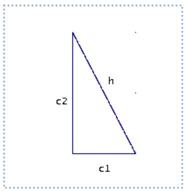
CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA DEL PLANO Y DEL ESPACIO. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES.

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras en el plano

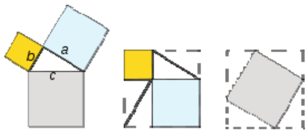


Ya sabes que:

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$



Demostración

Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 *cm* y 8 *cm*, su hipotenusa vale 10 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\ cm.$$

Actividades resueltas

- *Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:*

  Solución: Por el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12) \times (13+12)} = \sqrt{25} = 5\ dm$

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.
2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m* c) 2 *dm* y 5 dm d) 23,5 *km* y 47,2 *km*.
   Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.
3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
   a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m* c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21,2 *km* y 11,9 *km*
4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.
5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.

Teorema de Pitágoras en el espacio

Ya sabes que:

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.

Demostración:

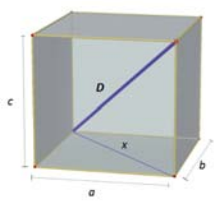
Sean *a*, *b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*.

Si *x* es la diagonal de este rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triángulo de lados *D*, *x*, *a* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$

Y teniendo en cuenta la relación que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Actividades resueltas

- *Calcula la longitud de la diagonal de un ortoedro de aristas 7, 9 y 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16{,}55$ cm.

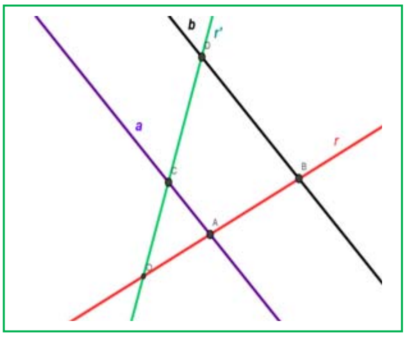
- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 7 cm y 9 cm y su altura 12 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 11 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm. Luego la barra más corta cabe apoyada en la base. La diagonal del ortoedro vimos en la actividad anterior que mide 16,55, luego la segunda barra si cabe, inclinada, pero la tercera, no.

Actividades propuestas

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

1.2. Teorema de Tales



Ya sabes que:

Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en posición *Tales*. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 20 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 5 cm y OC mide 3 cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos: $\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide 1 m, si la sombra de un árbol mide 12 m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide 0,8 m, ¿cuánto mide el árbol?*

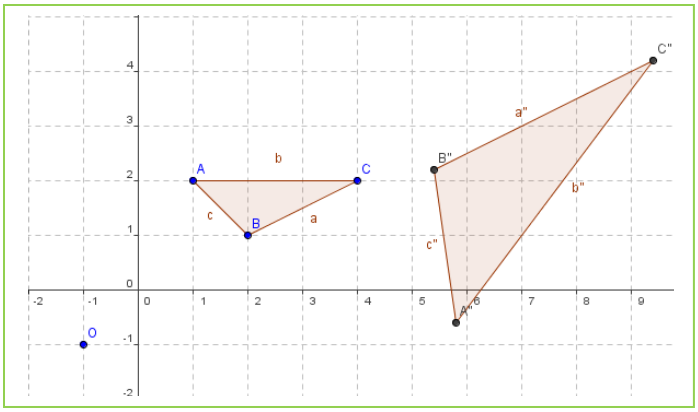
Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0,8}{1}=\frac{12}{x}$. Por tanto *x* = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0,2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?
9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.
10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?
11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

1.3. Aplicación informática para la comprensión de la semejanza de triángulos



- *Utiliza Geogebra para analizar la semejanza entre triángulos.*

- Abre una nueva ventana de *Geogebra*, comprueba que aparecen los **Ejes** y la **Cuadrícula**.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define los puntos *A* (1, 2), *B* (2, 1) y *C* (4, 2).
- Utiliza **Polígono** para dibujar el triángulo *ABC*.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–1, –1), el programa lo llama *D*. Con el botón derecho del ratón y la opción **Renombra**, llámalo *O*.
- Utiliza la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, para dilatar el polígono *ABC* desde el punto *O,* con factor 2. Se obtiene el triángulo *A'B'C'*.
- Con la herramienta **Refleja objeto en recta**, dibuja el simétrico del triángulo *A'B'C'* con respecto al segmento *a* del triángulo *ABC*. Se obtiene el triángulo *A''B''C''*.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

- Selecciona el polígono *A'B'C'* en la Ventana algebraica o en el área de trabajo, y con el botón derecho del ratón desactiva la opción **Expone objeto**, el triángulo *A'B'C'* queda oculto. Observa que puedes volver a visualizar activando esta opción. Oculta de la misma forma los puntos *A'*, *B'* y *C'*.
- Para que las medidas aparezcan con 5 decimales, activa **Posiciones decimales** en el menú **Opciones** y elige 5.
- Desplaza con el puntero el punto *C*, de modo que el triángulo *ABC* siga siendo un triángulo. Se modifican ambos triángulos, pero se mantienen sus propiedades, siguen siendo semejantes.

Actividades propuestas

12. Justifica que los triángulos *ABC* y *A''B''C''* son semejantes. Calcula la razón de semejanza y la razón entre sus áreas. Busca una relación entre la razón de semejanza y la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes.
13. ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *A''B''C''*? Observa en la **Ventana algebraica** las longitudes de sus lados y los valores de sus áreas. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas?
14. Dibuja distintos pentágonos y hexágonos que no sean regulares y con la herramienta **Dilata objeto desde punto indicado, según factor**, construye otros semejantes.
    a) Argumenta por qué son semejantes.
    b) Calcula en cada caso la razón de semejanza y la razón entre sus áreas.
    c) Investiga cómo puedes hallar la razón entre las áreas de polígonos semejantes a partir de la razón de semejanza.

1.4. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

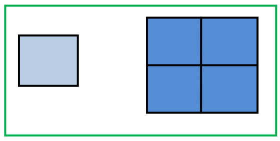
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se la llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es k^2.

Ejemplo:

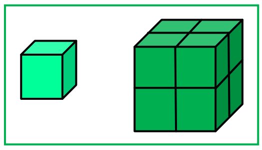


- Observa la figura del margen. Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces entre sus volúmenes es: k^3.

Ejemplo:



- Observa la figura del margen. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1{,}5$ *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

15. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
16. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
17. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2.1. Longitudes, áreas y volúmenes en prismas y cilindros

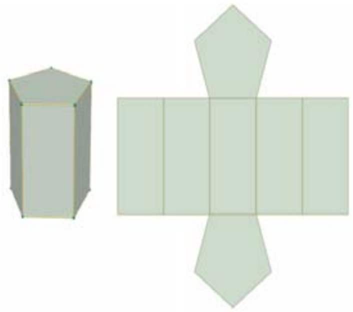
Recuerda que:

Prismas

Un ***prisma*** es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

Áreas lateral y total de un prisma.

El **área lateral** de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.



Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =
= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

El **área total** de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resueltas

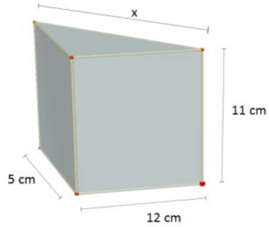
- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*

Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \quad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

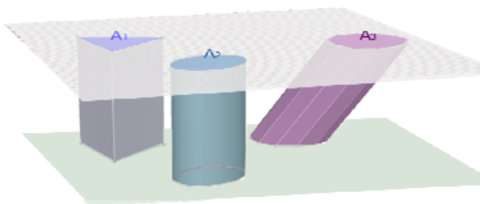


Volumen de un cuerpo geométrico. Principio de *Cavalieri*.

Recuerda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

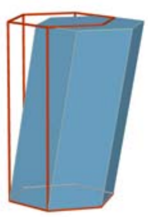
"Si dos cuerpos tiene la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"



Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.

Volumen de un prisma y de un cilindro



El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por V este volumen, A_B el área de la base y h la altura:

$$\text{Volumen prisma} = V = A_B \cdot h$$

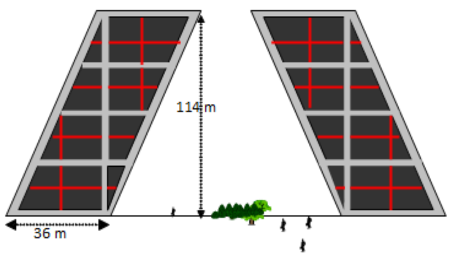
También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos R al radio de la base, A_B el área de la base y h la altura, el volumen se escribe:

$$\text{Volumen cilindro} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Actividades resueltas

- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.*

Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744\ m^3$$

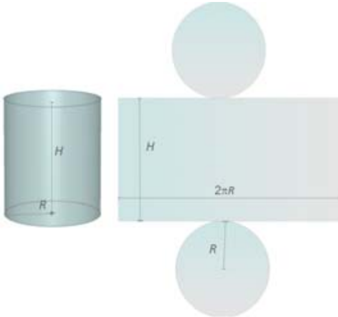
Actividades propuestas

18. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.
19. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.

Áreas lateral y total de un cilindro.

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es: A_L = Longitud de la base · Altura = $(2\pi R)\cdot H = 2\pi RH$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

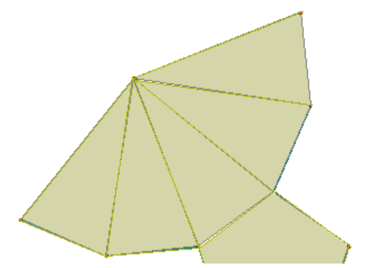
2.2. Longitudes, áreas y volúmenes en pirámides y conos

Recuerda que:

Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares.

Una **pirámide** es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide b, el apotema de la pirámide es Ap y la base tiene n lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n\cdot\frac{b\cdot Ap}{2} = \frac{n\cdot b\cdot Ap}{2}$$

y como $n\cdot b$ = Perímetro de la base

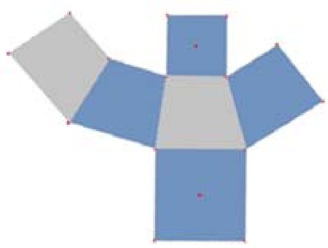
$$A_L = \frac{\text{Perímetro de la base . Apotema de la pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base}}{2}\cdot\text{Apotema}$$

El área lateral de una pirámide es igual al semi-perímetro por el apotema.

El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Si B es el lado del polígono de la base mayor, b el lado de la base menor, n el número de lados de las bases y Ap es la altura de una cara lateral

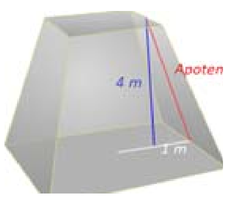
$$\text{Área lateral} = A_L = n\,.\frac{(B+b)\,.\,Ap}{2} = \frac{(P_B+P_b)\,.\,Ap}{2} =$$

$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases . Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas



Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.

En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B+P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44\ m^2$$

Actividades propuestas

20. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.
21. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.
22. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
23. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.
24. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2 y la arista de la base mide 4 cm, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

Áreas lateral y total de un cono.

Recuerda que:

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora *R* al radio de la base y *G* a la generatriz. El área lateral del cono es el área de sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A\ Lateral\ del\ cono}{Longitud\ de\ arco\ correspondiente\ al\ sector} = \frac{A\ total\ del\ círculo\ de\ radio\ G}{Longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Actividades resueltas

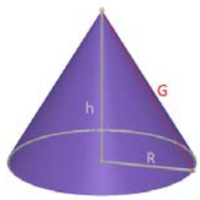
- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*

Calculamos en primer lugar el radio *R* de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3\ dm.$$

Calculamos ahora la generatriz *G*:

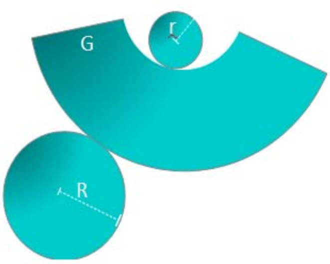
$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37\ dm.$$



Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79\ dm^2$.

Áreas lateral y total de un tronco de cono.

Recuerda que:



Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando *R* y *r* a los radios de las bases y *G* a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi\ R + 2\pi\ r\ )G}{2} = \frac{2(\pi\ R + \pi\ r)G}{2} = (\pi\ R + \pi\ r)G$$

Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

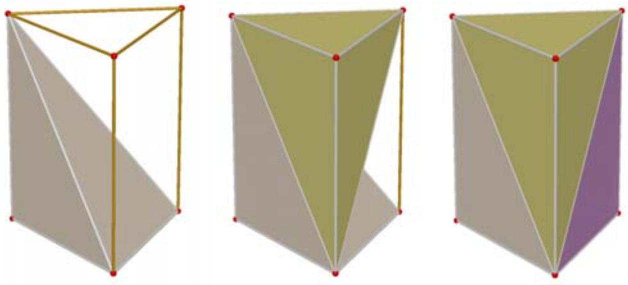
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Volumen de una pirámide y de un cono.

Recuerda que:

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.



$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

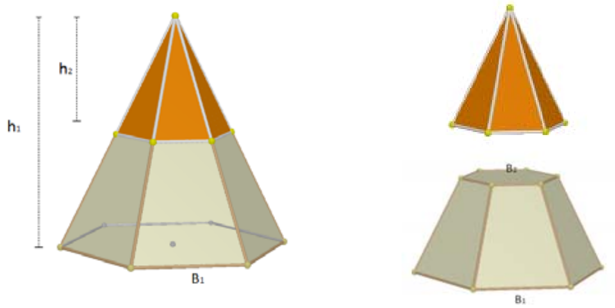
Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono.

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:



$$\textit{Volumen tronco de pirámide} = V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$

El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.*

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

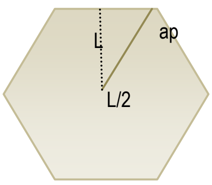


Figura 1

Para cada uno de estos hexágonos: $L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm$; $ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$

Como segundo paso, calculamos el apotema del tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\ cm$$

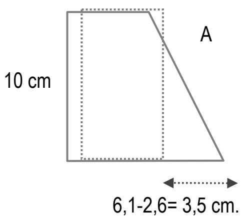
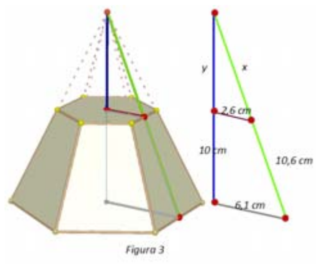


Figura 2

En tercer lugar, calculamos el valor de los segmentos *x*, *y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos:



Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow$

$$6{,}1x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$$

Entonces el apotema de la pirámide grande es 10,6 + 7,9=18,5 cm y el de la pequeña 7,9 *cm*. Y aplicando el teorema de *Pitágoras*: $y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5\ cm$

Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 *cm* y 7,5 *cm.*

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

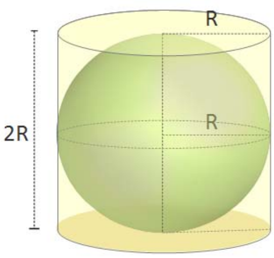
$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18{,}5 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7{,}9 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066{,}5}{6} = 2412{,}25\,cm^3$$

Actividades propuestas

25. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?
26. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
27. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.
28. La circunferencia de la base de un cono mide 6,25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.

2.3. Longitudes, áreas y volúmenes en la esfera

Recuerda que:



Área de una esfera.

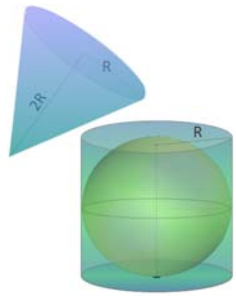
La esfera **no** es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.

Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.



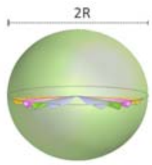
Actividades propuestas

29. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:
    a) La longitud de la circunferencia máxima;
    b) El área de la esfera.

Volumen de la esfera

Volvamos a pensar en una esfera de radio *R* y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio *R* y del cono de altura *2R* y radio de la base *R*, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio *R*. Por tanto:



$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \text{Volumen}_{\text{cilindro}} - \text{Volumen}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

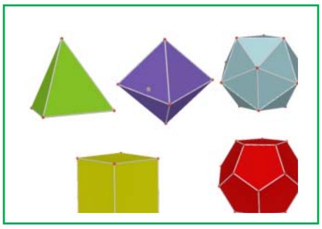
Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.

Actividades propuestas

30. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
    a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
    b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
31. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

2.4. Longitudes, áreas y volúmenes de poliedros regulares

Recuerda que:



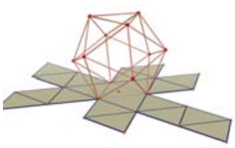
Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales.

Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro

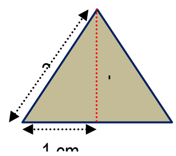
Área total de un poliedro regular.

Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.



Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos la altura *h* que divide a la base en dos segmentos iguales: $h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$ $h = \sqrt{3}$ *cm*. Luego el área de una cara es: $A_{\text{triángulo}} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 y por tanto Área icosaedro = 20 ‾ cm^2

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos y vectores

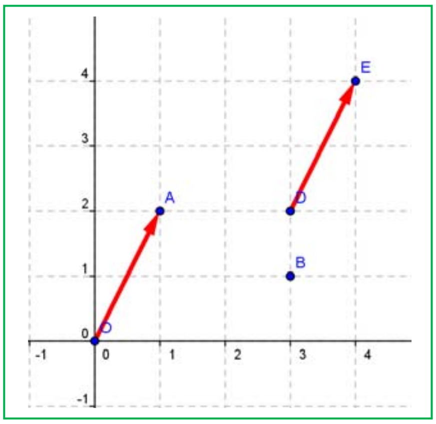
En el plano

Ya sabes que

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano.**

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son un par ordenado de números reales (*x*, *y*), siendo "*x*" la primera coordenada o **abscisa** e "*y*" la segunda coordenada u **ordenada.**

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2)$ y $E(e_1, e_2)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, *DE*, vienen dadas por $DE = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Ejemplo:

- Las coordenadas de los puntos, de la figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) y *E*(4, 4)

Las componentes del vector *DE* son

$$DE = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

Las componentes del vector *OA* son:

$$OA = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2).$$

DE y *OA* son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2).

En el espacio de dimensión tres

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son una terna ordenada de números reales (*x*, *y, z*), siendo "*z*" la altura sobre el plano *OXY*.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ y $E(e_1, e_2, e_3)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, *DE*, vienen dadas por $DE = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Ejemplo:

- Las coordenadas de puntos en el espacio son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4)

Las componentes del vector *DE* son: *DE* = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3)

Las componentes del vector *OA* son: *OA* = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE y *OA* son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2, 3)

Actividades propuestas

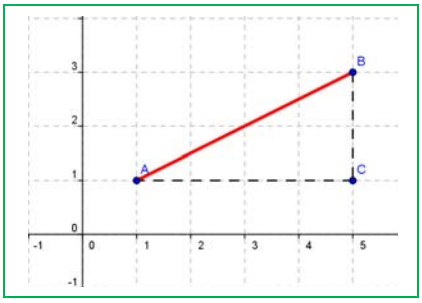
32. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos: *O*(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: *DE* y *OA*.
33. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

3.2. Distancia entre dos puntos

En el plano

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ejemplo:

Por el Teorema de *Pitágoras* sabemos que la distancia al cuadrado entre los puntos *A* = (1, 1) y *B* = (5, 3) es igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

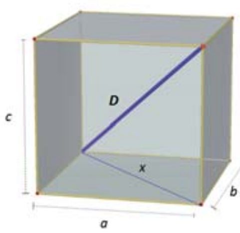
ya que el triángulo *ABC* es rectángulo de catetos 4 y 2.

Luego $D \approx 4{,}47$.

En el espacio de dimensión tres

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Ejemplo:

La distancia al cuadrado entre los puntos *A* = (1, 1, 2) y *B* = (5, 3, 8) es igual, por el Teorema de *Pitágoras* en el espacio, a

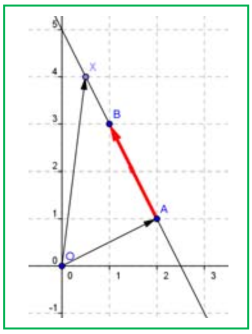
$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Luego $D \approx 7{,}5$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

34. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$.
35. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$.
36. Calcula la longitud del vector de componentes $\mathbf{u} = (3, 4)$
37. Calcula la longitud del vector de componentes $\mathbf{u} = (3, 4, 1)$.
38. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $O(0, 0)$ y $A(3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.
39. Dibuja un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(3, 3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
40. Sea $X(x, y)$ un punto genérico del plano, y $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.
41. Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del espacio, y $O(0, 0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.



3.3. Ecuaciones y rectas y planos

Ecuaciones de la recta en el plano.

Ya sabes que la **ecuación de una recta** en el plano es: $y = mx + n$. Es la expresión de una recta como función. Esta ecuación se denomina **ecuación explícita** de la recta.

Si pasamos todo al primer miembro de la ecuación, nos queda una ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** de la recta.

Ecuación vectorial: También una recta queda determinada si conocemos un punto: $A(a_1, a_2)$ y un vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector OX puede escribirse como suma del vector OA y de un vector de la misma dirección que $\mathbf{v}$, $t\mathbf{v}$. Es decir:

$$OX = OA + t\mathbf{v},$$

donde a t se le denomina parámetro. Para cada valor de t, se tiene un punto distinto de la recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

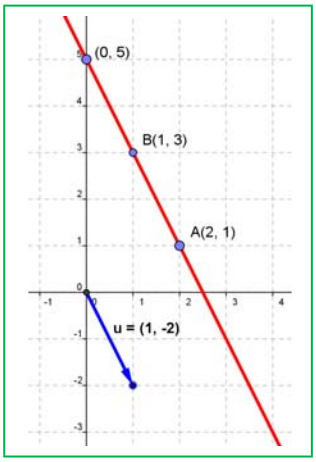
que es la **ecuación paramétrica** de la recta.

Actividades resueltas

- *De la recta de ecuación explícita* $y = -2x + 5$, conocemos la pendiente, -2, y la ordenada en el origen, 5. La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general $(1, m)$, y en este ejemplo: $(1, -2)$. La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el $(0, n)$, y en este ejemplo, $(0, 5)$. La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

Su ecuación implícita es: $-2x - y + 5 = 0$.



- *Escribe la ecuación paramétrica de la recta* que pasa por el punto $A(2, 1)$ y tiene como vector de dirección $\mathbf{v} = (1, 2)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación de la recta* que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, 3)$. Podemos tomar como vector de dirección el vector $AB = (1 - 2, 3 - 1) = (-1, 2)$, y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

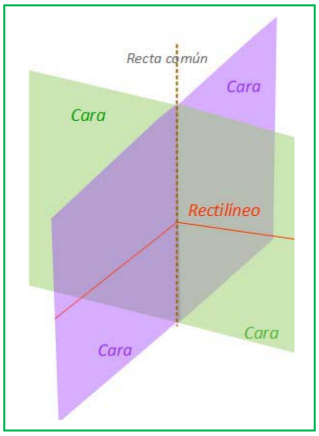
La recta es, en los tres ejemplos, la misma, la de la figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "y" llegamos a una única ecuación explícita.

Actividades propuestas

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.



La ecuación **implícita de un plano** es: $ax + by + cz + d = 0$. Observa que es parecida a la ecuación implícita de la recta pero con una componente más.

La **ecuación vectorial de una recta** en el espacio es: $OX = OA + tv$, aparentemente igual a la ecuación vectorial de una recta en el plano, pero al escribir las coordenadas, ahora puntos y vectores tiene tres componentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta también puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano.

Actividades resueltas

- *Escribe la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección de la recta el vector *AB* = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) y como punto, por ejemplo el *A*, entonces:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar las ecuaciones de dos planos que se corten en dicha recta, eliminando *t* en dos ecuaciones. Por ejemplo, sumando la primera con la tercera se tiene: $x + z = 4$. Multiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y restando, se tiene: $5x – 2y = 1$. Luego otra ecuación de la recta, como intersección de dos planos es:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B de la actividad anterior, y C(2, 6, 2).*

Imponemos a la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase por los puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$
$3a + 7b + c + d = 0$
$2a + 6b + 2c + d = 0$.

Restamos a la segunda ecuación la primera, y a la tercera, también la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$
$2a + 5b – 2c = 0$
$a + 4b – c = 0$

Multiplicamos por 2 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$
$a + 4b – c = 0$
$3b = 0$

Ya conocemos un coeficiente, $b = 0$. Lo sustituimos en las ecuaciones:

$a + 3c + d = 0$
$a – c = 0$

Vemos que $a = c$, que sustituido en la primera: $4c + d = 0$. Siempre, al tener 3 ecuaciones y 4 coeficientes, tendremos una situación como la actual, en que lo podemos resolver salvo un factor de proporcionalidad. Si $c = 1$, entonces $d = –4$. Luego $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = –4$. Es el plano de ecuación: $x + z = 4$

plano que ya habíamos obtenido en la actividad anterior.

Actividades propuestas

43. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2, 5) y *B*(3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.
44. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.
45. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.
46. En el cubo de diagonal *O*(0, 0, 0) y *A*(6, 6, 6) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Algunas ecuaciones

Actividades resueltas

- *¿Qué puntos verifican la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$?

¡Depende! Depende de si estamos en un plano o en el espacio.

En el plano, podemos ver la ecuación como que el cuadrado de la distancia de un punto genérico $X(x, y)$ al origen $O(0, 0)$ es siempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar de todos los puntos del plano que distan 1 del origen es la circunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 1.

En el espacio el punto genérico $X(x, y, z)$ tiene tres coordenadas, y $O(0, 0, 0)$, también. No es una circunferencia, ni una esfera. ¿Y qué es? Lo que está claro es que si cortamos por el plano OXY, ($z = 0$) tenemos la circunferencia anterior. ¿Y si cortamos por el plano $z = 3$? También una circunferencia. Es un cilindro. El cilindro de eje, el eje vertical, y de radio de la base 1.

- *¿Qué puntos verifican la ecuación* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ahora sí. Sí podemos aplicar la distancia de un punto genérico $X(x, y, z)$ al origen $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

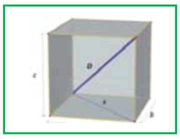
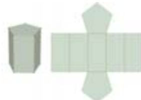
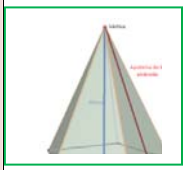
Es la ecuación de la superficie esférica de centro el origen y radio 1.

Actividades propuestas

47. Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.
48. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.
49. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.
50. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(2, 5)$ y radio 2.
51. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5{,}4$.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. Si la recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2\,Área_{Base}$; $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volumen = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volumen = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuaciones de la recta en el plano	Ecuación explícita: $y = mx + n$.; Ecuación implícita: $ax + by + c = 0$; Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.	Ecuación implícita de un plano: $ax + by + cz + d = 0$ Ecuación paramétrica de una recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

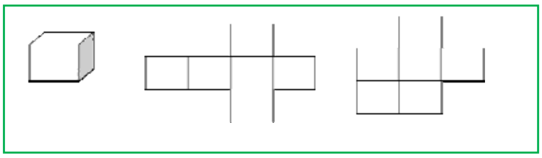
1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.
2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.
3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.
4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?
6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?

7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?
8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.
9. Si un ascensor mide 1,2 *m* de ancho, 1,6 *m* de largo y 2,3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?
10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?
11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 *cm*.
12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.
13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

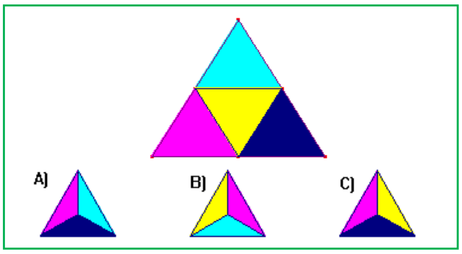
Longitudes, áreas y volúmenes

16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
18. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?



19. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo
20. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.
26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.
27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.
28. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.
29. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

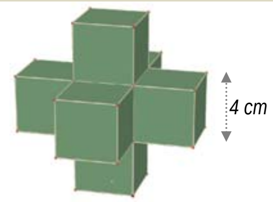
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

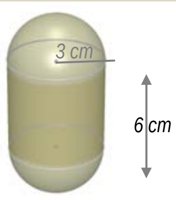
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0,4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?
32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?
33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?

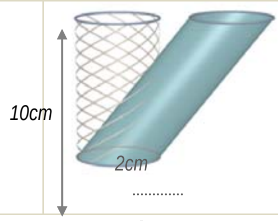
34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.
35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?
36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

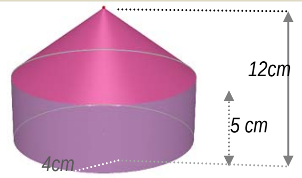
37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.
38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.
40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18,3 *m*.
42. Un ortoedro tiene 0,7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.
44. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
45. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
46. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.
47. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.
48. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?
49. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

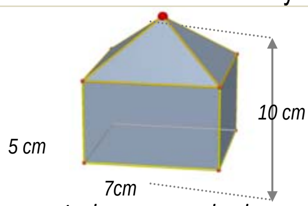




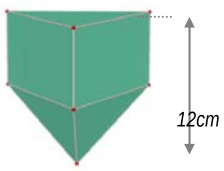




50. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada



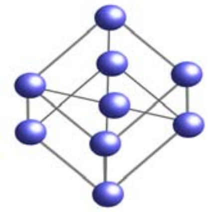
Tetraedro de 5cm de arista


Octaedro de 6cm de arista

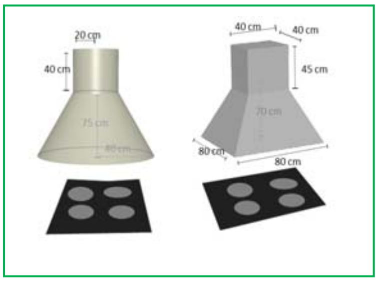

Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

51. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
52. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/*m*^{2}. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.
54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.
55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?



56. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
    a) ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
    b) ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?
57. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?



58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?
59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 *m* el nivel del agua?
60. El precio de las tejas es de 12,6 €/*m*^{2} ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?
61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 *cm*^{3} de volumen?

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?
65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24 g/cm^3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus base miden 2,5 *cm* y 1,2 *cm*, y su altura 3 *cm*?
66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.
67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.
68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 *cm*^{3}, y de área lateral 240 *cm*^{2}.
69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.
70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?
73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0,5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?
74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?
75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos *cm*^{3} de helado contiene?

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3) y *B*(2, 5).
77. Calcula la distancia entre los puntos *A*(7, 3, 4) y *B*(2, 5, 8).
78. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5).
79. Calcula la longitud del vector de componentes *u* = (4, 5, 0).
80. El vector *u* = (4, 5) tiene el origen en el punto *A*(3, 7). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?
81. El vector *u* = (4, 5, 2) tiene el origen en el punto *A*(3, 7, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $A(2, 3)$ y $C(5, 6)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.
83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.
84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.
85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.
86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y tiene como vector de dirección $u = (4, 5)$. Represéntala gráficamente.
87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.
88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, 6)$ y $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.
89. En el cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(5, 5, 5)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.
90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.
91. Escribe la ecuación de la esfera de centro $A(2, 7, 3)$ y radio 4.
92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.
93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(3, 7)$ y radio 3.
94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $7{,}5\sqrt{3}$ m^3

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0,5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF