Galton tiene 9 filas y tiramos 1000 bolas para saber como se depositarán aproximadamente calculamos la fila 9ª del Triángulo de Tartaglia: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 su suma sabemos que vale $2^9 = 512$, por tanto, aproximadamente en cada compartimento del aparato tendremos:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bolas	$\frac{1024}{512} = 2$	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2 = 72	9·2 = 18	2

No se depositan el mismo número de bolas en cada compartimento. Si en los extremos se depositan 2 bolas en los centrales, aproximadamente, se depositan más de 250 bolas.

Número de éxitos

Actividades resueltas

- Estamos jugando al tiro al plato. Se disparan sucesivamente 10 disparos. ¿Cuántas posibilidades hay de dar en el blanco 3 veces (tener 3 éxitos)? Son las $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumen

$\binom{m}{n}$ = Número de combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*

= Número de caminos posibles para llegar a la fila *m* hueco *n* del aparato de Galton

= Número de subconjuntos de *n* elementos tomados en un conjunto de *m* elementos

= Número de sucesos en los que obtenemos *n* éxitos en *m* pruebas

= Números de muestras sin ordenar de tamaño *n* en una población de tamaño *m*.

3.3. Binomio de Newton

Vamos a calcular las sucesivas potencias de un binomio. Ya sabes que:

$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3\cdot(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Actividades resueltas

- Observa detenidamente los resultados. ¿Serías capaz de calcular $(a + b)^5$ sólo observando?

Fíjate que siempre aparecen todos los posibles términos del grado que estamos calculando, por lo que para calcular la quinta potencia tendremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Los exponentes están ordenados, los de a van descendiendo desde 5 hasta 0, y los de b crecen desde 0 hasta 5 (recuerda $a^0=1$).

El coeficiente del primer y último término es 1.

Los otros coeficientes se obtienen sumando los de los términos de la fila anterior, como en el Triángulo de Tartaglia. Son la fila 5ª del Triángulo de Tartaglia.

Luego $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribirlo también utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propuestas

35. Desarrolla $(a + b)^6$

En general: $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$.

Esta igualdad se denomina **Binomio de Newton**.

Actividades resueltas

- ¿Cómo calcularías $(a - b)^n$? Basta aplica la fórmula del Binomio de Newton a $(a +(- b))^n$.

Recuerda $(- b)$ elevado a un exponente par tiene signo positivo y elevado a un exponente impar lo tiene negativo. Por tanto $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Los signos son alternativamente positivos y negativos.

Actividades propuestas

36. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula el coeficiente de x^7 del polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. Resolución de problemas

Recuerda: para resolver un problema es conveniente tener en cuenta las siguientes fases:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Léelo hasta asegurarte de haber comprendido el enunciado, ¿qué datos te dan?, ¿qué te piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Si el problema es de *Combinatoria* una posible buena estrategia puede ser analizar si es un problema de permutaciones, o de variaciones o de combinaciones, y en ese caso aplicar la fórmula que ya conoces. Esta estrategia podríamos llamarla:

Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Pero otra posible buena estrategia, que no excluye la anterior, es comenzar a hacer un diagrama en árbol. A esta estrategia podemos llamarla:

Experimenta, juega con el problema

O bien:

Haz un diagrama, un esquema...

La fase siguiente a seguir es:

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Seguro que utilizando estas estrategias, resuelves el problema. Por último, cuando ya lo hayas resuelto:

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

4.2. Permutaciones circulares

Vamos a utilizar estas técnicas, u otras distintas, para resolver un problema:

Actividades resueltas

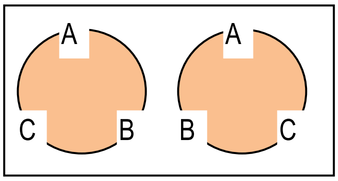
- Diez amigos y amigas van a comer y en el restaurante les sientan en una mesa redonda. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Si en lugar de una mesa fuera un banco, ya sabemos resolver el problema, es un problema de *Permutaciones*. La solución sería 10! formas distintas. Pero es una mesa redonda, no tiene un primer asiento ni un último asiento. Tampoco es sencillo, por el mismo motivo, diseñar el diagrama en árbol. ¿Qué hacemos? Piensa. Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia quizás sea:

Hazlo más fácil para empezar

Diez son muchos. Piensa en 3: A, B y C. Si fuera un banco, las posibilidades serían 3! = 6. Siéntalos ahora en una mesa redonda. La posibilidad ABC, es ahora la misma que BCA y que CAB. Nos quedan sólo dos formas distintas de sentarlos. Llamamos PC a esa permutación circular.

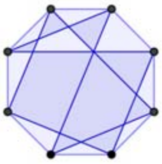


Tenemos pues que $P_2 = 2! = 2$ y $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ y $PC_3 = 2$. ¿Cómo podemos sentar a 4 personas en una mesa circular? La permutación ABCD ahora es la misma que BCDA, y que CDAB y que DABC, luego si $P_4 = 4! = 24$, entonces $PC_4 = P_4/4 = 6$.

¿Sabemos ya resolver nuestro problema inicial? Es $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Razona esta respuesta.

Actividades propuestas

39. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? *Ayuda*: Haz un diagrama circular como el anterior.
40. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?
41. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?



4.3. Permutaciones con repetición

Actividades resueltas

- Con las letras de la palabra RASTREAR, ¿cuántas palabras con estas 8 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

Observamos que la letra "R" se repite 3 veces y la letra "A", 2 veces. Si las 8 letras fueran distintas el número de palabras que se podrían formar sería 8!, pero entre estas 40 320 palabras observamos que todas aquellas en las que están permutadas las dos letras "A" son iguales, por lo tanto tenemos la mitad de las palabras 20 160. Además al considerar las tres letras "R" que hemos considerado distintas y que son iguales tenemos que por cada palabra diferente hay 6, es decir 3!, que son iguales, por lo tanto el número de palabras diferentes es 3 360

En general las permutaciones de 8 elementos de los que uno se repite 3 veces y otro 2 será: $PR_{8,3,2} = \dfrac{8!}{2!\ 3!} = 3\ 360$

Observa que las permutaciones de *n* elementos de los que uno se repite *k* veces y el otro *n* – *k* veces coincide con el número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Actividades propuestas

42. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.
43. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?
44. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?
45. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? *Ayuda:* Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Problemas de ampliación

Actividad resuelta

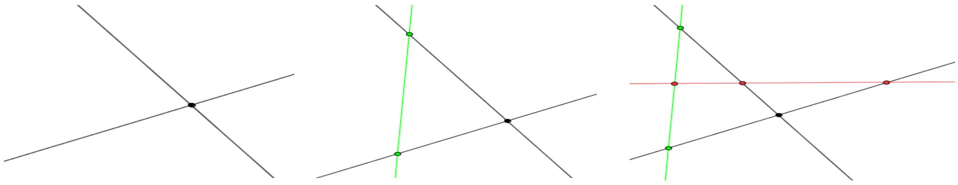
- Si n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos que son todos distintos. Se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones? ¿Cuántos segmentos hay? ¿Cuántos puntos aparecen?

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Para entender bien el problema dibuja rectas en el plano para ir contando puntos, regiones y segmentos

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia consiste en experimentar con casos particulares:



Se observa que:

Con 2 rectas hay 4 regiones, 1 punto y 4 segmentos infinitos (semirrectas).

Con 3 rectas: Al añadir la tercera recta

- Tres de las regiones se han dividido en dos: 4 + 3 = 7 regiones.
- Se añaden los 2 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 1 + 2 = 3.
- Se tienen 5 segmentos más: 3 finitos +2 semirrectas: 4 + 5 = 9.
    - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 4 + 2 = 6

Con 4 rectas: Al añadir la cuarta recta:

- Cuatro de las regiones se han dividido en dos: 7 + 4 = 11 regiones
- Se añaden los 3 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 3 + 3 = 6.
- Se tienen 7 segmentos más: 5 finitos + 2 semirrectas: 9 + 7 = 16.
    - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 6 + 2 = 8

Otra buena estrategia es elaborar una tabla con los resultados obtenidos:

Rectas	Puntos	Regiones	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

En esta fase buscamos expresiones en función del número de rectas, n, para poder calcular el número de puntos, segmentos y regiones según los valores de n.

La fórmula para las **semirrectas** parece la más fácil de obtener porque aparentemente es el doble que el número de rectas y además cada vez que añadimos una recta tenemos 2 semirrectas más. Si llamamos SSn al número de semirrectas que aparecen con n rectas tenemos que $SS_n = 2n$.

Para calcular el número de **segmentos** (incluidas las semirrectas) que se obtienen con n rectas, a partir de los datos de la tabla, parece plausible sugerir que es el cuadrado del número de rectas, es decir, si S_n designa al el número de segmentos (los finitos y las semirrectas) entonces: $S_n = n^2$.

Para determinar el número de **puntos**, en la tabla se observa una ley de recurrencia, el número de puntos, para cualquier número de rectas, es igual al número de puntos anterior más el número de rectas también de la fila anterior. Si denominamos P_n al número de puntos que se tienen al cortarse n rectas entonces: $P_n = P_{n-1} + n - 1$

Por otra parte observamos que si numeramos las rectas con 1, 2, 3, …, n y nombrando los puntos por el par de rectas que determina cada uno tenemos que son: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, n), (2, 3), (2, 4), … (2, n), (3, 4) …

En número de estos pares de elementos coincide con las combinaciones de n elementos tomados de 2 en 2, es decir, $P_n = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

La ley de recurrencia que nos sugiere la tabla para obtener el número de **regiones** que se obtienen cuando se cortan n rectas, es que el número de regiones de cualquier fila de la tabla es igual al número regiones de la fila anterior más el número de rectas de su fila, por tanto si R_n el número de regiones que se obtienen al cortarse n rectas entonces: $R_n = R_{n-1} + n$.

Para obtener una fórmula observamos que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Sumando 1 + 2 + 3 + … + n, obtenemos que: $R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$

y por lo tanto $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$

o bien $R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$

y por consiguiente $R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

En esta fase se trata de justificar o demostrar que todas las conjeturas que hemos realizado son ciertas:

Con respecto al número de **semirrectas** es sencillo de comprobar que es el doble del número de rectas ya que por cada recta tenemos dos semirrectas, es decir: $SS_n := 2n$

El número de **segmentos** es el cuadrado del número de rectas ya que como en cada una de las rectas hay $n - 1$ puntos tenemos n segmentos (finitos y semirrectas) y como hay n rectas se tiene que $S_n = n^2$

Como cada **punto** es la intersección de dos rectas se tiene que $P_n = \binom{n}{2}$, esta fórmula cumple la ley de recurrencia $P_n = P_{n-1} + n - 1$. Aplicando las propiedades de los números combinatorios:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecto a las **regiones** veamos que la hipótesis $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, cumple la ley de recurrencia: $R_n = R_{n-1} + n$.

Si $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, entonces $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$, y por las propiedades de los números combinatorios

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

En esta fase también se puede generalizar el problema: ¿Qué ocurriría si p de las n rectas fueran paralelas? ¿Y si q rectas de las n rectas convergen en un mismo punto?

Actividades propuestas

46. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? *Ayuda:* Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.
47. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? *Ayuda:* Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.
48. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente. ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

RESUMEN

		Ejemplos
Permutaciones	Influye sólo el orden. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Influye el orden y los elementos. Los elementos pueden repetirse. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influye el orden y los elementos. Los elementos NO pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los elementos. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 =$ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ ….	1 1 1 2 1 1 3 3 1 …

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Permutaciones

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?
2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?
3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?
4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?
5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?
6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Variaciones

7. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? *Recuerda*: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
8. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. *Sugerencia*: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente
9. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?
10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?
11. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (*Observa:* Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?
12. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?
13. Con las letras de la palabra "arquetipo" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.
14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Combinaciones

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.
16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?
17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?
18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.
19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.
20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?
21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?
22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?
23. Calcula: a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$ b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$
24. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$ sin calcular cada uno de los números combinatorios?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?
26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?
27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?
28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $(\frac{x}{2} - \sqrt{2x})^3$.
29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ b) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$ c) $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$ d) $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

30. Escribe el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2} + n$ c) $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$
33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1 - 5x)^9$.
34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?
35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Problemas

36. En "*Curiosidades y Revista*" tienes el problema de *Buteo*. Con 7 discos y 6 letras en cada disco, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? *Ayuda:* En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.
37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?
38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?
39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?
40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?
41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?
42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?
43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?
44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?
45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?
46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?
47. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? *Ayuda*: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler: C + V = A + 2

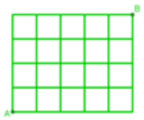
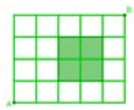
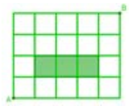
Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

48. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?
49. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?
50. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.
51. Calcula *x* en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$
52. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.
53. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?
54. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?
55. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?
56. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?
57. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?
58. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?
59. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?
60. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}
    a) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?
    b) ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2?
    c) Calcula la suma de todos estos últimos números.
61. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "puerta" que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?
62. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?
63. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?
64. Con las letras de la palabra "argumento" ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.
65. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?
66. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?
67. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?
68. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?
69. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

70. Con las letras de la palabra “saber”, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras “corte”, “puerta” y “Alberto”.
71. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, … ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?
72. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?
73. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?
74. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?
75. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba?

    b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

    c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

    d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con *n* caminos en cada lado?

    e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con *m* caminos verticales y *n* horizontales?

AUTOEVALUACIÓN

1. Tienes nueve monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?: a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?: a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7? a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?: a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutaciones de n+4 elementos dividido por permutaciones de n+1 elementos es igual a:

   a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\dfrac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/C_{n+4,n+1}$

6. Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

   a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \dfrac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \dfrac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = \dfrac{6!}{3!}$

7. Indica qué afirmación es falsa; a) 0! = 1; b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$;c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

8. El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ es: a) 0, 1, y 1; b) 0, 9 y 4; c) 1, 1 y 4; d) 5, 9 y 4

9. El valor de x, distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es: a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ es: a) $\binom{7}{3}$; b) 1; c) $\binom{7}{4}$; d) $V_{7,4}$

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero